

The background of the entire image is a photograph of a large satellite dish antenna against a vibrant, star-filled night sky. The colors transition from deep blue at the top to orange and red at the bottom, creating a gradient effect.

Telecomunicaciones en tu idioma

Notas de un estudiante

Jose Antonio Hancco M.

Copyright © 2022 Jose Hancco

LIBRO LIBRE DE USOS

[HTTPS://GITHUB.COM/YASPERTERIAN](https://github.com/YASPERTERIAN)

Con licencia de Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (la “Licencia”). No puede usar este archivo excepto de conformidad con la Licencia. Puede obtener una copia de la Licencia en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. A menos que lo exija la ley aplicable o se acuerde por escrito, el software distribuido bajo la Licencia se distribuye “TAL CUAL”, SIN GARANTÍAS NI CONDICIONES DE NINGÚN TIPO, ya sea expresa o implícita. Consulte la Licencia para conocer el idioma específico que rige los permisos y las limitaciones en virtud de la Licencia.

Primera edición, septiembre 2021

Si existe algún error, crees que una sección se puede mejorar o dar cualquier tipo de *feedback* acerca del libro no dudes y mándame un correo a jhanccoma@unsa.edu.pe, te responderé lo más pronto que pueda y gracias por mejorar este libro de todos y para todos.

Ya sabes cómo funciona esto. Coges un libro, saltas a la dedicatoria y descubres que, una vez más, el autor ha dedicado su libro a alguien que no eres tú.

Pero esta vez no será así...

Dedico este libro a mi yo del pasado, quien ha sacrificado tiempo para poder escribir este libro para quienes lo necesiten pues como cualquier carrera, no es difícil los temas que tienes que aprender, sino que te lo explican mal y sin ganas, ganas desganadas que destruyen las tuyas.



Contenido

I

Métodos Matemáticos I

1	Ecuaciones Diferenciales de primer orden	15
1.1	Conceptos introductorios	15
1.1.1	Tipos	15
1.1.2	Orden y grado	16
1.2	Variables separables	17
1.3	Ecuaciones diferenciales lineales	19
1.4	Ecuaciones Diferenciales Exactas	21
1.5	Ecuaciones Diferenciales No Exactas	23
1.6	Ecuaciones por sustitución	25
1.6.1	Ecuaciones Homogéneas	25
1.6.2	Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli	27

II

Sistemas Digitales

2	Lógica digital	33
2.1	Compuertas lógicas	33
2.1.1	Compuerta NOT	33
2.1.2	Compuerta AND	33
2.1.3	Compuerta OR	34
2.1.4	Compuerta NAND	35
2.1.5	Compuerta NOR	36
2.1.6	Compuerta OR exclusiva-XOR	37
2.1.7	Compuerta NOR exclusiva-XNOR	38
2.2	Formas de expresar funciones booleanas	38
2.2.1	Suma de productos-SOP	39
2.2.2	Productos de sumas-POS	39
2.2.3	Conversión de SOP a POS	40

2.2.4	Forma canónica	41
2.2.5	Forma normalizada	41
2.2.6	¿Cómo pasar de la forma normalizada a la canónica?	41
2.3	Axiomas	42
2.4	Teoremas del álgebra de conmutación	42
2.4.1	Dualidad	43
2.5	Mapas de Karnaugh	45
2.5.1	Mapas de Karnaugh-4 variables	45
2.5.2	Agrupación de términos	47
2.5.3	Mapas de Karnaugh-5 variables	50
2.5.4	Mapas de Karnaugh-6 variables	51
2.6	Parámetros TTL y CMOS	52
2.6.1	Tensión de alimentación continua	52
2.6.2	Nivel lógico CMOS +5V	53
2.6.3	Nivel lógico CMOS +3V	53
2.6.4	Nivel lógico TTL	54
2.6.5	Inmunidad y Margen de ruido	54
2.6.6	Disipación de potencia	54
2.6.7	Carga y Fan-out	55
3	Circuitos Lógicos	57
3.1	Sumador	57
3.1.1	Semi-sumador	57
3.1.2	Sumador completo	58
3.1.3	Sumador paralelo	58
3.1.4	Sumador 74LS283	58
3.1.5	Sumador Acarreo Anticipado	59
3.2	Codificador y Decodificador	60
3.2.1	Encoder	60
3.2.2	Decoder	62
3.3	Multiplexor y Demultiplexor	64
3.3.1	Multiplexor	64
3.3.2	Demultiplexor	65
3.4	Latch	66
3.4.1	Latch S-R(Set-Reset)	66
3.4.2	Símbolo lógico	68
3.4.3	Latch: Eliminador de rebote	69
3.4.4	Latch con entrada de habilitación	69
3.4.5	Latch D con entrada de habilitación	69
3.5	Flip-Flops	70
3.5.1	Flip Flop tipo S-R disparado por flanco	70
3.5.2	Flip Flop D disparado por flanco	73
3.5.3	Flip Flop J-K disparado por flanco	74
3.5.4	Entradas asíncronas de inicialización y borrado	75
3.6	División de frecuencia	76
3.7	Monoestables	77

4	Circuitos Lógicos Secuenciales	79
4.1	Máquina de estados	79
4.1.1	Modelo de Mealy	80
4.2	Grafos de estados	82

III

Smart cities

5	Conociendo la ESP8266	93
5.1	ESP8266	93
5.2	Instalación Windows:Materiales	94
5.3	Instalación	94
5.4	Equivalente al Hola Mundo pero en placas	94
5.5	Conectar a una red Wi-Fi	95
5.6	Crear una red WiFi	97
6	Servicios en la red	99
6.1	Crear un servidor local	99
6.2	Lectura Analógica	101
6.3	Proyecto explicativo 1	105
6.3.1	Parte 1	106
6.3.2	Parte 2	106
6.3.3	Parte 3	107
6.4	Sensor de temperatura y humedad DHT11	108
7	Proyecto final	113
7.1	Software	113
7.1.1	Instalación de Node.js	113
7.1.2	Instalación de Mosquitto	114
7.2	Hardware	118
7.3	Back-end	119
7.3.1	Xammp-PHP My admin	119
7.3.2	Xammp-Htdocs	121
7.3.3	Node-RED	122
7.4	Front-end	124

IV

Telecomunicaciones 2

8	Unidad I	135
8.1	Theorems	135
8.1.1	Several equations	135
8.1.2	Single Line	135

8.2	Definitions	135
8.3	Notations	135
8.4	Remarks	136
8.5	Corollaries	136
8.6	Propositions	136
8.6.1	Several equations	136
8.6.2	Single Line	136
8.7	Examples	136
8.7.1	Equation and Text	136
8.7.2	Paragraph of Text	136
8.8	Exercises	137
8.9	Problems	137
8.10	Vocabulary	137
8.11	Table	137
8.12	Figure	137
9	Unidad 2	139
9.1	Modulación por ancho de pulso-PWM	139

V

Campos electromagnéticos

10	Repaso vectorial y conceptualización	143
10.1	Sistemas de coordenadas y transformaciones	143
10.1.1	Coordenadas Cilíndricas (r, θ, z) ó (ρ, ϕ, z)	144
10.1.2	Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)	145
10.1.3	Planos	146
10.2	Cálculo vectorial	146
10.2.1	Diferencial de distancia, área y volumen	146
10.2.2	Operador DEL(∇)	148
10.2.3	Gradiente de un campo escalar: ∇V	149
10.2.4	La divergencia de un vector: $\nabla \cdot A$	149
10.2.5	Rotacional de un vector: $\nabla \times A$	150
10.2.6	Laplaciano de un escalar: $\nabla^2 V$	151
10.3	Ley de Coulomb	151
10.4	Intensidad de campo eléctrico	152
10.5	Campo eléctrico creado por una distribución continua de carga en un punto	153
10.6	Densidad de campo eléctrico	153
10.7	Ley de Gauss-Ecuaciones de Maxwell	154
10.8	Potencial eléctrico	159
10.9	Relación entre E y V-Ecuación de Maxwell	159
10.10	Dipolo eléctrico	160

11	Magnetoestática	163
12	Ecuaciones de Maxwell y las ondas electromagnéticas	165

VI

Sistemas de telefonía

13	Telefonía	169
13.1	Evolución de la telefonía	169
13.2	Comutadores	170
13.3	Repaso:Señales analógicas y digitales	170
13.3.1	Ventajas y desventajas de las señales analógicas	170
13.3.2	Ventajas y desventajas de las señales digitales	171
13.4	Multiplexación	171
13.4.1	¿Para que sirve?	171
13.4.2	Multiplexación por división de tiempo o TDM (<i>time-division multiplexing</i>)	171
13.4.3	Multiplexación por división de frecuencia o FDM (<i>frequency-division multiplexing</i>)	172
13.4.4	Multiplexación por división de longitud de onda o WDM (<i>wavelength-division multiplexing</i>)	173
13.4.5	Multiplexación por Estadística por División de Tiempo o STDM(<i>Statistical time-division multiplexing</i>)	173
13.5	Técnicas de conmutación	173
13.5.1	Comutación por circuitos	173
13.5.2	Comutador por paquetes	174
13.6	Red de telefonía publica	175
13.6.1	Red de telefonía publica conmutada-PSTN	175
13.6.2	Características	176
13.6.3	Componentes	177
13.7	Señalización telefónica	179
13.8	Planta interna y externa	180
13.8.1	Planta Interna	180
13.8.2	Planta externa	181
14	Herramientas para el análisis telefónico	187
14.1	Tráfico Telefónico	187
14.1.1	Variaciones	187
14.2	Medidas de tráfico telefónico	188
14.3	Tipos de tráfico	192
14.4	Accesibilidad	193
14.5	<i>Grade of service(GoS)</i>	194
14.6	Diseño de redes	195
14.7	Encaminamiento de tráfico	197
14.8	Erlang-B	201
14.8.1	Erlang-B para un enlace	202
14.8.2	Erlang-B para N enlaces	204

15	Telefonía IP	207
15.0.1	Redes de computadoras	207
15.0.2	PDU	208
15.0.3	Arquitectura de red	209
15.0.4	Tipos de servicios	210
15.1	Repasso: TCP/IP	212
15.1.1	Capa de transporte	213
15.1.2	Capa de internet	213
15.2	VoIP	216
15.3	Digitización de la voz	217
15.3.1	¿Como se digitaliza de la voz?	217
15.3.2	Transporte de Voz	219
15.4	Componentes de VoIP	220
15.4.1	Terminal IP	220
15.4.2	Centralita IP	221
15.4.3	Gateway	221
15.4.4	Adaptador FXS	222
15.4.5	Unidad de control MCU	222
15.5	Tecnología IP	222
15.5.1	DSL	222
15.5.2	RDSI	223
15.5.3	LMDS	223
15.5.4	GSM	223
15.6	Vocabulary	224

VII

Extras

16	Artificios matemáticos	227
16.1	Logaritmos y exponentiales	227
16.2	Matrices	227
16.2.1	Conformabilidad de matrices	227
16.3	Integrales	228
16.3.1	Integral por tabulación	228
16.4	Números complejos	228
16.5	Producto cruz y producto escalar	229
16.5.1	Producto escalar	229
16.5.2	Producto cruz	229
16.5.3	Propiedades	229

VIII

Anexos

16.6	Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía	233
16.7	Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía	234
16.8	Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía	235
16.9	Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía 2	236
16.10	Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía 2	237

16.11 Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía 2	238
16.12 Ejercicios resueltos U2-Encaminamiento de tráfico telefónico	239
16.13 Ejercicios resueltos U2-Encaminamiento de tráfico telefónico	240
16.14 Ejercicios resueltos U2-Encaminamiento de tráfico telefónico	241
16.15 Ejercicios resueltos U2-Erlang B	242
16.16 Ejercicios resueltos U2-Erlang B	243
16.17 Ejercicios resueltos U2-Erlang B	244
16.18 Ejercicios de la ley de Gauss	245
Bibliography	249
Articles	249
Books	249
Index	251



Métodos Matemáticos I

1	Ecuaciones Diferenciales de primer orden
	15
1.1	Conceptos introductorios
1.2	Variables separables
1.3	Ecuaciones diferenciales lineales
1.4	Ecuaciones Diferenciales Exactas
1.5	Ecuaciones Diferenciales No Exactas
1.6	Ecuaciones por sustitución

1. Ecuaciones Diferenciales de primer orden

En este capítulo aprenderemos como resolver ecuaciones diferenciales. Para ello es necesario saber como siempre álgebra media-avanzada, cálculo diferencial e integral y sobre todo habilidad matemática.

1.1 Conceptos introductorios

Una ecuación diferencial es una ecuación derivada de una función desconocida(variable dependiente) respecto a una o más variables independientes.

$$\frac{dy}{dx} + 5 = e$$

Donde:

y es nuestra variable **dependiente**.

x es nuestra variable **independiente**.

1.1.1 Tipos

Existen dos tipos de ecuaciones diferenciales.

1.1.1.1 Ecuación diferencial Ordinaria

Son de la forma:

$$dy = 2dx$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + 3$$

Donde nuestra prioridad es encontrar $y=F(x)$.

1.1.1.2 Ecuación diferencial Parcial

Estas ecuaciones son de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Donde nuestra tarea es hallar $\mathbf{u}=\mathbf{F(x,y)}$

1.1.2 Orden y grado

Debemos dejar en claro algunos términos claro antes de proceder: Orden y Grado.

1.1.2.1 Orden

El orden de una ED¹ es la derivada de mayor orden que aparece.

1.1.2.2 Grado

El grado de una ecuación diferencial (ya sea ordinaria o parcial) es el exponente de la mayor derivada contenida en la ecuación.

$$\underbrace{\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2}_{orden3} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + xy = 0$$

Definición 1.1 — Homogeneidad en funciones. Una función es homogénea si todos los argumentos se multiplican por un factor constante, entonces el valor de la función resulta ser un cierto número de veces el factor multiplicativo elevado a una potencia. Dicha potencia es el grado de la función homogénea.

$$G(tx,ty) = t^n \cdot G(x,y)^a \quad (1.1)$$

Una función es homogénea si al multiplicarla por t nos devuelve la misma función multiplicada t a la n veces, donde n es el grado de homogeneidad.

^aSe usará letras mayúsculas para representar funciones en su forma natural y letras minúsculas como las derivadas de las mismas.

Ejercicio 1.1 Comprobar si la función $F(x)$ es homogénea y si lo es, indicar su grado.

$$F(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Solución:

Multiplicamos por un mismo factor t .

$$F(tx,ty) = \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2}$$

Factorizamos t de la expresión:

$$F(x,y) = t \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{G(x,y)}$$

$$F(x,y) = t \cdot G(x,y)$$

La función es homogénea de grado 1

¹Desde ahora ecuación diferencial se abreviará como ED

1.2 Variables separables

Son las más sencillas de identificar, para poder resolverlas es necesario hacer un despeje para "acomodar" los términos e integrar a ambos lados de la expresión.

Definición 1.2 — ED de variables separables. La forma estándar de estas ecuaciones es:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$h(y)dy = g(x)dx \rightarrow \int h(y)dy = \int g(x)dx + C$$

Después de la integración llegamos a:

$$H(y) = G(X) + C$$

También pueden verse de la forma diferencial:

$$G(x, y)dx + H(x, y)dy = 0 \quad (1.2)$$

Ambas soluciones se presentan normalmente de la manera implícita.

Ejercicio 1.2

$$\underbrace{y \cdot \ln(x) \frac{dx}{dy}}_{1} = \underbrace{\left(\frac{y+1}{x}\right)^2}_{2}$$

$$\int x^2 \cdot \ln(x) dx = \int \frac{(y+1)^2}{y} dy \quad (1.3)$$

Resolviendo por integrales por partes para 1:

$$\begin{aligned} u &= \ln(x) & du &= \frac{1}{x} dx \\ dv &= x^2 & v &= \frac{x^3}{3} \\ \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx && & \\ \frac{x^3 \cdot \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} && & \end{aligned} \quad (1.4)$$

Resolviendo normalmente para 2:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{y^2}{y} + \frac{2y}{y} + \frac{1}{y} \right) dy & \\ \frac{y^2}{2} + 2y + \ln(y) & \end{aligned} \quad (1.5)$$

Juntando los resultados de 1 y 2:

$$\boxed{\frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{y^2}{2} + 2y + \ln(y) + C} \quad (1.6)$$

■

Ejercicio 1.3 Ejercicio ED de primer orden con Condiciones Iniciales^a.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + ty &= y; \quad y(1) = 3 \\ \frac{dy}{dt} &= y - ty \\ \frac{dy}{dt} &= y(1-t) \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int (1-t) dt \\ \ln(y) &= t - \frac{t^2}{2} + C \end{aligned} \quad (1.7)$$

De por sí, la ecuación 1.7 es la respuesta, pero por algo nos dan las C.I. Recordemos que y es una función que depende de t , en otras palabras: $Y(t)$. Con la C.I. que nos dieron, nos quiere decir que cuando $t=1$, y vale 3. Bajo este pensamiento podemos seguir con el procedimiento (usando las ecuaciones 16.1 y 16.2) para hallar C para la ecuación 1.7.

$$\begin{aligned} y &= e^{t - \frac{t^2}{2} + C}; \quad y(1) = 3 \\ 3 &= e^{1 - \frac{1^2}{2} + C} \\ \ln(3) &= \frac{1}{2} + C \\ \ln(3) - \frac{1}{2} &= C \end{aligned} \quad (1.8)$$

Una vez despejada la ecuación de 1.8 podemos reemplazarla en la ecuación 1.7:

$$\boxed{\ln(y) = t - \frac{t^2}{2} + \ln(3) - \frac{1}{2}} \quad (1.9)$$

■

^aDesde ahora se abreviará como C.I.

Ejercicio 1.4 Resolver la siguiente E.D.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8} \quad (1.10)$$

Factorizando y separando la ecuación 1.10:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{x(y+3) - (y+3)}{x(y-2) + 4(y-2)} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(y+3)(x-1)}{(y-2)(x+4)} \\ \frac{y-2}{y+3} dy &= \frac{x-1}{x+4} dx\end{aligned}\tag{1.11}$$

Desarrollando las divisiones de ambos lados:

$$\begin{aligned}\int 1 - \frac{5}{y+3} dy &= \int 1 - \frac{5}{x+4} dx \\ y - 5 \ln|y+3| &= x - 5 \ln|x+4| + C\end{aligned}\tag{1.12}$$

Usando propiedad de los logaritmos(16.3):

$$\ln|x+4|^5 - \ln|y+3|^5 = x - y + C\tag{1.13}$$

Usando la propiedad de logaritmos(16.4):

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x+4}{y+3}\right)^5 &= x - y + C \\ \left(\frac{x+4}{y+3}\right)^5 &= e^{x-y} \cdot e^C\end{aligned}\tag{1.14}$$

En este caso, una exponencial de c es posible solo expresarla como una exponencial con exponente 1:

$\left(\frac{x+4}{y+3}\right)^5 = e^{x-y} \cdot e^C$

(1.15)

■

1.3 Ecuaciones diferenciales lineales

Definición 1.3 — E.D.L.. Forma estándar:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)\tag{1.16}$$

Si $Q(x)=0$, la E.D. 1.16 es **homogénea**

Si $Q(x) \neq 0$, la E.D. 1.16 **NO es homogénea**.

Para resolver este tipo de E.D. necesario un cambio de variable que se demuestra de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx} \left[e^{\int P(x)dx} \cdot y \right]\tag{1.17}$$

Derivando el producto de funciones:

$$e^{\int P(x)dx} \cdot y + e^{\int P(x)dx} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Acomodando los términos:

$$e^{\int P(x)dx} \left[P(x)y + \frac{dy}{dx} \right] \quad (1.18)$$

Tengamos en cuenta la igualdad entre las ecuaciones 1.17 y 1.18, por lo que es posible reemplazarla:

$$\underbrace{\left[P(x)y + \frac{dy}{dx} \right] e^{\int P(x)dx}}_{Ecuacion1.17} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left[e^{\int P(x)dx} \cdot y \right] = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$

Integrando a ambos lados

$$\int \frac{d}{dx} \left[e^{\int P(x)dx} \cdot y \right] dx = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx$$

$$e^{\int P(x)dx} \cdot y = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx$$
(1.19)

Despejando y:

$$y = \frac{\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx}{e^{\int P(x)dx}} + C$$

Haremos un cambio de variable:

$U(x) = e^{\int P(x)dx}$

(1.20)

Haciendo el cambio de variable de la ecuación 1.3 en el resultado de la ecuación 1.19 se obtiene:

$U(x)Y(x) = \int Q(x)U(x)dx + C$

(1.21)

En conclusión, para resolver una ecuación diferencial, se usa la ecuación 1.21, teniendo en cuenta el cambio de variable de la ecuación 1.20.

Ejercicio 1.5 Resolver la siguiente E.D.L.:

$$(1-x^2) \frac{dy}{dx} - x = -xy$$

Para resolver esta E.D.L. es necesario darle la forma a la ecuación, osea ordenar los términos y encontrar las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ de acuerdo a la ecuación 1.16. En este caso tenemos que aislar la diferencial $(\frac{dy}{dx})$, es por ello que dividimos todo entre ese término que acompaña a la diferencial. Luego hemos intercambiado los términos para tener del lado izquierdo la diferencial y una función que multiplique a y , mientras que del lado derecho tenemos que tener solo una función:

$$(1-x^2) \frac{dy}{dx} - x = -xy$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{(1-x^2)}y = \frac{x}{(1-x^2)}$$

$$P(x) = \frac{x}{(1-x^2)} \quad Q(x) = \frac{x}{(1-x^2)}$$
(1.22)

Una vez que tenemos identificamos las funciones $P(x)$ y $Q(x)$, tenemos que usar el cambio de variable (ecuación 1.20). Antes de seguir resolviendo la ecuación principal, resolvamos el

cambio de variable. Para ello integramos la función $P(x)$ como manda la ecuación 1.20:

$$\int \frac{x}{(1-x^2)} dx = -\frac{1}{2} \ln|1-x^2|$$

$$\therefore e^{\int P(x)dx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = U(x)$$

La solución anterior, si es un poco complicada de comprender, se uso la propiedad 16.5. Una vez que tenemos la función $U(x)$, volvemos a la resolución principal, usando la función $U(x)$ procedemos con la ecuación 1.21 (despejamos $Y(x)$, para ellos dividimos a ambos entre $U(x)$):

$$Y(x) = \frac{\int \frac{x}{(1-x^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + C}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$Y(x) = \frac{\int \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx + C}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$Y(x) = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + C}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

Separando el denominador para cada término del numerador:

$$Y(x) = 1 + C(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.23)$$

■

1.4 Ecuaciones Diferenciales Exactas

Este tipo de ecuaciones toman como referencia a las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Definición 1.4 — Ecuaciones Diferenciales exactas. En base a la ecuación 1.2, se busca la siguiente forma estándar para poder resolver:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (1.24)$$

Será exacta si cumple con la siguiente condición:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad (1.25)$$

¿Cómo resolverla?

Si hemos comprobado que nuestra ecuación diferencial es exacta usando la ecuación 1.34, entonces existe una función $F(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad (1.26a)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \quad (1.26b)$$

En la ecuación 1.26a podemos determinar $F(x,y)$ si integramos $M(x,y)$ respecto a x , obviamente manteniendo a y como una constante. Si lo hacemos obtendremos:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + G(y) \quad (1.27)$$

Añadimos la función $G(y)$ porque es una función de y implícita, es decir existe ahí, pero como derivamos en función a x , esta función $G(y)$ desaparece porque y es considerada constante.

De la ecuación 1.27, ahora derivamos respecto a y e igualamos este resultado con la ecuación 1.26b:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x,y)dx \right) + g'(y) = N(x,y) \quad (1.28a)$$

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x,y)dx \right) \quad (1.28b)$$

Ahora integraremos la ecuación 1.28b respecto a y y reemplazamos en la ecuación 1.27. Con eso ya estaría resuelta la ecuación diferencial exacta. La solución general se da de la siguiente manera:

$$F(x,y) = C$$

Ejercicio 1.6 Resolver:

$$2y^2x - 3dx + 2yx^2 + 4dy = 0$$

Antes de todo, identifiquemos las funciones M y N en nuestra E.D.E:

$$\underbrace{2y^2x - 3dx}_{M(x,y)} + \underbrace{2yx^2 + 4dy}_{N(x,y)} = 0$$

Trata de guiarte por las diferenciales(dx y dy) para identificarlas bien. Ahora tenemos que comprobar que se trata de una E.D.E:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy = \frac{\partial N}{\partial x}, \therefore \text{es exacta.} \quad (1.29)$$

Como es exacta, existe una función $F(x,y)$, así que seguimos los pasos descritos anteriormente. Empezamos con la ecuación 1.26a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= 2y^2x - 3 \\ F(x,y) &= \int 2y^2x - 3dx + G(y) \\ F(x,y) &= y^2x^2 - 3x + G(y) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ya tenemos la respuesta, pero debemos hallar $G(y)$ para poder reemplazarla en 1.30. En consecuencia seguimos con el paso detallado en la ecuación 1.26b:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2yx^2 + 4 \quad (1.31)$$

Lo que vamos a hacer es lo siguiente: Nosotros ya tenemos $F(x,y)$ (ecuación 1.30) pero nos falta hallar $G(y)$, es por ello que hallamos el término de $N(x,y)$ (ecuación 1.26b). Ese término nos dice que si realizamos la derivada parcial respecto a y a la función $F(x,y)$ obtendremos $N(x,y)$. Nosotros tenemos $F(x,y)$ y tenemos $N(x,y)$; y tenemos una función desconocida que depende de

$y(G(y))$, por consecuencia, hallaremos esa función desconocida:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2yx^2 + g'(y) = 2yx^2 + 4 \quad (1.32a)$$

$$g'(y) = 4 \quad (1.32b)$$

$$\int g'(y)dy = \int 4dy \quad (1.32c)$$

$$G(y) = 4y \quad (1.32d)$$

¿Qué se hizo?

Por si te cuesta entender, vamos a detallar:

1. **Ecuación 1.32a:** Hallamos el término correspondiente a la expresión 1.26b, que es la expresión 1.31; si nos centramos solo en esta expresión nos dice que: la derivada parcial de $F(x,y)$ respecto a y es $N(x,y)$. Nosotros sabemos cuanto vale $N(x,y)$ pero no sabemos cuando vale $F(x,y)$. Pero, si nos fijamos bien, sabemos cuanto vale $F(x,y)$ (ecuación 1.30), y si la derivamos podemos igualar a la expresión 1.31.
2. **Ecuación 1.32b y 1.32c:** Ya hallamos $g'(x)$, así que solo nos queda integrar **respecto a y** porque es una función de y .

Ahora que tenemos todo: solo nos queda reemplazar en la ecuación 1.30 el valor de la función incógnita $G(y)$ hallada en 1.32d:

$$F(x,y) = y^2x^2 - 3x + 4y = C \quad (1.33)$$

R Se puede cambiar el orden de resolver, es decir, primero hemos resuelto la expresión 1.26a y luego la expresión 1.26b, pero también es válido(y debería salir lo mismo) si haces primero la expresión 1.26b y luego la expresión 1.26a

1.5 Ecuaciones Diferenciales No Exactas

Este tipo de E.D.N.E son reducibles a E.D.E mediante un factor integrante.

Definición 1.5 — Ecuaciones Diferenciales exactas. En base a la ecuación 1.2, se busca la siguiente forma estándar para poder resolver:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Será exacta si cumple con la siguiente condición:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad (1.34)$$

¿Cómo resolver?

Tenemos que buscar un F.I.² para que la E.D.N.E se haga E.D.E.

Si:

$$\frac{1}{N(x,y)} \left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right) \quad (1.35)$$

devuelve como resultado una función que **SOLO** depende de x ; entonces el F.I. es:

$$U(x) = e^{\int \frac{1}{N(x,y)} \left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right) dx} \quad (1.36)$$

²Abreviación de Factor Integrante

Si:

$$\frac{1}{M(x,y)} \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \right) \quad (1.37)$$

devuelve como resultado una función que **SÓLO** depende de y ; entonces el F.I. es:

$$U(y) = e^{\int \frac{1}{M(x,y)} \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \right) dy} \quad (1.38)$$

Cuando se hallada multiplicamos a toda la E.D.N.E por F.I.; haciendo esto la E.D pasará a ser una E.D.E. y se procede a resolver como tal.

Ejercicio 1.7 Resolver:

$$xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$$

Solución:

Queda de más que antes de todo, es necesario identificar $M(x,y)$ y $N(x,y)$:

$$\underbrace{xy}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(2x^2 + 3y^2 - 20)}_{N(x,y)} dy = 0$$

Como primer paso, tenemos que ver si se trata de una E.D exacta o no exacta:

$$\begin{cases} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 4x \end{cases} \neq \therefore \text{La E.D. no es exacta} \quad (1.39)$$

Procedemos con la solución de esta E.D.N.E., por lo tanto tendremos que hallar el F.I.. Empezaremos con la ecuación 1.35^a

$$\frac{1}{(2x^2 + 3y^2 - 20)} \left(\frac{\partial(xy)}{\partial y} - \frac{\partial(2x^2 + 3y^2 - 20)}{\partial x} \right) = \frac{-3x}{2x^2 + 3y^2 - 20}$$

Aquí tenemos un problema, se supone que la función resultante solo debe depender de x , pero la nuestra depende de y también. Descartamos esta.

Como esta primera comprobación para hallar F.I. no cumple la condición probamos con la otra(ecuación 1.37):

$$\frac{1}{xy} \left(\frac{\partial(2x^2 + 3y^2 - 20)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right) = \frac{3x}{xy} = \frac{3}{y}$$

Este condicionante para hallar el F.I. solo depende de y , así que nos sirve y por ende, trabajaremos con ese mismo, por lo que ahora hallaremos el F.I. según la expresión 1.38:

$$U(y) = e^{\int \frac{3}{x} dy} = y^3 \quad (1.40)$$

Cuando se halla encontrado el F.I. multiplicamos a toda la E.D.N.E por $U(y)$ para obtener una E.D.E.

$$\begin{aligned} & y^3(xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0) \\ & xy^4dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3) = 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Si en este momento procedemos a comprobar si es exacta, obtendremos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3 = \frac{\partial N}{\partial x}, \therefore \text{es exacta.}$$

Ahora podemos resolverla como lo hacemos para las E.D.E.:

$$F(x,y) = \int xy^4 dx + G(y)$$

$$F(x,y) = \frac{y^4 x^2}{2} + G(y)$$

Derivamos F(x,y) respecto a y e igualamos a N(x,y)

$$2y^3x^2 + g'(y) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3$$

$$g'(y) = 3y^5 - 20y^3$$

$$G(y) = y^6 - 5y^4$$

$$F(x,y) = \frac{y^4 x^2}{2} + \frac{y^6}{2} - 5y^4 = C$$

Multiplicando por dos a toda la expresión, teniendo en cuenta que 2 es constante:

$$y^4 x^2 + y^6 - 10y^4 = C \quad (1.42)$$

^aPuedes empezar con la ecuación 1.35 o 1.37, de notas formas, si una no cumple la condición usas la otra.



1.6 Ecuaciones por sustitución

1.6.1 Ecuaciones Homogéneas

Recordando lo aprendido en la ecuación 1.1, una ecuación de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

será homogénea si M(x,y) y N(x,y) son homogéneas del mismo grado:

$$M(xt, yt) = t^n M(x, y) \quad N(xt, yt) = t^n N(x, y)$$

o:

$$M(x, y) = x^n M(1, u) \quad N(x, y) = x^n N(1, u)$$

$$u = \frac{y}{x}$$

Al final, tenemos que devolver el cambio de variable u . Una ecuación diferencial homogénea siempre puede reducirse a una ecuación de variable separable por medio de una sustitución algebraica.

¿Cómo se hace?

Sea la ecuación diferencial de la forma 1.24 y sea homogénea. Se reduce a una E.D de variable separable usando cualquiera de las sustituciones:

$$y = u \cdot x \quad (1.43a)$$

$$x = v \cdot y \quad (1.43b)$$

$$x = v \cdot u \quad (1.43c)$$

u y v son las nuevas variables dependientes.

R $x=v \cdot y$ se elige cuando $M(x,y)$ es de estructura más simple que la de $N(x,y)$. Si elegimos $y=u \cdot x$ con su derivada:

$$y = u \cdot x \longrightarrow dy = udx + xdu \quad (1.44)$$

Si reemplazamos 1.44 en 1.24:

$$M(x, ux)dx + N(x, ux) \underbrace{(udx + xdu)}_{dy} = 0$$

Aplicando la propiedad de homogeneidad a M y N es posible escribir:

$$x^n M(1, u)dx + x^n uN(1, u)dx + x^n xN(1, u)du = 0$$

$$x^n [M(1, u) + uN(1, u)]dx + x^n N(1, u)du = 0$$

Dividiendo a toda la expresión entre x^n

$$[M(1, u) + uN(1, u)]dx + N(1, u)du = 0$$

Si hacemos una división a nuestra conveniencia para arreglar la E.D.

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)du}{M(1, u) + uN(1, u)} = 0$$

R El procedimiento anterior no debe ser memorizado, puesto que es solo una ejemplo de como se debe realizar las sustituciones. El procedimiento debe hacerse por completo.

La sustitución por $x=v \cdot y$ se realiza de manera similar.

Observaciones:

1. En la práctica, la sustitución de $x=v \cdot y$ se elige cuando la función $M(x,y)$ sea de estructura más simple que $N(x,y)$.
2. Cuando no hay diferencia apreciable entre M y N , se puede usar cualquiera de los dos sustituciones.
3. Si al resolver la que escogimos vemos que se torna complicada(algebraicamente) usamos la otra sustitución.

Ejercicio 1.8 Resolver:

$$(x - y)dx + xdy = 0 \quad (1.45)$$

Si hacemos las propiedades de la homogeneidad, notaremos que son homogéneas en grado 1. Elegiremos:

$$y=u \cdot x \longrightarrow dy = udx + xdu \quad (1.46)$$

Reemplazando 1.8 en 1.8:

$$(x - ux)dx + x(udx + xdu) = 0$$

Dividimos toda la expresión entre x :

$$(1 - u)dx + (udx + xdu) = 0$$

Agrupando algebraicamente:

$$(1 - u + u)dx + xdu = 0 \longrightarrow dx + xdu = 0$$

Dividimos entre x^a :

$$\frac{dx}{x} + du = 0$$

Esta expresión ya es una E.D. de variable separable:

$$\int \frac{dx}{x} + \int du = \int x \\ \ln|x| + u = c$$

Devolviendo la variable u :

$$\boxed{\ln|x| + \frac{y}{x} = C}$$

^aEste paso depende de la función, recuerda que tenemos que buscar una E.D. de variable separable.

■

1.6.2 Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli

Otro tipo de ecuación que se resuelven por sustitución son las ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

Definición 1.6 La forma estándar de las E.D. de Bernoulli es:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n \quad (1.47a)$$

$$\frac{dx}{dy} + P(y) \cdot x = Q(y) \cdot x^n \quad (1.47b)$$

R En algunos casos, pueden haber funciones que acompañen a las $\frac{dy}{dx}$, pero ya se trata de un trabajo algebraico en llegar a las expresiones 1.47.

En ambos casos de las formas estándares 1.47, si $n=0$, $y=1$ en la ecuación 1.47a o $x=1$ en la ecuación 1.47b nos encontramos ante una E.D.L. y no hay problemas porque ya sabemos como resolver. Sin embargo si $n \neq 0$, $y \neq 1$ en la ecuación 1.47a o $x \neq 1$ en la ecuación 1.47b nos encontramos frente a un E.D.B³, estas E.D. se resuelven aplicando una sustitución.

El cambio de variable es:

$$W = 1^{1-n} \quad (1.48)$$

¿Cómo se llega a ese cambio de variable?⁴

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Dividimos entre y^n :

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad (1.49)$$

Haciendo un cambio de variable con su derivada:

$$W = y^{1-n} \rightarrow \frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx} \\ \frac{1}{(1-n)} \cdot \frac{dw}{dx} = y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (1.50)$$

³Abreviación de Ecuación Diferencial de Bernoulli.

⁴Obviamente en esta caso $y \neq 1$ y $n \neq 0$.

Sustituyendo la expresión 1.50 en 1.49:

$$\frac{1}{(1-n)} \cdot \frac{dw}{dx} + P(x)W = Q(x)$$

Multiplicando toda la expresión por (1-n):

$$\frac{dw}{dx} + \underbrace{(1-n)P(x)}_M W = \underbrace{(1-n)Q(x)}_N$$

Ahora es una E.D.L. y se procede con su procedimiento aprendido.

Ejercicio 1.9 Resolver:

$$(4-x^2) \frac{dy}{dx} + 4y = (2+x)y^2$$

Buscamos una expresión similar a 1.47a:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4}{(4-x^2)}y = \frac{2+x}{(4-x^2)}y^2$$

Dividimos entre y^2 :

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{4}{(4-x^2)}y^{-1} = \frac{2+x}{(4-x^2)} \quad (1.51)$$

Efectuamos el cambio de variable W:

$$\begin{aligned} W &= y^{1-2} \rightarrow \frac{dw}{dx} = (1-2)y^{-2} \cdot \frac{dy}{dx} \\ -\frac{dw}{dx} &= y^{-2} \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Reemplazando la expresión 1.52 en 1.52:

$$\begin{aligned} -\frac{dw}{dx} + \frac{4W}{(4-x^2)} &= \frac{2+x}{4-x^2} \\ \frac{dw}{dx} + \frac{4}{(x^2-4)} \cdot W &= \frac{1}{x-2} \end{aligned}$$

Ahora se procede a resolver como una E.D.L.

$$\begin{aligned} U(x) &= e^{\int \frac{4}{(x-2)} dx} \\ U(x) &= e^{\ln|x+2|} \\ U(x) &= \frac{x-2}{x+2} \\ \frac{x-2}{x+2} \cdot W(x) &= \int \frac{1}{(x-2)} \cdot \frac{(x-2)}{(x+2)} dx + C \\ W(x) &= [\ln|x+2| + C] \cdot \frac{x+2}{x-2} \end{aligned}$$

Devolviendo el cambio de variable $W = y^{(1-2)}$:

$$\boxed{y^{-1} = [\ln|x+2| + C] \cdot \frac{x+2}{x-2}} \quad (1.53)$$

■

Sistemas Digitales

2	Lógica digital	33
2.1	Compuertas lógicas	33
2.2	Formas de expresar funciones booleanas	38
2.3	Axiomas	42
2.4	Teoremas del álgebra de conmutación	42
2.5	Mapas de Karnaugh	45
2.6	Parámetros TTL y CMOS	52
3	Circuitos Lógicos	57
3.1	Sumador	57
3.2	Codificador y Decodificador	60
3.3	Multiplexor y Demultiplexor	64
3.4	Latch	66
3.5	Flip-Flops	70
3.6	División de frecuencia	76
3.7	Monoestables	77
4	Circuitos Lógicos Secuenciales	79
4.1	Máquina de estados	79
4.2	Grafos de estados	82

2. Lógica digital

Un sistema digital binario es un conjunto de dispositivos que son destinados a la generación, transmisión, manejo, procesamiento y almacenamiento de señales digitales.

