UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Simulación de Sistemas
grado en ingeniería informática

Práctica 4

Modelos de Simulación Dinámicos Continuos

Autor
José María Sánchez Guerrero

Rama
Computación y Sistemas Inteligentes

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Curso 2019-2020

Índice

1. Introducción

En esta práctica nos enfrentamos al modelo de ecosistema de Lotka-Volterra, el cual pretende estudiar el crecimiento entre dos especies relacionadas entre sí. De estas dos, una de ellas serán los **depredadores** (x) y la otra las **presas** (y).

Hay varias cosas a tener en cuenta en el modelo. Por ejemplo, en ausencia de presas, la población de depredadores disminuye; mientras que en ausencia de depredadores, la población de presas aumenta. Tampoco tendremos factores de autoinhibición. Las ecuaciones de crecimiento de ambas poblaciones se pueden describir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a_{11}x - a_{12}xy$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = a_{21}xy - a_{22}y$$

Los valores de a_{11} y a_{22} representan las tasas de crecimiento de cada una de las especies, y por otro lado, $a_1 2$ y $a_2 1$ son los factores de inhibición mutuos teniendo en cuenta a la otra población.

2. Programar modelo

El modelo anterior estará implementado en el archivo *depredadores.cpp* adjuntado con la memoria. El programa partirá del pseudocódigo proporcionado y además se adaptará a las especificaciones comentadas. Dispondrá de dos métodos de derivación diferentes, uno sencillo utilizando Euler (aunque no sea recomendable), y otro utilizando el método de Runge-Kuta.

Los parámetros que le podremos pasar al programa será los 4 a_{ij} comentados y los valores iniciales para los depredadores y las presas. Junto con este programa, también voy a adjuntar un *script* en python que, utilizando este modelo y los parámetros deseados, nos muestra una gráfica con la evolución de la población entre el instante inicial y el final.

A continuación, vamos a realizar varias pruebas de nuestro modelo para comprobar su funcionamiento.

3. Experimentación inicial

Podremos estimar las constantes de las ecuaciones con ayuda de las siguientes suposiciones:

- Cada pareja de conejos engendra un promedio de 10 crías por año.
- Cada zorro captura un promedio de 25 conejos por año.
- La edad promedio de los zorros es de 5 años (20 % de los zorros muere anualmente).
- En media, el número medio de zorros jóvenes que sobreviven es igual al número de conejos dividido por 25.

Con esto tenemos que los valores iniciales para cada una de las constantes son: $a_{11} = 5$, $a_{12} = 0.05$, $a_{21} = 0.0004$ y $a_{22} = 0.2$. Las poblaciones iniciales para los depredadores y las presas serán las siguientes:

$$depredadores(x) = \frac{a_{11}}{a_{12}} = 100$$

$$presas(y) = \frac{a_{22}}{a_{21}} = 500$$

Utilizaremos el método de integración de Runge-Kuta, junto con un intervalo de cálculo de $h = 0.1$. El resultado ha sido el siguiente:

