0.1 Ley de Coulomb

La ley de Coulomb establece de la fuerza F entre dos cargas Q_1 y Q_2 son:

- A lo largo de la linea que los une.
- Directamemte proporcional al producto $Q_1 Q_2$ de las cargas.
- Inversamente proporcional a la distancia R que los separa

Teorema 0.1 — Ley de Coulomb.

$$F = \frac{kQ_1 Q_2}{R^2} \tag{1}$$

Donde:

Q: Cargas en Coulombs(C).

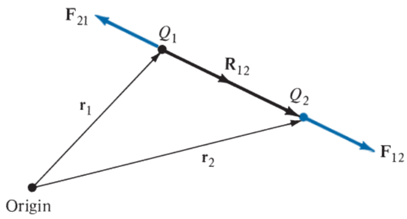
- R: Distancia en metros(m).
- F: Fuerza Newtons(N).

Constantes:

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \simeq \frac{10^{-9}}{36\pi} F/m \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 m/F$$

Si las cargas Q_1 y Q_2 están localizadas en puntos cuyas posiciones están de forma vectorial r_1 y r_2(figura), así la fuerza de $\mathbf{F}_{12}$[1] sobre la carga 2 debido a la carga 1 esta dado por:

$$\boxed{F_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \mathbf{a}_{R_{12}}} \tag{2}$$



Sean n cargas y se desea hallar la fuerza resultante en una carga Q, se usa el *principio de superposición*. Este principio establece: Si existen N cargas $Q_1, Q_2, ..., Q_N$ y seas sus vectores posición $r_1, r_2, .., r_N$ la fuerza resultante en la carga Q es la sumatoria de las fuerzas de cada una de las cargas:

$$F_Q = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_N$$

o:

$$\boxed{F = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N} \frac{Q_k (r - r_k)}{|r - r_k|^3}} \tag{3}$$

0.2 Intensidad de campo eléctrico

La intensidad de campo eléctrico E es la fuerza que una unidad de carga positiva experimenta cuando se coloca en un campo eléctrico.

Teorema 0.2 — Intensidad de campo eléctrico.

$$E = \frac{F}{Q} \tag{4}$$

[1] Se lee: La fuerza de la carga 1 a la carga 2

Donde:
E: Intensidad de campo eléctrico(N/C) o Volts por metro(V/m).
- F: Fuerza(N)
- Q: Carga(Coulombs).

Para Q>0, el E esta en la misma dirección de la fuerza F. La intensidad de campo eléctrico en el punto **r** debido a una carga localizada en **r'** es obtenido:

$$E = \frac{Q(r-r')}{4\pi\varepsilon_0|r-r'|^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}a_r \tag{5}$$

Y bajo el mismo principio de superposición, la intensidad de campo eléctrico en el punto **r**:

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{Q_k(r-r_k)}{|r-r_k|^3}} \tag{6}$$

0.3 Campo eléctrico creado por una distribución continua de carga en un punto

Las cargas puntuales ocupan un muy pequeño espacio físico. Es posible tener distribuciones continuas: Es costumbre denotar la densidad de carga lineal ρ_L(C/m), la densidad de carga superficial ρ_S(C/m^2) y la carga volumétrica ρ_V(C/m^3).[2]

$$dQ = \rho_L dl = \lambda dl \rightarrow Q = \int_L \rho_L dl \tag{7a}$$

$$dQ = \rho_S ds = \sigma ds \rightarrow Q = \int_S \rho_S ds \tag{7b}$$

$$dQ = \rho_v dv = \rho dv \rightarrow Q = \int_v \rho_v dv \tag{7c}$$

El campo eléctrico debido a cada distribución de carga puede ser tomado como una sumatoria de los campos contribuidos por numerosas cargas:

$$\vec{E} = \int_L k\lambda\frac{dl}{r^2}\vec{u}_r \tag{8a}$$

$$\vec{E} = \int_S k\sigma\frac{ds}{r^2}\vec{u}_r \tag{8b}$$

$$\vec{E} = \int_V k\rho\frac{dv}{r^2}\vec{u}_r \tag{8c}$$

0.4 Densidad de campo eléctrico

Se dice que la **densidad de flujo eléctrico** es el número de líneas de fuerza por metro cuadrado de superficie, para una esfera de radio r, esta dada por:

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\vec{r} \tag{9}$$

Así para el espacio libre:

$$\vec{D} = \vec{E}\varepsilon_0 \tag{10}$$

Donde:

[2] No confundir este ρ con subíndice con ρ sin subíndice usado en coordenadas cilíndricas.