2.1 Compuertas lógicas

2.1.1 Compuerta NOT

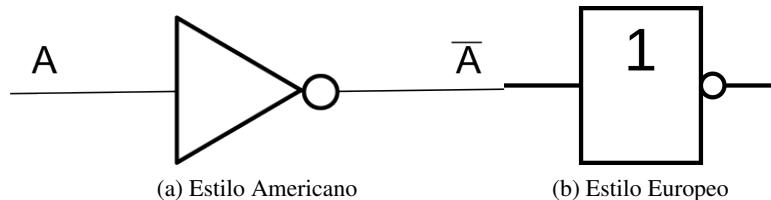


Figure 2.1: Simbología compuerta NOT

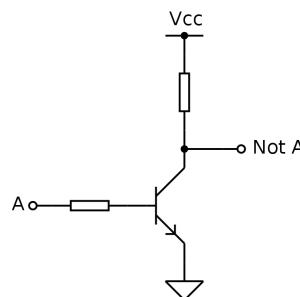


Figure 2.2: Implementación electrónica: Compuerta NOT

2.1.2 Compuerta AND

Se puede caracterizar como:

$$A \times B \times C \times \dots = X$$

La salida será 1 solo si todas las entradas son 1.

IN	OUT
0	1
1	0

Table 2.1: Tabla de verdad de la compuerta NOT

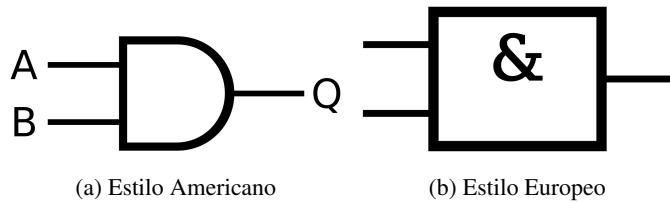


Figure 2.3: Simbología compuerta AND

Transistor AND Gate

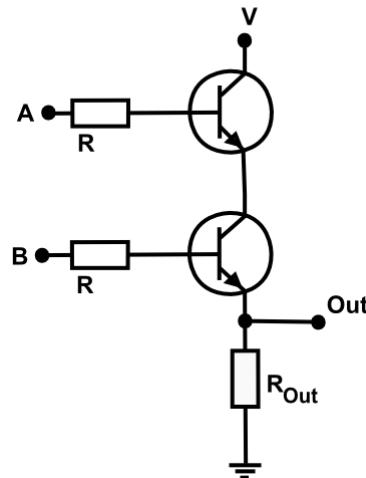


Figure 2.4: Implementación electrónica: Compuerta AND

IN		OUT
A	B	Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table 2.2: Tabla de verdad de la compuerta AND

2.1.3 Compuerta OR

$$A + B + C + \dots = X$$

La salida será 0 solo si todas las entradas son 0.

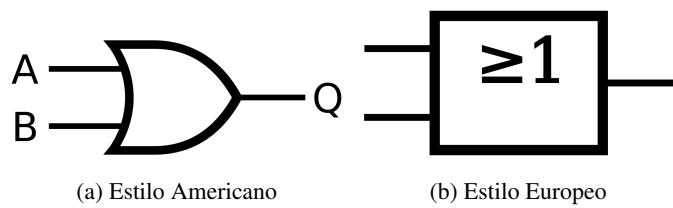


Figure 2.5: Simbología compuerta OR

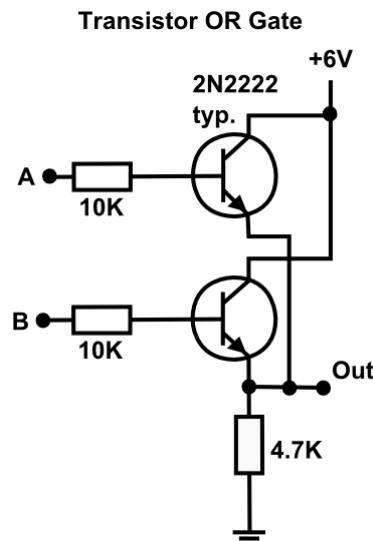


Figure 2.6: Implementación electrónica: Compuerta OR

IN		OUT
A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Table 2.3: Tabla de verdad de la compuerta OR

2.1.4 Compuerta NAND

Solo cuando todas sus entradas son ALTO, la salida será BAJO.

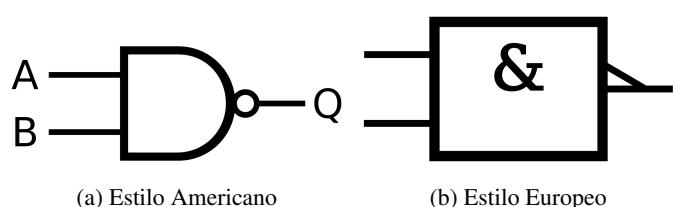


Figure 2.7: Simbología compuerta NAND

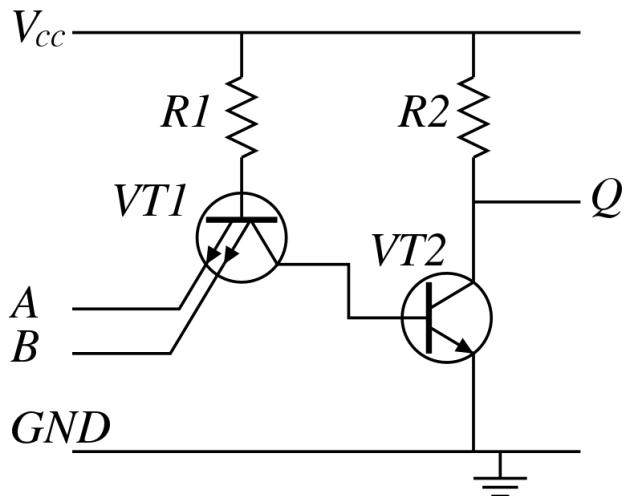


Figure 2.8: Implementación electrónica: Compuerta NAND

IN		OUT
A	B	Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Table 2.4: Tabla de verdad de la compuerta NAND

2.1.5 Compuerta NOR

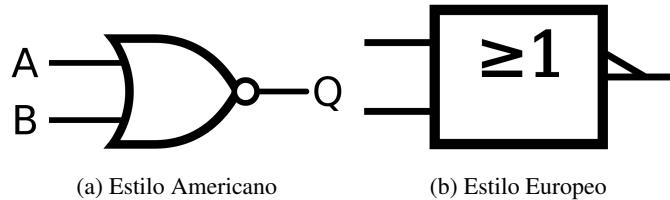


Figure 2.9: Simbología compuerta NOR

IN		OUT
A	B	Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Table 2.5: Tabla de verdad de la compuerta NOR

Solo si todas las entradas son 0, la salida será 1.

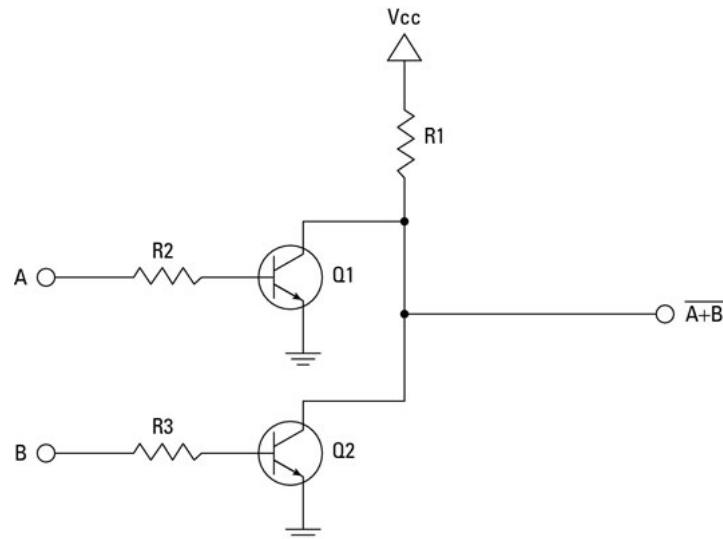


Figure 2.10: Implementación electrónica: Compuerta NOR

2.1.6 Compuerta OR exclusiva-XOR

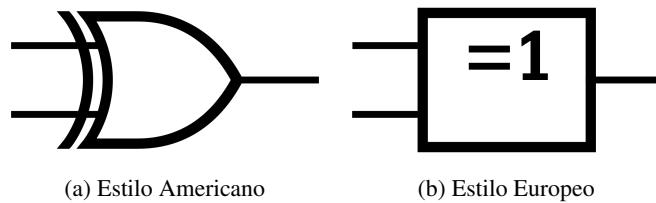


Figure 2.11: Simbología compuerta XOR

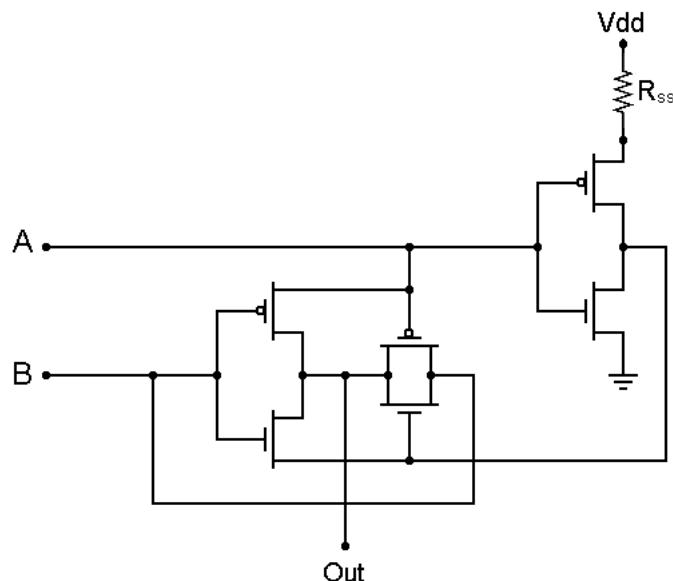


Figure 2.12: Implementación electrónica: Compuerta XOR

IN		OUT
A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Table 2.6: Tabla de verdad de la compuerta XOR

2.1.7 Compuerta NOR exclusiva-XNOR



Figure 2.13: Simbología compuerta XNOR

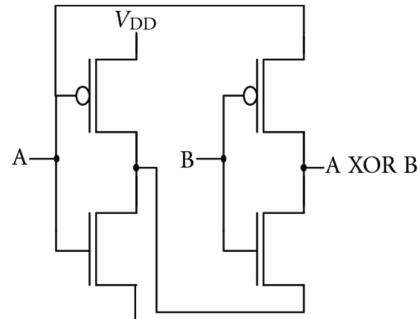


Figure 2.14: Implementación electrónica: Compuerta XNOR

IN		OUT
A	B	Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table 2.7: Tabla de verdad de la compuerta XNOR

2.2 Formas de expresar funciones booleanas

Existen formas de expresar las funciones booleanas: como **suma de productos** o como **productos de sumas**.

2.2.1 Suma de productos-SOP

Suma(**OR**) de términos(**AND**), formados por varias variables complementadas o no. Aquí nos importan las salidas con nivel **ALTO**. Como entradas, un nivel alto será $A=1$ mientras que un nivel bajo es $A'=0$.

$$f(a, b, c) = \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + abc + c$$

2.2.2 Productos de sumas-POS

Productos(**AND**) de sumas(**OR**) formadas por varias variables complementadas o no. Aquí nos importan las salidas con nivel **BAJO**. Como entradas, un nivel alto será $A'=1$ mientras que un nivel bajo es $A=0$.

$$F(a, b, c) = (A + B + C)(A + B' + C')(C' + A)$$



La terminología de la negación puede tener varias formas, en este libro usaremos dos: \bar{A} o A' . Ambos significan lo mismo. Asimismo, para el POS usaré letras mayúsculas y para SOP usaré letras minúsculas. Lo más importante es que entiendas como funciona todo así la terminología no será un problema.

Se detallará un ejemplo para poder explicar los SOP y POS para 3 variables. La tabla puede ser expandida para más variables pero todo funcionará bajo la misma lógica.

F	A	B	C	Min término	Notación minterm	Max término	Notación maxterm
0	0	0	0	$A'B'C'$	m_0	$A+B+C$	M_0
1	0	0	1	$A'B'C$	m_1	$A+B+C'$	M_1
2	0	1	0	$A'BC'$	m_2	$A+B'+C$	M_2
3	0	1	1	$A'BC$	m_3	$A+B'+C'$	M_3
4	1	0	0	$AB'C'$	m_4	$A'+B+C$	M_4
5	1	0	1	$AB'C$	m_5	$A'+B+C'$	M_5
6	1	1	0	ABC'	m_6	$A'+B'+C$	M_6
7	1	1	1	ABC	m_7	$A'+B'+C'$	M_7

Table 2.8: Notación de *minterm* y *maxterm*.

Ejercicio 2.1 Se presenta la tabla 2.9, expresar la misma tabla como SOP y como POS.

SOP:

En SOP, solo nos fijamos en las salidas de nivel ALTO(1). Una vez que las hayamos ubicado escribimos las filas tal y como están expresando las entradas como un producto. Por ejemplo, el primer ALTO se encuentra en la posición de F_1 , donde A y B son nivel BAJO y C es nivel ALTO. Escribimos, según la teoría, donde ALTO es A y BAJO es A' , el primer sumando como: $A'B'C$. Repetimos el mismo paso para F_3 , F_4 , F_5 , F_6 y F_7 puesto que tienen un nivel ALTO como salida. Si seguimos la bajo la lógica que se vio y sumando cada sumando obtendremos:

$$f(a, b, c) = \underbrace{A'B'C}_{F_1} + \underbrace{A'BC}_{F_3} + \underbrace{AB'C}_{F_5} + \underbrace{ABC'}_{F_6} + \underbrace{ABC}_{F_7}$$

Esta expresión también puede ser reducida usando notación dicha en la tabla 2.8. Como la tabla y nuestro ejemplo son de 3 variables de entrada, solo buscamos la equivalencia dentro de la columna *Notación minterm*, la forma reducida sería:

$$f(a, b, c) = m_1 + m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

POS:

Para POS, en vez de fijarnos en los niveles ALTOS, nos fijamos en los niveles BAJOS y seguimos la misma lógica vista en SOP, sin embargo, ahora en vez de cada fila sea expresada como un producto y luego sumemos todos, en este caso cada fila se expresa como una suma, y al agrupar todos los términos será mediante una suma. Así, los ceros están en las ubicaciones F_0 , F_2 y F_4 , entonces, según la teoría 1 será A' y 0 será A:

$$F(A, B, C) = \underbrace{(A + B + C)}_{F_0} \cdot \underbrace{(A + B' + C)}_{F_2} \cdot \underbrace{(A' + B + C)}_{F_4}$$

Según la tabla 2.8 también puede ser simplificado:

$$F(A, B, C) = M_0 M_2 M_5$$

■

F_1	A	B	C	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Table 2.9: Tabla ejemplo 1

2.2.3 Conversión de SOP a POS

A veces es necesario expresar de una forma u otra, es por eso que usa la conversión de SOP a POS. Se explicará usando un ejemplo:

$$f(x, y, z) = x'y'z' + x'yz + x'yz' + xy'z$$

- Evaluamos los binarios de los sumando, recordando las equivalencias:

$$f(x, y, z) = \underbrace{x'y'z'}_{\begin{matrix} 000 \\ 0 \end{matrix}} + \underbrace{x'yz}_{\begin{matrix} 011 \\ 3 \end{matrix}} + \underbrace{x'yz'}_{\begin{matrix} 010 \\ 2 \end{matrix}} + \underbrace{xy'z}_{\begin{matrix} 101 \\ 5 \end{matrix}}$$

El color rojo es su equivalente en binario mientras que el azul lo es en decimal.

- Identificamos los términos faltantes, como es una función lógica de 3 variables: $2^3 = 8$, en el paso uso, con la ayuda de nuestra tabla 2.8 logramos identificar a los términos 0,3,2,5; por consecuente nos faltan los términos 1, 4, 6 y 7 cuyos binarios son:
 - 1=001
 - 4=100
 - 6=110
 - 7=111
- Ahora escribimos esos mismos términos que faltan(1, 4, 6 y 7) como POS:

$$f(a, b, c) = \underbrace{(A + B + C')}_{1} \cdot \underbrace{(A' + B + C)}_{4} \cdot \underbrace{(A' + B' + C)}_{6} \cdot \underbrace{(A' + B' + C')}_{7}$$

2.2.4 Forma canónica

Función en donde cada sumando o multiplicando aparecen todas las entradas, sin importar si están negada o no; en otras palabras, si se tiene una función de tres variables $f(a, b, c)$, una expresión canónica puede ser:

$$f(a, b, c) = ab'c + a'b'c + abc + a'b'c'$$

2.2.5 Forma normalizada

Reducción de la forma canónica mediante el álgebra de conmutación. De tener, por ejemplo, una función $f(a, b, c)$, una forma normalizada sería:

$$f(a, b, c) = a + bc' + a'c$$

Vemos que en cada sumando o producto no están presentes todas las variables.

2.2.6 ¿Cómo pasar de la forma normalizada a la canónica?

1. **Identificar** los sumandos de **NO** estén completos, usaremos de ejemplo la siguiente función lógica: $f(a, b, c) = a + bc + \overline{abc}$ ¹

$$f(a, b, c) = \textcolor{red}{a} + \textcolor{red}{bc} + \overline{\textcolor{blue}{abc}}$$

Los términos en color **rojo** son los términos que están incompletos, es decir, no están presentes todas las variables a excepción del tercer sumando de **azul**.

2. **Completar** los términos incompletos. Aunque haya una teoría detrás de todo, lo más rápido es completar los términos incompletos con todas las variaciones posibles. En este caso tenemos 3 variables, así que procedemos:

- **a:** En el caso de tener un solo término, en nuestro ejemplo a , sabemos que a este sumando le faltan 2 variables: b y c . Entonces repetimos el término unitario (a en nuestro caso) 2^n veces, donde n es el número de variables faltantes; en este caso es $n=2$ porque falta b y c . Una vez que hayamos repetidos 2^n veces la variable unitaria, a cada una de ellas escribimos las posibles combinaciones que pueden tomar las dos variables restantes:

$$\begin{array}{ccc} \textcolor{red}{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \textcolor{red}{a} & \bar{b} & c \\ \textcolor{red}{a} & b & \bar{c} \\ \textcolor{red}{a} & b & c \end{array}$$

Hemos generado 4 términos.

- **bc:** Repetimos el mismo paso anterior, ahora n será 1, por lo tanto $2^n = 2$, repetimos dos veces el término bc y completamos con las posibles variantes del término faltante:

$$\begin{array}{ccc} b & c & \bar{a} \\ b & c & a \end{array}$$

Hemos generado 2 términos.

El procedimiento será el mismo para más variables, sin embargo para más variables será más largo el proceso.

¹Otra manera de expresar la negación aparte de \bar{A} , A' es $/A$

3. **Sumamos** todos los términos hallados, incluso los que no hemos tocado (\overline{abc}), al sumarlos todos debemos tener en cuenta el teorema 2.3, en otras palabras, términos repetidos solo se colocan una vez.

R

Es común que escuchemos diferentes formas de expresar un circuito lógico. Una común es expresión booleana: Esta es una forma de expresar la salida como las operaciones que se realizan. Por ejemplo, sean las entradas A y B, la salida de una compuerta AND es $A \cdot B$, la compuerta OR se expresa como $A+B$, la compuerta XOR \oplus y así existen otros operadores para las demás compuertas y circuitos lógicos.

2.3 Axiomas

Los axiomas son conjuntos mínimos de definiciones básicas que suponemos como verdaderas:

1. $X=0$ si $X \neq 1 \vee X=1$ si $X \neq 0$
2. Si $X=0 \Rightarrow X'=1 \wedge$ Si $X=1 \Rightarrow X'=0$
3. $0 \cdot 0=0 \wedge 1+1=1$
4. $1 \cdot 1=1 \wedge 0+0=0$
5. $0 \cdot 1=1 \cdot 0=0 \wedge 1+0=0+1=1$

2.4 Teoremas del álgebra de conmutación

Los teoremas siguientes son la base de la simplificación de circuitos complejos:

Teorema 2.1 — Identidad.

$$X + 0 = X \tag{2.1}$$

$$X \cdot 1 = X \tag{2.2}$$

Teorema 2.2 — Elemento nulo.

$$X + 1 = 1 \tag{2.3}$$

$$X \cdot 0 = 0 \tag{2.4}$$

Teorema 2.3 — Potencias idénticas.

$$X + X = X \tag{2.5}$$

$$X \cdot X = X \tag{2.6}$$

Teorema 2.4 — Involución.

$$(X')' = X \tag{2.7}$$

Teorema 2.5 — Complementos.

$$X + X' = 1 \tag{2.8}$$

$$X \cdot X' = 0 \tag{2.9}$$

Teorema 2.6 — Comutatividad.

$$X + Y = Y + X \quad (2.10)$$

$$X \cdot Y = Y \cdot X \quad (2.11)$$

Teorema 2.7 — Asociatividad.

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z) \quad (2.12)$$

$$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z) \quad (2.13)$$

Teorema 2.8 — Distributividad.

$$X \cdot Y + X \cdot Z = X \cdot (Y + Z) \quad (2.14)$$

$$(X + Y)(X + Z) = X + Y \cdot Z \quad (2.15)$$

Teorema 2.9 — Cubierta.

$$X + X \cdot Y = X \quad (2.16)$$

$$X(X + Y) = X \quad (2.17)$$

Teorema 2.10 — Combinación.

$$X \cdot Y + X \cdot Y' = X \quad (2.18)$$

$$(X + Y)(X + Y') = X \quad (2.19)$$

Teorema 2.11 — Consenso.

$$X \cdot Y + X' \cdot Z = X \cdot Y + X' \cdot Z \quad (2.20)$$

$$(X + Y)(X' + Z)(Y + Z) = (X + Y)(X' + Z) \quad (2.21)$$

Teorema 2.12 — DeMorgan.

$$\overline{(X + Y)} = \overline{X} \cdot \overline{Y} \quad (2.22)$$

$$\overline{(X \cdot Y)} = \overline{X} + \overline{Y} \quad (2.23)$$

2.4.1 Dualidad

Cualquier teorema o identidad en el álgebra de conmutación continua siendo verdadero si tanto **0** y **1** como **·** y **+** son intercambiados en todas partes.

Ejercicio 2.2 Dada la tabla 2.10, encuentre las formas canónicas de la forma POS y SOP:

Solución

Salida R

POS:

$$R = \underbrace{(X + Y + Z)}_{M_0} \underbrace{(X + Y + Z')}_{M_1} \underbrace{(X + Y' + Z)}_{M_2} \underbrace{(X' + Y + Z)}_{M_4}$$

$$R = \prod M(0, 1, 2, 4)$$

SOP:

$$R = \underbrace{X'YZ}_{m_3} + \underbrace{XY'Z}_{m_5} + \underbrace{XYZ'}_{m_6} + \underbrace{XYZ}_{m_7}$$

$$R = \sum m(3, 5, 6, 7)$$

Salida S**POS:**

$$R = \underbrace{(X + Y + Z)}_{M_0} \underbrace{(X + Y' + Z')}_{M_3} \underbrace{(X' + Y + Z')}_{M_5} \underbrace{(X' + Y' + Z)}_{M_6}$$

$$R = \prod M(0, 3, 5, 6)$$

SOP:

$$R = \underbrace{X'Y'Z}_{m_1} + \underbrace{X'YZ'}_{m_2} + \underbrace{XY'Z'}_{m_4} + \underbrace{XYZ}_{m_7}$$

$$R = \sum m(1, 2, 4, 7)$$

■

F	X	Y	Z	R	S
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	1

Table 2.10: Ejercicio 2

Corolario 2.1 — Llenado de tablas de verdad. Antes de pasar a los Mapas de Karnaugh, hacer las tablas de verdad son fáciles independientemente del número de variables. Se ubica todas las variables en la tabla y se procede a llenar cada columna de izquierda a derecha, sin embargo, en las filas intercalando ceros y unos de acuerdo a la posición de la columna restada en una unidad. Por, ejemplo para la columna número 1(de derecha a izquierda), se intercalan ceros y unos cada 2^0 posiciones siempre empezando desde 0; en otras palabras en la columna

escribiremos 0-1-0-1-0-1-0....

Para la columna 2, los ceros y unos se intercalan cada 2^1 posiciones; en otras palabras escribiremos 0-0-1-1-0-0-1-1....Para la columna 3, 2^2 ; 0-0-0-1-1-1-1-0-0-0-0....

El proceso funciona para n variables independiente de el número de variables.

2.5 Mapas de Karnaugh



Importante: En todo el desarrollo de este capítulo el bit más significativo será A y el menos significativo será D,E,F dependiendo del número de variables.

Los mapas de Karnaugh son una forma de expresar las tablas de verdad de varias variables. Nos permite no escribir muchas combinaciones para expresar varias funciones. Los mapas de Karnaugh tienen la siguientes formas:

		<i>B</i>
	0	1
<i>A</i>	0	
1		

2.5.1 Mapas de Karnaugh-4 variables

Las posiciones se detallan en el siguiente cuadro:

		<i>C</i>
	0	1
<i>AB</i>	00	
	01	
	11	
	10	

Las posiciones reales cambian de acuerdo al número de variables, las posiciones reales para 4 variables es:

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

Las posiciones reales se usan en base a los unos y ceros ubicados en base a su posición en el cuadro 2.8.

No es necesario memorizar las posiciones, puesto que las posiciones reales no son más que la forma decimal de las variables. Del cuadro de 4 variables visto antes, por ejemplo, cada número será de la forma **ABCD**: el cero es **0000**, la posición 1 es **0001**, la posición 15 es **1111**. Este cambio se orden en los términos 2-3, 6-7, 14-15 y 10-11 se produce porque usamos la codificación Gray.

Es importante decir que los laterales del los mapas de Karnaugh son cílicos, es decir:

- Los cuadros limítrofes del cuadro 14 son, 6 por arriba, 15 por la izquierda, 10 por abajo y 12 por la derecha.
- Los cuadros limítrofes del cuadro 10 son, 14 por arriba, 11 por la izquierda, 2 por abajo y 8 por la derecha.
- Los cuadros limítrofes del cuadro 8 son, 12 por arriba, 10 por la izquierda, 0 por abajo y 9 por la derecha.

Recordemos que cuando trabajamos con SOP solo nos importa los 1 y para POS solo importa los 0. Ademas el bit que esta a la izquierda es el **Bit más significativo(MSB)** y hacia la derecha se encuentra el **Bit menos significativo(LSB)**.



En los mapas de Karnaugh sí y solo sí se agrupan en grupos de base 2(1, 2, 4, 8...). Siempre se prioriza agrupar la mayor parte de, se pueden compartir bits entre grupos pero siempre agrupando la mayor cantidad de bits.

Ejercicio 2.3

Expresar la siguiente expresión en un mapa de Karnaugh:

$$Z = \overline{ABC}D + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}\overline{C}D + ABCD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$

Solución:

Tenemos dos opciones, la más fácil es pasar cada sumando a binario pero es requisito saber los números decimales en el sistema binario. Para ello tenemos que recodar las equivalencias de acuerdo si estamos frente a un SOP o POS, de ahí, son alterar el orden del bit más significativo tan solo escribimos ceros y unos:

$$Z = 0011 + 0100 + 1101 + 1111 + 1100 + 0001 + 1010$$

Una vez que lo hemos pasado a binario, tenemos que pasarlo a decimal para saber las casillas donde colocaremos unos, si fuera POS, sabremos las casillas donde colocaremos ceros:

$$Z = 3 + 4 + 13 + 15 + 12 + 1 + 10$$

Ya tenemos los números de casillas donde tenemos que colocar unos. Dibujamos nuestro mapa y colocamos unos **SOLO** en las casillas que nos resultó de pasar de binario a decimal. En las demás casillas en blanco colocaremos ceros.

		CD				
		00	01	11	10	
AB		00	0	1	1	0
		01	1	0	0	0
AB		11	1	1	1	0
		10	0	0	0	1

2.5.2 Agrupación de términos

Algo importante con los mapas de Karnaugh es la agrupación de términos que se mencionó anteriormente. La agrupación se hace una vez terminada la realización de los mapas de Karnaugh, se explicará con un ejemplo:

Dada la función lógica:

$$Z = A + \bar{C}D + A\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D}$$

Al contrario del ejemplo anterior, esta forma no es de la forma canónica, sino que es de la forma normalizada. Lo que se haría normalmente es escribir todas las posibles combinaciones para cada sumando; por ejemplo, para el primer sumando(A) le faltan 3 términos, escribiríamos 2^3 combinaciones faltantes, para el segundo sumando sería 2^2 combinaciones faltantes y así sucesivamente, es un método valido pero lento. Hay un método más sencillo que lo explicaré luego, ahora primero vamos a agrupar. La función lógica Z , generará el siguiente mapa de Karnaugh:

		CD				
		00	01	11	10	
AB		00	0	1	0	0
		01	0	1	0	1
AB		11	1	1	1	1
		10	1	1	1	1

Agrupamos, teniendo en cuenta que tenemos que agrupar la mayor cantidad de dígitos posibles y es

valido compartir bits, la agrupación correcta es:

		CD				
		00	01	11	10	
AB		00	0	1	0	0
		01	0	1	0	1
		11	1	1	1	1
		10	1	1	1	1

Puedes apreciar que el sector verde tiene una intersección con el sector rosado, es posible agrupar los dos unos que están fuera de esa intersección pero siempre tienes que tratar de agrupar la mayor cantidad posible, puesto que los mapas de Karnaugh son un método para **simplificar** funciones lógicas. Con el sector amarillo no tenemos de otra que agrupar de dos, ya que 3 es un número invalido de agrupación.

La función tiene 4 sumandos pero la agrupación en el mapa de Karnaugh solo tenemos 3 sectores, eso quiere decir que es puede simplificar la función Z:

- **Sector verde:** Concéntrate en el sector azul, la columna que no dice: que tanto C y D no están cambiando su valor, siempre están siendo 0 y 1. Ademas fíjate que pasa con A y B a lo largo de esa columna: están cambiando todos sus valores. Podemos decir que: *En el sector azul, los valores de C y D se mantienen estáticos pero A y B son valores cambiantes para todo C y D.* En conclusión, escribiremos el primer sumando como:

$$\bar{C}D$$

Solo es CD porque los valores para A y B no nos importan ya que estamos "englobando" todas sus variantes(de A y B).

- **Sector rojo:** Si nos centramos en el sector A, es un caso distinto. Analizamos el comportamiento para A: siempre será 1. Para B: Depende, pues toma tanto valor 0 como 1. C y D: No se puede decir mucho de ellos puesto que varían totalmente, en otras palabras: no nos importa sus variantes pues el sector cubre todas ellas. En consecuencia, la única variable "estable" es A valiendo 1, pues si A vale 1 las variables no nos importan su comportamiento ya que se engloba todo, es por ello que el segundo sumando resultante de este sector es:

$$A$$

- **Sector amarillo:** Este es el sector más pequeño, así que lo analizaremos: Para A: Si cambia, puede ser 0 como 1. Para B: No cambia, se mantiene estático valiendo 1. Para C y D: no cambia, sí o sí tiene que ser C=1 y D=0. En consecuencia, el valor de A no nos importa por que puede ser 0 como 1 pero los demás valores son importante porque delimitan el sector, el tercer sumando será:

$$BC\bar{D}$$

Como resultado final, la expresión de 4 sumando puede ser expresada como 3 sumando, siendo la nueva función simplificada:

$$Z = A + \bar{C}D + BC\bar{D}$$

Ejercicio 2.4 Expresar la siguiente función lógica en mapa de Karnaugh:

$$Z = \bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + BCD$$

Solución:

Lo haremos de la forma larga por si no le agarras truco a los mapas de Karnaugh. Escribimos sus formas binarias y completamos los sumandos incompletos para hallar las formas binarias ya que esta la forma normalizada:

$$Z = \bar{C}D + \underbrace{A\bar{B}\bar{C}\bar{D}}_{1010} + \underbrace{A\bar{B}\bar{C}\bar{D}}_{1000} + \underbrace{AB\bar{C}\bar{D}}_{1100} + BCD$$

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}(0001)$$

$$\bar{A}BCD(0111)$$

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D(0101)$$

$$ABC\bar{D}(1111)$$

$$A\bar{B}\bar{C}D(1001)$$

$$AB\bar{C}D(1101)$$

Ahora puedes ubicar en todas esas posiciones **unos**, puedes pasarlo a decimal si gustas o trabajar tal como están expresadas en binario recordando la forma ABCD. Lo expresamos en su mapa de Karnaugh y agrupamos:

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	0	0
	01	0	1	1	0
	11	1	1	1	0
	10	1	1	0	1

En el mapa de Karnaugh se muestran 4 sectores, por lo tanto, 4 sumandos:

$$Z = \bar{C}D + A\bar{C} + BD + A\bar{B}D$$

Solo céntrate en las variables que no cambian, las estáticas pues las dinámicas que cambian no nos importan tanto, pues se sobreentiende que ya están agrupadas.

Si se desea también se puede expresar como POS, es absolutamente lo mismo pero nos centramos en los **ceros** y agrupamos como siempre:

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	0	0
	01	0	1	1	0
	11	1	1	1	0
	10	1	1	0	1

La expresión en SOP es:

$$Z = (A + D) \cdot (B + \bar{C} + \bar{D}) \cdot (\bar{B} + \bar{C} + D)$$

Nota que ahora $A=0$ y $\bar{A}=1$, el desarrollo es el mismo que SOP, solo ahora cada factor contiene sumas y se unen todos los factores mediante un producto. ■



En necesario no olvidar lo que caracteriza a SOP y POS:

SOP es una **SUMA** donde cada sumando esta compuesto por **FACTORES**, aquí $A=1$ y $\bar{A}=0$.

Por el otro lado POS es un **PRODUCTO** donde cada factor esta compuesto por **SUMAS**, aquí $A=0$ y $\bar{A}=1$.

Corolario 2.2 — Forma de sumatoria y productoria. Si recordamos la formas de expresar las funciones lógicas mediante sumatorias ($\sum(1, 2, 3, 5)$) o productorias ($\prod(1, 2, 3, 5)$), solo colocamos **unos** en las posiciones indicadas por la sumatoria y **ceros** en las posiciones indicadas por la productoria; ademas llenamos con sus negadas en los cuadros que restan.

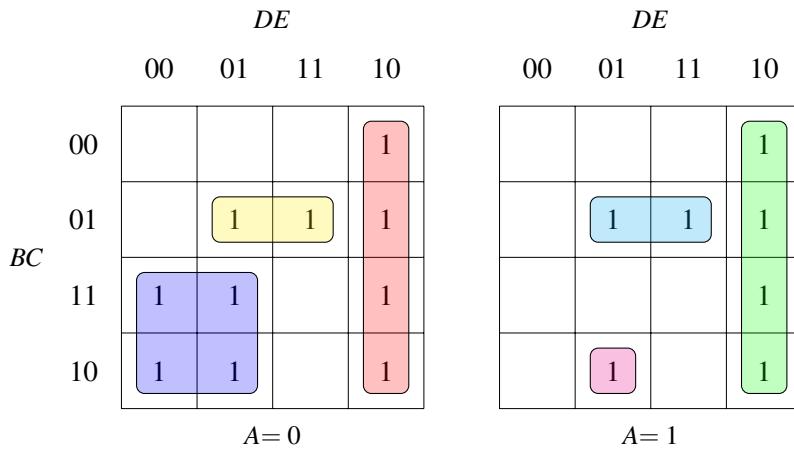
2.5.3 Mapas de Karnaugh-5 variables

Se expresa en dos tablas. Se presenta la numeración para un mapa de 5 variables:

		DE				DE			
		00	01	11	10	00	01	11	10
BC	00	0	1	3	2	16	17	19	18
	01	4	5	7	6	20	21	23	22
	11	12	13	15	14	28	29	31	30
	10	8	9	11	10	24	25	27	26

$A=0$ $A=1$

Para poder expresar en SOP y POS la tabla E=0 se superpone encima de la tabla E=1



Imaginariamente solapa $A=1$ sobre $A=0$, notaremos que hay sectores que coinciden como el sector verde con el rojo y amarillo con celeste. Podemos escribir el sector verde y rojo como una sola expresión: no nos importa A , no nos importa B y C , solo tenemos que definir bien D y E pues son fijos:

$$D\bar{E}$$

Para los sectores amarillo y celeste: E no nos importa puesto que puede ser 0 como 1, B y C si importan pues son estables, no cambian. D tampoco nos importa, puede ser 0 como 1, sin embargo, E si importa ya que si o si tiene que ser 1:

$$\bar{B}CE$$

Los otros sectores(azul y rosado) son únicos ya que no tienen coincidencia así que se escribirán de forma única:

$$B\bar{D}\bar{A}$$

$$B\bar{C}\bar{D}E$$

Siendo la expresión final de la tabla:

$$Z = D\bar{E} + \bar{B}CE + B\bar{D}\bar{A} + B\bar{C}\bar{D}E$$

Si se realiza el álgebra de conmutación el término de la casilla número 25 desaparecerá.

2.5.4 Mapas de Karnaugh-6 variables

Mientras más variables se tengan, los mapas de karnaugh dejan de ser útiles debido a su complejidad y se tornan complejos, un mapa de 6 variable es lo complicado que puedes trabajar, aunque se puede con más no es común verlos. La numeración de las casillas es:

		EF						EF				
		00	01	11	10			00	01	11	10	
CD		00	0	1	3	2			16	17	19	18
		01	4	5	7	6			20	21	23	22
		11	12	13	15	14			28	29	31	30
		10	8	9	11	10			24	25	27	26
		AB = 00						AB = 01				
CD		00	32	33	35	34			48	49	51	50
		01	36	37	39	38			52	53	55	54
		11	44	45	47	46			60	61	63	62
		10	40	41	43	42			56	57	59	58
		AB = 10						AB = 11				



El MSB es A y el LSB es F, y las casillas como se dijo es la representación decimal de los bits en binario, por ejemplo: la casilla 56 ocupa la casilla 111000(ABCDEF) que si lo pasas a decimal es 56.

2.6 Parámetros TTL y CMOS

2.6.1 Tensión de alimentación continua

TTL En continua(DC), para los *Transistor-Transistor Logic* la alimentación es de +5V.

CMOS En DC, para los *Complementary Metal Oxide Semiconductor* existen en +5V, +3.3V, +2.5V y +1.2V

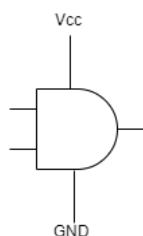


Figure 2.15: En los diagramas se omite los pines Vcc y GND.

2.6.2 Nivel lógico CMOS +5V

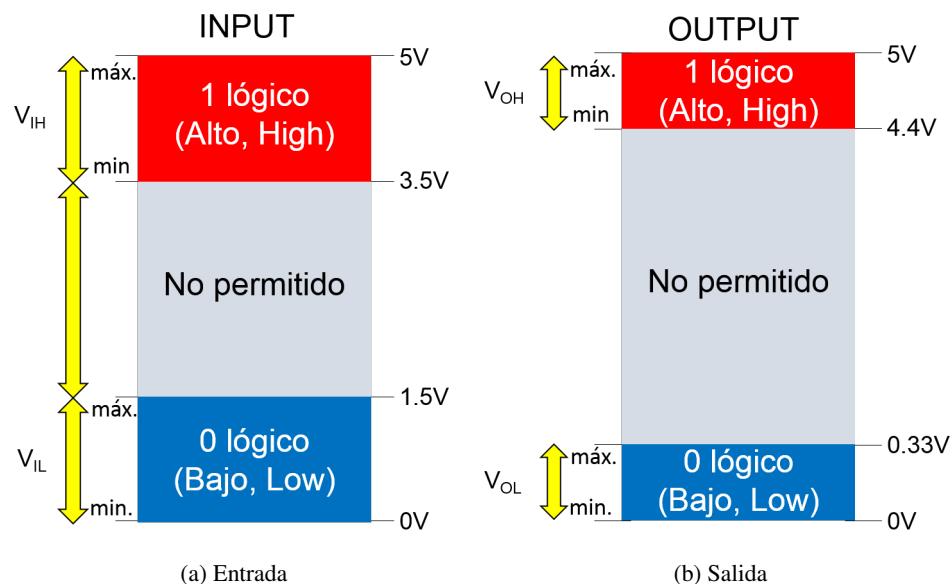


Figure 2.16: Nivel lógico CMOS a +5V.