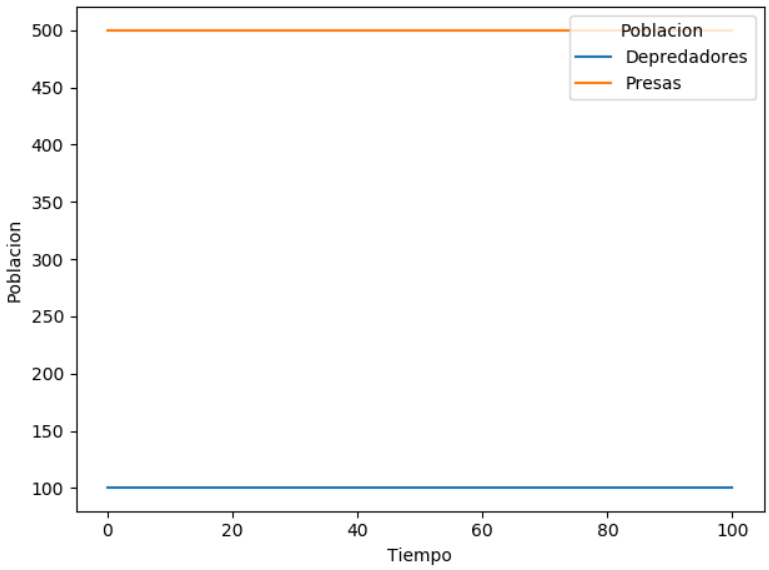

Figura 1: depredadores x->100, presas y->500

Como podemos observar, estos valores mantienen el sistema constante. Hemos conseguido el equilibrio perfecto, ya que ninguno de los niveles de la población están cambiando, es decir, el resultado de ambas derivadas en igual a 0.

Vamos a distanciar progresivamente los valores de x e y para ver cómo evoluciona la población en esos casos. Probaremos aumentando las presas en 10, disminuyendo los depredadores en 10, haciendo las dos anteriores juntas, y aumentando en 50 las presas y disminuyendo en 50 los depredadores. Las gráficas resultantes han sido las siguientes:

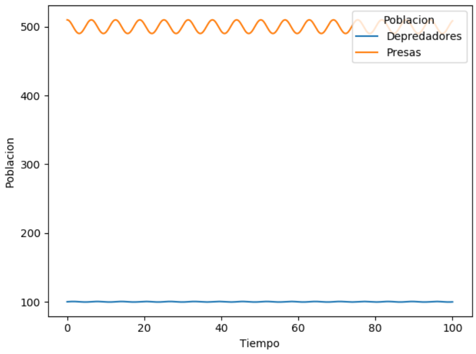

Figura 2: x=100, y=510

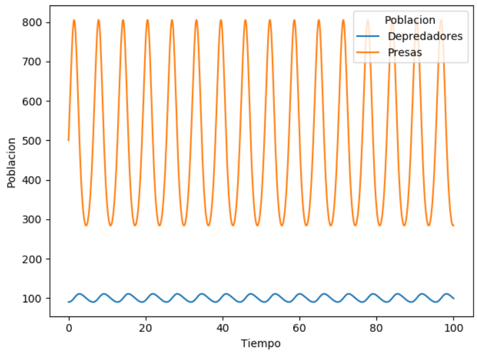

Figura 3: x=90, y=500

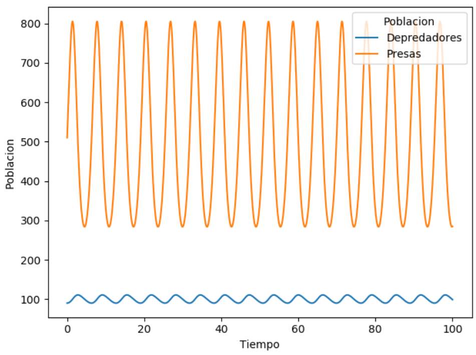

Figura 4: x=90, y=510

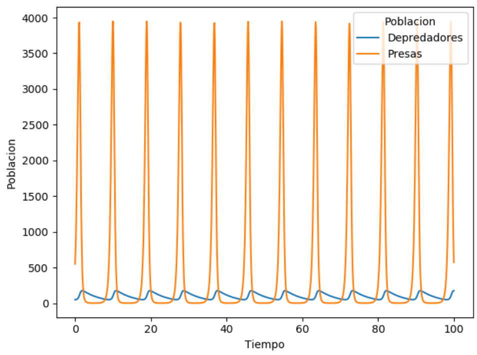

Figura 5: x=50, y=550

En estos casos, podemos ver cómo las poblaciones van oscilando e intentando mantener un equilibrio. El número de depredadores no puede crecer sin presas, mientras que el de presas no dejará de crecer. Sin embargo, cuando un valor está cerca del otro, disminuirá el número de presas ante el crecimiento de los depredadores, ya que las primeras son el alimento de los segundos.

