0.1 Distribución de Weibull

Definición 0.1 — Función densidad probabilidad.

$$f(t,k,\lambda) = \lambda k\,[\lambda \cdot (t-\gamma)]^{k-1}\, e^{-[\lambda\cdot(t-\gamma)]^k}, t>0 \tag{1}$$

Si resolvemos la ecuación 1 para t>0:

$$\begin{aligned}
\frac{k}{\lambda^k}\int_0^x t^{k-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} &= u \\
\left(\frac{\beta}{\lambda^k}\right)\left(-\frac{\lambda^k}{k}\right) e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k}\Big|_0^t &= u \\
1 - e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} &= u
\end{aligned}$$

Despejando se tiene:

$$\begin{aligned}
1-u &= e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} \\
1-u &= \frac{1}{e^{\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k}} \\
e^{\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} &= \frac{1}{1-u}
\end{aligned}$$

Tomando Log neperiano:

$$\begin{aligned}
Lne^{\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} &= Ln\left(\frac{1}{1-u}\right) \\
\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k &= Ln\left(\frac{1}{1-u}\right) \\
\frac{t^k}{\lambda^k} &= Ln\left(\frac{1}{1-u}\right) \rightarrow t^k = \lambda^k Ln\left(\frac{1}{1-u}\right) \\
t &= \lambda\left[Ln\left(\frac{1}{1-u}\right)\right]^{\frac{1}{k}}
\end{aligned}$$

La distribución de Weibull es ampliamente usada en el estudio de tiempo de vida o tiempo de vida o tiempo para la falla de los componentes mecánicos. Los parámetros de la distribución de Weibull son: Forma (k ó k) y Escala (λ).
El número de ocurrencias de eventos por unidad de tiempo no permanece necesariamente constante, es decir, esta tasa de ocurrencia de eventos puede crecer o decrecer con el tiempo.

- R(t): Probabilidad de que el equipo no falle en un tiempo t. También se le llama **confiabilidad**.
- λ: Parámetro de escala, vida característica del equipo.[1]
- k: Parámetro de forma, relaciona el periodo de tiempo en el que se encuentra operando el equipo.

[1] No confundir con λ de la función distribución.

- γ: También llamado parámetro de posición; define el punto de partida de la distribución.

Valor(k)	Carácteristicas
0<k<1	Tasa de falla decreciente
k=1	Distribución exponencial
1<k<2	Tasa de falla creciente (concava)
k=2	Distribución de Rayleigh
k>2	Tasa de falla creciente (convexa)
$3\leq k \leq 4$	Tasa de falla creciente

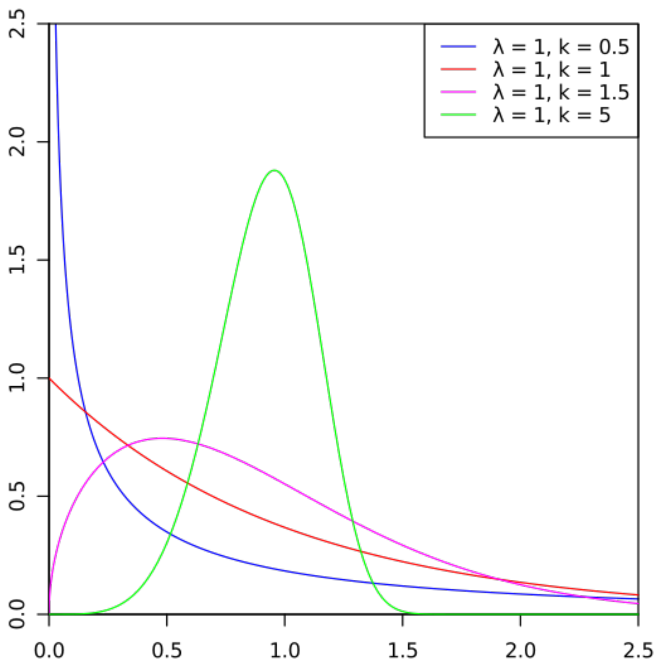

Figure 1: Distribución Weibull con diferentes valores de k (k).

Propiedades de la distribución de Weibull

De manera general

Corolario 0.1 — Distribución.

$$f(t) = \frac{k}{k^k}(t-\gamma)^{k-1} e^{\left(\frac{t-\gamma}{k}\right)^{\beta}} \tag{2}$$

Corolario 0.2 — Infiabilidad.

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{k}\right)^{\beta}} \tag{3}$$

Corolario 0.3 — Confiabilidad.

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{k}\right)^{\beta}} \tag{4}$$

Corolario 0.4 — Tasa de fallas.

$$\eta(t) = \frac{k}{k^k}(t-\gamma)^{k-1} \tag{5}$$

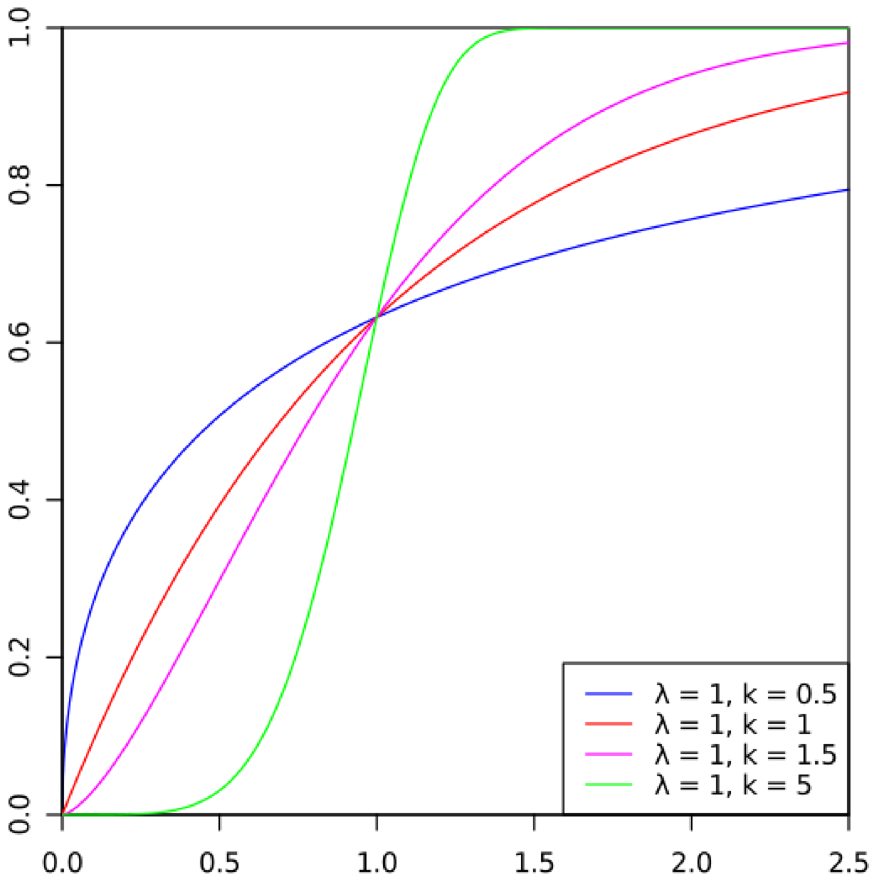

Figure 2: CDF de una distribución de Weibull o Infiabilidad