2.6.3 Nivel lógico CMOS +3V

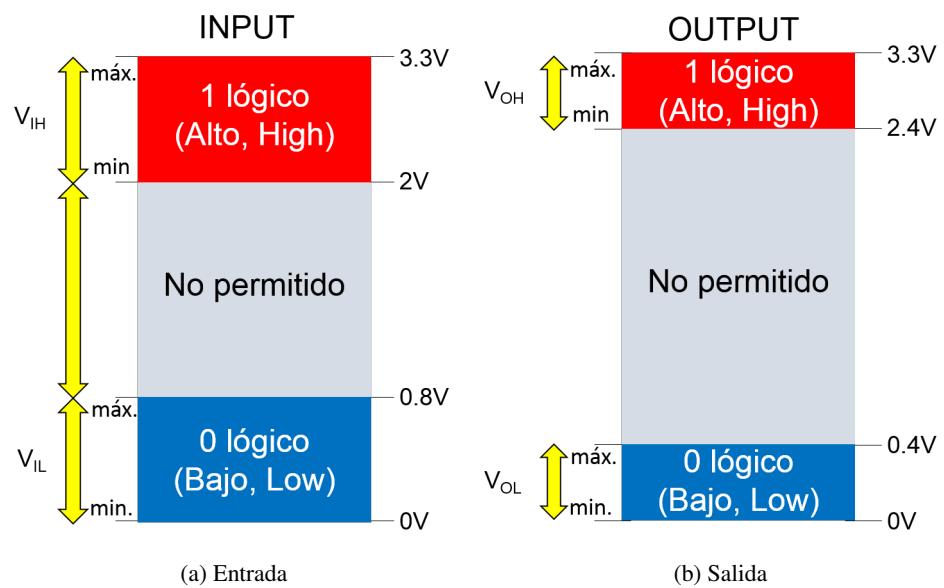


Figure 2.17: Nivel lógico CMOS a +3.3V.

2.6.4 Nivel lógico TTL

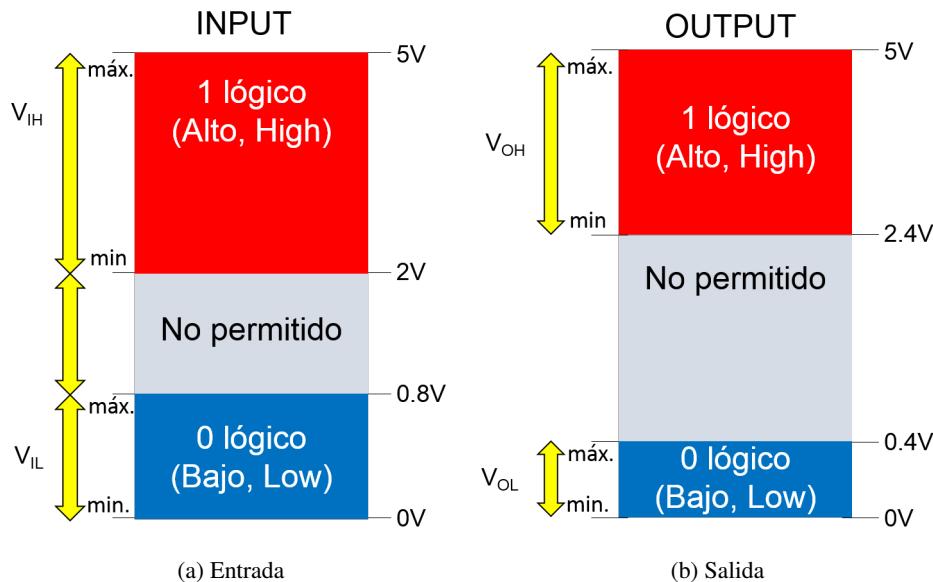


Figure 2.18: Nivel lógico TTL a +3.3V.

2.6.5 Inmunidad y Margen de ruido

Capacidad de tolerar ciertas fluctuaciones de tensión no deseadas en sus entradas sin que cambie. La medida de inmunidad de ruido es el margen de ruido. Para determinado circuito se especifican dos valores:

V_{NH} Margen de ruido alto.

V_{NL} Margen de ruido bajo.

$$V_{NH} = V_{OH(min)} - V_{IH(min)} \quad (2.24a)$$

$$V_{NL} = V_{IL(mx)} - V_{OL(mx)} \quad (2.24b)$$

2.6.6 Disipación de potencia

Cuando el estado de salida de la puerta es a nivel alto, circula la corriente I_{CCH} y cuando es nivel bajo circula una corriente I_{CCL} .

$$I_{CC} = \frac{I_{CCH} + I_{CCL}}{2} \quad (2.25)$$

Ejercicio 2.5 Por una determinada puerta circulan $2\mu A$ cuando su salida esta a nivel Alto y $3.6\mu A$ cuando esta a nivel bajo. ¿Cuál es la disipación de potencia media si:

- La puerta esta en un estado de salida estático alto?
- La puerta esta en un estado de salida estático bajo?
- V_{cc} es 5V y la puerta funciona con un ciclo de trabajo de 25% en alto?

Solución:

1. Puerta estática en estado alto:

$$P = I \times V$$

$$P = 2\mu A \times 5V$$

$$P = 10\mu W$$

2. Puerta estática en estado bajo:

$$P = I \times V$$

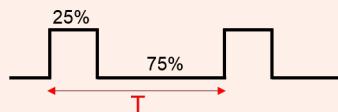
$$P = 3.6\mu A \times 10V$$

$$P = 18\mu W$$

La potencia media es:

$$P_m = \frac{10\mu W + 18\mu W}{2} = 14\mu W$$

3. V_{CC} es 5 V y nivel alto a 25%: 25% duty cycle es otra forma de expresar, esta forma es usada en PWM.



$$P = 25\%(10\mu W) + 75\%(14\mu W)$$

$$P = 2.5\mu W + 13.5\mu W$$

$$P = 16W$$

La disposición en un circuito TTL es escencialmente constante dentro de su rango de frecuencias de operación. Para los CMOS depende de la frecuencia.

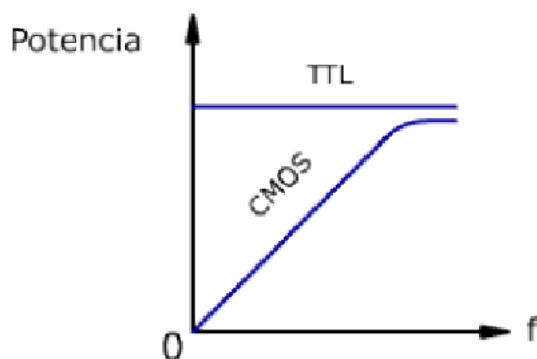


Figure 2.19: Curva disipación de potencia.

2.6.7 Carga y Fan-out

Cuando la salida de una compuerta es la entrada de otra, esto se convierte en carga. Fan-out es el límite de cuantas puertas se puede colocar.

3. Circuitos Lógicos

Existen dos tipos de circuitos lógicos:

Combinacional Donde la salida solo depende de la entrada actual.

Secuencial Donde la salida depende de la entrada actual y la secuencia anterior.

3.1 Sumador

3.1.1 Semi-sumador

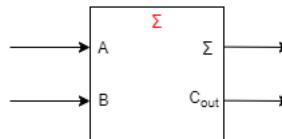


Figure 3.1: Semi-sumador

A y B Bits de entrada.

Σ Suma.

C_{out} Acarreo de salida.

Su tabla de verdad es la siguiente:

A	B	C_{out}	Σ
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Table 3.1: Tabla de verdad: semi-sumador

Las dos entradas dos A y B, la suma en binario de ambas entradas es la salida Σ y el acarreo¹(lo que comúnmente llamamos: "lo que llevamos") es la salida C_{out} . Ese circuito solo depende de

¹Por ejemplo, $5+3=8$, no existe acarreo. Pero si sumamos $8+9$, sería 4 con acarreo de 1, en total 14. El acarreo depende del sistema de numeración. en base 10, el valor máximo es 9 ya que 10 será 0 con acarreo de 1; en base 2 ocurre lo mismo lo máximo será 10(2 en base 10).

A	B	C_{in}	C_{out}	Σ
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Table 3.2: Tabla de verdad: Sumador completo.

las entradas actuales por si mismo. Para implementar este circuito, se tiene que implementar el siguiente circuito lógico:

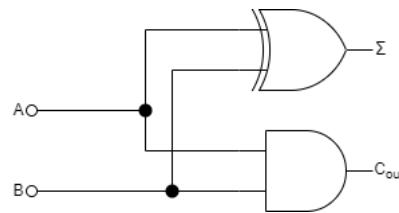
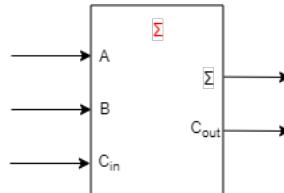


Figure 3.2: Circuito lógico semi sumador

3.1.2 Sumador completo

Figure 3.3: Sumador completo
Donde:

A y B Bits de entrada.

C_{in} Acarreo de entrada.

Σ Suma.

C_{out} Acarreo de salida.

La tabla de verdad del sumador completo es: Simplificando por mapas de Karnaugh, se obtiene el siguiente circuito lógico:

3.1.3 Sumador paralelo

Si implementamos los sumadores completo en cascada se obtiene el sumador en paralelo, que tiene la capacidad de sumar números con más dígitos.

3.1.4 Sumador 74LS283

Este es un circuito que sirve como sumador de dos números de 4 bits, se puede encadenar más circuitos en forma de cascada para expandir el tamaño. Para poder usar este sumador se debe seguir

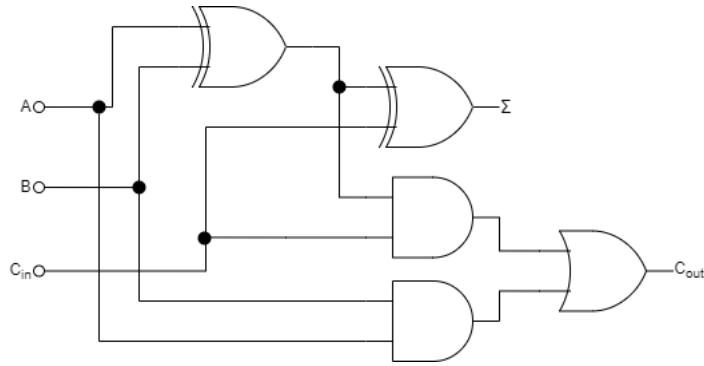


Figure 3.4: Circuito lógico sumador completo

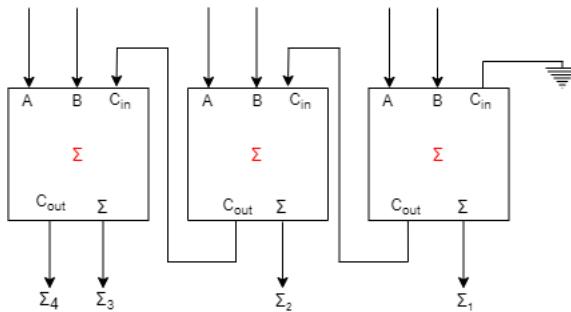


Figure 3.5: Sumador paralelo

los siguientes pasos:

- Identificar los números:** En nuestro ejemplo, usaremos B=22 y A=9.
- Pasar números a binario:** Si se desea la suma, solo se pasa a binario. Si se desea una resta, por ejemplo 22+(-9), en necesario pasar a binario ambos números y el número negativo se tiene que negar usando complemento a 1.
- Colocar los números en las entradas:** Para la suma: B=22=0001 0110 y A=9=0000 1001 en caso de la suma, en caso de resta: B=22=0001 0110 y A=-9=1111 0110. En este caso el tamaño de cada número es 1 byte, y están agrupados en grupos de 4 bits. Colocamos en las entradas en grupos de 4 bits empezando con el MSB.

Para la suma:

- **B(1-4):** Colocamos 0001.
- **A(1-4):** Colocamos 0000.
- **B(5-8):** Colocamos 0110.
- **A(5-8):** Colocamos 1001.
- **Interruptor Suma/Resta:** Este es un interruptor que comuta entre una suma y resta, como sumaremos 22+9 lo dejamos en 0.

Para la resta:

- **B(1-4):** Colocamos 0001.
- **A(1-4):** Colocamos 1111.
- **B(5-8):** Colocamos 0110.
- **A(5-8):** Colocamos 0110.
- **Interruptor Suma/Resta:** Al tratarse de una resta 22+(-9) lo dejamos en 1.

3.1.5 Sumador Acarreo Anticipado

La propagación de acarreo tiene lugar cuando el acarreo de entrada se transmite como acarreo de salida. El acarre de entrada puede ser propagado por el sumador completo cuando uno o ambos bits

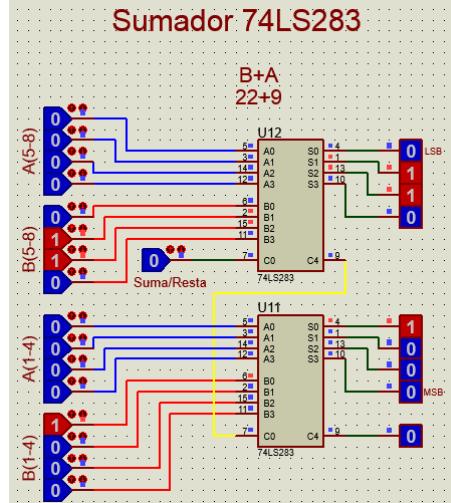


Figure 3.6: Sumador 74LS283 en proteus.

de entrada son igual o 1. El acarreo propagado(C_p) se expresa como la función OR de los bits de entrada.

$$C_p = A + B$$

La generación tiene lugar cuando el sumador completo genera internamente un acarreo de salida. Solo cuando ambos bits de entrada son 1 se genera internamente un acarreo de salida. Solo cuando ambos bits de entrada son 1 se genera un acarreo, el acarreo acelerado C_g se expresa como la función AND de los bits de entrada A y B.

$$C_g = A \cdot B$$

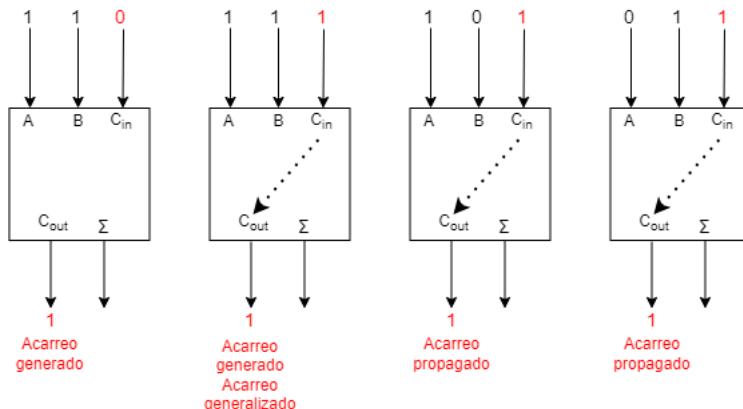


Figure 3.7: Sumador anticipado.

3.2 Codificador y Decodificador

Es el proceso de asignar a cada entrada una combinación única de bits.

3.2.1 Encoder

Son circuitos combinacionales con 2^n entradas máximas y n salidas, en donde las filas de las entradas van a tener **solo un dato que cambia** y en la salida aparece un código asignado a esas

entradas.

3.2.1.1 Procedimiento

1. Determine cual es el único valor que cambia en la entrada.
 2. Las salidas se leen por columnas tomando cada dato como un término completo.
- **Caso 1: En cada fila hay un dato que cambia.** En un teclado se utilizan teclas del 0 al 3 y se requiere que en las salidas entregue los números codificados en binario en las entradas. La

IN				OUT	
T_0	T_1	T_2	T_3	B_0	B_1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1

Table 3.3: Tabla de verdad codificador 3 botones.

realización de esta tabla cumple con: $2^2 = 4$ entradas y 2 salidas. El dato que cambia es la entrada 1, si lo escribimos como POS y SOP:

$$B_1 = T_1 + T_3$$

$$B_2 = T_2 + T_3$$

$$B_1 = \overline{T_0} \cdot \overline{T_2}$$

$$B_2 = \overline{T_0} \cdot \overline{T_1}$$

- **Caso 2: Hay una fila donde ningún dato cambia.**

IN			OUT	
D_0	D_1	D_2	B	A
0	1	1	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Table 3.4: Codificador: una fila no cambia.

$$A = \overline{D_1} + (D_0 \cdot D_1 \cdot D_2)$$

$$B = \overline{D_2} + (D_0 \cdot D_1 \cdot D_2)$$

$$A = D_0 \cdot D_2$$

$$B = D_0 \cdot D_1$$

- **Hay una fila donde todos los datos cambian.**

$$A = \overline{D_1} + (\overline{D_0} \cdot \overline{D_1} \cdot \overline{D_2})$$

$$B = \overline{D_1} + \overline{D_2}$$

$$A = D_0 \cdot D_2$$

$$B = D_0 \cdot (D_0 + D_1 + D_2)$$

Tipos:

IN			OUT	
D_0	D_1	D_2	B	A
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
0	0	0	0	1

IN								OUT		
A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Y_2	Y_1	Y_0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1

- **Sin prioridad:** Solamente una entrada puede ser activada en cada instante.

$$Y_0 = \overline{A_1} + \overline{A_3} + \overline{A_5} + \overline{A_7} \therefore Y_0 = \overline{A_1 \times A_3 \times A_5 \times A_7}$$

$$Y_1 = \overline{A_2} + \overline{A_3} + \overline{A_6} + \overline{A_7} \therefore Y_1 = \overline{A_2 \times A_3 \times A_6 \times A_7}$$

$$Y_2 = \overline{A_4} + \overline{A_5} + \overline{A_6} + \overline{A_7} \therefore Y_0 = \overline{A_4 \times A_5 \times A_6 \times A_7}$$

Las entradas se activan con 0 lógico.

- **Con prioridad:** Codifica la entrada activa de mayor valor decimal son tener en cuenta los demás. Un ejemplo con prioridad es el IC74147, donde todas las entradas se activan con 0 lógico y las todas las salidas están negadas, es decir, se activan con 0 lógico.

3.2.2 Decoder

Al contrario del encoder, el decoder es lo contrario: de n entradas se puede manipular 2^n entradas. El número en binario se escribe empezando por el A1 (que es más significativo). Los decodificadores tienen su propia tabla de la verdad que representa los estados posibles de entrada y los respectivos valores de las salidas para cada uno de esos estados.

De esta tabla de la verdad podemos sacar el circuito lógico combinacional con puertas lógicas, circuito lógico para construir nuestro decodificador.

Ejercicio 3.1 Diseñe 2 circuitos que al activarse cada uno de los pulsadores en la salida se visualicen los siguientes números en binario:

1. Pulsador 1: 14
2. Pulsador 2: 50
3. Pulsador 3: 23
4. Pulsador 4: 72

Solución:

Primero, vamos a separar decenas y unidades de cada número y diseñar una tabla de verdad para cada uno. Solo poseemos 4 pulsadores, por lo tanto, vamos a necesitar 3 salidas puesto que los números de las decenas(1, 5, 2, 7) expresadas en binario necesitan 3 dígitos; entonces para $n=3$

salidas nos podemos permitir $2^3 = 8$ entradas, pero solo haremos uso de 4 entradas. Nuestro circuito constará de dos sub-circuitos: uno se encargará de mostrar los dígitos de las decenas y el otro mostrará los dígitos de las unidades. Desarrollamos la tabla de verdad para las decenas.

INPUT				OUTPUT				
P_1	P_2	P_3	P_4	D_2	D_1	D_0	N_0	
1	0	0	0	0	0	1	1	
0	1	0	0	1	0	1	5	
0	0	1	0	0	1	0	2	
0	0	0	1	1	1	1	7	

Una vez que hayamos desarrollado nuestra tabla de verdad las simplificamos usando POS o SOP, es preciso decir que ambos son posibles pero como hablamos de **SIMPLIFICAR** usaremos el que menos términos genere, en otras palabras: la salida D_0 posee 3 salidas en 1(SOP), esa misma salida posee 1 salida en 0(POS), entonces nos combiene POS pues solo será un término comprado a los 3 que nos generaría la otra forma. Aplicando POS a la tabla de las decenas:

$$D_0 = \overline{P_3}$$

$$D_1 = \overline{P_1} \times \overline{P_2}$$

$$D_2 = \overline{P_1} \times \overline{P_3}$$

Lo mismo haremos con las unidades, sin embargo en esta tabla notamos que nos conviene expresarlo como SOP pues en cada salida hay menos salidas 1 que salidas 0, por lo tanto, simplificando mediante SOP la tabla de las unidades:

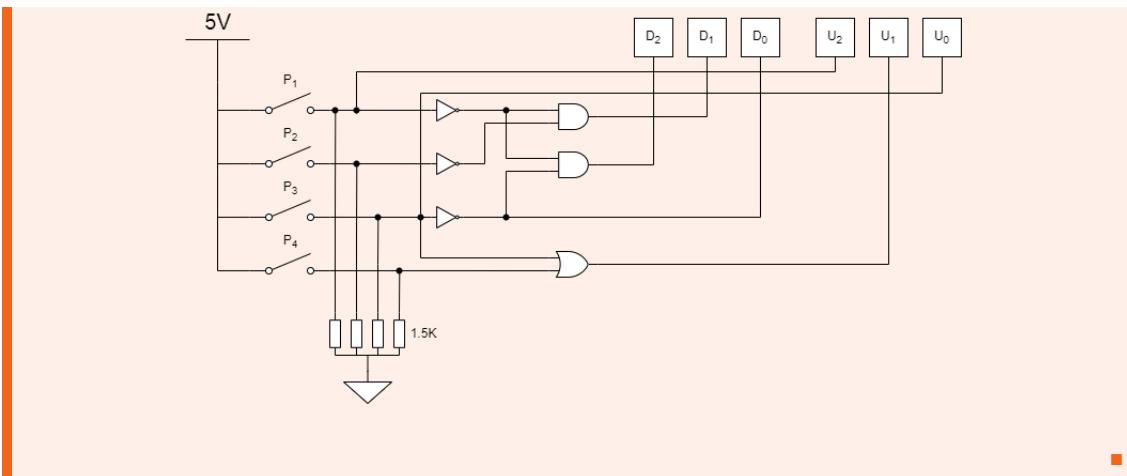
INPUT				OUTPUT				
P_1	P_2	P_3	P_4	D_2	D_1	D_0	N_0	
1	0	0	0	1	0	0	4	
0	1	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	3	
0	0	0	1	0	1	0	2	

$$U_0 = P_3$$

$$U_1 = P_3 + P_4$$

$$U_2 = P_1$$

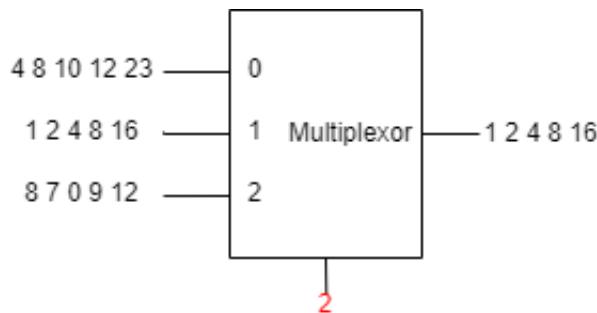
Ya tenemos las expresiones, antes de realizar el circuito esta de más aclarar que el bit más significativo es en el caso de las decenas D_2 y en el caso de las unidades es U_2 . Tenemos las expresiones booleanas de cada tabla así que solo queda realizar su circuito:



3.3 Multiplexor y Demultiplexor

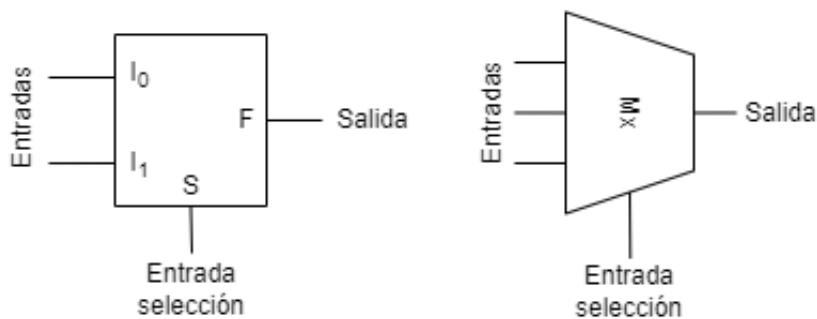
3.3.1 Multiplexor

Circuito combinacional al que entran varios canales y solo sale uno de ellos.



3.3.1.1 Multiplexor Simple

Existen dos posibles simbologías para los multiplexores:



S	I ₁	I ₀	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

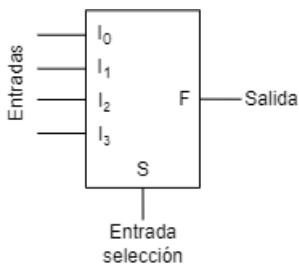
		I ₁ I ₀			
		00	01	11	10
S	0	0	1	1	0
	1	0	0	1	1

$$F = \bar{S} \cdot I_0 + S \cdot I_1$$

R Es usual que en las tablas de verdad, la entrada que se encuentra a la izquierda es el más significativo(MSB) mientras que el que se encuentra más a la derecha es el menos significativo(LSB).

Si analizamos la tabla: vemos que la entrada de selección S, poseerá dos estados; si analizamos cuando S=0 vemos que la salida F estará activada siempre y cuando la entrada I_0 tenga la entrada activa, mientras que si I_0 posee una entrada 0, no importa el valor que posea la entrada I_1 (alto o bajo) la salida F siempre será 0. Esto nos quiere decir que cuando S=0, la salida F solo le importará los estados de la entrada I_0 pero no de I_1 . Cuando la entrada de selección S=1, notaremos lo mismo comportamiento, la salida F solo tomará en cuenta los estados de la entrada I_1 puesto que la entrada I_0 no nos importa. En conclusión, la la entrada de control S es capaz de seleccionar entre dos entradas.

3.3.1.2 Multiplexor 2 entradas selección

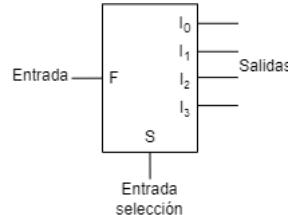


S_1	S_0	F
0	0	I_0
0	1	I_1
1	0	I_2
1	1	I_3

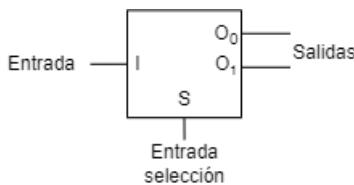
$$F = \overline{S_1} \cdot \overline{S_0} \cdot I_0 + \overline{S_1} \cdot S_0 \cdot I_1 + S_1 \cdot \overline{S_0} \cdot I_2 + S_1 \cdot S_0 \cdot I_3$$

3.3.2 Demultiplexor

Al igual que el multiplexor puede poseer varias entradas, varios canales a diferentes bits.

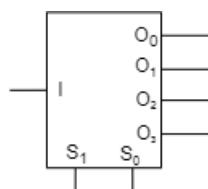


La expresión booleana para el multiplexor más simple:



S	I	O_1	O_0
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	0

$$F = \overline{S_1} \cdot \overline{S_0} \cdot I_0 + \overline{S_1} \cdot S_0 \cdot I_1 + S_1 \cdot \overline{S_0} \cdot I_2 + S_1 \cdot S_0 \cdot I_3$$



S_1	S_0	O_3	O_2	O_1	O_0
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

$$O_0 = \overline{S_1} \cdot \overline{S_0} \cdot I$$

$$O_1 = \overline{S_1} \cdot S_0 \cdot I$$

$$O_2 = S_1 \cdot \overline{S_0} \cdot I$$

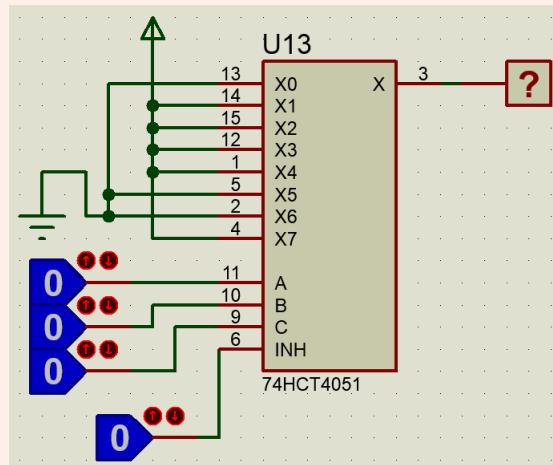
$$O_3 = S_1 \cdot S_0 \cdot I$$

Ejercicio 3.2 Usando el IC 74HCT4051, expresar la siguiente expresión de un demultiplexor:

$$F = C\bar{B}\bar{A} + \bar{C}B\bar{A} + \bar{C}BA + CBA + \bar{C}BA$$

Solución:

Para poder implementarlo con el IC, necesitamos que la expresión este en su forma canónica. Una vez que este en su forma canónica, dependiendo si esta como SOP o POS nos indicará los valores donde será 1 y 0 respectivamente. Como estamos frente a un SOP, los valores decimales de los sumandos(pasando a binario los bits, donde MSB es C y LSB es A) nos dan los números de las entradas en las cuales deben tener entradas altas y las restantes entrada baja.



Cada vez que en las entradas de selección se logre colocar cualquiera de los sumandos de la función F la salida será 1. ■

3.4 Latch

El latch(cerrojo) es un tipo de dispositivo de almacenamiento temporal de dos estados(biestable).

3.4.1 Latch S-R(Set-Reset)

Dispositivo lógico biestable o multivibrador. Un Latch S-R con entrada activa a un nivel ALTO, se compone de dos puertas NOR o NAND acopladas.

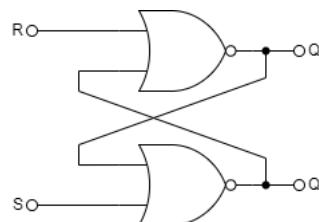
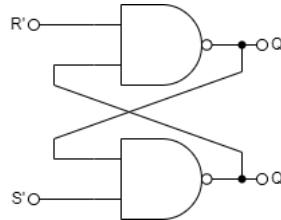
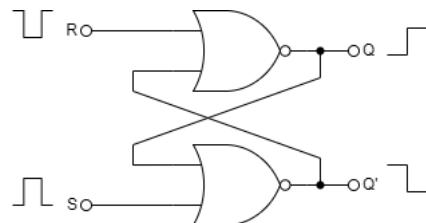
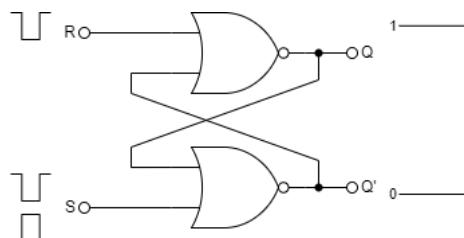
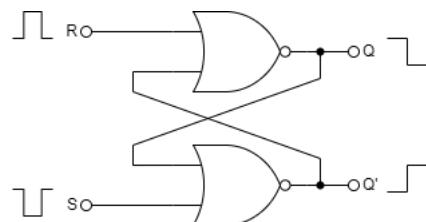


Figure 3.8: Latch S-R con entrada activa a nivel alto.

3.4.1.1 Comportamiento

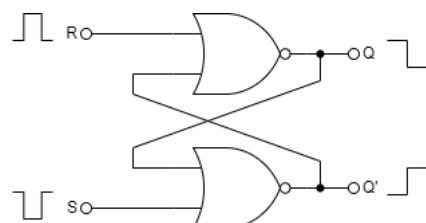
En Q, cuando S este en nivel alto y R en estado bajo, la salida Q cambia a nivel alto(Estado inicial Q=0).

Una vez que nos encontramos en este estado, sea cual sea la entrada de S, la salida Q no cambiará: Cambiará solo si R cambia a estado alto.

Figure 3.9: Latch \bar{S} - \bar{R} con entrada activa a nivel bajo.Figure 3.10: Set=1, Reset=0 y $Q=1$.Figure 3.11: Set=1/0, Reset=0 y $Q=1$.Figure 3.12: Set=0, Reset=1 y $Q=0$.

3.4.1.2 Condiciones especiales

Los latch poseen algunas restricciones que son importantes conocerlas para tener precaución al momento de implementar circuito.

Figure 3.13: Si $S=0$ y $R=0$, las salidas no cambian.

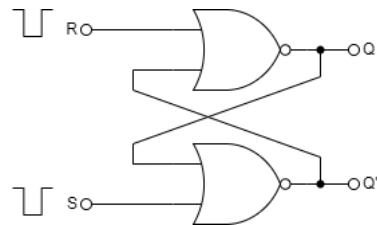
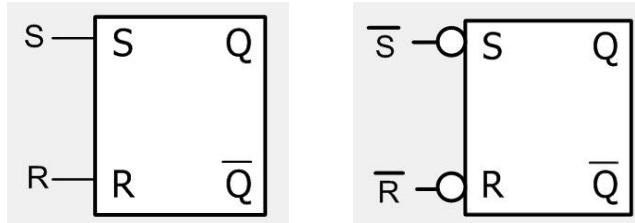


Figure 3.14: Si $S=1$ y $R=1$, las salidas presentan un estado no válido: indeterminado.



(a) Latch \bar{S} - \bar{R} con entrada activa BAJO.
(b) Latch S-R con entrada activa ALTA.

Figure 3.15: Latch simbología

3.4.2 Símbolo lógico

La simbología del latch es el siguiente: El diagrama de tiempos de un Latch tiene el siguiente

Input		Output		
\bar{S}	\bar{R}	Q	\bar{Q}	Comentarios
1	1	NC	NC	No cambia, permanece en el mismo estado
0	1	1	0	Latch estado SET
1	0	0	1	Latch estado Reset
1	1	1	1	Condición NO valida

Table 3.5: Tabla de verdad: Latch

comportamiento ejemplificado:

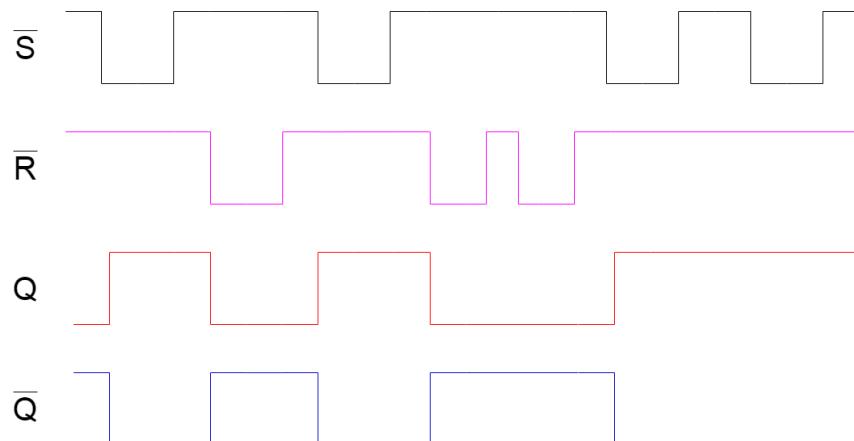
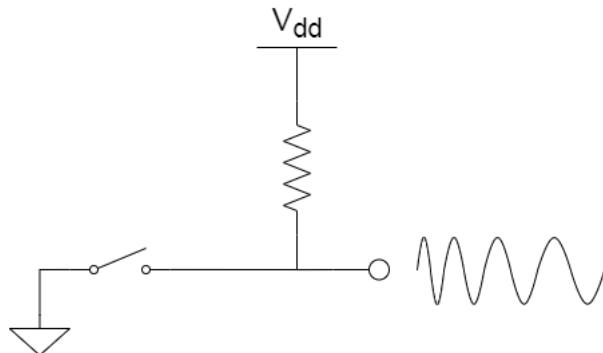


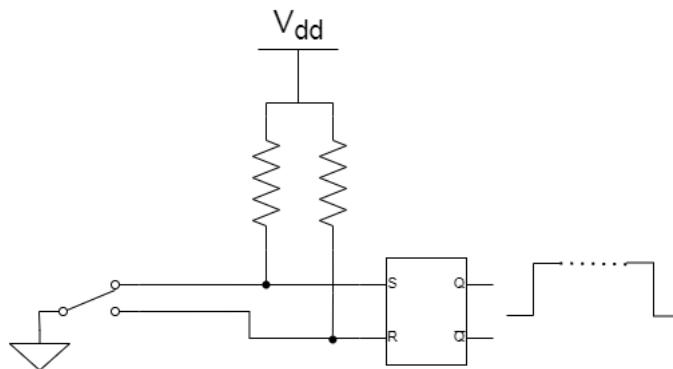
Figure 3.16: Diagrama de tiempos Latch.

3.4.3 Latch: Eliminador de rebote

Se presenta un circuito con interruptor:



Vemos que la salida no es estable, esta lectura inestable puede ocasionar errores de lectura o falsos altos y bajos. Por eso se añade un latch como eliminador de rebote:



3.4.4 Latch con entrada de habilitación

El latch no cambiará de estado hasta que la entrada EN este en nivel ALTO, mientras este en ALTO, las salidas serán controlados por las entradas S y R. Una situación invalida es cuando R y S están a nivel alto simultáneamente. Diagrama de tiempos de un Latch con entrada enable:

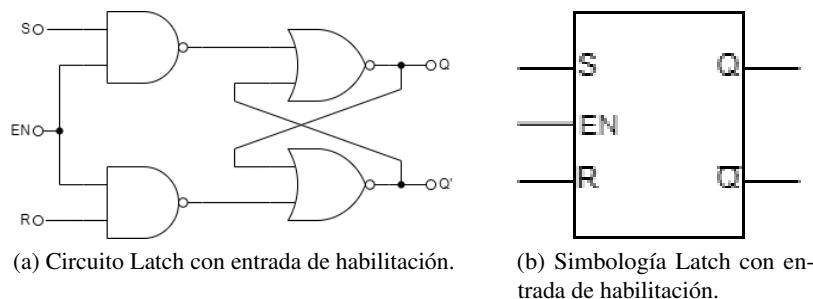


Figure 3.17: Latch con entrada de habilitación.

3.4.5 Latch D con entrada de habilitación

A diferencia de latch S-R con entrada de habilitación, el latch D solo tiene una entrada que recibe el nombre de entrada de datos(D) y ademas de la habilitación(EN). Mientras EN este en estado ALTO, la salida Q es una copia de D, si EN pasa a estado BAJO se mantiene el estado anterior.