También podemos ver cómo aumentar o disminuir la cantidad de presas no influye tanto como aumentar o disminuir la cantidad de depredadores. Si nos fijamos en las figuras 3 y 4, son prácticamente iguales, ya que la única diferencia entre ellas han sido 10 presas; mientras que entre las gráficas 2 y 4, con una diferencia de 10 depredadores, vemos que son completamente distintas.

Por otro parte, si nos fijamos en la última gráfica, vemos que no hay una clara oscilación. Esto se debe a los valores iniciales que les hemos dado están muy alejados unos de otros y que llegue un punto en el que no haya interacción presa-depredador. Cuando la interacción presa-depredador está ausente, el número de presas aumenta exponencialmente, mientras que el de zorros disminuye exponencialmente (y viceversa). Por lo tanto, no es necesario considerar la presencia de oscilación.

En nuestro caso, como el número de presas al principio es bastante alto, aumenta exponencialmente, lo que provoca un aumento gradual en el número de depredadores. Como resultado, se produce una rápida disminución en el número de presas y una disminución exponencial en el número de depredadores.

4. Comparación en el plano x-y

En el apartado anterior hemos comparado la población de ambas especies en función del tiempo, y obteniendo así una gráfica con las líneas correspondientes a cada una de ellas. Pero, ¿y si las visualizamos la evolución en una representación gráfica de los valores de x frente a los de y, es decir, en el plano x-y?

Para ello vamos a utilizar el mismo *script* utilizado anteriormente, pero esta vez cambiando los datos a mostrar. A continuación, mostramos el resultado de las mismas ejecuciones anteriores e intentaremos sacar alguna conclusión a partir de ellas.

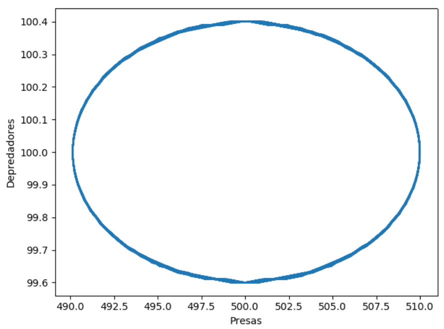

Figura 6: x=100, y=510

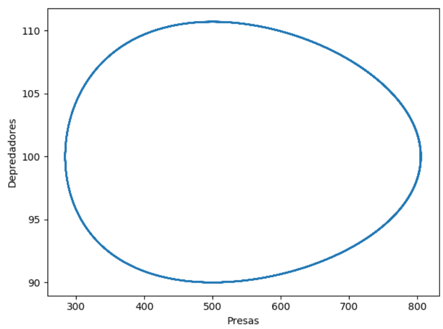

Figura 7: x=90, y=500

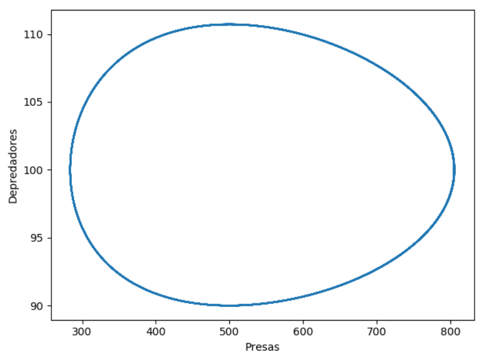

Figura 8: x=90, y=510

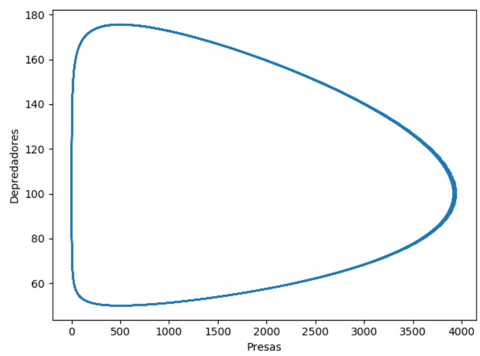

Figura 9: x=50, y=550

Como podemos ver, para todos los casos se produce una curva cerrada. La relación implícita entre las variables viene dada por la siguiente ecuación $V = \delta x - \gamma ln(x) + \beta y - \alpha ln(y)$, donde V es una constante que depende de las condiciones iniciales y se conserva en cada curva.