- E: Campo eléctrico(N/C ó V/m).
- D: Densidad de flujo eléctrico(C/m^2).

Se define **flujo eléctrico** en términos de la densidad de flujo eléctrico, es decir:

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \tag{11}$$

Otra forma de ver el flujo eléctrico(figura 1), solo si las lineas de campo eléctrico uniforme atraviesan una superficie de área S es:

$$\Phi = ES\cos\theta \tag{12}$$

Donde:

- E: Campo eléctrico.
- S: Área de la superficie.
- θ: Angulo que forman los vectores de campo eléctrico y la normal de la superficie

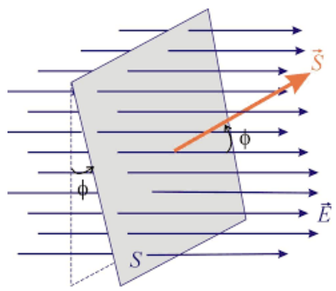


Figure 1: Flujo eléctrico

0.5 Ley de Gauss-Ecuaciones de Maxwell

La ley de Gauss establece que el flujo a través de una superficie que no encierra carga es nulo, en este caso el número neto de líneas de campo que atraviesa la superficie es cero (entran el mismo número de líneas que salen). Por otro lado, el flujo eléctrico total Φ_E a traves de la **superficie cerrada** es igual a la carga total encerrada por la superficie.

Por lo tanto:

$$\Phi_E = Q_{enc}$$

que es:

$$\Phi_E = \oint_s d\Phi_E = \oint_s D \cdot dS$$

La carga total encerrada:

$$Q = \oint D \cdot dS = \int_v \rho_v dv \tag{13}$$

Aplicando el teorema de la divergencia al término medio.

$$\oint D \cdot dS = \int_v \nabla \cdot D dv \tag{14}$$

¿Qué pasa si $\vec{E}$ no es uniforme o si S es una superficie general?
Si queremos calcular el flujo eléctrico se calcula dividendo el área en diferenciales de área, y usando la ecuación 14 se suma todas las pequeñas partes:

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{E}_i \Delta \vec{A}_i$$

Que puede ser expresada como una integral de superficie(ecuación 19)

Teorema 0.3 — Ley de Gauss. El flujo eléctrico que pasa a través de cada superficie gaussiana[a] es igual a la carga neta encerrada(suma de las cargas encerradas) entre la *permisividad en el vacío* Comparando los volúmenes de las dos integrales(ecuación 15 y 16):
Forma diferencial:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v} \tag{15}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \tag{16}$$

Forma integral:

$$\boxed{\Phi_E = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}} \tag{17}$$

Las ecuaciones 18, 17 y 19 son la primera de la 4 ecuaciones de Maxwell establece:
Que el volumen de densidad de carga es la misma que la divergencia de la densidad de flujo eléctrico. Es equivalente a la ley de Coulomb de fuerza entre dos cargas.

[a] Se llama superficie gaussiana a la superficie **imaginaria** que encierra las cargas a analizar, no siempre tiene que coincidir necesariamente con la distribución de carga.

- La ley de Gauss es útil cuando se demuestra por simetría el valor de campo eléctrico es constante sobre nuestra superficie gaussiana.
- Ademas el vector normal $d\vec{A}$ siempre apunta hacia afuera del volumen encerrado por la superficie cerrada, es necesario decir que no siempre el campo eléctrico no apuntara a una dirección, depende de la carga, si es positiva será hacia afuera del volumen y si es negativa será hacia adentro de la superficie.
- Si $\vec{E}$ es **tangente** a la superficie gaussiana en cada punto, entonces la integral sobre la superficie es cero.

La ley de Gauss tambien puede ser usada para distribuciones de carga no uniforme es necesario una densidad de carga del cuerpo en estudio varíe según una coordenada espacial y para calcular el campo eléctrico primero se debe calcular la carga encerrada por la superficie gaussiana(ecuaciones 7a).