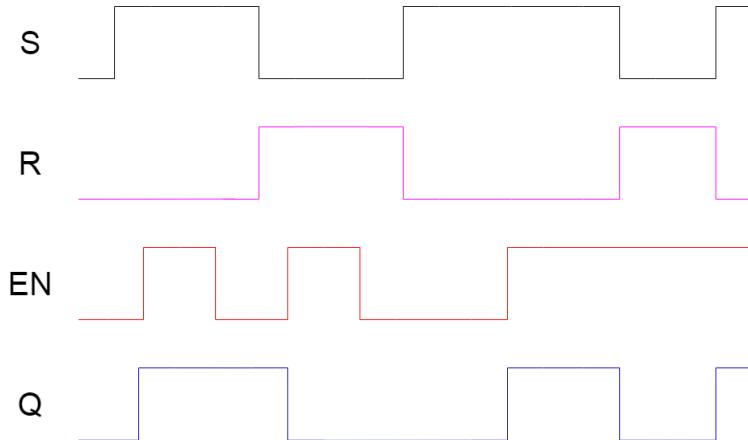
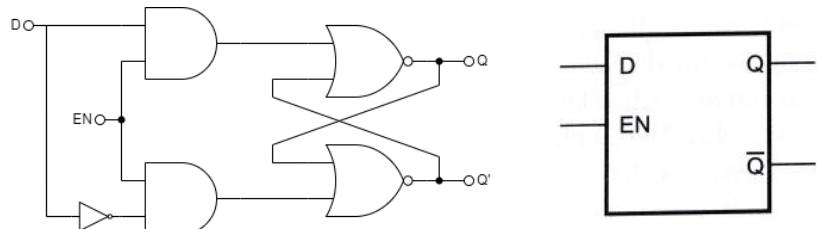


Figure 3.18: Diagrama de tiempos latch S-R con entrada de habilitación.



(a) Circuito Latch D con entrada de habilitación.

(b) Simbología Latch D con entrada de habilitación.

Figure 3.19: Latch D con entrada de habilitación.

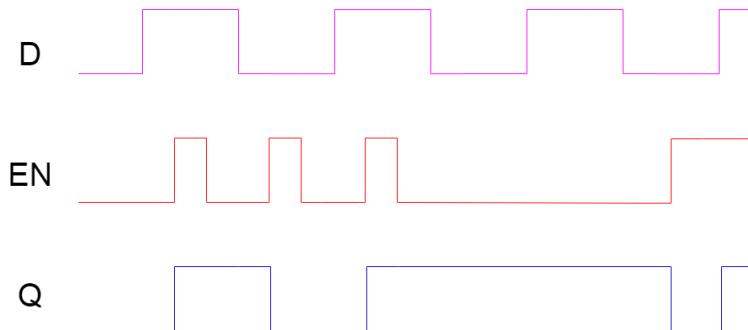


Figure 3.20: Diagrama de tiempos latch D con entrada de habilitación.

3.5 Flip-Flops

Son dispositivos síncronos de dos estados, multivibradores biestables. La salida cambia de estado únicamente en un instante específico de una entrada reloj(CLK). Los cambios se producen sincronizadamente con el reloj. Normalmente son **disparados por flanco**.

Una identificación es por si símbolo lógico lo da un triángulo que se encuentra en la entrada clock. El triángulo de denoma indicador entrada dinámica.

3.5.1 Flip Flop tipo S-R disparado por flanco

Los estados son iguales a los latch, lo diferente aquí es la entrada reloj y el flanco, hay de dos tipos: disparado por flanco ascendente o descendente.

R	S	D	E	Q_{SR}	$Q_{S\bar{T}e}$	Q_D
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	No definido	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	No definido	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1

Table 3.6: Ejemplo de tren de bits de latch S-R, latch S-R con enable y Latch D con enable.

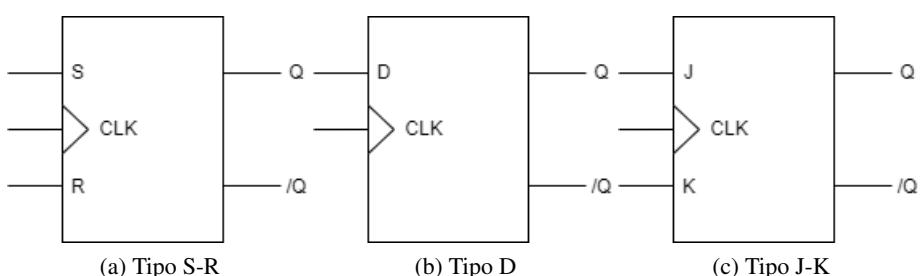
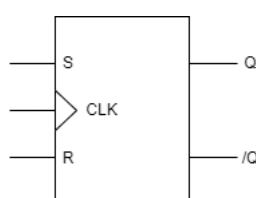


Figure 3.21: Tipos de Flip Flips



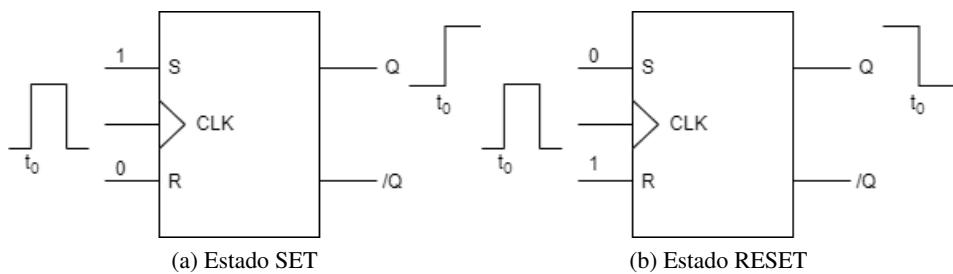


Figure 3.22: Estados

INPUT			OUTPUT		
S	R	CLK	Q	\bar{Q}	Comentarios
0	0	X	Q_0	\bar{Q}_0	No cambia
0	1	\uparrow	0	1	RESET
1	0	\uparrow	1	0	SET
1	1	\uparrow	?	?	No valida

- \uparrow : Transición del reloj de nivel bajo.
- X: Irrelevante.
- Q_0 : Nivel de salida previo a la transición del reloj.

Para el flanko descendente positivo es lo mismo solo que $CLK=\downarrow$.

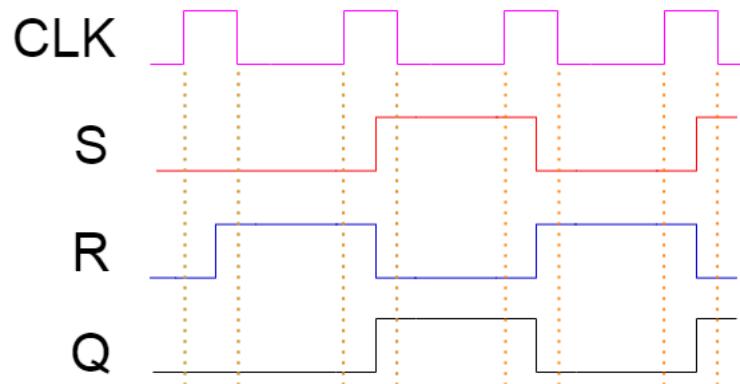


Figure 3.23: Diagrama de tiempos flip flop S-R disparado por flanco descendente.

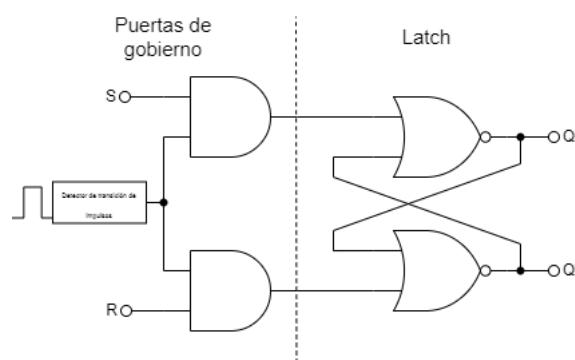


Figure 3.24: Composición de un Flip-Flop

3.5.2 Flip Flop D disparado por flanco

Resulta muy útil cuando se necesita almacenar un único bit de dato.

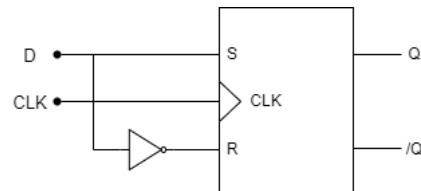


Figure 3.25: Símbolo Flip Flop D disparado por flanco.

INPUT		OUTPUT		
D	CLK	Q	\bar{Q}	Comentario
1	\uparrow	1	0	SET(almacena 1)
0	\uparrow	0	1	RESET(almacena 0)

Table 3.7: Tabla de verdad Flip Flop tipo D disparado por flanco

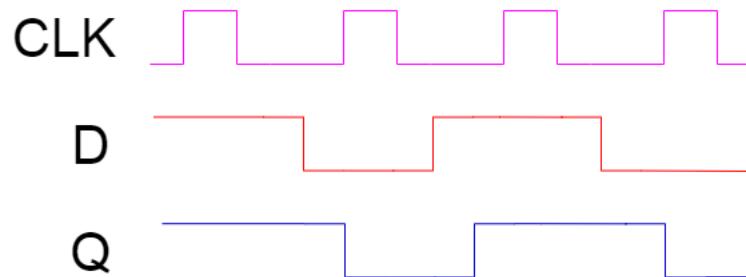


Figure 3.26: Diagrama de tiempos

J	K	CLK	Q	\bar{Q}	Comentario
0	0	↑	Q_0	\bar{Q}_0	No cambio
0	1	↑	0	1	RESET
1	0	↑	1	0	SET
1	1	↑	Q_0	\bar{Q}_0	Basculación

Table 3.8: Tabla de verdad Flip Flop J-K disparado por flanco

3.5.3 Flip Flop J-K disparado por flanco

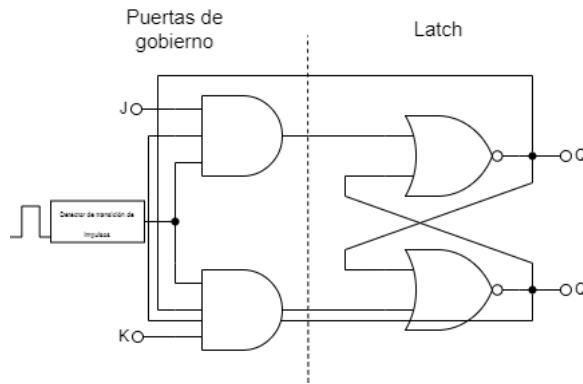


Figure 3.27: Símbolo Flip Flop J-K disparado por flanco.

- R** De acuerdo con la tabla de verdad, cuando las entradas J y K están a nivel lógico 1, a cada flanco activo en la entrada de reloj, la salida del biestable cambia de estado. A este modo de funcionamiento se le denomina modo de basculación (toggle en inglés).

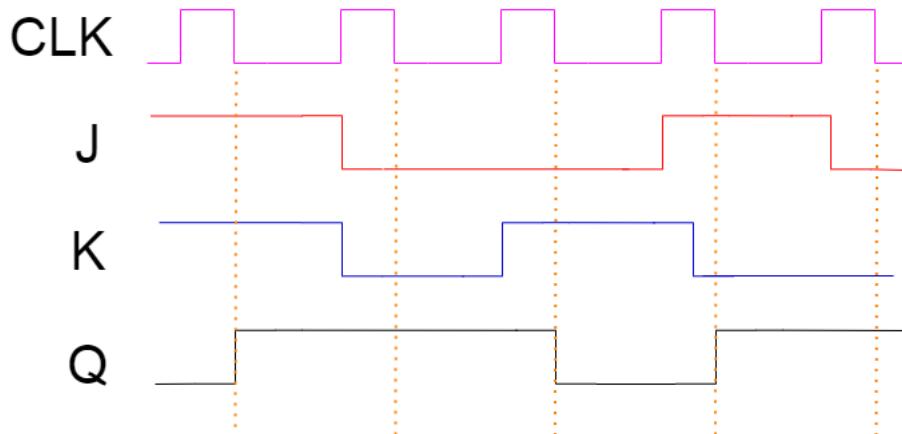


Figure 3.28: Ejemplo: flanco descendente

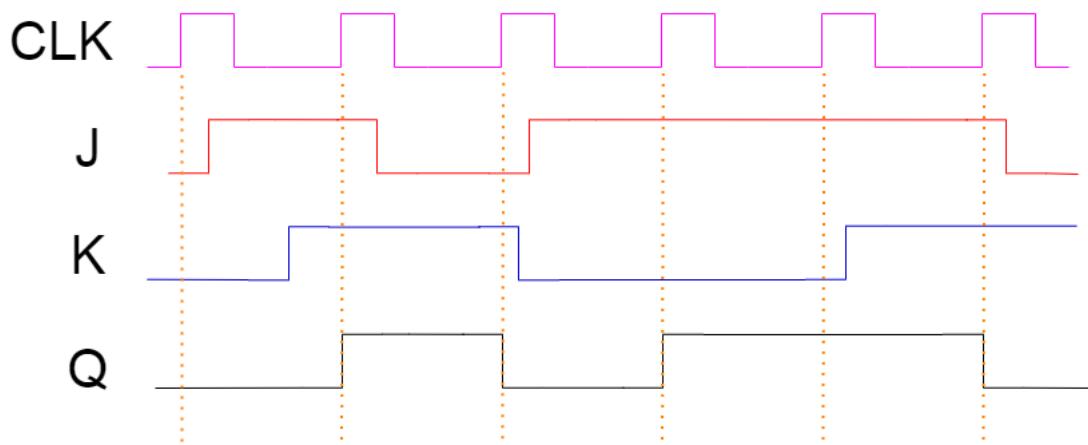


Figure 3.29: Ejemplo: flanco ascendente

3.5.4 Entradas asíncronas de inicialización y borrado

La mayoría de los circuitos integrados tienen también otras entradas asíncronas. Generalmente son *Preset* (PRE), *clear* (CLR), activación directa (SD) y desactivación directa (RD).

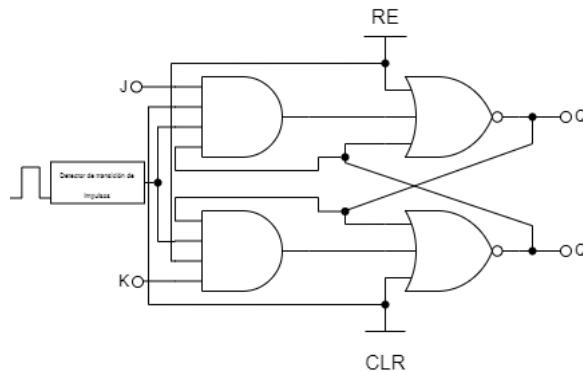


Figure 3.30: Implementación de entradas asíncronas.

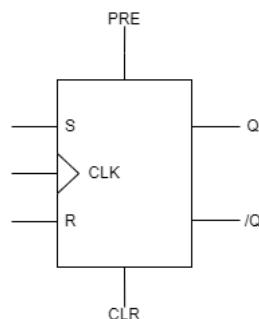


Figure 3.31: Simbología de las entradas PREset y CLeaR.

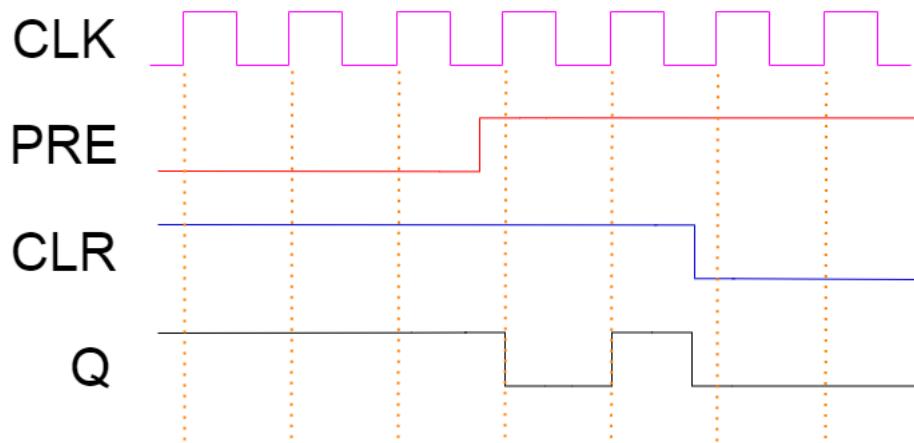
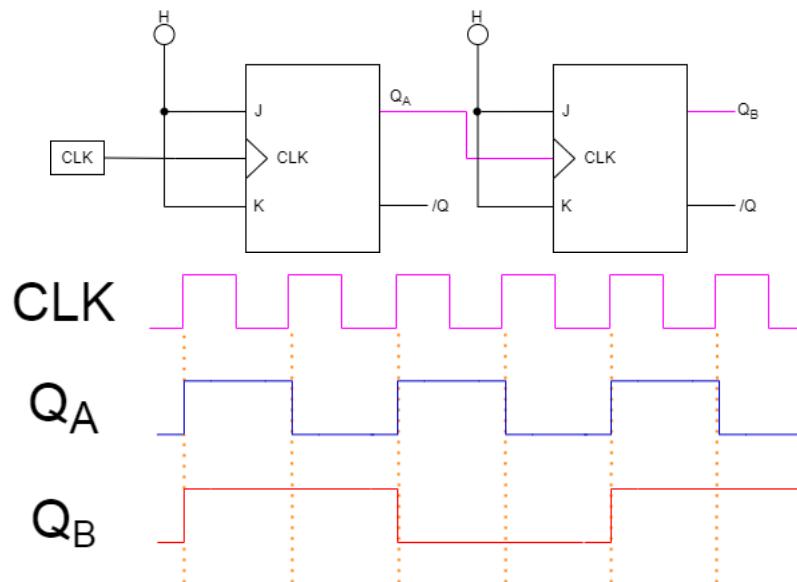


Figure 3.32: Diagrama de tiempos de las entradas PRE y CLR.

3.6 División de frecuencia

Usando Flip-Flops J-K se consigue dividir la frecuencia de reloj por 4.



3.7 Monoestables

Dispositivos multivibradores que solo tienen un único estado estable. Normalmente, un monoestable se encuentra en su estado estable, cambiando a su estado inestable solo cuando se dispara. Una vez que se ha disparado, el monoestable permanece en su estado inestable durante un determinado intervalo de tiempo, volviendo a continuación a su estado estable.

El tiempo que este dispositivo permanece en el estado inestable determina la anchura del impulso de salida. Nótese que los monoestables tienen que esperar hasta que se termine el tiempo definido, mientras que los monoestables disparables al ser activado antes que termine el tiempo definido se vuelve a inicializar el tiempo.



(a) Periodo shoot menor que Q.



(b) Periodo shoot mayor que Q.

Figure 3.33: Monoestable no redispersable

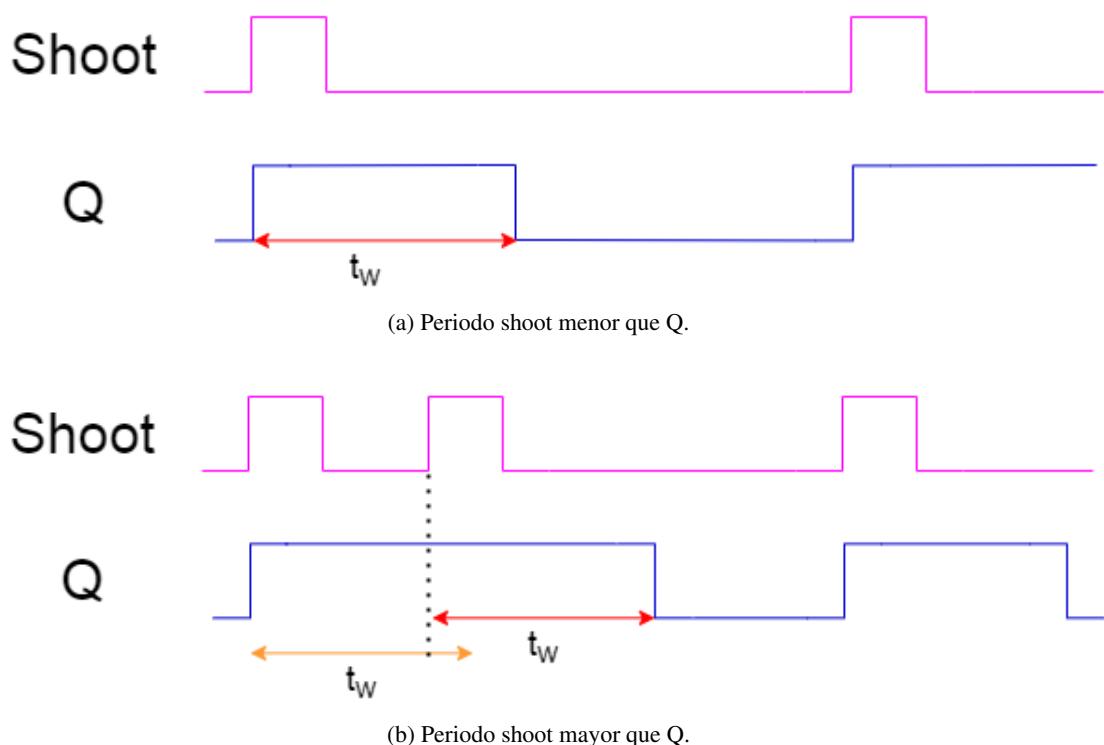


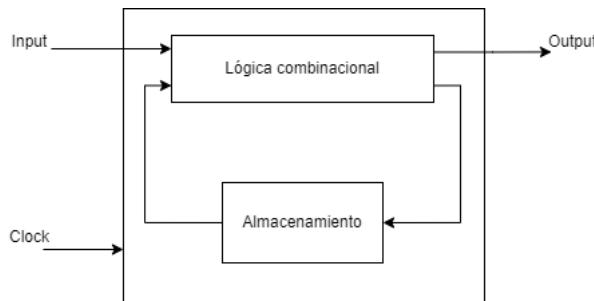
Figure 3.34: Monoestable redisparable

4. Circuitos Lógicos Secuenciales

Circuito Lógico Combinacional cuya salida depende de los valores actuales y pasados de las señales de entrada.

Componente:

- Señal de entrada y salida(binaria).
- Señal de reloj (binaria periodica).
- Lógica combinacional(determina la salida y el próximo estado)
- Almacenamiento (mantiene información sobre el estado actual)



4.1 Máquina de estados

Solo hablaremos de los Circuitos Secuenciales Síncronos.

Red de combinacionales y biestables conectados entre si. Puede haber caminos cíclicos, pero tienen que atravesar al menos un biestable. Todos los biestables usan la misma señal reloj. Las señales de entrada se sincronizan con el mismo reloj.

Tiempo del reloj debe ser mayor o igual al tiempo de propagación del flip flop más el tiempo de propagación del CLC¹(ecuación 4.1).

$$T_c \geq T_p(FF) + T_p(CLC) \quad (4.1)$$

Existen dos tipos de maquinas de estados:**Mealy** y **Moore**. Son parecidas pero no iguales. Veremos la de Mealy puesto que la de Moore será más fácil. Notesé la diferencia entre ambas, la única diferencia es la entrada, en Moore solo se dirige a CLC G mientras que en el de Mealy de dirige tanto al CLC G como al CLC H.

¹Abreviatura de Circuito Lógico Combinacional

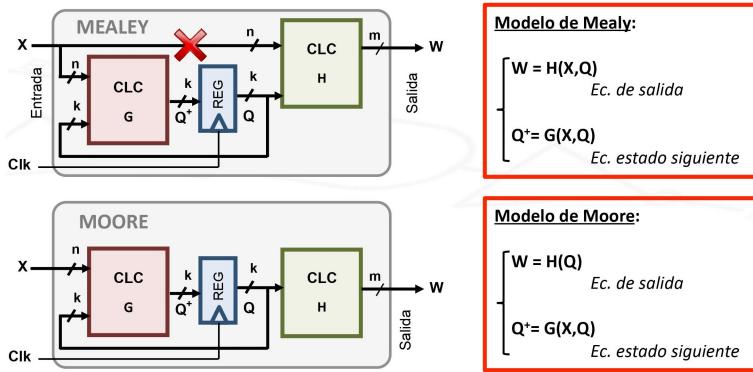


Figure 4.1: Tipos de maquina de estado

4.1.1 Modelo de Mealy

Cualquier CLS² puede expresarse como: Agrupando todos los circuitos en un único CLC(en la figura 4.1, solo contariamos con REG y CLC H) y los biestables(flip flop) en único REG. Es posible que existan más CLC(en la figura 4.1 se presenta dos CLC,G y H).

Datos que queremos caracterizar

- Número de entradas: $X=(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0)$
- Número de salidas $W=(W_{n-1}, W_{n-2}, \dots, W_1, W_0)$
- Número de estados $Q=(q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_1, q_0)$

Por eso necesitamos caracterizar:

- Tabla de verdad de W .
- Tabla de verdad de Q^+ .
- Estado inicial de Q

Puede ser un poco complicado de entender, vamos a hacer un ejercicio para entender mejor.

Ejercicio 4.1 Con:

- $X=(X_0)$
- $W=(W_1, W_0)$
- $Q=(q_1, q_0)$
- Estado inicial=(0,0)

Antes de todo, analicemos: Tenemos X que representa las entradas, W que representa las salidas, Q es el número de estados y el estado inicial, que representa el estado en el que el circuito siempre va empezar. Primero, mirando la forma de un CLC de Mealy (4.1), poseemos dos CLC: G y H. Primero empecemos con G: Este CLC G es un circuito de transición, puesto que no es la salida, sino que las salidas se almacenan para que el siguiente CLC funcione. ¿Como armamos la tabla de verdad?

Primero, como siempre identificamos las entradas: Tenemos X como entrada y Q el número de estados, podemos concluir que nuestras tablas deben tener 3 entradas: q_1, q_0, x_0 ; escribimos todas las combinaciones pero ¿Cómo sabes que salidas habrá? Las salidas serán las mismas que el número de estados, se les diferencia con un símbolo de suma encima ellos que significa que el estado ha evolucionado. La **tabla de transición** se vería de la siguiente manera:

²Circuito Lógico Secuencial

q_1	q_0	x_0	q_1^+	q_0^+
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	x	x
1	1	1	x	x

Las x significa que puede tomar cualquier valor puesto que esos valores no nos importan. En este caso, las salidas q^+ serán puestas con esos números a manera de ejemplo pero pueden ser distintos valores, depende de tu propósito. Con esto ya hemos terminado nuestra **tabla de transición $Q^+ G$** . Antes de pasar el CLC H entendamos el CLC G:

¿Qué nos quiere decir?

Nos da como estado inicial (0,0) teniendo la forma de $Q(q_1, q_0)$. Nuestro punto de partida será (0,0). Ahora ese estado inicial (0,0) evolucionará, cambiará a otro estado (el que queramos, ya depende de nuestro propósito), en este ejemplo el estado inicial tiene dos posibles evoluciones dependiendo si x_0 es 0 o 1. Si $x_0=0$, el estado inicial (0,0) evoluciona a (0,0) mientras que si $x_0=1$, el estado (0,0) evoluciona a (0,1). Listo, ahora recordemos que el CLC G tiene en secuencia el CLC H que lo veremos luego y tiene al REGistro; es decir, las salidas (q_1^+, q_0^+) serán las entradas (q_1, q_0) . Expliquemos este paso, si tenemos (0,0) y $x_0=0$, es estado de evolución será (0,0), ese mismo estado será las entradas (q_1, q_0) , y entraremos en un bucle infinito, si $x_0=1$, las entradas (0,0) evolucionan a (0,1), vemos que aquí podemos avanzar en la tabla, ahora salida (0,1) será nuestra entrada y estaremos antes otros dos casos; ahora tenemos como estado inicial (0,1), si $x_0=0$ la salida será (1,0) que significa que avanzaremos en la tabla pero si $x_0=1$ no avanzaremos, nos quedaremos en ese estado infinitamente. En otras palabras, las salidas al ser las mismas que las entradas, van avanzando en su evolución, eso depende de nuestra entrada x(no siempre, depende de nuestro propósito). Si seguimos bajo esta lógica, llegaremos hasta el penúltimo estado, donde la entrada (1,0) permanecerá en el mismo estado si $x_0=0$, y estará en ese bucle hasta que $x_0=1$, donde evolucionará a (0,0) y se volverá a repetir el ciclo, con esto se asegurar un ciclo evolutivo cerrado.**¿Y el CLC H?**

Es posible añadir más CLC, si añadimos un CLC que vaya después del REG, las entradas del CLC H(el que viene después del REG) serán las salidas del CLC G. Podemos decir que las salidas del CLC G serán las entradas del mismo CLC G(se autoalimenta con respecto a las entradas) y a su vez serán las entradas del CLC H, pero el CLC H no tiene retroalimentación, solo depende de las entradas y los estados almacenados(salidas del CLC G que se almacenan en REG).

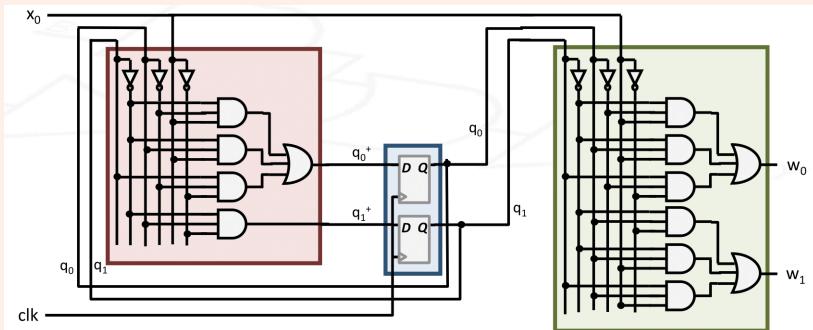
Dada la **Tabla de verdad de la salida**, en este ejemplo las definiremos de la siguiente manera^a

q_1	q_0	x_0	w_1	w_0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

Si te fijas bien, las salidas de la tabla de transición Q^+ (CLC G) están contenidas en las entradas de la tabla de verdad de W(Tabla de verdad de la salida), y las salidas son independientes, puesto que estas serán las salidas de nuestra máquina de estado.

¿Y como armo el circuito?

Para armar el circuito se tiene que simplificar ambas tablas a SOP o POS, según nos sea mejor, una vez que hayamos logrado simplificar lo más que podamos procedemos a implementar el circuito, el circuito de nuestro ejemplo sería:



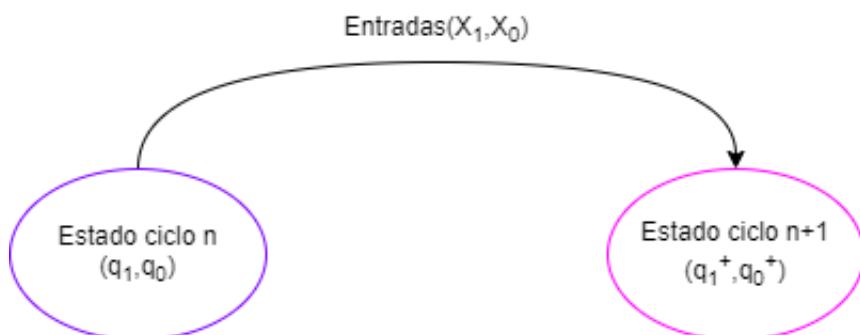
Según lo visto se puede completar la siguiente tabla sabiendo el estado inicial es $(0,0)$:

q_0	0	0	0	1	1	0	1
q_1	0	0	0	0	0	1	0
Ciclo	n	n+1	n+2	n+3	n+4	n+5	
X_0	0	1	1	0	1	1	
w_0	0	1	1	0	0	1	
w_1	0	0	1	1	0	1	
q_0^+	0	1	1	0	1	1	
q_1^+	0	0	0	1	0	0	

"Ojo, no siempre saldrá así, ya depende de nuestro proyecto o nuestras necesidades.

4.2 Grafos de estados

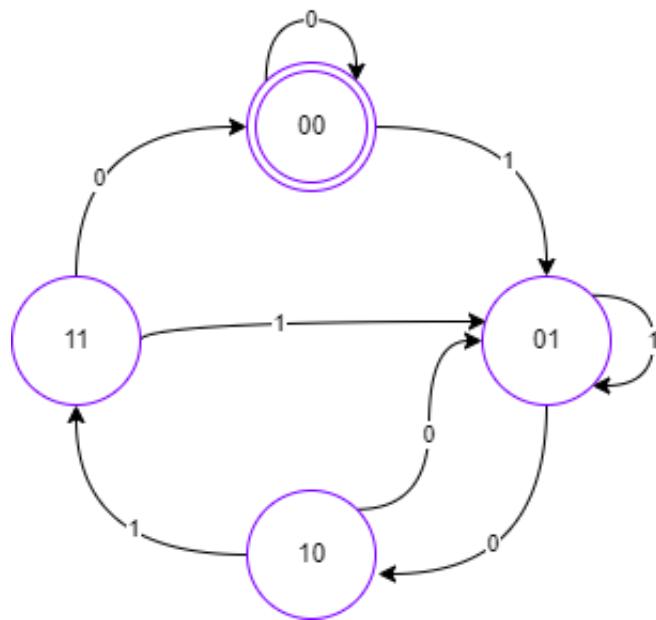
Grafos de estados o diagramas de estado son una forma de expresar las tablas de transición, el formato es el siguiente:



Dada la tabla de transición:

q_1	q_0	x_0	q_1^+	q_0^+
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

Su grafo correspondiente es:



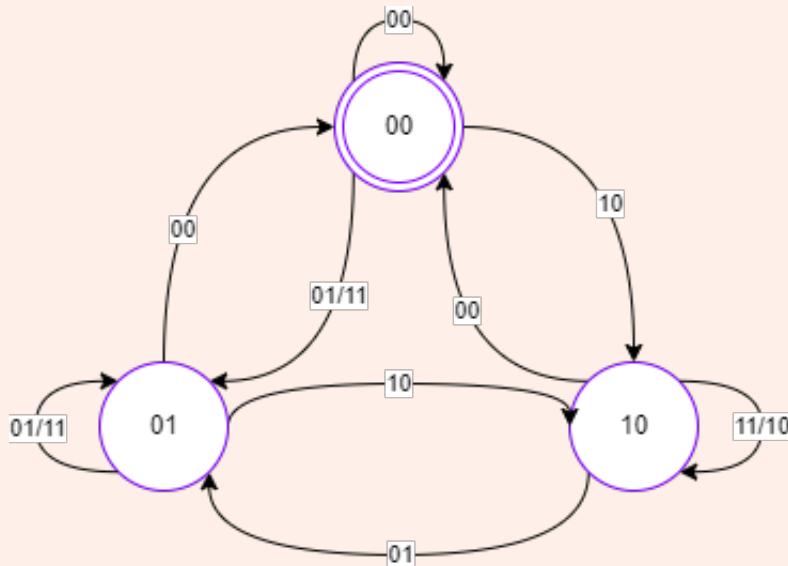
El **estado inicial** es representado con el doble círculo.

Ejercicio 4.2 Dada la tabla de transición de un CLS, dibuja su grafo de estados:

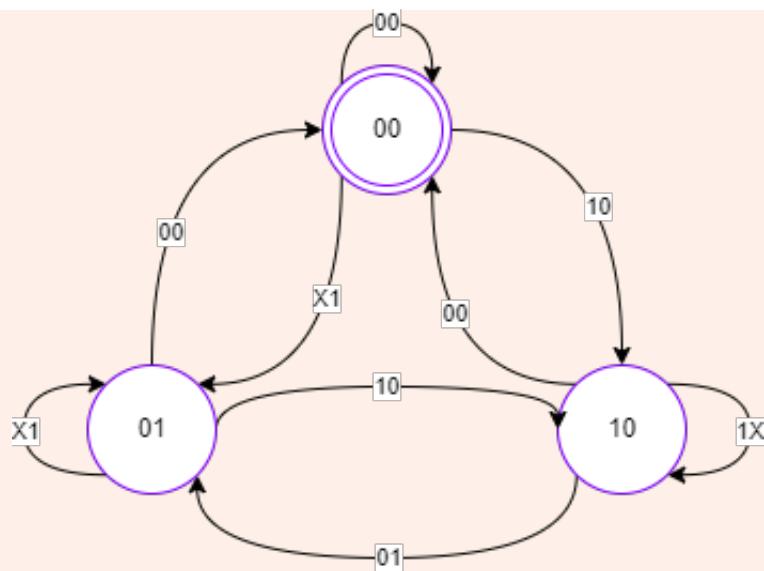
q_1	q_0	x_1	x_0	q_1^+	q_0^+
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0

Solución:

Nos fijamos en la salidas y en las entradas, notamos que en las salidas son: (0,0), (0,1) y (1,0) en las entradas tenemos las mismas combinaciones excepto (1,1). Como conclusión de este análisis podemos decir que la entrada (1,1) no se usa, ya que ninguna salida hace que lleguemos a este estado, por ende nuestros estados son: (0,0), (0,1) y (1,0). Una vez tengamos los estados definidos procedemos a hacer las flechas basandonos en las entradas x_1 y x_0 .



Nota que algunas flechas tiene dos estados, por ejemplo: 01/11 o 11/10. Cuando tenemos estos casos podemos simplificarlo ya que considerando la forma que tienen (x_1, x_0), no nos importa el valor de x_1 y no nos importa x_0 respectivamente en cada caso, así que podemos escribir una x indicando no importa el estado de alguna entrada, simplificando quedaría así:

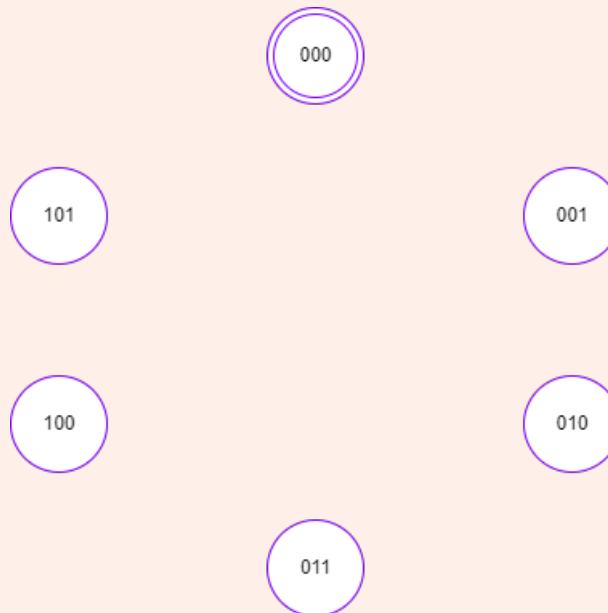


Aplicando la teoría a un ejemplo más real:

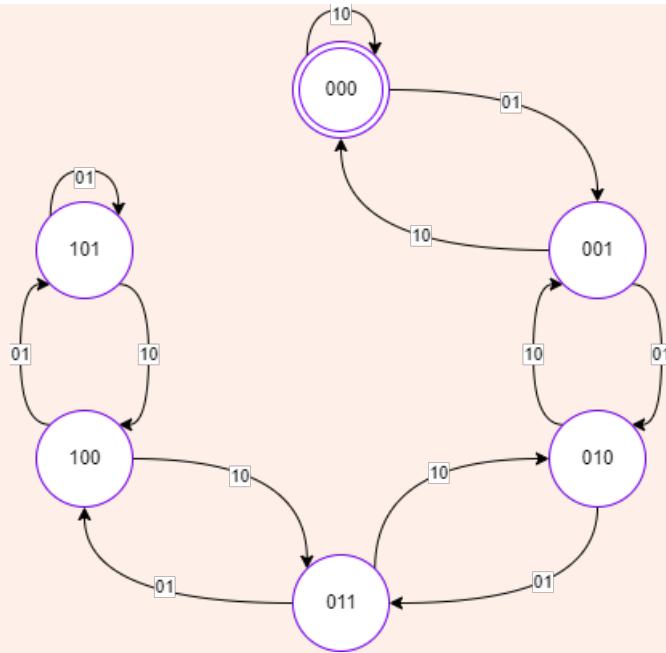
Ejercicio 4.3 Tenemos un contador desde 0 al 5, con entradas x_1 y x_0 . Hacer el grafos teniendo en cuenta que $x_1=+1$ y $x_0=-1$ con estado inicial en 0,0.