En cuanto a la diferencia entre las curvas con unos valores iniciales y otros, podemos ver cómo, a medida que distanciamos los valores, la curva deja de ser tan circular y pasa a ser más irregular.

También podemos observar que en cada ciclo, la población de presas se reduce a números extremadamente bajos, mientras que la población de depredadores sigue siendo considerable hasta en su nivel más bajo. En condiciones reales, esta variabilidad en la población junto con factores externos o el ciclo de vida de las presas, podría hacer que la especie se extinga, y en consecuencia, también los depredadores (si esta es su principal o única fuente de alimento).

5. Experimentación cambiando las constantes a_{ij}

En este apartado vamos a cambiar uno a uno estos valores para ver cómo afectan al modelo. Estudiaremos varios gráficos, pero vamos a comenzar con una población inicial de 100 depredadores y de 500 presas, ya que es el modelo en equilibrio y donde más se van a notar los cambios. Vamos a incrementar el valor de a_{12}, el cual representa que los depredadores son cazadores más eficientes (capturan más presas), pasándolo de 0.05 a 0.075. Este ha sido el resultado:

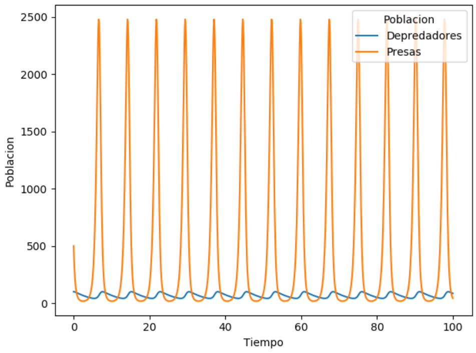

Figura 10: x=100, y=500, a_{12}=0.075

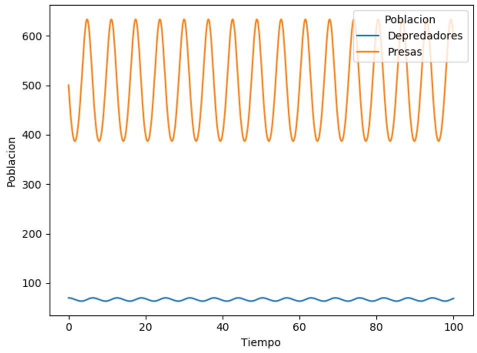

Figura 11: x=70, y=500, a_{12}=0.075

Como podemos ver, un aumento de un 50 % de eficiencia a la hora de cazar hace que el modelo se desestabilice bastante, llegando casi a perder por completo la oscilación (la interacción presa-depredador). En la imagen de la derecha podemos ver cómo, con unos depredadores eficientes, podemos compensar una falta de estos en la población inicial, manteniendo el sistema bastante equilibrado.

Ahora vamos a incrementar el valor de a_{11}, el cual indica que las presas tienen una tasa de crecimiento más rápida, pasándolo de 5 crías por pareja a 6. Este ha sido el resultado:

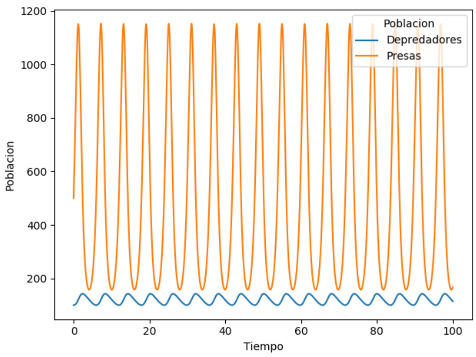

Figura 12: x=100, y=500, a_{11}=6

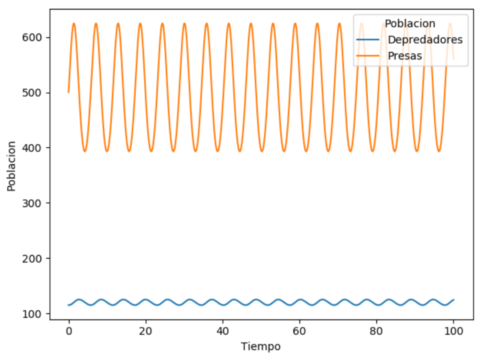

Figura 13: x=115, y=500, a_{11}=6

Como podemos ver, tenemos una situación muy similar a la anterior, ya que también desestabilizamos bastante el modelo. No obstante, en este caso ha sido al contrario, ya que estamos aumentando el número de conejos al año. En la imagen de la derecha podemos ver cómo mantenemos el sistema más o menos equilibrado, pero aumentando el número de depredadores inicial, en vez de reducirlo.

A continuación, vamos a probar con el parámetro a_{22}, el cual representa la longevidad de los depredadores. Vamos a proceder de la misma forma que hemos hecho en los casos anteriores, y modificando este parámetro de 0.2 a 0.1 (es decir, disminuyendo el porcentaje de zorros que mueren al año).

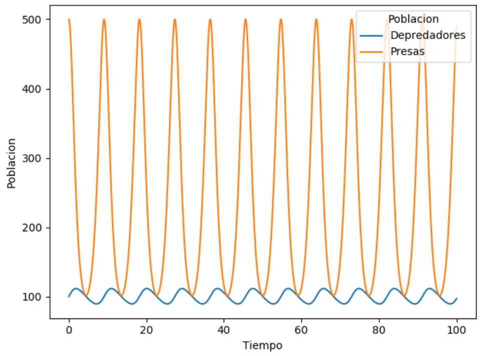

Figura 14: x=100, y=500, a_{22}=0.1

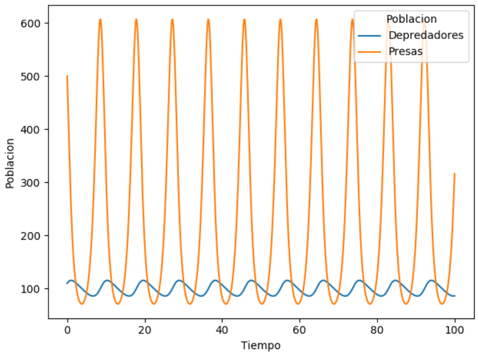

Figura 15: x=110, y=500, a_{22}=0.1

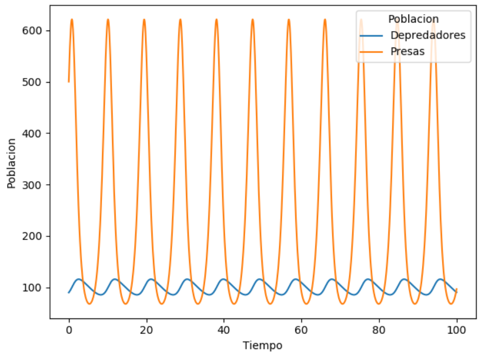

Figura 16: x=90, y=500, a_{22}=0.1

En este caso, vemos que el resultado es distinto de los anteriores. Si que es verdad que el modelo se desestabiliza con los parámetros por defecto, pero en este caso, al intentar estabilizarlo tanto poniendo menos depredadores (sería lo lógico al aumentar su longevidad) como poniendo más, vemos que el sistema pierde la interacción presa-depredador.