Solución:

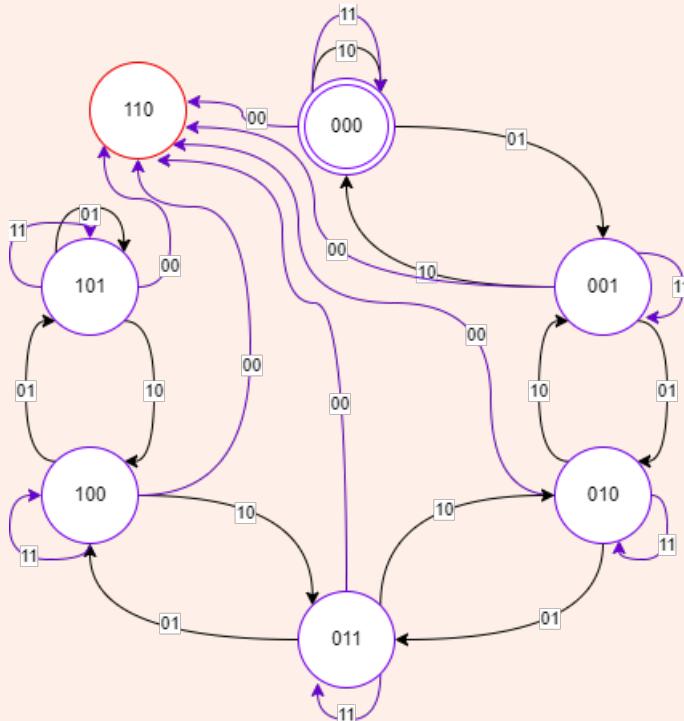
Desde el 0 al 5 tenemos 6 números, por lo tanto haremos que cada número en binario sea un estado teniendo un total de 6, así que necesitaremos $2^3=8$ estados (como solo necesitamos 6 dos estados no serán usados):



El problema nos dice que si la combinación de las entradas es (0,1) significa que sumamos uno y si es (1,0) restamos uno. Sabiendo esto vamos a unir los estados con flechas:

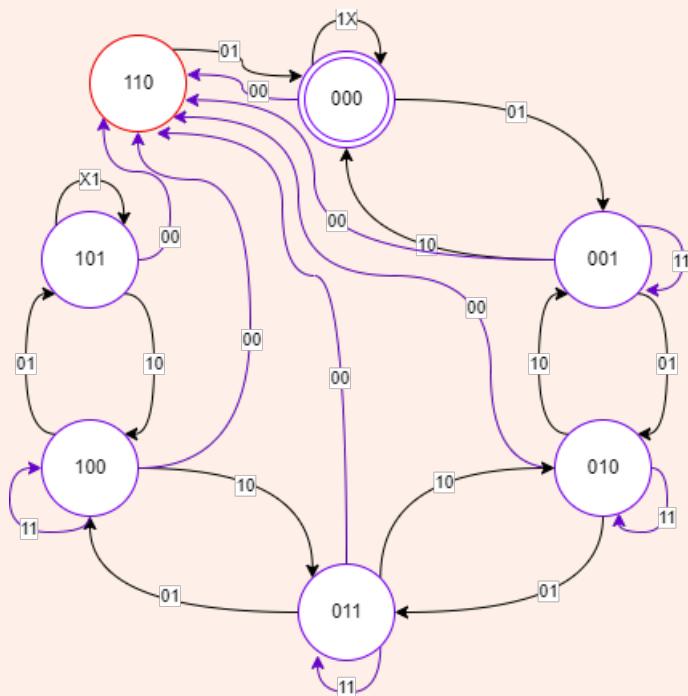


Listo, tenemos las sumas y las restas, nota que cuando llegue al estado 000 y restamos se queda en el mismo estado; lo mismo que si sumamos al último estado (101) se quedará en el mismo estado, pero podemos mejorar este modelo. Definiremos lo siguiente: que cuando las entradas sean (1,1) nos mantengamos en el mismo estado, ademas añadiremos un estado nulo que lo definiremos como (110^a):



Ya hemos implementado el estado OFF(estado 110), con el estado (1,1) nos mantenemos en el mismo estado, con el estado (0,0) apagamos el circuito. Se puede mejorar los estados donde hay

dos entradas que nos llevan al mismo estado y aumentamos un flecha para salir del estado OFF:



Resumiendo, sabiendo las entradas (x_1, x_0) :

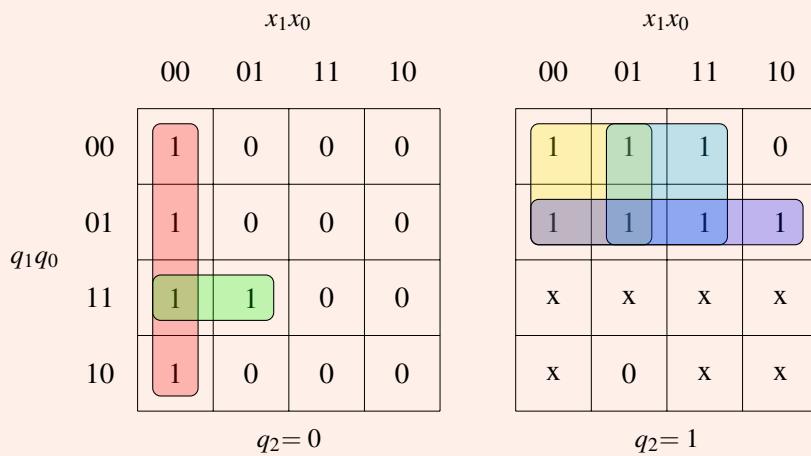
- (0,1) incremento
- (1,0) decremento
- (1,1) ni uno pulsado
- (0,0) apagamos el circuito

La tabla de verdad sería la siguiente:

Estado	q_2	q_1	q_0	x_1	x_0	q_2^+	q_1^+	q_0^+
Estado 0	0	0	0	0	0	1	1	0
	0	0	0	0	1	0	0	1
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	1	1	0	0	0
Estado 1	0	0	1	0	0	1	1	0
	0	0	1	0	1	0	1	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
	0	0	1	1	1	0	0	1
Estado 2	0	1	0	0	0	1	1	0
	0	1	0	0	1	0	1	1
	0	1	0	1	0	0	0	1
	0	1	0	1	1	0	1	0
Estado 3	0	1	1	0	0	1	1	0
	0	1	1	0	1	1	0	0
	0	1	1	1	0	0	1	0
	0	1	1	1	1	0	1	1
Estado 4	1	0	0	0	0	1	1	0
	1	0	0	0	1	1	0	1
	1	0	0	1	0	0	1	1
	1	0	0	1	1	1	0	0
Estado 5	1	0	1	0	0	1	1	1
	1	0	1	0	1	1	0	1
	1	0	1	1	0	1	0	0
	1	0	1	1	1	1	0	1
Estado OFF	1	1	0	0	0	x	x	x
	1	1	0	0	1	0	0	0
	1	1	0	1	0	x	x	x
	1	1	0	1	1	x	x	x

Ya solo nos queda simplificar las salidas q^+ :

Mapa de Karnaugh para q_2^+



Mapa de Karnaugh para q_1^+

		x_1x_0						x_1x_0			
		00	01	11	10			00	01	11	10
		00	1	0	0	0	00	1	0	0	1
		01	1	1	0	0	01	1	0	0	0
		11	1	0	1	1	11	x	x	x	x
		10	1	1	1	0	10	x	0	x	x

$q_2 = 0$ $q_2 = 1$

Mapa de Karnaugh para q_0^+

		x_1x_0						x_1x_0			
		00	01	11	10			00	01	11	10
		00	0	1	0	0	00	0	1	0	1
		01	0	0	1	0	01	1	1	1	0
		11	0	0	1	0	11	x	x	x	x
		10	0	1	0	1	10	x	0	x	x

$q_2 = 0$ $q_2 = 1$

Ya solo nos queda expresar en la forma de funciones lógicas y podemos implementar el circuito.



^aAunque este es el binario del número 7, definiremos que este estado sea neutro/apagado/off.

Smart cities

5	Conociendo la ESP8266	93
5.1	ESP8266	93
5.2	Instalación Windows:Materiales	94
5.3	Instalación	94
5.4	Equivalente al Hola Mundo pero en placas	94
5.5	Conectar a una red Wi-Fi	95
5.6	Crear una red WiFi	97
6	Servicios en la red	99
6.1	Crear un servidor local	99
6.2	Lectura Analógica	101
6.3	Proyecto explicativo 1	105
6.4	Sensor de temperatura y humedad DHT11	108
7	Proyecto final	113
7.1	Software	113
7.2	Hardware	118
7.3	Back-end	119
7.4	Front-end	124

5. Conociendo la ESP8266

Todos los códigos estarán disponibles en **GitHub**, puedes acceder desde este link: <https://github.com/Yasperterian/4rduino> o desde este código QR:

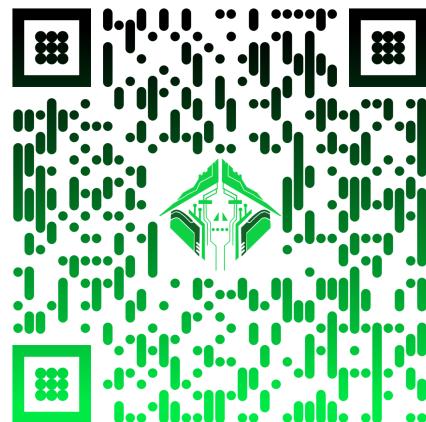


Figure 5.1: Repositorio con todos los programas

5.1 ESP8266

NodeMCU ESP8266 es una plataforma de desarrollo similar a **Arduino** especialmente orientada al Internet de las cosas (IoT). La placa NodeMcu v2 ESP8266 tiene como núcleo al **SoM ESP-12E** que a su vez está basado en el **SoC Wi-Fi ESP8266**, integra además el conversor USB-Serial TTL CP2102 y conector micro-USB necesario para la programación y comunicación a PC. NodeMcu v2 ESP8266 está diseñado especialmente para trabajar montado en protoboard o soldado sobre una placa. Posee un regulador de voltaje de 3.3V en placa, esto permite alimentar la placa directamente del puerto micro-USB o por los pines 5V y GND. Los pines de entradas/salidas (GPIO) trabajan a 3.3V por lo que para conexión a sistemas de 5V es necesario utilizar conversores de nivel como: Conversor de nivel 3.3-5V 4CH o Conversor de nivel



Figure 5.2: Microcontrolador ESP8266 NodeMCU

bidireccional 8CH - TXS0108E.

5.2 Instalación Windows:Materiales

1. **Software IDE arduino:** Disponible desde <https://www.arduino.cc/en/software>
2. **Cable micro usb:** Que sea capaz de transmitir datos, no solo energía.
3. **Driver del ESP8266:** No siempre es necesario. Si windows no lo reconoce por si solo, es necesario que instales el driver correspondiente antes de todo.¹

5.3 Instalación

1. Descargar e instalar el IDE de arduino, la primera vez que lo abras te preguntará sobre el *Firewall de windows*, permite el acceso².
2. Una vez instalado, conectar tu ESP8266 por cable usb, windows lo debe reconocer asi que espera a que se instale el driver automaticamente.
3. Nos dirigimos a *Archivo>Preferencias>Gestor de URLs Adicionales de Tarjetas* y pegamos esta dirección: https://arduino.esp8266.com/stable/package_esp8266com_index.json³. Le damos en OK.
4. Vamos a *Herramientas>Placa: "Arduino/Genuino UNO">Gestor de Tarjetas*⁴
5. Introducimos en el buscador **ESP8266**, donde nos salga el resultado de la busqueda clickamos en instalar. Esperemos que termine de instalar.
6. Vamos a *Herramientas>Placas>Gestor de tarjetas>ESP8266 Boards(3.0.2)>NodeMCU 1.0 (ESP-12E Module)*
7. Vamos a *Herramientas>Upload Speed*, y (recomendablemente)seleccionamos **115200**(*También asegurarte de fijar la misma cantidad usando Serial.begin(115200) en el código*);ademas que con el **Monitor serie** tengan el mismo número de baudios).
8. *Herramientas>Puerto* y seleccionamos el puerto que aparece de la forma **COMxx**, donde xx son números. Al abrir el IDE de Arduino siempre fijate que este seleccionada la COM correcta.

5.4 Equivalente al Hola Mundo pero en placas

Como en la programación de computadoras es un clásico que nuestro primer programa sea el famoso "Hola mundo", dentro del mundo de programación de placas existe su equivalente: Hacer parpadear un LED.

1. Nos dirigimos a *Archivo>Ejemplos>01.Basics>Blink*.
2. Se abrirá una ventana nueva. Luego buscamos dentro del código *void setup()* y justo por encima de ella escribimos: **#define LED_BUILTIN 2**. El número dos significa el puerto del LED, puede ser 1 en algunos casos particulares, se recomienda leer los puertos leds de tu placa.
3. Le damos click en la flecha que apunta a la derecha en la parte superior(subir) y esperamos que compile.
4. Esperamos que termine de descargar y compilar, en consecuencia, tenemos que ver nuestro LED parpadear con una frecuencia de 1 segundo.

¹Puedes probar el driver <https://parzibyte.me/blog/2020/02/09/instalar-driver-esp8266-windows/>

²Si deseas cambiar el lenguaje a español ve a: *File>Preferences>Editor Language>Español(Spanish)*. Presionamos OK y reiniciamos el Arduino IDE

³Repositorio oficial: <https://github.com/esp8266/arduino>

⁴Puede tener el nombre de: Placa"*Nombre genérico*"

```

1 // the setup function runs once when you press reset or power the
2 // board
3 #define LED_BUILTIN 2
4 void setup() {
5     // initialize digital pin LED_BUILTIN as an output.
6     pinMode(LED_BUILTIN, OUTPUT);
7 }
8 // the loop function runs over and over again forever
9 void loop() {
10    digitalWrite(LED_BUILTIN, HIGH); // turn the LED on (HIGH is the
11    // voltage level)
12    delay(1000); // wait for a second
13    digitalWrite(LED_BUILTIN, LOW); // turn the LED off by making
14    // the voltage LOW
15    delay(1000); // wait for a second
16 }
```

Listing 5.1: Blink Program



Figure 5.3:
QR pro-
gram:
1.Blink

5.5 Conectar a una red Wi-Fi

Una de las funciones más elementales e importantes del ESP8266 es la posibilidad de conectarse a internet para realizar proyectos de IoT(*Internet of things*). Así que, como primer paso vamos a conectarnos a nuestra red Wifi:

```

1 #include <ESP8266WiFi.h>
2
3 String ssid    = "FIWI";
4 String password = "21040411";
5
6 byte cont = 0;
7 byte max_intentos = 50;
8
9 void setup() {
10    // Inicia Serial
11    Serial.begin(115200);
12    Serial.println("\n");
13    // Conexion WIFI
14    WiFi.begin(ssid, password);
15    while (WiFi.status() != WL_CONNECTED and cont < max_intentos) {
16        //Cuenta hasta 50 si no se puede conectar lo cancela
17        cont++;
18        delay(500);
19        Serial.print(".");
20    }
21    Serial.println("");
22
23    if (cont < max_intentos) { //Si se conecto
24        Serial.println("*****");
25        Serial.print("Conectado a la red WiFi: ");
26        Serial.println(WiFi.SSID());
27        Serial.print("IP: ");
28        Serial.println(WiFi.localIP());
29        Serial.print("macAddress: ");
30        Serial.println(WiFi.macAddress());
31        Serial.println("*****");
32 }
```



Figure 5.4:
QR pro-
gram:
2.Wifi-
Connect

```

32     }
33     else { //No se conecto
34         Serial.println("-----");
35         Serial.println("Error de conexion");
36         Serial.println("-----");
37     }
38 }
39
40 void loop() {
41 }
```

Listing 5.2: Conectarse a una red WiFi

Debemos cambiar algunas cosas en nuestro programa:

ssid Línea 3. Colocamos el nombre de nuestra red wifi, en el ejemplo la red se llama *FIWI*, asi que le cambias al nombre de tu red.

password Línea 4. Aquí colocaremos la contraseña de nuestra red, en el ejemplo es *21040411*, colocas la tuya.

Las lineas de **byte**(Lineas 6-7) son dos variables que van contar el número de intentos en los que va tratar de conectarse a la red, esta inicializada en 0 y el límite es 50 intentos. Ademas el programa tiene algunos mensajes para mostrarse en el display, como no poseemos ni un display por el momento usaremos una función del mismo IDE de arduino llamado **Monitor serie**. Tenemos que tener el *monitor serie*⁵ abierto antes de correr el programa, puesto que el código nos mostrará información acerca del estado de la placa.

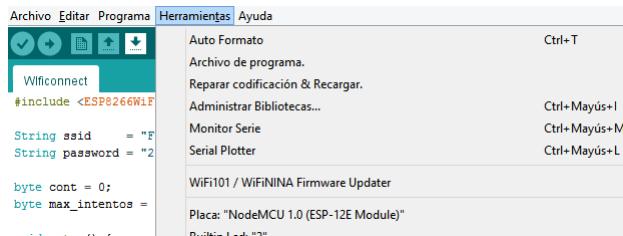


Figure 5.5: Ubicación del Monitor serie

⁵En el monitor serie asegurate de tener seleccionada: sin ajuste de linea y tener seleccionada la cantidad correcta de baudios, que coincide con el definido en el programa

5.6 Crear una red WiFi

Nuestra ESP8266, como hemos visto, se puede conectar a una red wifi pero también puede crear su propia red wifi para que dispositivos se conecten a ella. En este apartado veremos como podemos crear una red wifi:

```
1 #include <ESP8266WiFi.h>
2 const char* ssid="WIFI_ESP8266";//Name of your red
3 const char* password="12345678";//Your password, remember, at
4     least 8 characters
5 void setup() {
6     Serial.begin(115200);
7     Serial.print("\nSetting Ap");//Status message, you can view it
8         in monitor serie
9     WiFi.softAP(ssid, password);
10    Serial.println("WiFi is ready");
11 }
12 void loop() {
13     int device= WiFi.softAPgetStationNum();//It counts numbers of
14         users connected to your red
15     Serial.printf("Devices connected =%d\n",device);
16     delay(5000);
17 }
```

Listing 5.3: Conectarse a una red WiFi



Figure 5.6:
QR pro-
gram:
3.Cre-
ateWiFi



6. Servicios en la red

6.1 Crear un servidor local

Para crear esto utilizaremos el lenguaje HTML, hay varias formas pero esta es la básica para empezar.¹. Puedes hacerlo en **Sublime text**² o en **VScode**³, en nuestro caso usaremos VScode, luego copiamos el código en nuestro editor. **OJO: Hacemos este código solo para ver como funcionan las etiquetas en el "lenguaje" HTML.**

```
1 <!DOCTYPE html>
2 <html>
3
4 <head>
5   <style>
6     html {
7       font-family: Helvetica;
8       display: inline-block;
9       margin:
10      0px auto;
11      text-align: center;
12    }
13
14   .button {
15     background-color: #195B6A;
16     border: none;
17     color:
18     white;
19     padding: 16px 40px;
20     text-decoration: none;
21     font-size: 30px;
22     margin: 2px;
23     cursor: pointer;
24   }
25
26   .button2 {
27     background-color: #77878A;
```



Figure 6.1:
QR pro-
gram:
4.Server
local On
Off led

¹Si da error, puedes ponerle una tilde en la i de título en línea 33

²<https://www.sublimetext.com/>

³<https://code.visualstudio.com/>

```

28      }
29  </style>
30 </head>
31
32 <body>
33   <h1>Titulo</h1>
34   <p>GPIO 5 </p>
35   <p><button class="button">ON</button></p>
36   <p>GPIO 4 </p>
37   <p><button class="button button2">OFF</button></p>
38 </body>
39
40 </html>

```

Listing 6.1: Conectarse a una red WiFi

Cuando lo hemos copiado, damos click derecho en cualquiera parte del editor y le damos en *Dar formato al texto* como en la figura 6.2: Luego de ello, guardamos.

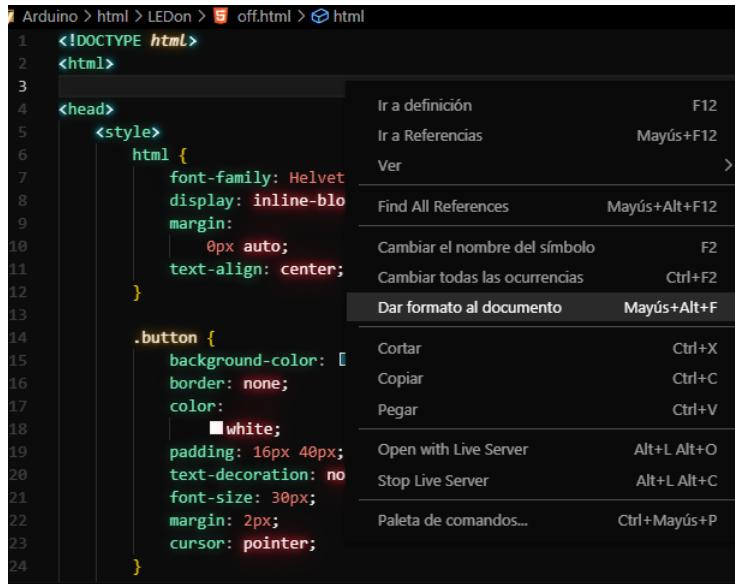


Figure 6.2: Dar formato al texto

Tenemos la primera parte. Ahora nos vamos a arduino y abrimos el programa llamado *ejemplo.ino*⁴ modificamos las líneas 3 y 4 donde nos piden nuestras credenciales de nuestra red WiFi. Una vez hecho abrimos el Monitor serie 5.5 y ejecutamos nuestro programa(no esta de más decir que te fijes que el puerto correcto esta seleccionado⁵)

Implementamos el circuito de la figura 6.6, una vez implementado ejecutamos el programa. Al ejecutar observamos en nuestro Monitor que después de buscar nuestra red nos dirá su nombre y su IP como en la figura 6.3. Nos dará nuestra IP y lo copiamos en nuestro navegador, por ejemplo: nuestra IP es 192.123.0.123, tal como está, lo copiamos e ingresamos.

⁴Escanear el código qr 6.1 para conseguir el programa

⁵Ver item 8 de la parte 1.3 Instalación

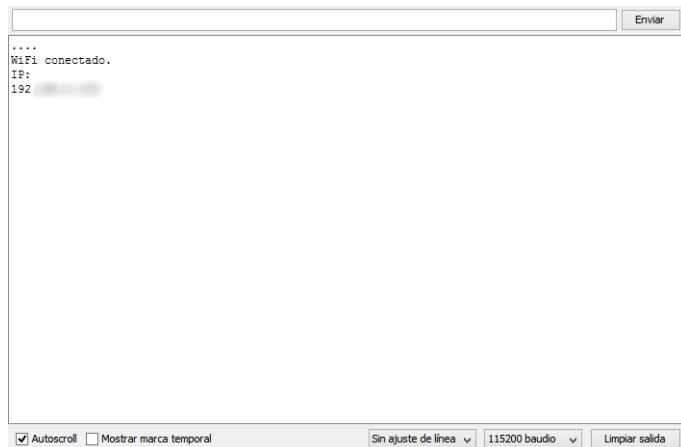


Figure 6.3: Dar formato al texto

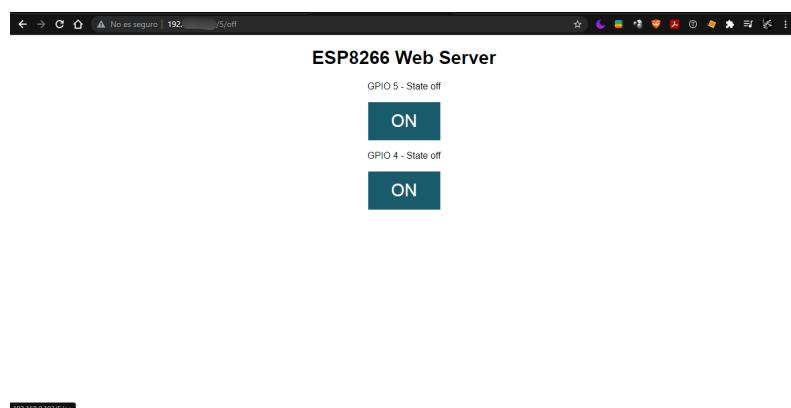


Figure 6.4: Página de ON y OFF

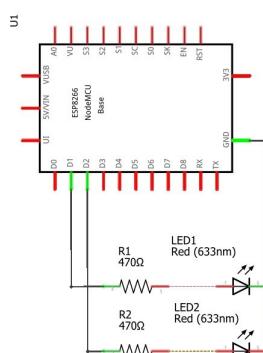


Figure 6.5: Diagrama de la conexión leds

6.2 Lectura Analógica

También podemos usar nuestra ESP8266 para medir dispositivos analógicos como por ejemplo, medir la resistencia de un potenciómetro: ver gráficamente como cambia este valor.

En nuevo documento copiamos el siguiente programa:

```
1 const int analogInPin=A0;
2 int SensorValue=0;
3
```

Figure 6.7:
QR pro-
gram

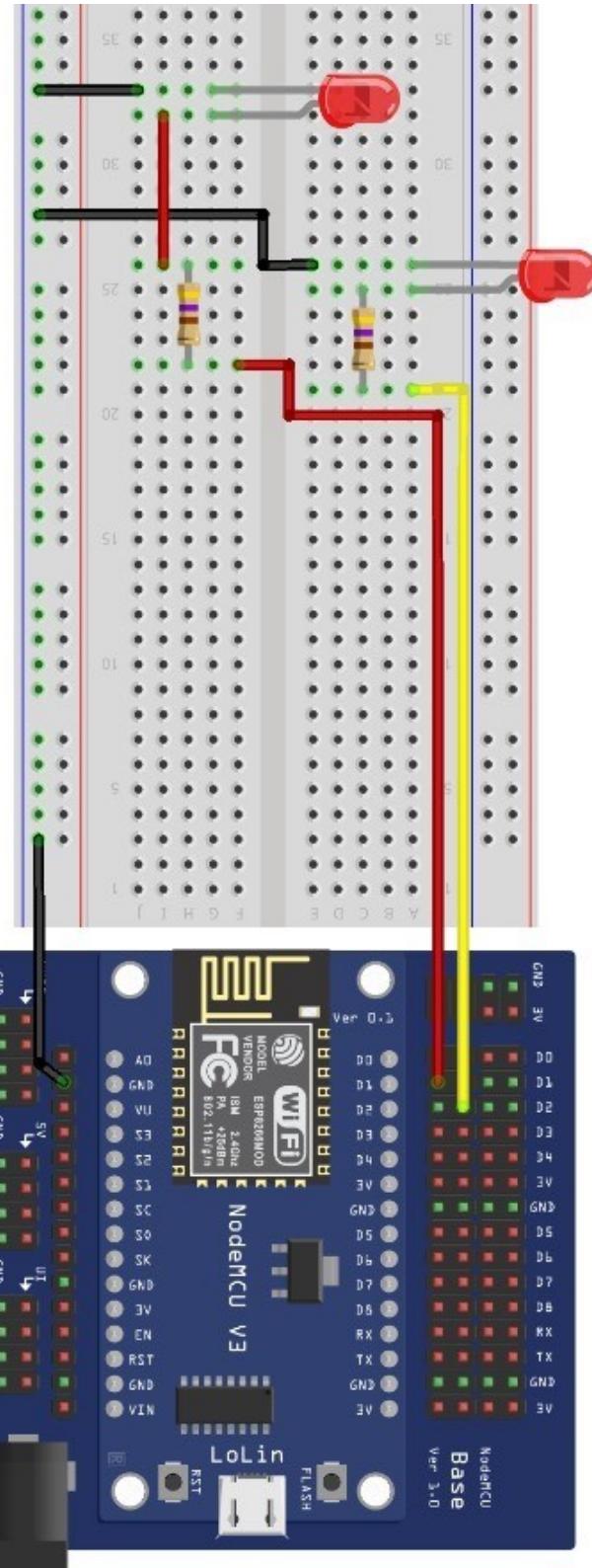


Figure 6.6: Diagrama de la conexión leds implementado, las resistencias pueden variar desde los 100 Ω hasta los 500 Ω .

```

4 void setup() {
5     // put your setup code here, to run once:

```

```

6 Serial.begin(115200);
7 }
8
9 void loop() {
10 // put your main code here, to run repeatedly:
11 SensorValue=analogRead(analogInPin);
12 Serial.println(SensorValue);
13 }
```

Listing 6.2: Medir la resistencia de un potenciómetro

Y implementamos el circuito de la figura 6.8:

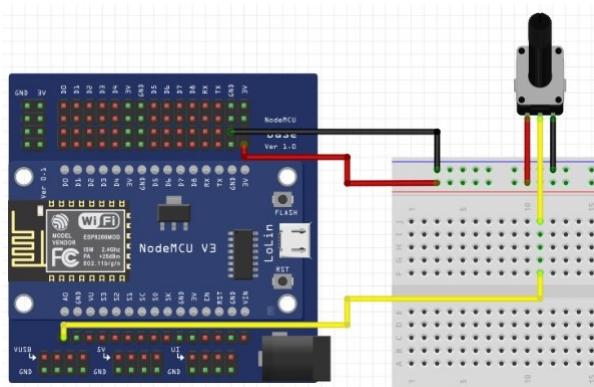


Figure 6.8: Diagrama de la conexión para el potenciómetro(presta mucha atención)

Una vez que tenemos todo conectado corremos el programa entramos a la siguiente ruta: **Herramientas>Serial Plotter**(Imagen 6.9)

Luego de ingresar al Serial Plotter podremos ver el estado de la resistencia de nuestro potenciómetro desde el 0 hasta 1024.

Los pines de entrada analógica permiten leer valores analógicos que se convertirán

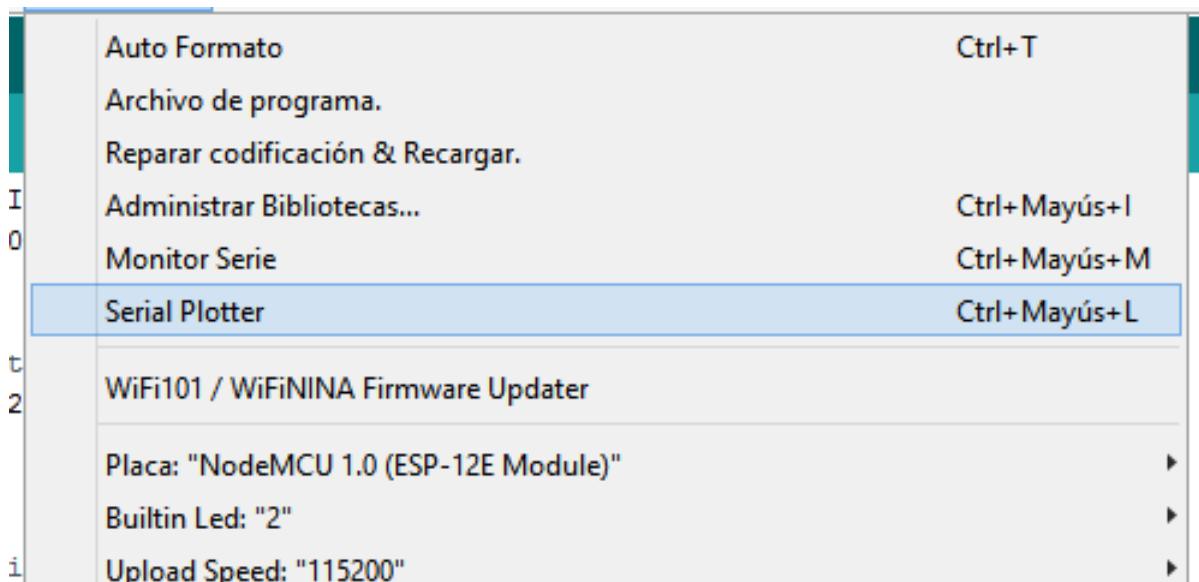


Figure 6.9: Ubicación del Serial Plotter

en valores dentro del rango de 0-1024(Image6.10), (2^10 elevado a la 10). Se trata de una conversión analógica digital de 10 bits de resolución, donde el menor valor

es: **0000000000** y el máximo valor es **1111111111** ademas las señales analógicas no deben superar los 5V.

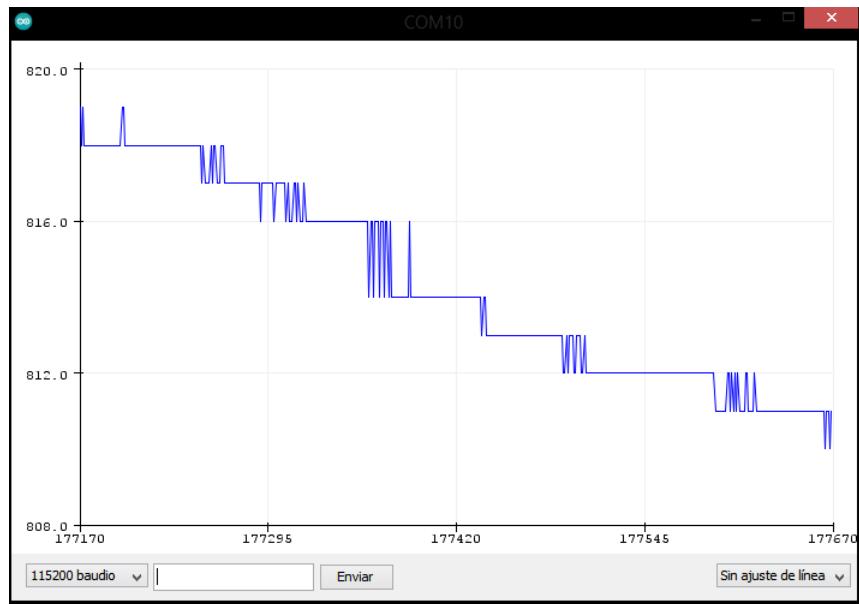


Figure 6.10: Serial Plotter

6.3 Proyecto explicativo 1

Ahora analizaremos un proyecto acerca de bases de dato, IoT y servidores locales.

Antes de todo necesitamos tener instalado en nuestro computador **Xammp**, para ello no vamos a su pagina oficial y los descargamos. Una vez instalado, lo abrimos y nos aparecerá una ventana como esta(figura 6.11).

Por ahora solo necesitamos **Apache** y **MySQL**. Si es necesario, podemos correrlo como admin-

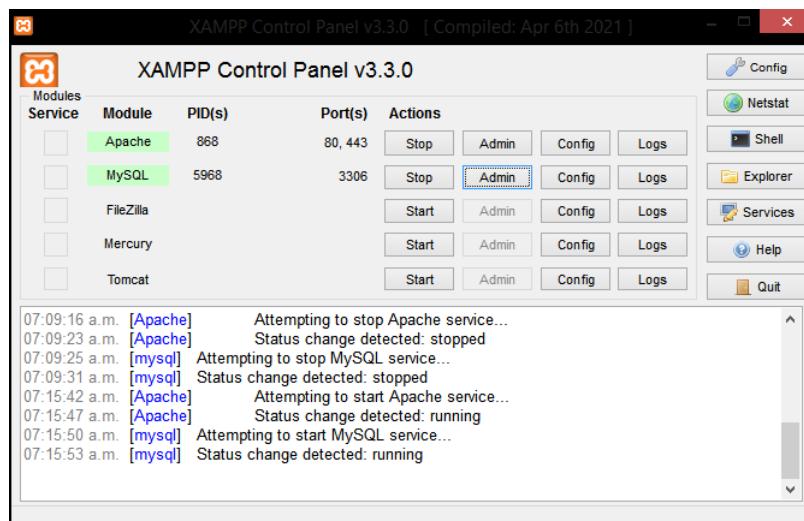


Figure 6.11: Xammp interfaz de server

istrador. A veces es necesario que los check estén marcados, no siempre. Le damos al botón de start para Apache y para MySQL. Esperamos que nos de la confirmación y listo. En nuestro navegador podemos ingresar a las dirección **localhost**(figura 6.12) y debe aparecer una pantalla del Xammp: Descargamos el archivo rar⁶, extraemos y tendremos dos carpetas: terminal y web.

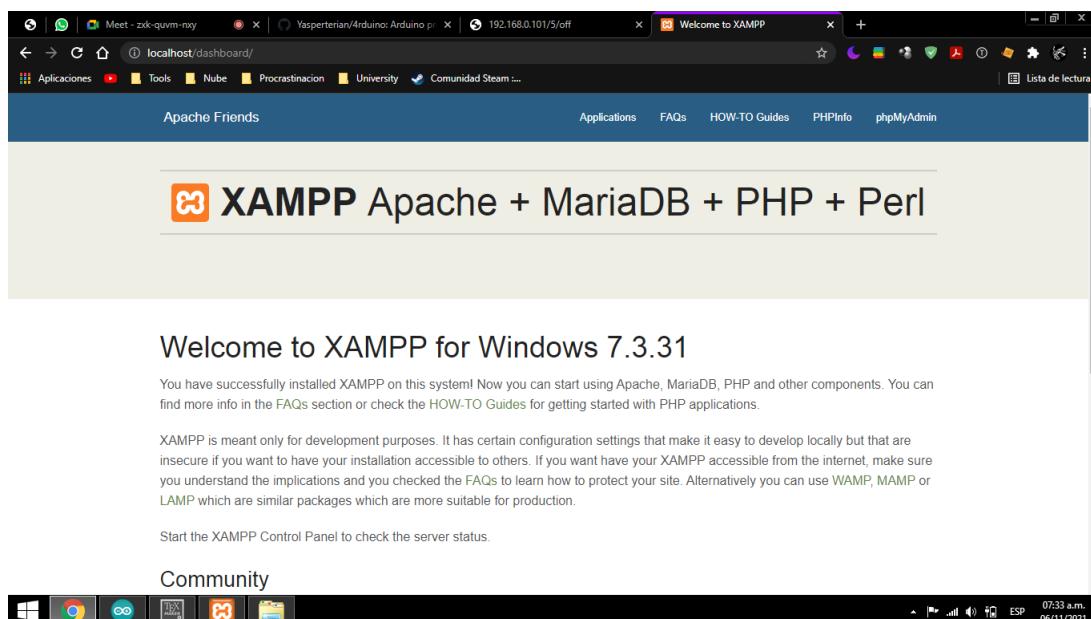


Figure 6.12: Local host en Google Chrome

Mientras avancemos tendremos que hacer algunos cambios a los archivos.

⁶<https://www.dropbox.com/s/hvx174ye9pk1slc/6.Proyecto%20explicativo%201.rar?dl=0>

6.3.1 Parte 1



Figure 6.13: QR program: 6.Proyecto explicativo 1

Abrimos el archivo que esta ubicado en *6.Proyecto explicativo 1>Terminal>wifi_get>wifi_get.ino*, cambiamos nuestras credenciales de la red wifi. Ahora necesitamos nuestra IP para conectarnos a la red. Para ello vamos abrir nuestro CMD(windows + R, escribimos *cmd* y enter), cuando abra escribimos **ipconfig** y buscamos **Direccion IPv4**(figura 6.14) del adaptador de red, es dirección la pegamos en la linea 44 reemplazando a la anterior(figura 6.15). Volvemos al IDE de arduino y nos

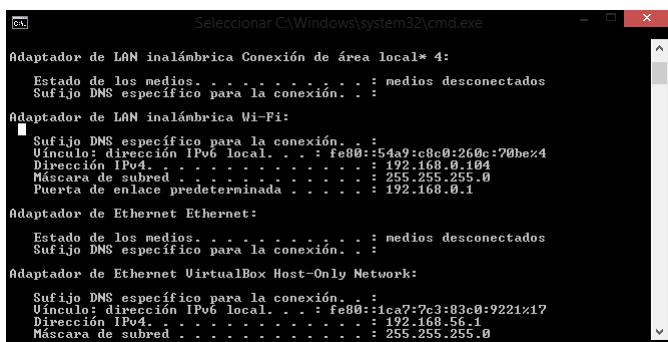


Figure 6.14: IP desde el CMD

vamos a la linea 44, revisamos que tenga el siguiente formato: *dirección IP/nombre de la carpeta que creamos/nombre de la API/usuarios y contraseña*⁷.

Nos vamos a *C>xampp>htdocs*, y creamos la carpeta **practica1**, entramos en la carpeta y pegamos **api_get.php** ubicada en *6.Proyecto explicativo1>web>api_get.php*

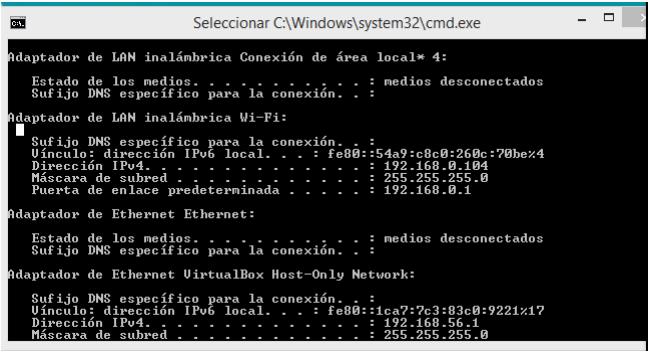
Corremos el programa y entramos a la dirección URL de la linea 44(toda la URL)(figura 6.15) y lo ponemos en nuestro navegador. Si abrimos el archivo *api_get.php* con VScode o sublime text podemos editar la respuesta de la API.(figura 6.16)

6.3.2 Parte 2

Para la parte 2, copiamos la API de la carpeta *6.Proyecto explicativo 1>web>api_post.php* a nuestra carpeta del servidor(*C>xampp>htdocs>practical1*), igual que la parte anterior. En el programa de arduino hacemos los mismos cambios(credenciales de red y link con la IP de la linea 44(figura 6.18)).

La diferencia está en como obtiene los datos, en la parte 1 lo mandamos a través del link. Mientras que para la parte 2, le estamos mandando por medio de una cadena **string** que esta incluida en el código, y esta nos la devolverá a la ESP8266 los datos de usuario y password mediante el **monitor series**.

⁷ el usuario y contraseña no es relevante aún, puedes poner cualquier cosa, pero solo puedes cambiar la palabra "joss" y "12345"

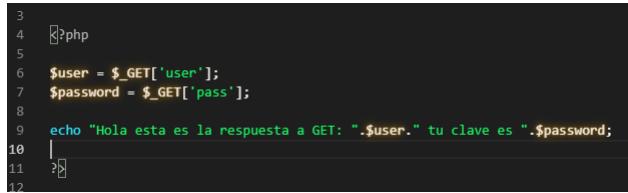


```

32 rial.println("Conectado con éxito, mi IP es: ");
33 rial.println(WiFi.localIP());
34
35
36
37 ble de ejecución/
38 loop() {
39
40 WiFi.status() == WL_CONNECTED) { //Comprobamos el estado de la conexión WiFi
41
42 HTTPClient http;
43 /Indicamos el destino
44 http.begin(wifiClient, "http://192.168.0.104/humedad/api_get.php?user=Efrain&pass=12345");
45 /Preparamos el header text/plain si solo vamos a enviar texto plano sin un paradigma llave:valor.
46 http.addHeader("Content-Type", "plain-text");
47 /Enviamos el post pasándole, los datos que queremos enviar.
48 /esta función nos devuelve un código que guardamos en un int
49 int codigo_respuesta = http.GET();
50
51 if(codigo_respuesta>0){
52   //Guardamos el código de respuesta

```

Figure 6.15: Atento con la linea 44



```

3
4 <?php
5
6 $user = $_GET['user'];
7 $password = $_GET['pass'];
8
9 echo "Hola esta es la respuesta a GET: ".$user." tu clave es ".$password;
10
11 ?>
12

```

Figure 6.16: Editar respuesta de la API

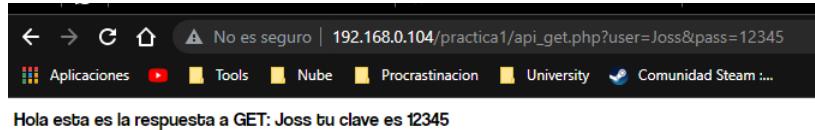


Figure 6.17: Resultado final Parte 1

```

1
2 ; http;
3 ; el destino
4 wifiClient,"http://192.168.0.104/practica1/api_get.php?user=Efrain&pass=12345");
5 ; el header text/plain si solo vamos a enviar texto plano sin un paradigma llave:valor.
6 adder("Content-Type", "plain-text");
7 el post pasándole, los datos que queremos enviar.
8 ación nos devuelve un código que guardamos en un int
9 _respuesta = http.GET();
^

```

Figure 6.18: Modificando URL

6.3.3 Parte 3

Importante: Realizar primero la sección "Sensor de temperatura y humedad DHT11".

Para la parte 3 tenemos que abrir el sql, para ello en el administrador de servidores ponemos **admin**(figura 6.20). Creamos una base de datos, nos dirigimos a Nueva(figura 6.23)>Ponemos un nombre y creamos, seleccionamos nuestra base de datos(imagen 6.21) que esta ubicada en *6. Proyecto explicativo 1>web>schema.sql*(figura 6.22), continuar y ya estará. En el panel izquierdo aparecerá nuestra base de datos. De la carpeta del proyecto copiamos **recibe_data.php** a la carpeta del servidor. Lo abrimos, y modificamos el **dbname** que por defecto esta en *schema*, le ponemos el nombre de nuestra carpeta(practical1 en nuestro caso(figura 6.24) y guardamos.

Ahora abrimos el programa **Send_Data_MySQL.ino** y modificamos lo mismo que los anteriores(credenciales, nuestra IP, carpeta del servidor(linea del comentario *Indicamos el destino-Modificar* debe parecido a esto pero con tus datos: *http.begin(wifiClient, "http://192.168.0.104/practica1/recibe_data.php");*)

Nos fijamos bien en la conexión de los puertos del sensor de temperatura y humedad(**La instalación de este sensor se detalla más adelante**). Una vez que tenemos todo listo, corremos el programa y

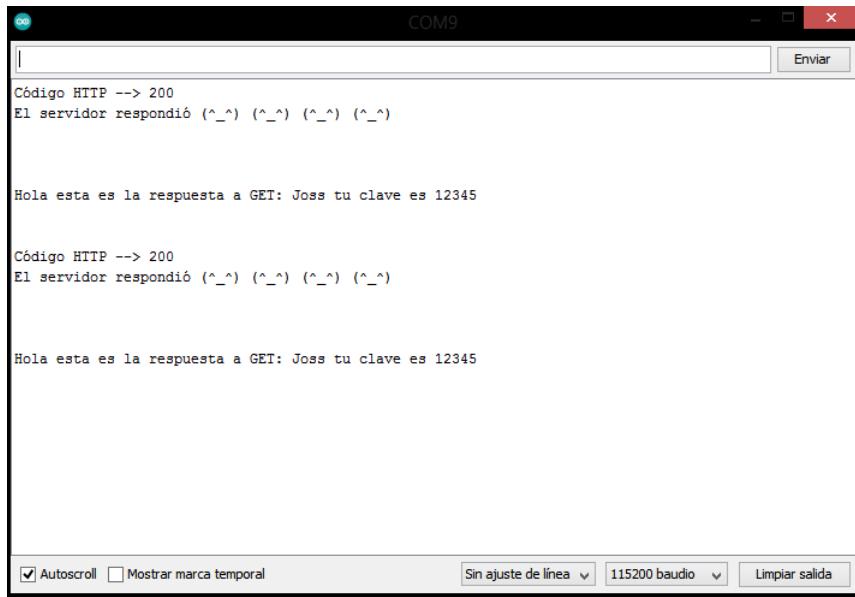


Figure 6.19: Usuario monitor series

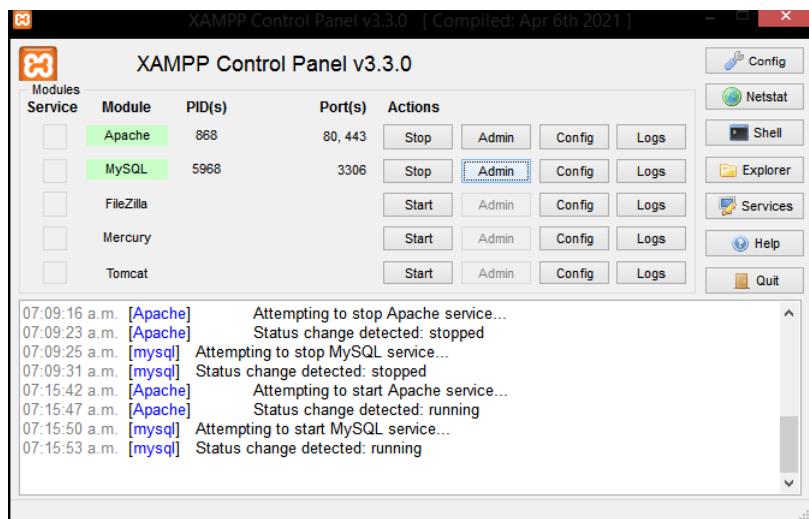


Figure 6.20: Localizar MySQL

nos vamos a nuestro servidor, nos dirigimos a **practica 1>sensor data** y veremos(figura6.25) que los datos se registrarán en nuestro servidor local.

6.4 Sensor de temperatura y humedad DHT11

Instalamos las librerías desde la IDE de arduino, para eso vamos a **Programa>Incluir Librería>Administrar bibliotecas** y buscamos DHT11(figura 6.26), uno hecho por Adafruit.

Probamos el programa testSensorDHT11.ino y vemos si todo funciona correctamente, debe leer la temperatura y la humedad y mostrará en grados farenheit y mostrará en el **monitor serie**.

Implementamos el diagrama de la figura 6.29 encima del diagrama de la figura 6.6, es preferible cambiar el color de los leds, rojo que este conectado al puerto D2 y verde al puerto D1. Si da error de lectura, asegúrate que este bien conectado el DHT11, a veces no hace contacto



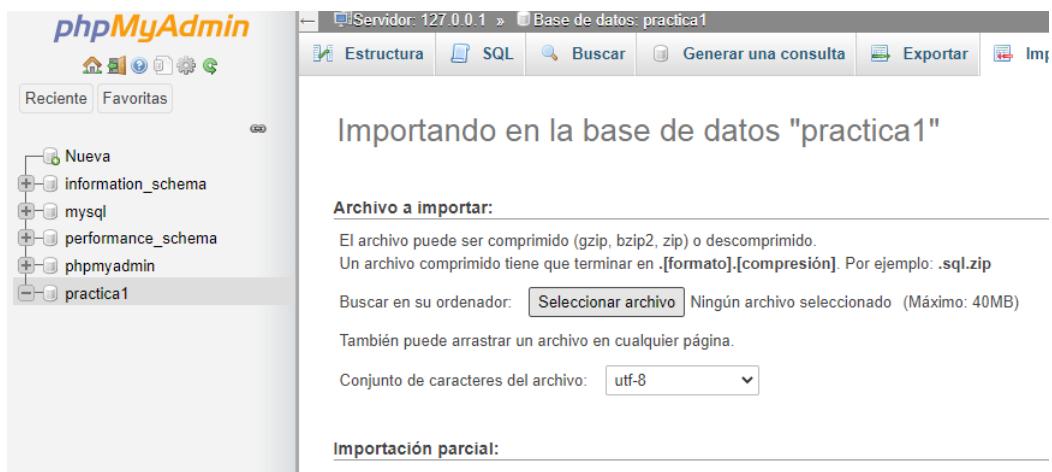


Figure 6.21: Importando SQL

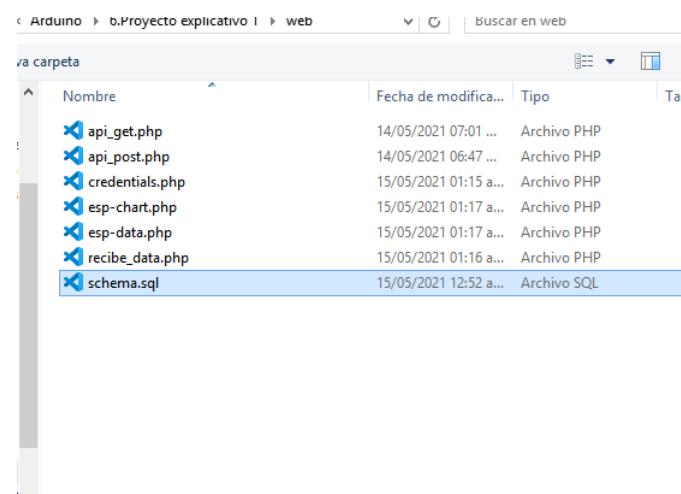


Figure 6.22: Seleccionar un archivo sql



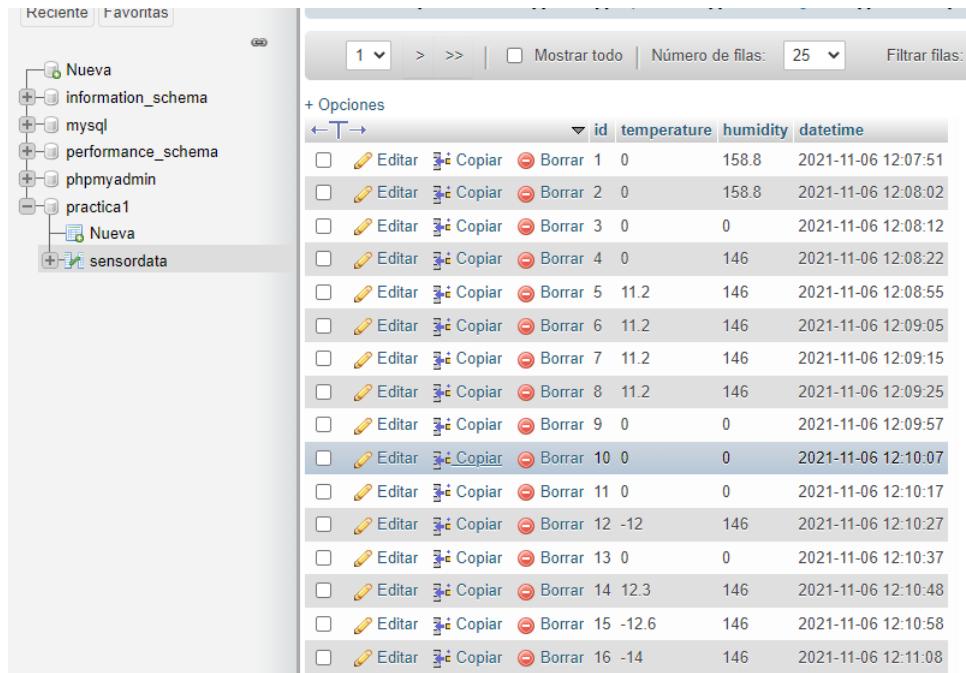
Figure 6.23: Creando una base de datos

```
$servername = "localhost";
$dbname = "practica1"; // replace with dbname
$password = ""; // replace with password
$username = "root"; // replace with username

if ($_SERVER["REQUEST_METHOD"] == "POST") {
    $temperature = floatval($_POST["temperature"]);
    $humidity = floatval($_POST["humidity"]);
    $connection = new mysqli($servername, $username, $password);
    if ($connection->connect_error) die("Connection failed: " . $connection->connect_error);
}
```

Figure 6.24: Cambiar Scheme

bien con la protoboard.



The screenshot shows the phpMyAdmin interface for a MySQL database named 'practica1'. The left sidebar lists databases like 'information_schema', 'mysql', 'performance_schema', 'phpmyadmin', and 'practica1'. The 'sensordata' table under 'practica1' is selected. The right panel displays a grid of data with columns: id, temperature, humidity, and datetime. The data shows 16 rows of sensor readings from November 6, 2021, at 12:07:51 to 12:11:08.

	<input type="checkbox"/> Editar	<input type="checkbox"/> Copiar	<input type="checkbox"/> Borrar	id	temperature	humidity	datetime
				1	0	158.8	2021-11-06 12:07:51
				2	0	158.8	2021-11-06 12:08:02
				3	0	0	2021-11-06 12:08:12
				4	0	146	2021-11-06 12:08:22
				5	11.2	146	2021-11-06 12:08:55
				6	11.2	146	2021-11-06 12:09:05
				7	11.2	146	2021-11-06 12:09:15
				8	11.2	146	2021-11-06 12:09:25
				9	0	0	2021-11-06 12:09:57
				10	0	0	2021-11-06 12:10:07
				11	0	0	2021-11-06 12:10:17
				12	-12	146	2021-11-06 12:10:27
				13	0	0	2021-11-06 12:10:37
				14	12.3	146	2021-11-06 12:10:48
				15	-12.6	146	2021-11-06 12:10:58
				16	-14	146	2021-11-06 12:11:08

Figure 6.25: Datos en la nube local

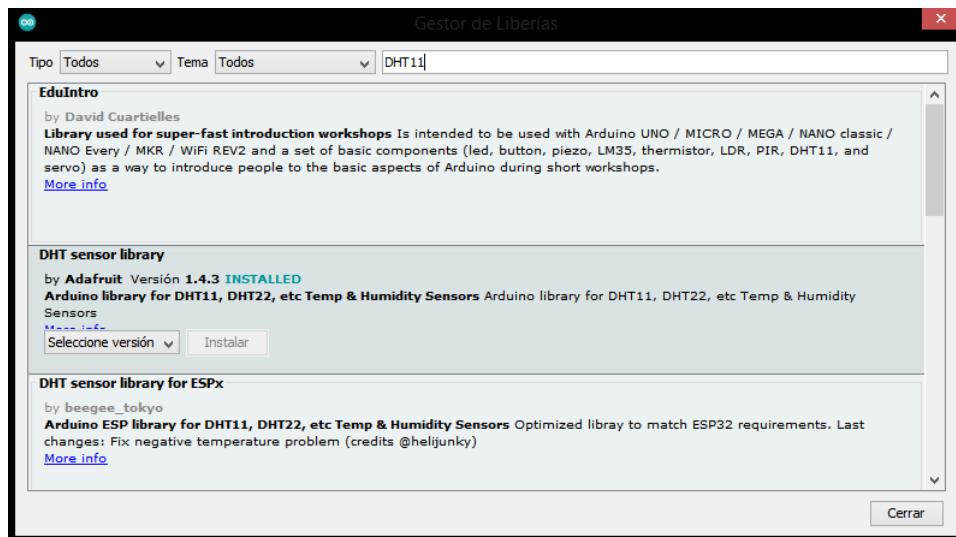


Figure 6.26: Librerías del DHT11

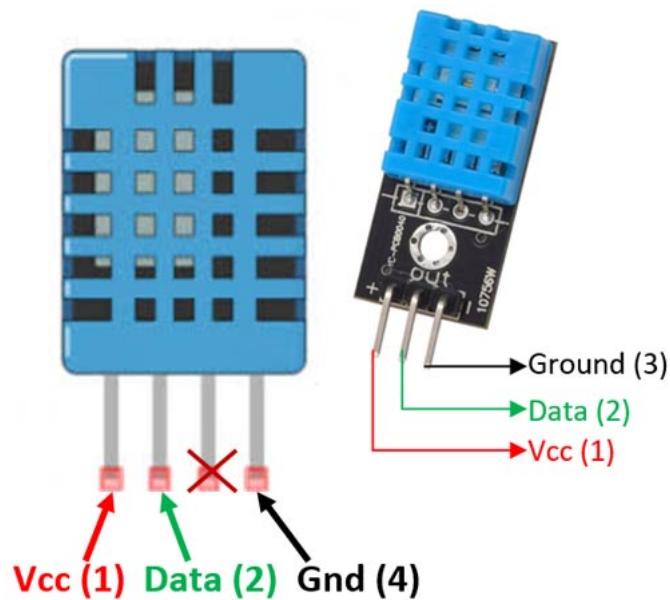


Figure 6.28: DHT11 pinout

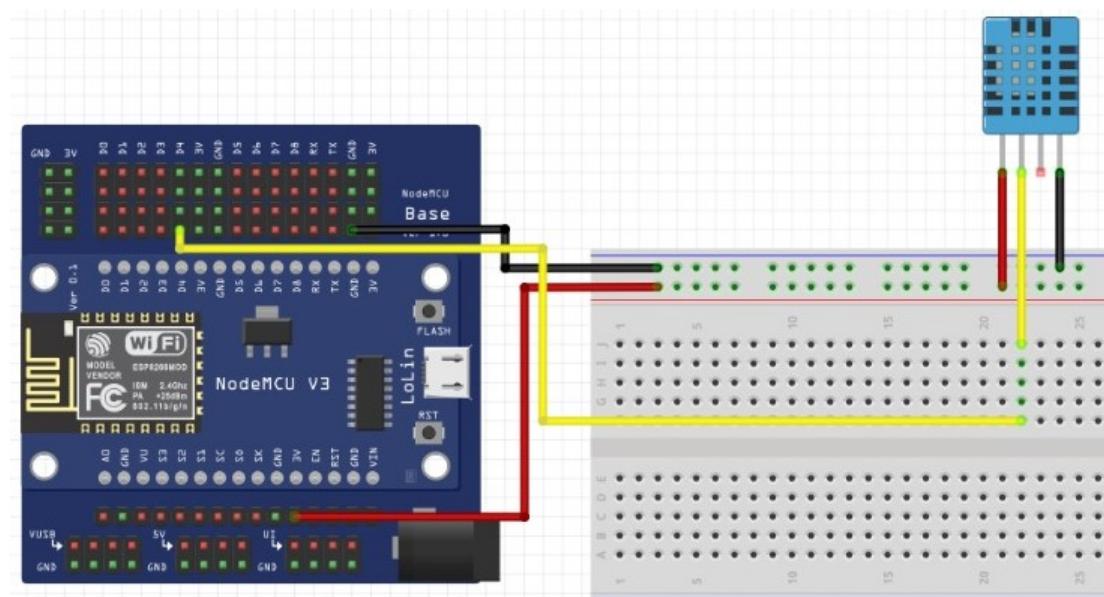


Figure 6.29: Diagrama de la conexión para el DHT11



7. Proyecto final

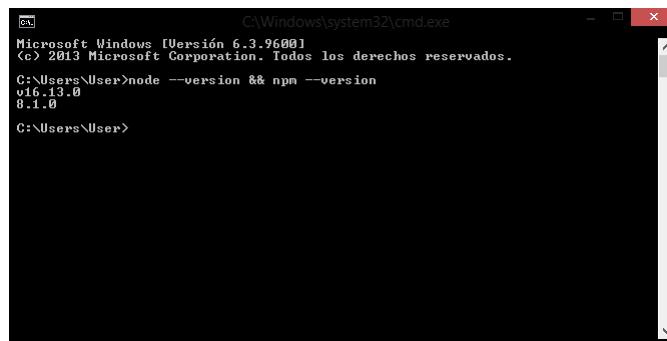
7.1 Software

Para este proyecto necesitaremos instalar algunas cosas, por ahora tenemos que instalar **node.js** y **Mosquitto**. No te explicaré a profundo sobre que van o que hacen cada tecnología, eso ya depende de ti.

7.1.1 Instalación de Node.js

Descargamos el paquete de instalación de <https://nodejs.org/en/>, la que tu quieras pero preferible la más estable, en mi caso yo trabajaré con la 16.13.0 LTS. Abriremos el archivo *.msi* y lo ejecutamos, aceptamos todo e instalamos. Una vez finalizada abrimos nuestra ventana de comandos¹, dentro del CMD² escribimos: **node --version && npm --version** y presionas enter, esperas y te debe dar las versiones que actualmente tienes en tu PC(figura 7.1).

Si llegamos aqui sin problemas tenemos el node.js instalado perfectamente. Luego de ello, sin salir



```
C:\Windows\system32\cmd.exe
Microsoft Windows [Version 6.3.9600]
(c) 2013 Microsoft Corporation. Todos los derechos reservados.
C:\Users\User>node --version && npm --version
v16.13.0
8.1.0
C:\Users\User>
```

Figure 7.1: Versión Node red

del CMD abierto escribimos: **npm install -g --unsafe-perm node-red**, con esto instalaremos Node red en nuestra computadora. Esperamos a que instale.

Cuando ya se haya instalado cerramos el CMD y lo volvemos a abrir, para correr el node red escribimos el siguiente comando: **node-red**³, esperamos a que se lance el programa. Una vez lanzado, buscamos la linea donde nos dice en que dirección esta corriendo el server(figura 7.2) y entramos a esa dirección desde nuestro navegador. Aprovechando que estamos dentro de la

¹windows+R, escribimos cmd y presioamos enter

²para powershell escribes: node --version; npm --version

³De no correr, prueba subir de directorio hasta el C:/, para subir tienes que escribir le siguiente comando: **cd..**

```

node-red
Microsoft Windows [Versión 6.3.9600]
(c) 2013 Microsoft Corporation. Todos los derechos reservados.

C:\Users\user>node-red
28 Nov 17:58:16 - [info] 
28 Nov 17:58:16 - [info] Welcome to Node-RED
=====
28 Nov 17:58:16 - [info] Node-RED version: v2.1.3
28 Nov 17:58:16 - [info] Node.js version: v16.13.0
28 Nov 17:58:16 - [info] Windows_NT 6.3.9600 x64 LE
28 Nov 17:58:22 - [info] Loading palette nodes
28 Nov 17:59:22 - [info] Dashboard version 3.0.4 started at /ui
28 Nov 17:59:25 - [info] Settings file : C:\Users\user\.node-red\settings.json
28 Nov 17:59:25 - [info] Context store : 'default' [module=memory]
28 Nov 17:59:25 - [info] Flow history store : 'local'
28 Nov 17:59:25 - [warn] Projects disabled : editorTheme.projects.enabled=false
28 Nov 17:59:25 - [info] Flows file : \Users\user\.node-red\flows.json
28 Nov 17:59:25 - [info] Server now running at http://127.0.0.1:1880/
28 Nov 17:59:25 - [warn] Your Flow credentials file is encrypted using a system-generated key.

=====

```

Figure 7.2: Localizar el servidor actual de Node red

interfaz del Node red, instalaremos algunas paletas que nos serán utiles. Para instalar paletas vamos a las tres barras horizontales de la esquina superior derecha > Manage palettes > install; y buscamos *node-red-contrib-ibm-watson-iot*, *node-red-dashboard*. Por ahora debemos tener 4 palettes instaladas(figura 7.3). Si queremos salir de Node red, cerramos la pestaña donde esta

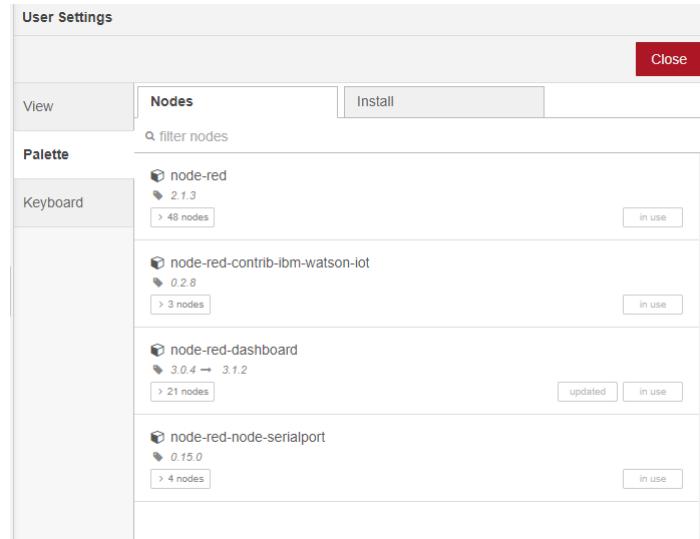


Figure 7.3: Paletas necesarias en node red

abierto la interfaz de node red; luego nos vamos al CMD donde se esta ejecutando node red y presionamos ctrl+c, con esto se detendrá y se cerrará.

7.1.2 Instalación de Mosquitto

Para la instalación de mosquitto, descargamos el instalador desde <https://mosquitto.org/download/>, cuando lo instalamos tenemos que tener por lo minimo marcados la casilla de **files** y la casilla **Service**. Ojo: acuerdate bien de donde lo estan instalando, en mi caso lo estoy estando el Archivos de programa, una carpeta en el disco local C. Procedemos con la instalación y esperamos. Una vez instalado cerramos todo y abrimos el CMD, tenemos que irnos hacia donde hemos instalado el Mosquitto. En la mayoria de casos cuando abres el CMD estarás en la ruta: **C:\user\User**, para ir donde a la carpeta donde esta instalado Mosquitto, tenemos que subir hasta el disco C y bajar. Tipeamos el comando **cd..** pasa subir un nivel, ahora nos encontramos en **C:\user**, tipeamos el comando una vez más y nos encontramos en **C:**.

Ahora que estamos en el disco C, nos dijimos a donde hemos instalado el mosquitto(en mi caso: C>Archivos de programa>mosquitto) usando el comando **dir**. Entonces tipeamos el comando: **dir** y presionamos enter, podremos ver los archivos en esa carpeta, en mi caso esta la carpeta **Program**

Files, por lo que escribimos: `cd Program Files4` y damos enter, ahora usando de nuevo el comando `dir` para ver si efectivamente esta la carpeta mosquitto. Si no esta sube de nivel y sigue buscando, si esta usa el comando `cd mosquitto` y con esto estamos dentro de la carpeta mosquitto. Para asegurarnos que estamos en la carpeta correcta escribimos el comando `mosquitto -v`(figura 7.4). Dejamos todo por un momento, vamos a la ubicación donde hemos instalado el mosquitto mediante

```

C:\Windows\system32\cmd.exe - mosquitto -v
13/12/2015 01:49 p.m. <DIR> Windows Multimedia Platform
15/06/2015 05:08 p.m. <DIR> Windows NT
29/09/2013 10:47 p.m. <DIR> Windows Photo Viewer
13/12/2015 01:49 p.m. <DIR> Windows Portable Devices
22/08/2013 10:51 a.m. <DIR> WindowsPowerShell
          0 archivos          0 bytes
        41 dirs  81,822,203,904 bytes libres

C:>>d "Program Files"
C:>Program Files>cd mosquitto
C:\Program Files>mosquitto -v
1638142518: mosquitto version 2.0.14 starting
1638142518: Using default config.
1638142518: Starting in local only mode. Connections will only be possible from
clients running on this machine.
1638142518: Create a configuration file which defines a listener to allow remote
connections.
1638142518: For more details see https://mosquitto.org/documentation/authentication-methods/
1638142518: Opening ipv4 listen socket on port 1883.
1638142518: Opening ipv6 listen socket on port 1883.
1638142518: mosquitto version 2.0.14 running

```

Figure 7.4: Ver la versión de mosquitto

nuestro explorador de archivos, y dentro de la carpeta donde hemos instalado mosquitto buscamos el archivo **mosquitto.conf** y lo abrimos con VScode o Sublime Text; tenemos que configurar, porque si no te diste cuenta, en la figura 7.4 nos dice que las conexiones solo serán posibles para clientes DENTRO de esta maquina; pero obviamente nuestra ESP8266 no esta dentro de la maquina, es por ello que editamos este archivo de configuración. Entonce añadimos las dos primeras lineas de la figura 7.5 y guardamos, si nos dice error al guardar en VScode, nos da opciones, escogemos guardar como administrador, esperamos y aceptamos la solicitud que nos pedirá. Cerramos el explorador

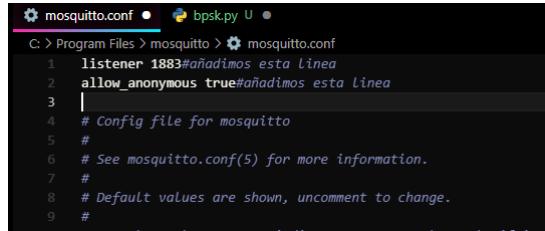


Figure 7.5: Editando archivo de configuración

de archivos y volvemos al CMD de mosquitto. Presionamos `ctrl+c` para detener mosquitto y ahora usando el comando `mosquitto -c mosquitto.conf -v` hacemos que mosquitto inicie usando el archivo de configuración que acabamos de modificar.

En este punto realmente ver es siguiente lista de reproducción <https://youtube.com/playlist?list=PLcmn4IteQPYrMOJ06rCerzIcbaGYdUPz6>

Para los trabajos de aquí en adelante, antes de programar tenemos que tener corriendo al mismo tiempo Node Red como Mosquitto como ya hemos visto en estos dos pasos.

7.1.2.1 Conexión de Mosquitto a Node red desde ESP8266

Antes de todo, tenemos que saber nuestra IP de nuestro adaptador sea de Ethernet o Wifi, para ello abrimos una consola de CMD y escribimos el comando: `ipconfig /all`, y uso mediante red inalambrica, por eso busco mi IP(figura 7.6) de ese adaptador, anótate esa dirección IP porque será importante. Una vez hemos puesto a correr Mosquitto y Node Red(se tienen que ejecutar desde CMD independientes) nos vamos a Node red y buscamos en las paletas del lateral izquierdo el Nodo **mqtt in** y lo arrastramos a nuestro entorno de trabajo, le damos doble click y lo configuramos

⁴puedes escribir solo `cd pro` y apretar tab las veces que sea necesaria para que windows lo autocomplete

```

Selezionare C:\Windows\system32\cmd.exe
DHCP habilitado : no
Configuración automática habilitada : sí
Adaptador de LAN inalámbrica Wi-Fi:
  Sufijo DNS específico para la conexión . . . . . : 
  Descripción . . . . . : Qualcomm Atheros AR9485 Wireless Network Adapter
  Dirección física . . . . . : D0-53-49-9A-27-BE
  DHCP habilitado . . . . . : sí
  Configuración automática habilitada . . . . . : sí
  Vínculo: dirección IPv6 local . . . . . : fe80::5490:8888%26@:70hex4<Preferido>
  Dirección IPv4 . . . . . : 192.168.0.1<Preferido>
  Máscara de subred . . . . . : 255.255.255.0
  Concesión obtenida . . . . . : domingo, 28 de noviembre de 2021 08:13:05 p.m.
  La concesión expira . . . . . : domingo, 28 de noviembre de 2021 10:10:48 p.m.
  Puerto de enlace predeterminada . . . . . : 192.168.0.1
  Servidor DHCP . . . . . : 192.168.0.1
  ID DHCPv6 . . . . . : 131093321
  DUID de cliente DHCPv6 . . . . . : 00-01-00-01-1D-11-C8-40-F0-76-1C-8C-7A-6D
  Servidores DNS . . . . . : 8.8.8.8
                                         8.8.4.4

```

Figure 7.6: IP de nuestro computador

como la figura 7.7, en server que dice *Add new mqtt-broker*, damos click al icono de lapiz de su derecha y lo configuraremos como la figura 7.8. Ahora, al nodo de *mqtt in* le añadimos los siguientes

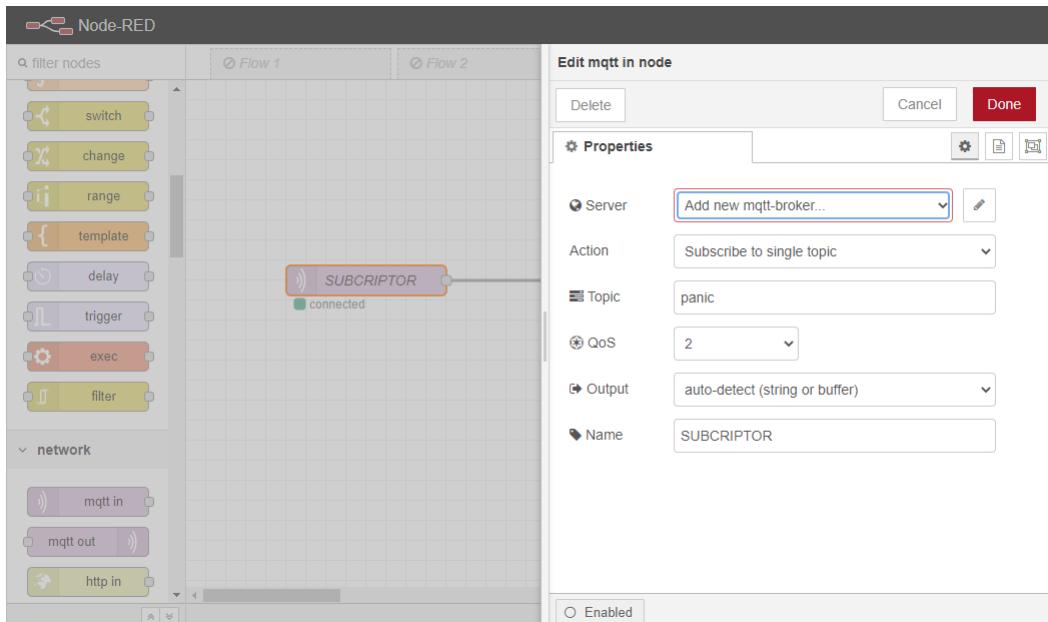


Figure 7.7: Configuración de mqtt in

nodos(ver figura 7.9 y figura 7.10):

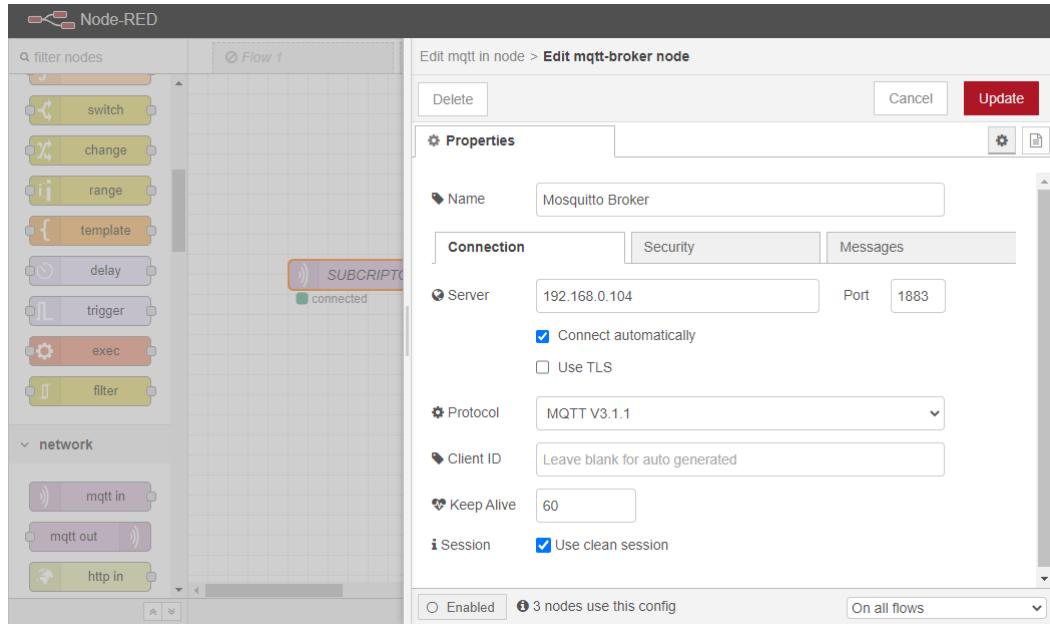


Figure 7.8: Server es nuestro IP y port es 1880 u 1883. No esta de más ver las IP de nuestro ordenador con **netstat -an** Una vez que lo termines de crear, selecciona este broker siempre en el apartado server de la figura 7.7

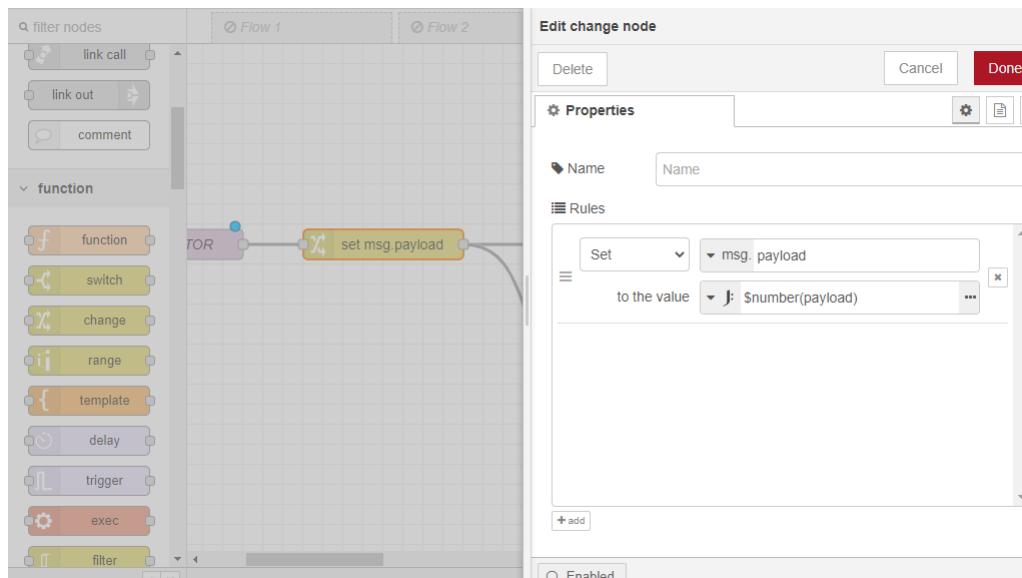


Figure 7.9: Configuración nodo *change*

El proyecto esta disponible en GITHUB. Así que vamos a dividir la explicación del proyecto en **Back-end** y **Front-end**.