Por último, veremos que sucede modificando el último parámetro a_{21}, el cual está relacionado con el valor nutricional de las presas, de forma cuanto mayor es este valor, menos presas necesita cada depredador para sobrevivir. Vamos a cambiar este valor de 0.0004 a 0.001 para que necesiten menos presas y ver que sucede:

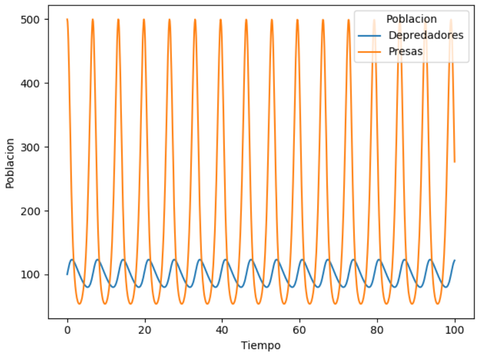

Figura 17: x=100, y=500, a_{21}=0.001

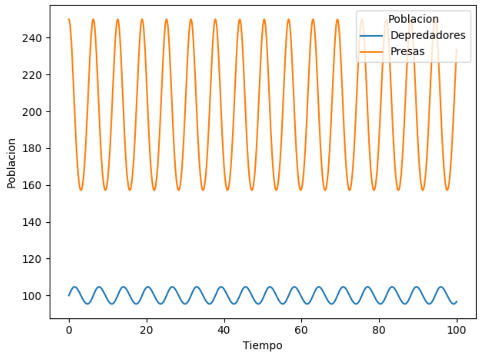

Figura 18: x=100, y=250, a_{21}=0.001

Vemos que este valor, pese a ser muy pequeño, es bastante importante. Como podemos ver en la primera imagen hemos desestabilizado el modelo por completo, y hemos conseguido estabilizarlo utilizando la mitad de presas iniciales que anteriormente, con 250.

Como conclusión, podemos comentar que pese a tener un buen sistema de simulación, preciso y que refleje bien los datos, hay que tener muy en cuenta los parámetros introducidos en él. Es decir, si no hacemos un esudio previo de cómo funciona cada especie y sus relaciones entre sí, podemos equivocarnos bastante al realizar la simulación y obtener valores indeseados. También tenemos que tener en cuenta que, en la vida real, habrá factores externos al sistema o situaciones (como la extinción de una especie) que pueden cambiar por completo el resultado obtenido en la simulación.

6. Comparación Euler/Runge-Kuta

En este apartado vamos a comparar el mismo modelo de simulación, pero esta vez con distintos métodos de integración. Los anteriores los hemos realizado con el método de Runge-Kuta, que es el recomendado para realizar el estudio. Sin embargo, ahora vamos a comprobar qué hubiese pasado si utilizásemos el método de Euler, el cual es el más sencillo de implementar.

Para realiza esta comparación, también utilizaremos distintos intervalos de cálculo, no sólo con $h = 0.1$. El resto de parámetros será los que pusimos por defecto con el modelo equilibrado, excepto la población de depredadores que será de 90. Esto lo haremos porque nos ofrecía un modelo que oscilaba con el tiempo, pero sin llegar a extinguir ninguna especie.

Hagamos una ejecución de cada uno de los métodos de integración con un intervalo de cálculo $h = 0.1$. Este es el resultado:

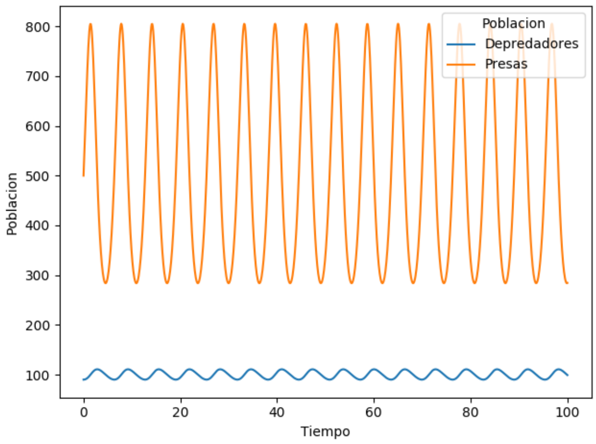

Figura 19: Runge-Kuta, h=0.1

La ejecución con el método de Runge-Kuta ha salido exactamente igual que antes, sin embargo, cuando he ejecutado el de Euler no he obtenido una gráfica. Cuando he ejecutado el programa imprimiendo cada uno de los valores obtenidos, he podido ver el siguiente error:

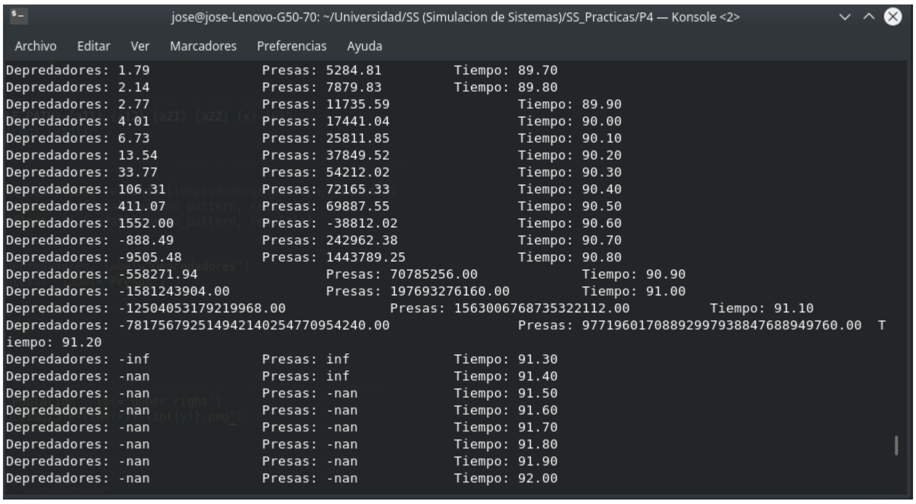

Figura 20: Euler, h=0.1

Como podemos observar, con este intervalo de cálculo se cometen errores de precisión muy altos, llegando a dividir entre valores muy aproximados a cero o haciendo $\frac{\infty}{\infty}$. A continuación, vamos a ver que pasa con un intervalo de cálculo más pequeño, por ejemplo 0.05:

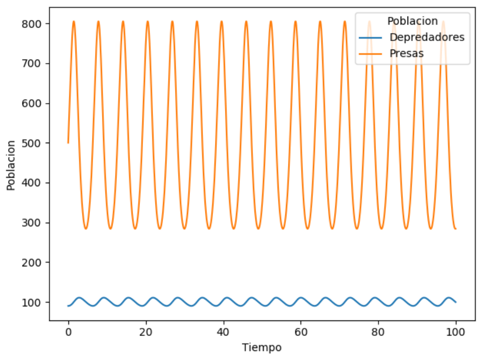

Figura 21: Runge-Kuta, h=0.05

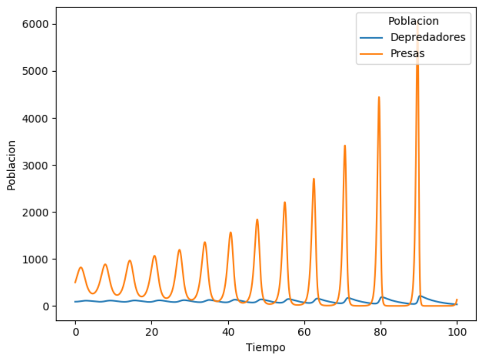

Figura 22: Euler, h=0.05

En este caso si que podemos apreciar bien el error que comete este método. Como podemos observar en la imagen de la derecha, el error hace que los valores de cada una de las especies empiece a aumentar desproporcionalmente, alcanzando valores de hasta 6.000 presas. Al reducir el intervalo anterior hemos conseguido ver la evolución del error, no obstante, si hubiesemos puesto un número más alto de ciclos, se habría llegado a los valores desorbitados obtenidos anteriormente.

Gracias a estas ejecuciones, podemos confirmar que este método de Euler no es apropiado dependiedo de los intervalos y las medidas de tiempo que utilizemos para hacer el cálculo. Y además, pese a parecer un método sencillo de implementar y que a priori funciona, a la hora de ponerlo en práctica, podemos obtener los fallos que nos acaba de dar.