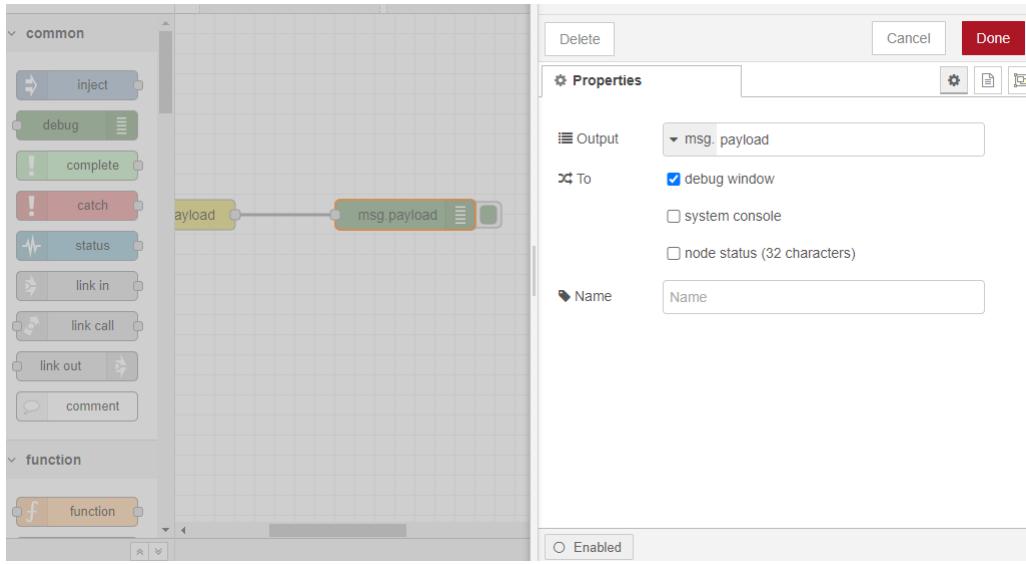


Figure 7.10: Configuración del nodo *debug*

7.2 Hardware

Los componentes requeridos son:

1. 1 ESP-8266 MCU
2. 1 I2C LCD
3. 1 LCD 16x2
4. 4 LEDs(rojo, verde, azul, amarillo)
5. 4 resistencias 470Ω
6. 1 timer 555
7. 2 resistencias $47k\Omega$
8. 1 botón momentáneo 2 pines
9. 1 metro de cables de colores

Se tiene que desplegar el circuito de la figura 7.11

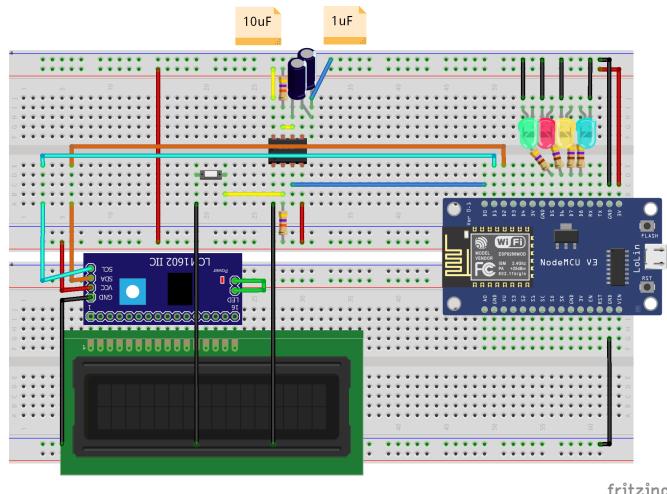


Figure 7.11: Circuito botón de pánico

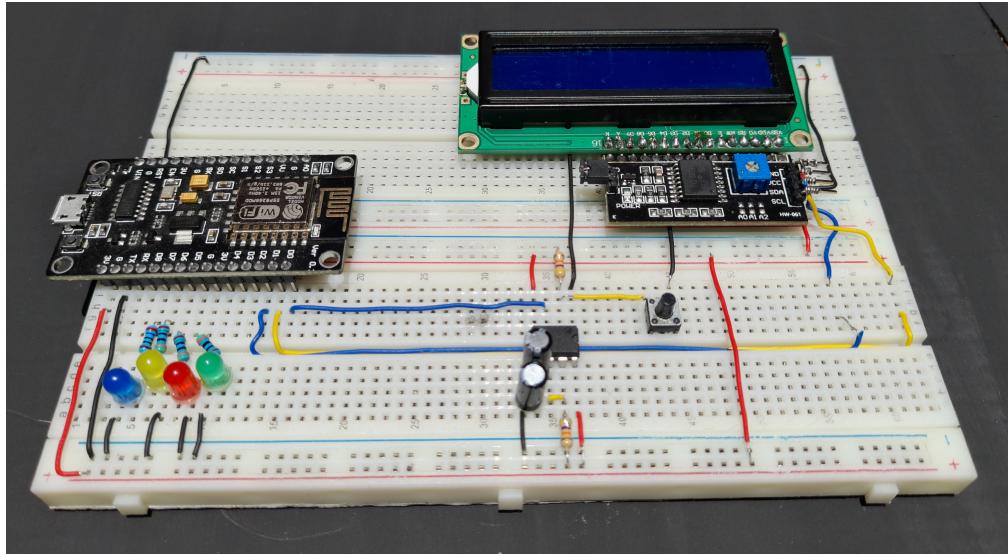


Figure 7.12: Circuito terminado-Vista trasera

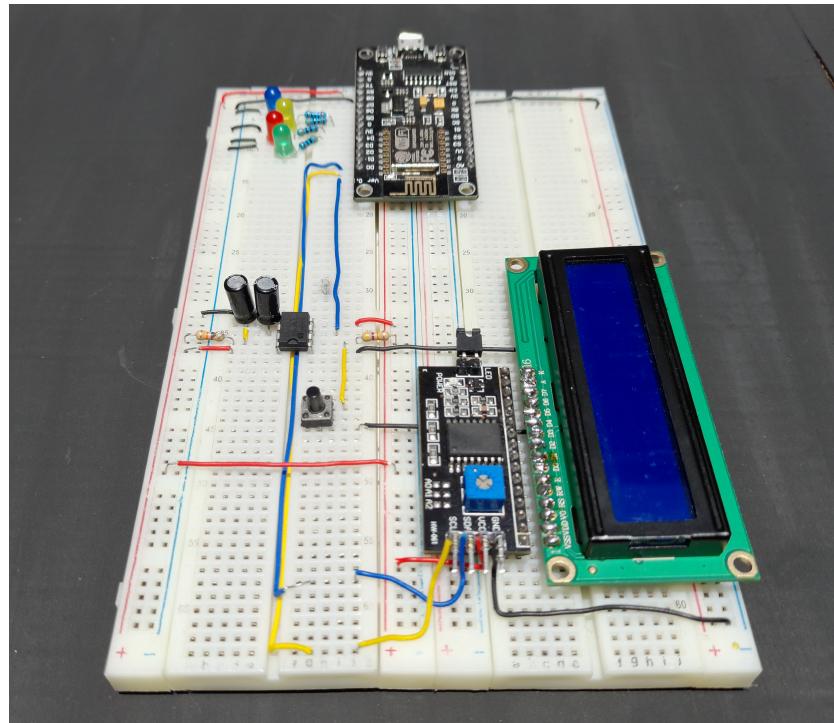


Figure 7.13: Circuito terminado-Vista izquierda

7.3 Back-end

En la parte del back-end, descargaremos el archivo *7.PanicButton.ino*. El código está comentado para comprender qué hace el programa. En cuanto a nuestra computadora, donde ya tenemos el Node-red, Xammp y Mosquitto instalado, preparamos el entorno para que la ESP-8266 pueda enviar datos. Ojo: respeta las mayúsculas y todos los parámetros que se establecen.

7.3.1 Xammp-PHP My admin

Entramos en *localhost:/phpmyadmin*, y crearemos 3 bases de datos: para el GPS, para los usuarios y para los estados del botón.

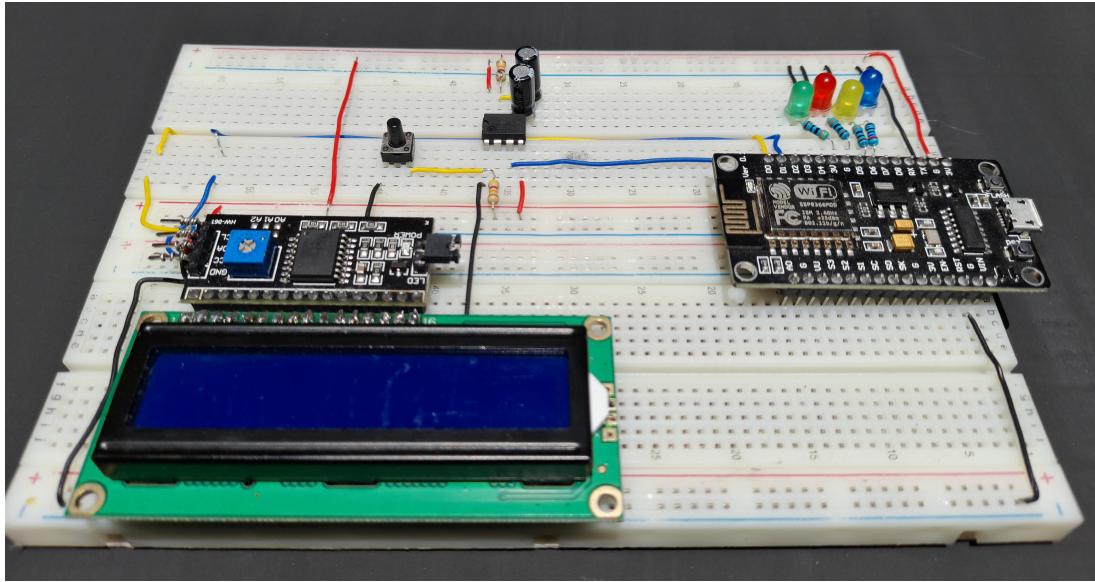


Figure 7.14: Circuito terminado-Vista frontal

7.3.1.1 Base de datos: GPS

Crearemos la base de datos en base a los siguientes parámetros:

Resumiendo los pasos mostrados en las imágenes⁵, podemos decir que: Se ha creado un database

Base de datos	Cotejamiento	Acción
<input type="checkbox"/> gpsdata	utf8mb4_general_ci	<input type="button" value="Seleccionar privilegios"/>
<input type="checkbox"/> information_schema	utf8_general_ci	<input type="button" value="Seleccionar privilegios"/>
<input type="checkbox"/> mysql	utf8mb4_general_ci	<input type="button" value="Seleccionar privilegios"/>
<input type="checkbox"/> performance_schema	utf8_general_ci	<input type="button" value="Seleccionar privilegios"/>
<input type="checkbox"/> phpmyadmin	utf8_bin	<input type="button" value="Seleccionar privilegios"/>
<input type="checkbox"/> php_login_database	utf8_unicode_ci	<input type="button" value="Seleccionar privilegios"/>
<input type="checkbox"/> practica1	utf8mb4_general_ci	<input type="button" value="Seleccionar privilegios"/>
<input type="checkbox"/> statusbutton	utf8mb4_general_ci	<input type="button" value="Seleccionar privilegios"/>

Total: 8

Figure 7.15: Creación de la database

Estructura | SQL | Buscar | Generar una consulta | Exportar | Importar

No se han encontrado tablas en la base de datos.

Crear tabla

Nombre: puntosgps Número de columnas: 5

Continuar

Figure 7.16: Creación de la tabla dentro del database

de nombre **gpsdata**, que contiene una tabla llamada **puntosgps**. La tabla **puntosgps** tiene las siguientes columnas(7.18):

1. id: Con parámetro de creación A_I(auto incrementar)

⁵Los datos de las imágenes 7.15, 7.16 y 7.17 son erróneos, tener en cuenta ello.

Nombre de la tabla: puntogps Agregar 1 columna(s) Continuar

Nombre	Tipo	Longitud/Valores	Predeterminado	Cotejamiento	Atributos	Nulo	Índice	A_J	Comentarios
id	INT		Ninguno			PRIMARY	<input checked="" type="checkbox"/>		
Nombre	CHAR	32	Ninguno						
LAT	INT	32	Ninguno						
LON	INT	32	Ninguno						
time	INT	32	Ninguno						

Figure 7.17: Creación de las columnas de la tabla del database

2. Nombre:Tipo varchar, tamaño 32.
3. LAT:Tipo float, tamaño 32.
4. LON:Tipo float, tamaño 32.
5. time: Tipo timestamp, predeterminado CURRENT_TIMESTAMP

#	Nombre	Tipo	Cotejamiento	Atributos	Nulo	Predeterminado	Comentarios	Extra	Acción
1	id	int(11)			No	Ninguna		AUTO_INCREMENT	Cambiar Eliminar Más
2	Nombre	varchar(32)	utf8mb4_general_ci		No	Ninguna			Cambiar Eliminar Más
3	LAT	float			No	Ninguna			Cambiar Eliminar Más
4	LON	float			No	Ninguna			Cambiar Eliminar Más
5	time	timestamp			No	current_timestamp()		ON UPDATE CURRENT_TIMESTAMP()	Cambiar Eliminar Más

Figure 7.18: Resumen de la creación del database: GPS

7.3.1.2 Base de datos: Usuarios

Para la base de datos, tenemos que nombrar a nuestra base: **php_login_database**, y dentro de ella crear una tabla llamada **users** con los siguientes parámetros(figura 7.19)

#	Nombre	Tipo	Cotejamiento	Atributos	Nulo	Predeterminado	Comentarios	Extra	Acción
1	id	int(11)			No	Ninguna		AUTO_INCREMENT	Cambiar Eliminar Más
2	email	varchar(200)	utf8_unicode_ci		No	Ninguna			Cambiar Eliminar Más
3	password	varchar(200)	utf8_unicode_ci		No	Ninguna			Cambiar Eliminar Más

Figure 7.19: Resumen de la creación del database: Usuarios

7.3.1.3 Base de datos: Estados

Nombrada en phpmyadmin como: **statusbutton**, con una tabla dentro de ella, llamada **historial**, que debe tener las siguientes columnas(figura 7.20).

7.3.2 Xammp-htdocs

En C>xammp>htdocs tenemos que creamos una carpeta llamada **panicbuttonserver**, y dentro de ella pegamos nuestros archivos que se encuentran en la carpeta *panicbuttonserver* dentro del

#	Nombre	Tipo	Cotejamiento	Atributos	Nulo	Predeterminado	Comentarios	Extra	Acción
1	id	int(11)			No	Ninguna		AUTO_INCREMENT	Cambiar Eliminar Más
2	status01	int(11)			No	Ninguna			Cambiar Eliminar Más
3	tiempo	datetime			Sí	current_timestamp()			Cambiar Eliminar Más

Figure 7.20: Resumen de la creación del database: Estados

repositorio de GITHUB.⁶. Como resultado debe ser como la figura 7.21

Nombre	Fecha de modificación	Tipo	Tamaño
assets	11/12/2021 08:58 ...	Carpetas de archivos	
database.php	12/12/2021 05:01 ...	Archivo PHP	1 KB
forgotten.php	12/12/2021 12:36 ...	Archivo PHP	0 KB
index.php	28/12/2021 05:29 ...	Archivo PHP	2 KB
info.php	28/12/2021 09:56 ...	Archivo PHP	3 KB
logout.php	12/12/2021 06:17 ...	Archivo PHP	1 KB
main.php	28/12/2021 05:30 ...	Archivo PHP	2 KB
negro.php	21/12/2021 07:58 a... a...	Archivo PHP	0 KB
signup.php	27/12/2021 05:54 ...	Archivo PHP	2 KB

Figure 7.21: Resumen de la creación de la carpeta htdocs.

7.3.3 Node-RED

En node-red(Windows+R y escribimos node-red y presionamos enter, luego entramos la dirección que nos devuelve en la consola)vamos a configurar dos nodos paralelos:

1. Status
2. GPS

Antes de desplegar los nodos, tenemos que tener instalados los siguientes paquetes de nodos:

- node-red-contrib-ui-led
- node-red-contrib-web-worldmap
- node-red-dashboard
- node-red-node-email
- node-red-node-mysql
- node-red-node-ui-table

7.3.3.1 Nodos estados del botón

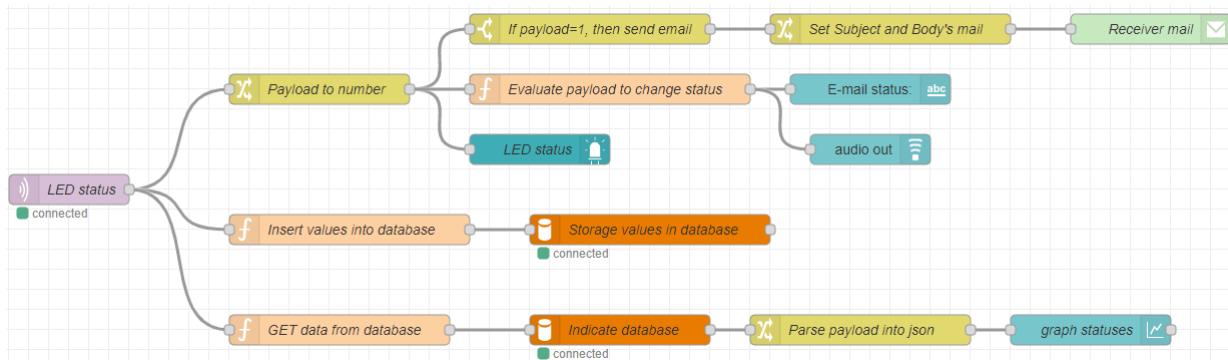


Figure 7.22: Flujo de datos: status button

⁶<https://github.com/Yasperterian/4rdduino>

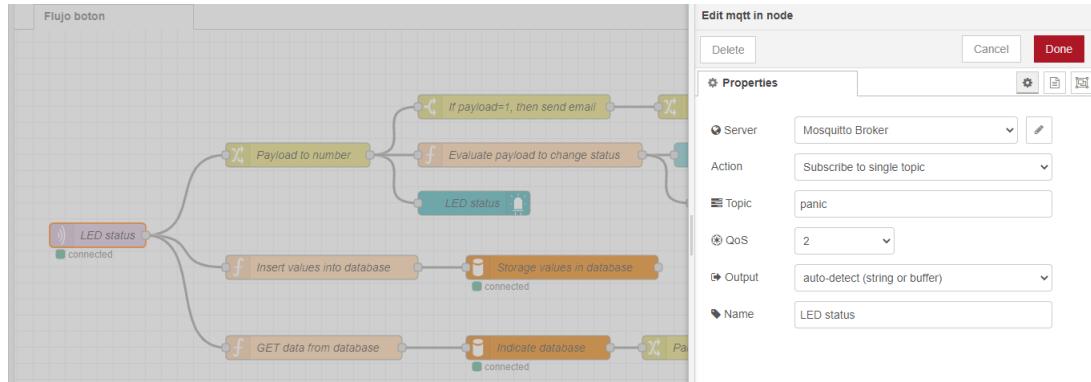


Figure 7.23: Nodo: LED status

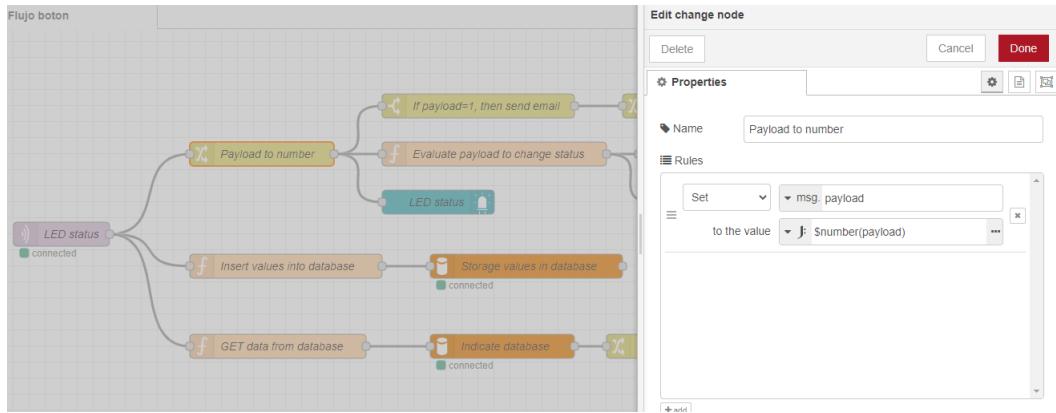


Figure 7.24: Nodo: Change node(payload to number)

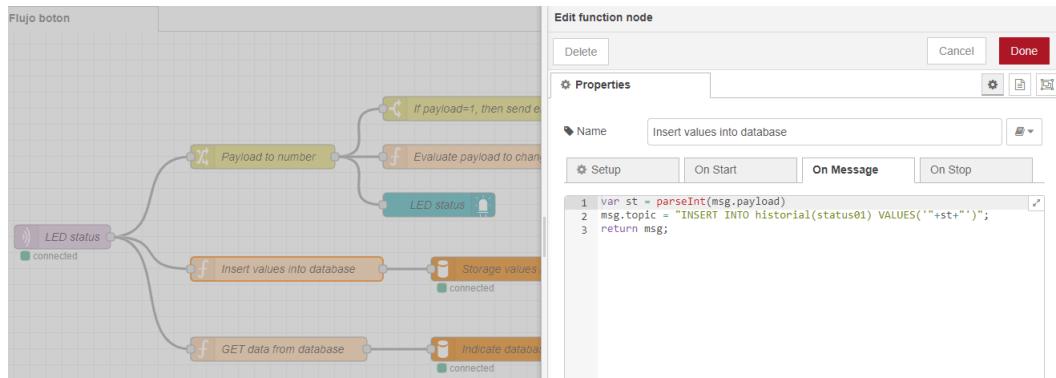
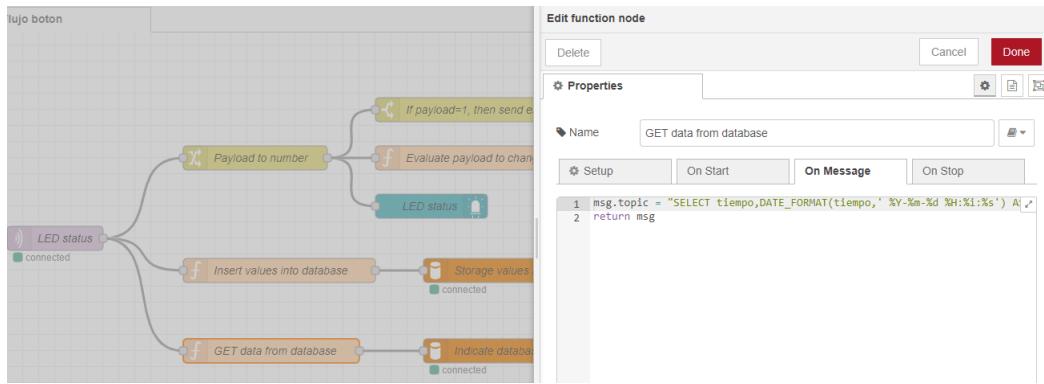
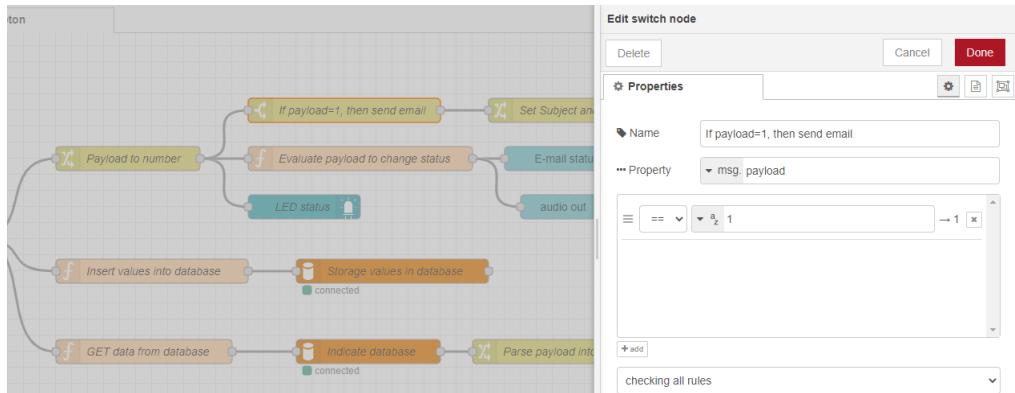
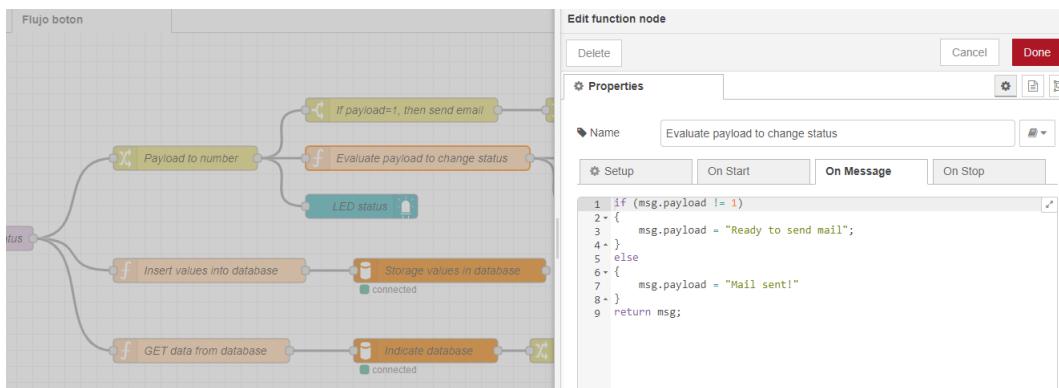


Figure 7.25: Nodo: function node(insert values into database)

7.3.3.2 Nodo coordenadas gps

Igual se deja un archivo JSON llamado *flows.json* en la carpeta del botón de pánico para que lo puedas importar a node-red.

Figure 7.26: Nodo: function node(*GET data from database*)Figure 7.27: Nodo: switch node(*If payload=1, then send email*)Figure 7.28: Nodo: function node(*Evaluate payload to change status*)

7.4 Front-end

En cuanto al front-end, ya todo esta configurado y listo para usarse. Tan solo hay que copiar los archivos como se dijo en la carpeta `htdocs` y poder acceder a ellos desde localhost. Se tendrá como pagina principal `http://localhost/panicbuttonserver/`. Se puede usar un editor de texto para poder cambiar textos dentro de cada archivo CSS. Hay algunos apartados que no funcionan como configuración o recuperar cuenta.

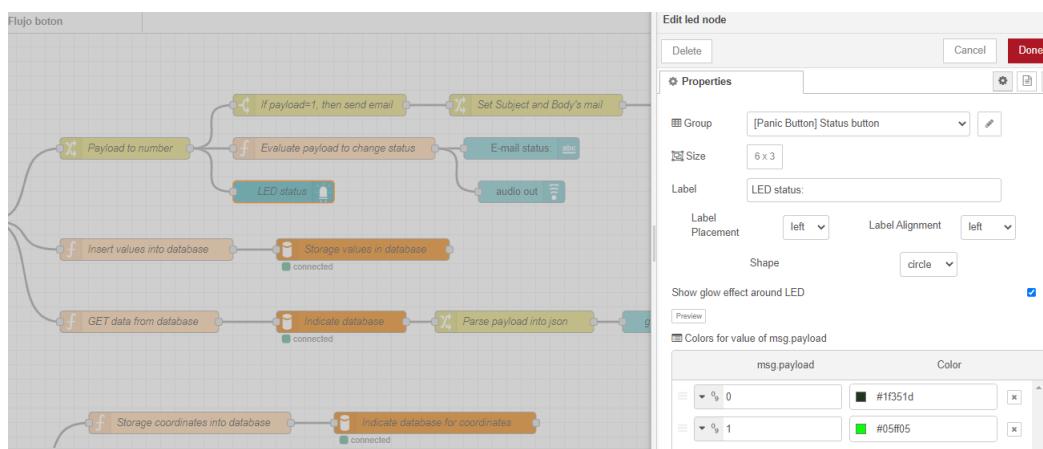
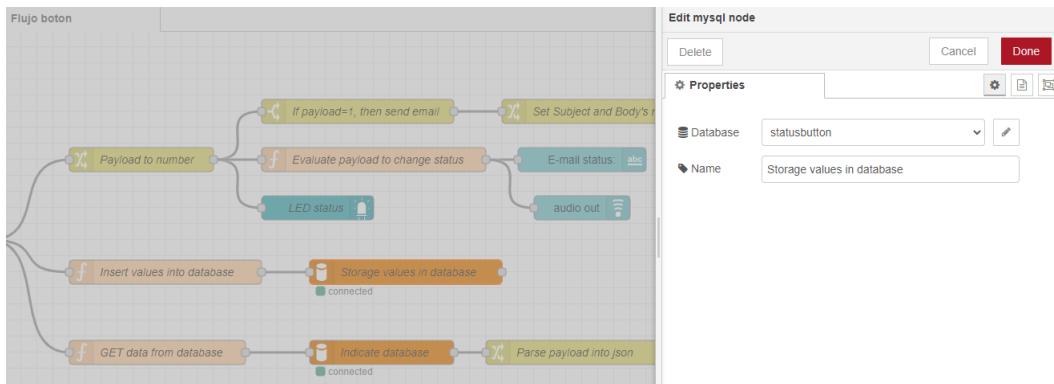
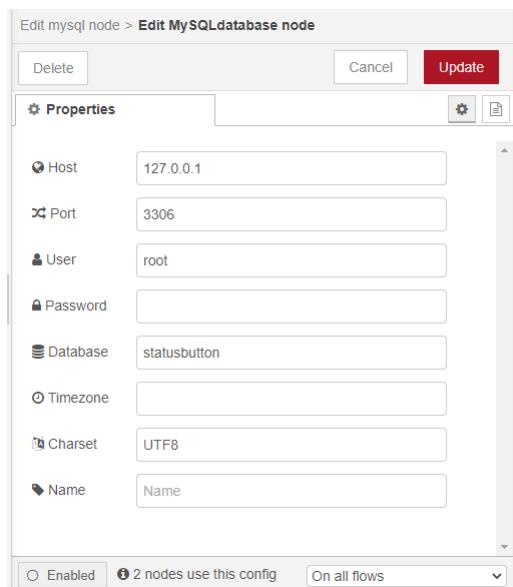
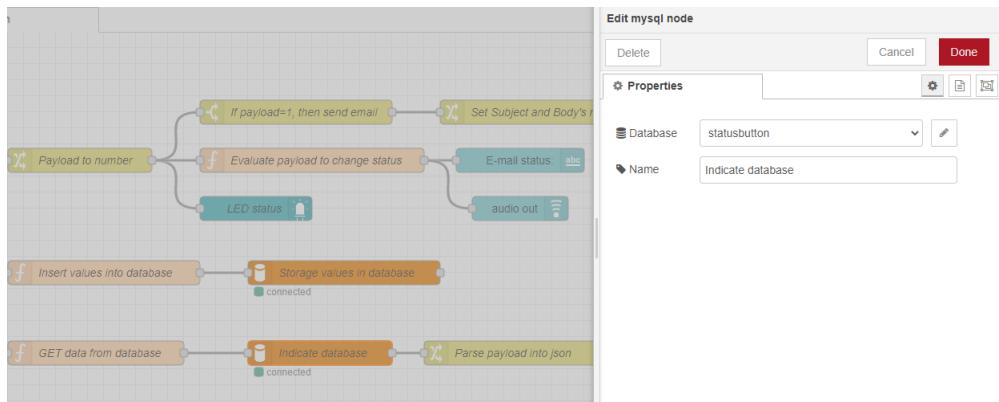
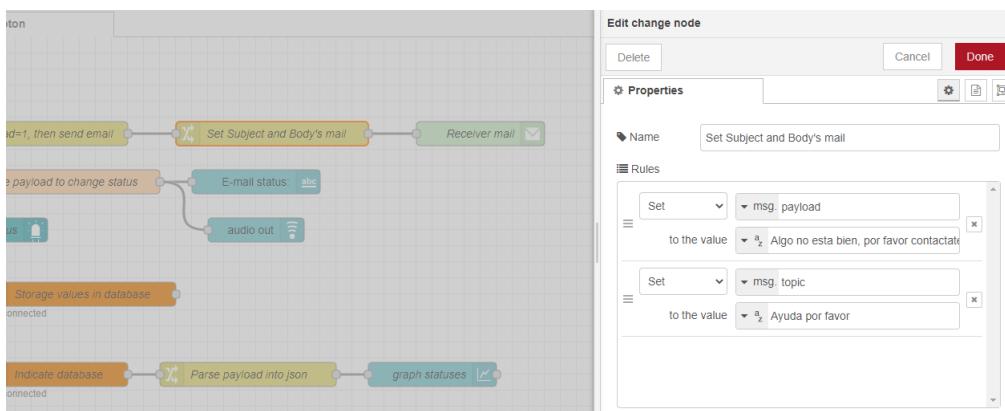
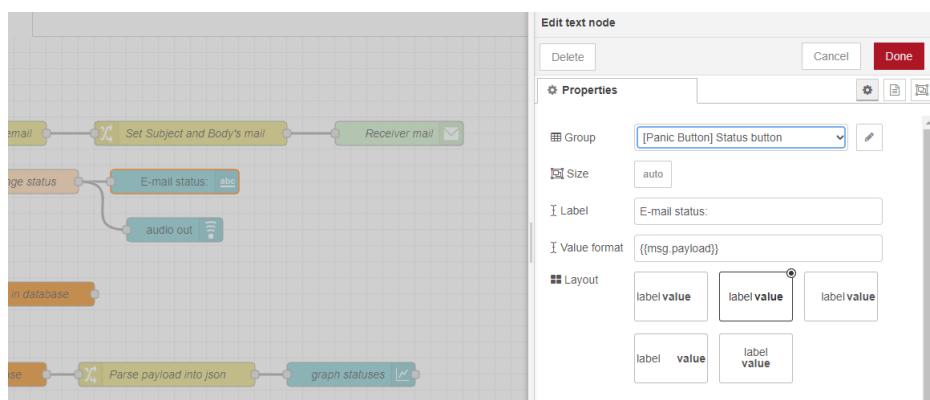
Figure 7.29: Nodo: led node(*LED status*)Figure 7.30: Nodo: mysql node(*Storage values in database*)

Figure 7.31: Configuración del database: statusbutton

Figure 7.32: Nodo: mysql node(*Indicate database*)Figure 7.33: Nodo: change node(*Set Subject and Body's mail*)Figure 7.34: Nodo: text node(*E-mail status*)

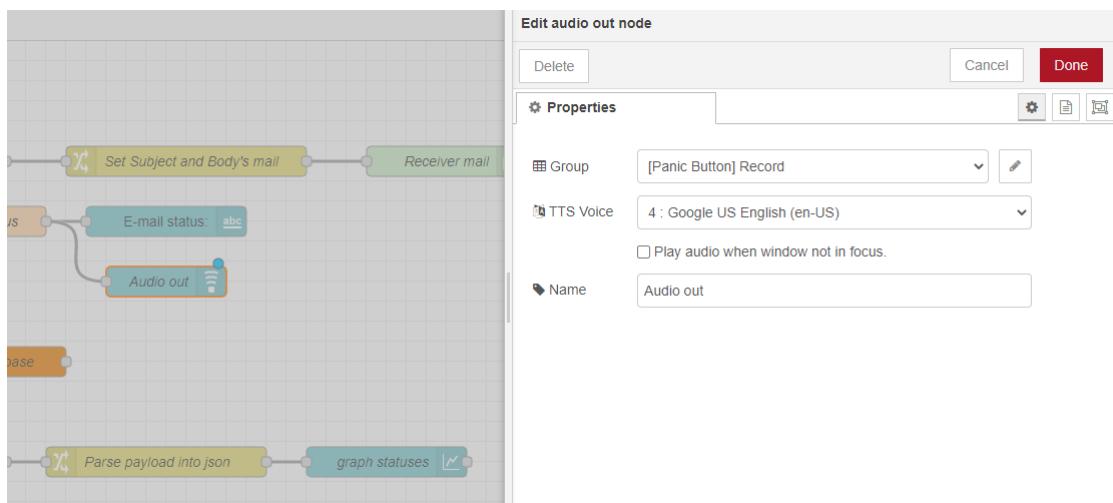


Figure 7.35: Nodo: audio out node(Audio out)

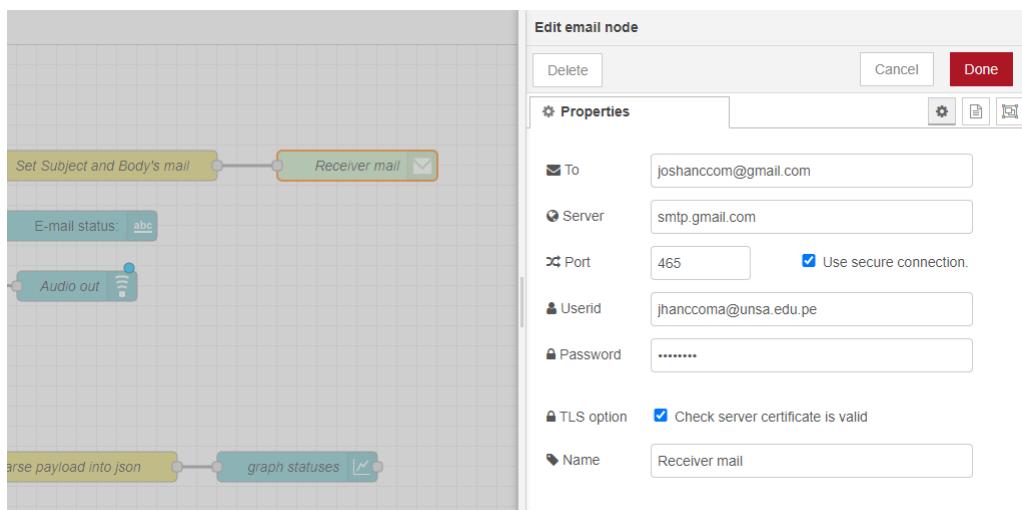


Figure 7.36: Nodo: email node(Receiver mail), el password debe ser del correo desde donde se va enviar el correo.

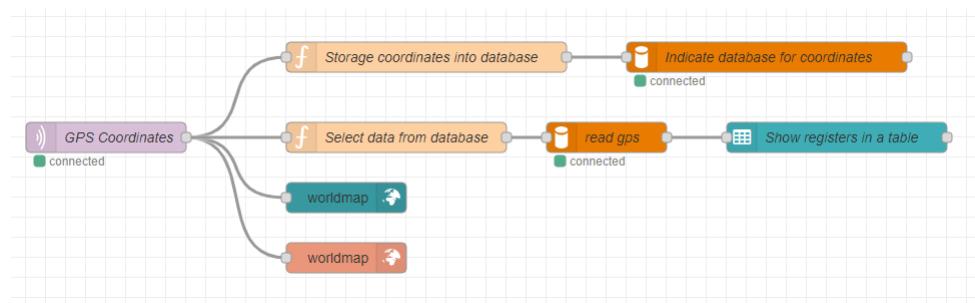


Figure 7.37: Flujo de datos: coordenadas gps

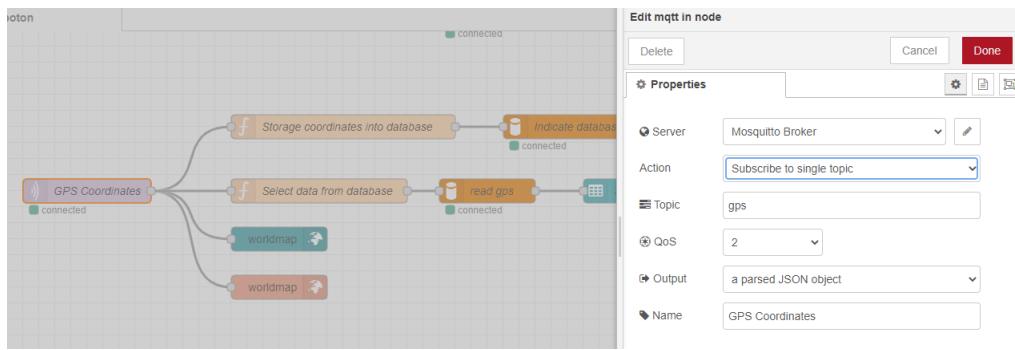
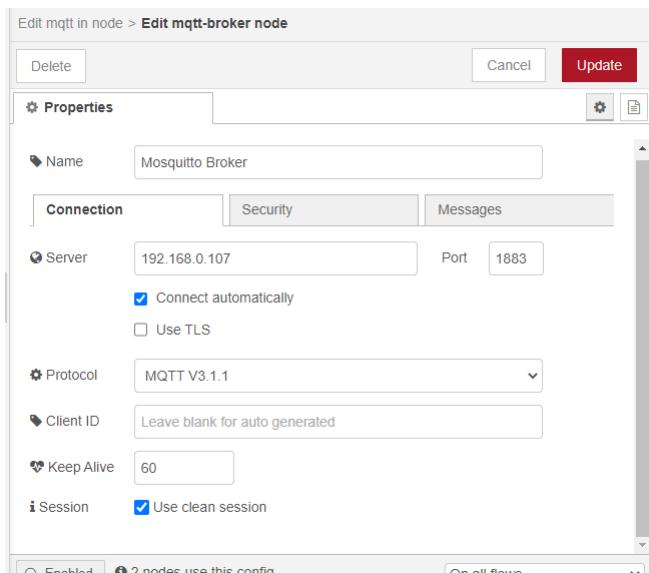
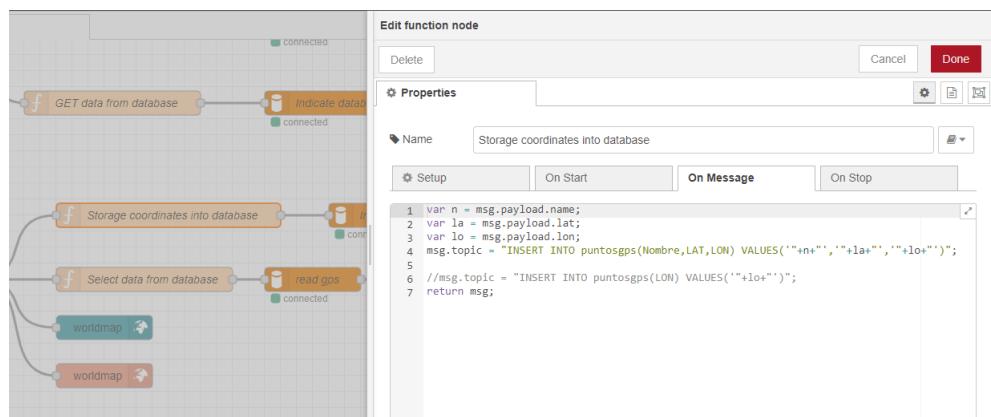
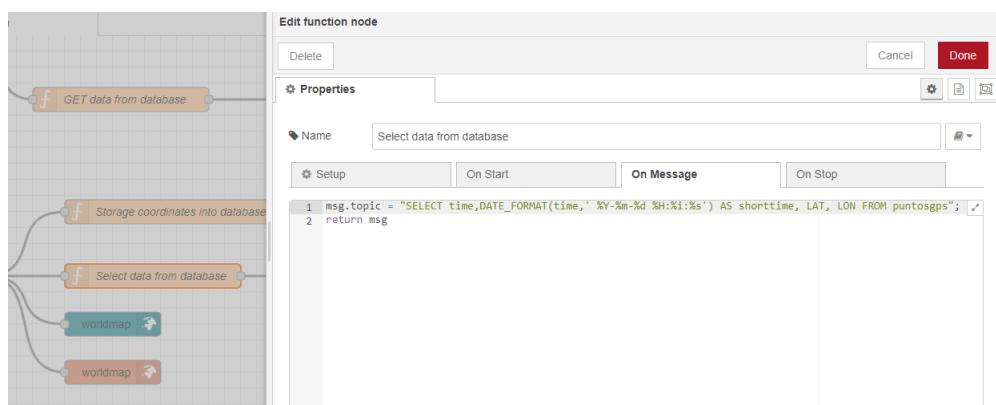
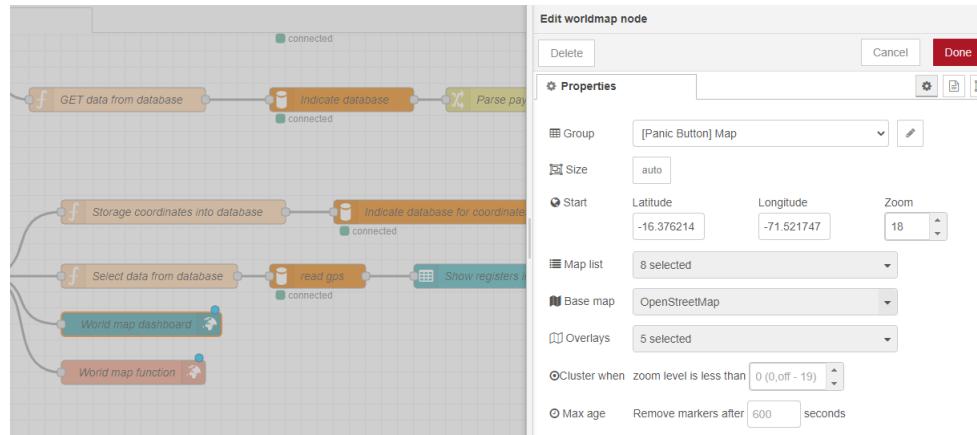
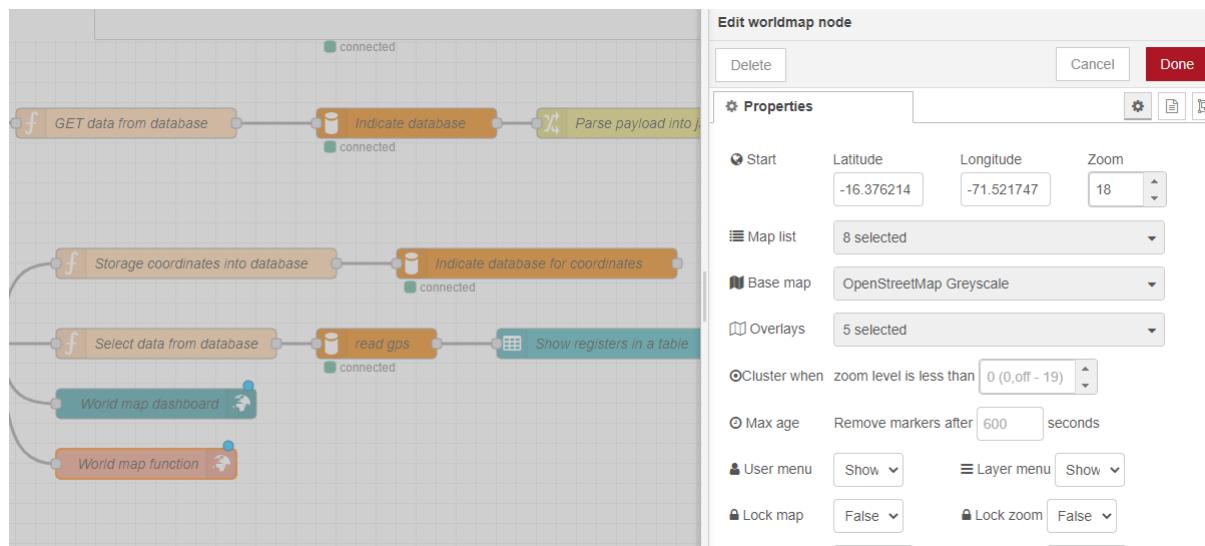
Figure 7.38: Nodo: mqtt node(*SGPS Coordinates*)

Figure 7.39: Mosquitto broker, se necesario para la figura 7.23

Figure 7.40: Nodo: function node(*Storage coordinates into database*)

Figure 7.41: Nodo: function node(*Select data from database*)Figure 7.42: Nodo: worldmap node(*World map dashboard*)Figure 7.43: Nodo: worldmap node(*World map function*)

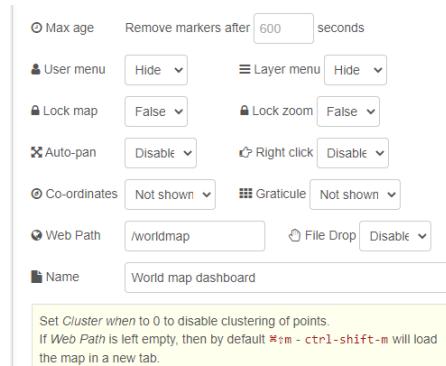


Figure 7.44: Nodo: worldmap node propiedades para la figura 7.42

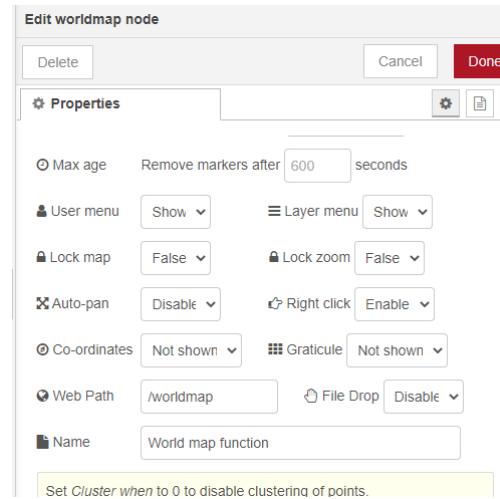


Figure 7.45: Nodo: worldmap node propiedades para la figura 7.43

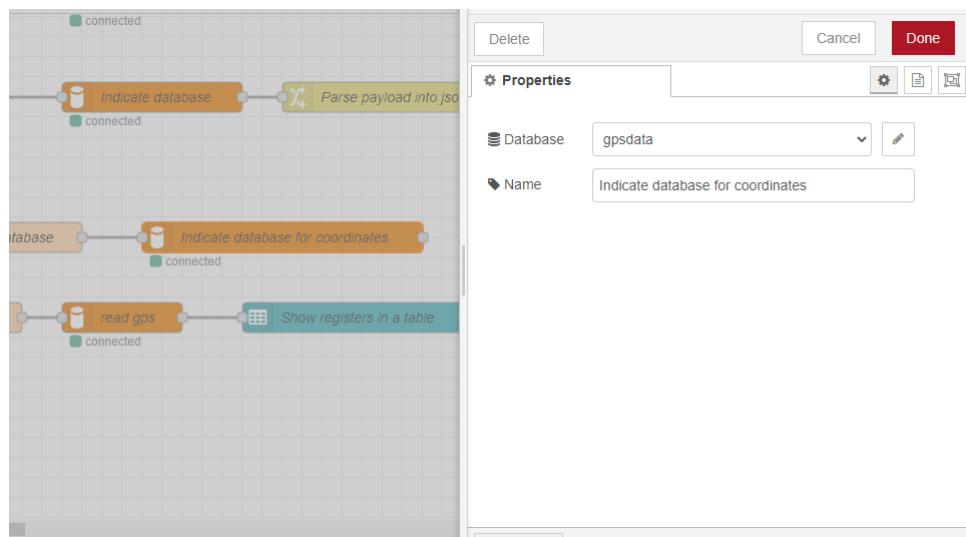


Figure 7.46: Nodo: mysql node(Indicate database for coordinates)

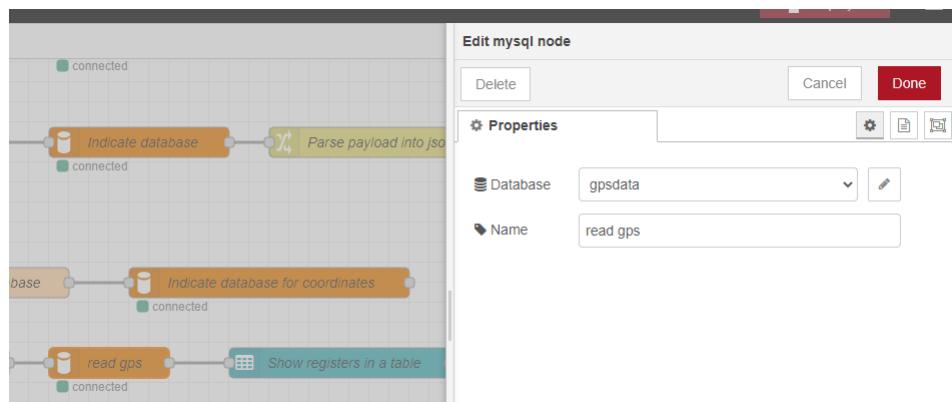
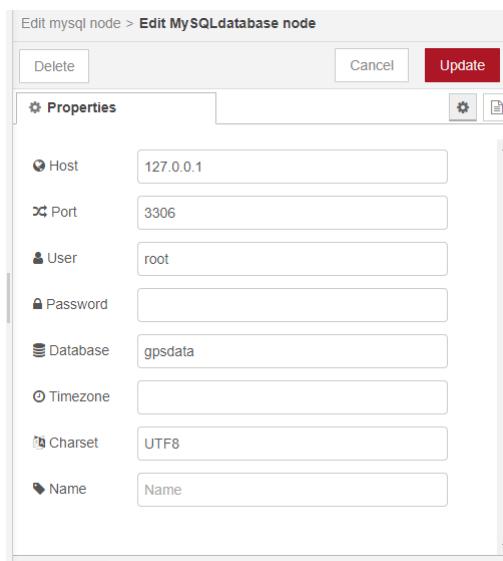
Figure 7.47: Nodo: mysql node(*read gps*)

Figure 7.48: Nodo:edit mysql node para gps

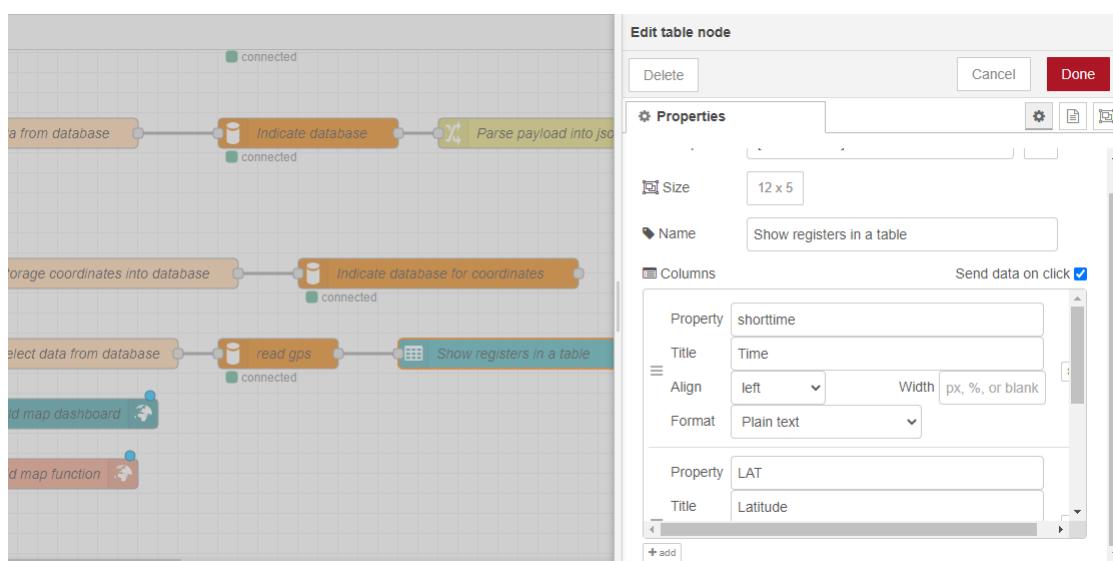


Figure 7.49: Nodo:edit table node para gps

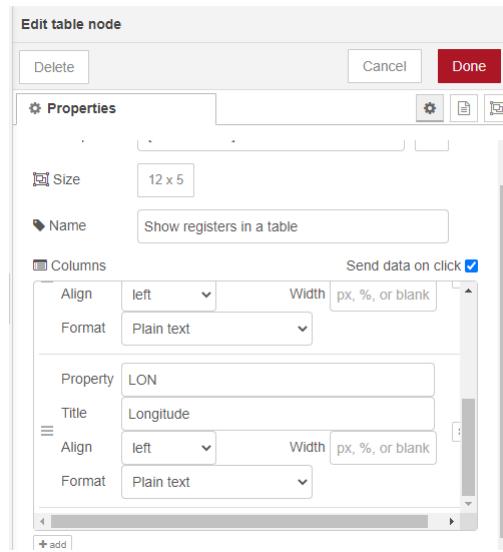


Figure 7.50: Nodo:edit table node para gps. Parte 2

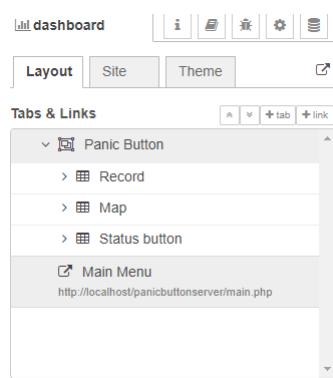


Figure 7.51: Resultado final de la organización del dashboard.

V Telecommunicaciones 2

8	Unidad I	135
8.1	Theorems	135
8.2	Definitions	135
8.3	Notations	135
8.4	Remarks	136
8.5	Corollaries	136
8.6	Propositions	136
8.7	Examples	136
8.8	Exercises	137
8.9	Problems	137
8.10	Vocabulary	137
8.11	Table	137
8.12	Figure	137
9	Unidad 2	139
9.1	Modulación por ancho de pulso-PWM	139

8. Unidad I

8.1 Theorems

This is an example of theorems.

8.1.1 Several equations

This is a theorem consisting of several equations.

Teorema 8.1 — Name of the theorem. In $E = \mathbb{R}^n$ all norms are equivalent. It has the properties:

$$\| |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \| \leq \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \quad (8.1)$$

$$\| \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \| \leq \sum_{i=1}^n \| \mathbf{x}_i \| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \quad (8.2)$$

8.1.2 Single Line

This is a theorem consisting of just one line.

Teorema 8.2 A set $\mathcal{D}(G)$ is dense in $L^2(G)$, $|\cdot|_0$.

8.2 Definitions

This is an example of a definition. A definition could be mathematical or it could define a concept.

Definición 8.1 — Definition name. Given a vector space E , a norm on E is an application, denoted $\| \cdot \|$, E in $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ such that:

$$\| \mathbf{x} \| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (8.3)$$

$$\| \lambda \mathbf{x} \| = |\lambda| \cdot \| \mathbf{x} \| \quad (8.4)$$

$$\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \| \quad (8.5)$$

8.3 Notations

■ **Notación 8.1** Given an open subset G of \mathbb{R}^n , the set of functions φ are:

1. Bounded support G ;

2. Infinitely differentiable;
a vector space is denoted by $\mathcal{D}(G)$.

8.4 Remarks

This is an example of a remark.



The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

8.5 Corollaries

This is an example of a corollary.

Corolario 8.1 — Corollary name. The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

8.6 Propositions

This is an example of propositions.

8.6.1 Several equations

Proposición 8.1 — Proposition name. It has the properties:

$$|||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}||| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \quad (8.6)$$

$$||\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^n ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \quad (8.7)$$

8.6.2 Single Line

Proposición 8.2 Let $f, g \in L^2(G)$; if $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$, $(f, \varphi)_0 = (g, \varphi)_0$ then $f = g$.

8.7 Examples

This is an example of examples.

8.7.1 Equation and Text

■ **Ejemplo 8.1** Let $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$ and denoted by: $x^0 = (1, 1)$; consider the function:

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{si } |x - x^0| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x - x^0| > 1/2 \end{cases} \quad (8.8)$$

■

8.7.2 Paragraph of Text

■ **Ejemplo 8.2 — Example name.** Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris. ■

8.8 Exercises

This is an example of an exercise.

Ejercicio 8.1 This is a good place to ask a question to test learning progress or further cement ideas into students' minds. ■

8.9 Problems

Problema 8.1 What is the average airspeed velocity of an unladen swallow?

8.10 Vocabulary

■ **Vocabulario 8.1 — Word.** Definition of word.

8.11 Table

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table 8.1: Table caption

Referencing Table 8.1 in-text automatically.

8.12 Figure



Figure 8.1: Figure caption

Referencing Figure 8.1 in-text automatically.

9. Unidad 2

9.1 Modulación por ancho de pulso-PWM

PWM es una técnica que se usa para transmitir señales analógicas cuya señal portadora será digital. En esta técnica se modifica el ciclo de trabajo de una señal periódica (una senoidal o una cuadrada, por ejemplo), ya sea para transmitir información a través de un canal de comunicaciones o para controlar la cantidad de energía que se envía a una carga.

Definición 9.1 — Duty Cycle. El ciclo de trabajo (*duty cycle*) de una señal periódica es el ancho de su parte positiva, en relación con el período. Está expresado en porcentaje, por tanto, un duty cycle de 10% indica que está 10 de 100 a nivel alto.

$$\text{Duty cycle} = \frac{t}{T} \quad (9.1)$$

Donde:

t: Tiempo en parte positiva.

T: Período, tiempo total.

Básicamente, consiste en activar una salida digital durante un tiempo y mantenerla apagada durante el resto, generando así pulsos positivos que se repiten de manera constante. Por tanto, la frecuencia es constante (es decir, el tiempo entre disparo de pulsos), mientras que se hace variar la anchura del pulso, el duty cycle. El promedio de esta tensión de salida, a lo largo del tiempo, será igual al valor analógico deseado. Lo que caracteriza a PWM es la capacidad de controlar los

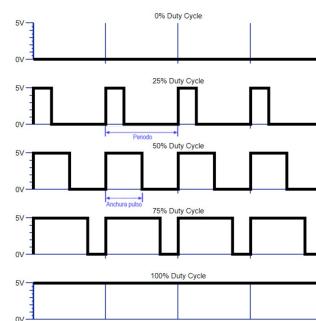


Figure 9.1: Diferentes *Duty Cycles*

pulsos, controlando el voltaje de la señal. Para ello la señal moduladora(unas señales analógicas) hará

modificaciones sobre la señal portadora(mayormente una señal *sawtooth*) con la finalidad de, en vez de tener una amplitud infinita solo tendrá valores entre 5v-0v(puede ser modificable). Si lo ponemos en un ejemplo: podríamos controlar la velocidad de un moto apagándolo y prendiéndolo tan rápido que teóricamente sabríamos que lo estamos apagando pero experimentalmente sería imperceptible.

Definición 9.2 — Voltaje promedio de PWM. El voltaje promedio de una señal modulada por PWM podrá ser calculada por:

$$V_p = V_{cc} \cdot \frac{DC}{100} \quad (9.2)$$

Donde:

V_{cc} : La entrada de alimentación de un dispositivo.(Voltios)

DC: Duty cycle.(porcentaje)

V_p : Voltaje promedio.

Ejercicio 9.1 Se desea un voltaje promedio de 1V con voltaje de entrada de 5V, calcular el tiempo que la señal pwm estará apagada.

Solución:

Nos pide el tiempo, aunque no nos da el tiempo para calcularlo en segundos(usingo la ecuación 9.1), pero podemos hallarlo en porcentaje. Por ello, usando la ecuación 9.2 reemplazamos nuestros datos, tenemos que hallar DC:

$$\begin{aligned} 1V &= 5V \cdot \frac{DC}{100} \\ \frac{1V \cdot 100}{5V} &= DC \\ DC &= 20 \end{aligned} \quad (9.3)$$

El 20% hallado es el duty cycle, es el tiempo que valdrá 5V, nos pide el tiempo que estará apagada o donde valdrá 0V, el 80% restante del periodo total. ■

Campos electromagnéticos

10	Repaso vectorial y conceptualización	143
10.1	Sistemas de coordenadas y transformaciones	143
10.2	Cálculo vectorial	146
10.3	Ley de Coulomb	151
10.4	Intensidad de campo eléctrico	152
10.5	Campo eléctrico creado por una distribución continua de carga en un punto	153
10.6	Densidad de campo eléctrico	153
10.7	Ley de Gauss-Ecuaciones de Maxwell	154
10.8	Potencial eléctrico	159
10.9	Relación entre E y V-Ecuación de Maxwell	159
10.10	Dipolo eléctrico	160
11	Magnetoestática	163
12	Ecuaciones de Maxwell y las ondas electromagnéticas	165

10. Repaso vectorial y conceptualización

10.1 Sistemas de coordenadas y transformaciones

En general, las cantidades físicas que trataremos en EM son funciones del espacio y tiempo. Para describir las variaciones espaciales de las cantidades, debemos ser capaces de definir todos los puntos de forma única en el espacio de una manera adecuada. Esto requiere el uso de un adecuado sistema coordinado.

10.1.0.1 Sistema de coordenadas cartesianas en el espacio (x,y,z)

En geometría euclíadiana el espacio tridimensional se suele representar con un sistema de coordenadas de tres ejes, todos perpendiculares entre sí. El rango de las coordenadas variables x , y y z son:

$$-\infty < x < \infty$$

$$-\infty < y < \infty$$

$$-\infty < z < \infty$$

Las coordenadas de un vector cartesiano \mathbf{A} (o vector rectangular) pueden ser escritas como:

$$(A_x, A_y, A_z) \vee A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \quad (10.1)$$

Donde \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y y \mathbf{a}_z son los vectores unitarios de x , y z respectivamente.

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$$

Recordando la *regla de la mano derecha*.

10.1.0.2 Coordenadas polares (r, θ)

Un punto arbitrario se define mediante las coordenadas polares planas (r, θ), donde:

- r es la longitud de la línea que une el origen con el punto
- θ es el ángulo entre dicha línea y un eje fijo (normalmente el x)

Es común asumir que θ es medida en sentido contrario a las agujas del reloj y normalmente respecto al eje x positivo. Los rangos de las variables son:

$$-\infty < r < \infty$$

$$0 < \theta < 2\pi$$

R

Cuando se gráfica una coordenada polar con un radio negativo, se mueve desde el polo en la dirección opuesta al ángulo positivo dado (en la misma línea que el ángulo dado pero en la dirección opuesta al ángulo del polo). Es decir, gráficas el radio positivo solo que se invierte respecto al origen.

Proposición 10.1 — Coordenadas polares a cartesianas y viceversa..

De polares a cartesianas

$$x = r \cdot \cos(\theta)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta)$$

De cartesianas a polares

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

10.1.1 Coordenadas Cilíndricas (r, θ, z) ó (ρ, ϕ, z)

El sistema de coordenadas cilíndricas es muy parecido al de coordenadas polares. De hecho, es igual pero con una coordenada más: la altura. De manera que el sistema de coordenadas cilíndricas es un sistema de referencia tridimensional, es decir, con 3 coordenadas:

- r ó ρ es la proyección ortogonal del punto en el plano XY, o dicho de otra forma, la distancia del punto al eje Z.
- θ ó ϕ es el ángulo que forma el semieje X positivo con la recta r .
- z es la altura del punto, es la misma coordenada del sistema de coordenadas cartesianas en el espacio.

El rango de las variables de este sistemas son:

$$0 \leq \rho < \infty$$

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$-\infty < z < \infty$$

$$-\infty < z < \infty$$

Las coordenadas cilíndricas de un vector \mathbf{A} pueden ser escritas como:

$$(A_\rho, A_\phi, A_z) \vee A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \quad (10.2)$$

Donde \mathbf{a}_ρ , \mathbf{a}_ϕ y \mathbf{a}_z son los vectores unitarios que indican sus direcciones, pero a tener en consideración que el vector unitario \mathbf{a}_ϕ no esta en grados, asume las mismas unidades de medida que \mathbf{A} . La magnitud de \mathbf{A} es:

$$|A| = \sqrt{A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2} \quad (10.3)$$

Al ser mutuamente perpendiculares porque el sistema es ortogonal se concluye que:

$$\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1$$

$$\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho = 0$$

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$$

Proposición 10.2 — Coordenadas cilíndricas a cartesianas y viceversa..

De cilíndricas a cartesianas

$$x = \rho \cdot \cos(\phi)$$

$$y = \rho \cdot \sin(\phi)$$

$$z = z$$

De cartesianas a cilíndricas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

Es necesario saber las relaciones entre los vectores unitarios del sistema cartesiano y el sistema cilíndrico:

Proposición 10.3 — Relaciones entre vectores unitarios.

De cilíndricas a cartesianas

$$\mathbf{a}_x = \cos\phi \mathbf{a}_\rho - \sin\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_y = \sin\phi \mathbf{a}_\rho + \cos\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

De cartesianas a cilíndricas

$$\mathbf{a}_\rho = \cos\phi \mathbf{a}_x + \sin\phi \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\sin\phi \mathbf{a}_x + \cos\phi \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

Finalmente la relación entre (A_x, A_y, A_z) y (A_ρ, A_ϕ, A_z) son obtenidas sustituyendo las ecuaciones de la proposición 10.3(De cilíndricas a cartesianas) en la ecuación 10.1 y agrupar términos. Existe una forma matricial de hacer las conversiones, las matrices de equivalencia son¹

De cartesianas a cilíndricas:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

De cilíndricas a cartesianas:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

10.1.2 Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

Finalmente, tenemos el sistema de coordenadas esféricas. Este tipo de sistema de coordenadas también es bastante similar al de coordenadas polares y al de coordenadas cilíndricas, aunque, evidentemente, tiene alguna diferencia respecto a ellos.

El sistema de coordenadas esféricas se trata de un sistema para describir espacios euclidianos tridimensionales, por lo tanto, tiene tres coordenadas:

- r es la distancia (en R3) desde origen hasta el punto.
- θ es el ángulo que forma la parte positiva del eje X con la recta r proyectada en el plano XY.
- ϕ es el ángulo que hay entre la parte positiva del eje Z con la recta r .

El rango de las variables de este sistemas son:

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

Las coordenadas esféricas de un vector \mathbf{A} pueden ser escritas como:

$$(A_r, A_\theta, A_\phi) \vee A_r \mathbf{a}_r + A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi \quad (10.6)$$

Donde \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_θ y \mathbf{a}_ϕ son los vectores unitarios que indican sus direcciones. La magnitud de \mathbf{A} es:

$$|A| = \sqrt{A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2} \quad (10.7)$$

Los vectores unitarios son mutuamente ortogonales, por lo tanto:

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = 1$$

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_r = 0$$

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta$$

¹Si se te olvido como resolver este tipo de matrices puedes revisar la expresión 16.7.

Proposición 10.4 — Coordenadas esféricas a cartesianas y viceversa..

De esféricas a cartesianas

$$x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\phi)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi)$$

$$z = r \cdot \cos(\theta)$$

De cartesianas a esféricas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Proposición 10.5 — Relaciones entre vectores unitarios.

De esféricas a cartesianas

$$\mathbf{a}_x = \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta - \sin \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_y = \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_z = \cos \theta \mathbf{a}_r - \sin \theta \mathbf{a}_\theta$$

De cartesianas a esféricas

$$\mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \theta \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_y - \sin \theta \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y$$

Finalmente la relación entre (A_x, A_y, A_z) y (A_r, A_θ, A_ϕ) son obtenidas sustituyendo las ecuaciones de la proposición 10.5(De cilíndricas a cartesianas) en la ecuación 10.1 y agrupar términos.

Las formas matriciales de la transformación de vectores son:

De cartesianas a esféricas:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

De esféricas a cartesianas:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

Revisar el ejemplo 2.1 de [elmagsadiku].

10.1.3 Planos

Los planos en los sistemas de coordenadas son fácilmente generados solo manteniendo una coordenadas constante y las demás variables.

10.2 Cálculo vectorial**10.2.1 Diferencial de distancia, área y volumen****10.2.1.1 Sistema de coordenadas cartesianas**

El desplazamiento diferencial esta dado por:

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z \quad (10.10)$$

Diferencial de la superficie normal esta dado por:

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= dy dz \mathbf{a}_x \\ &= dx dz \mathbf{a}_y \\ &= dx dy \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (10.11)$$

Diferencial de volumen esta dado por:

$$dv = dx \cdot dy \cdot dz \quad (10.12)$$

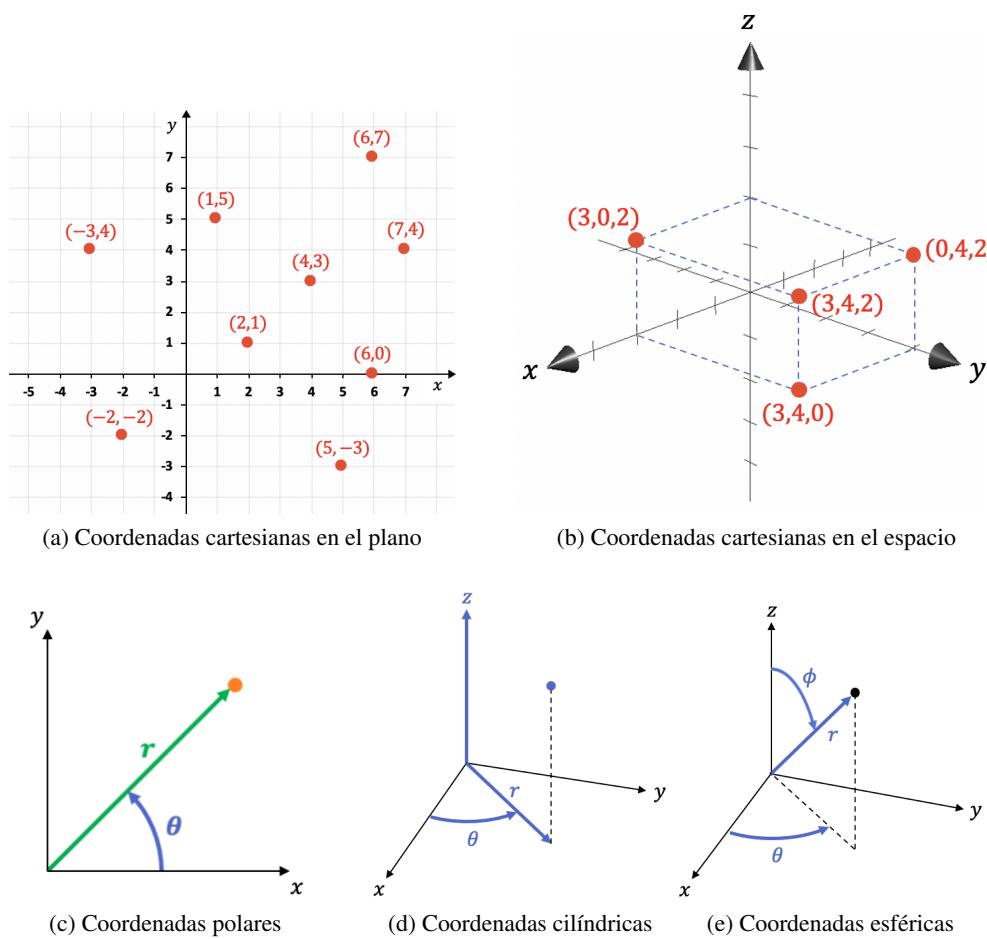


Figure 10.1: Distintos sistemas de coordenadas

10.2.1.2 Coordenadas cilíndricas

El desplazamiento diferencial esta dado por:

$$d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho \cdot d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z \quad (10.13)$$

Diferencial de la superficie normal esta dado por:

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \rho \cdot d\phi dz \mathbf{a}_\rho \\ &= d\rho dz \mathbf{a}_\phi \\ &= \rho \cdot d\rho d\phi \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (10.14)$$

Diferencial de volumen esta dado por:

$$dv = \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \cdot dz \quad (10.15)$$

10.2.1.3 Coordenadas esféricas

El desplazamiento diferencial esta dado por:

$$d\mathbf{l} = dr \mathbf{a}_r + rd\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi \quad (10.16)$$

Diferencial de la superficie normal esta dado por:

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= r^2 \cdot \sin \theta d\theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r \\ &= r \cdot \sin \theta dr d\phi \mathbf{a}_\theta \\ &= r \cdot dr d\theta \mathbf{a}_\phi \end{aligned} \quad (10.17)$$

Diferencial de volumen esta dado por:

$$dv = r^2 \cdot \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (10.18)$$

10.2.2 Operador DEL(∇)

El operador DEL, es el operador de vector diferencial. En coordenadas cartesianas:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (10.19)$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\nabla = \mathbf{a}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (10.20)$$

En coordenadas esféricas:

$$\nabla = \mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (10.21)$$

O tambien llamado operador **gradiente** no es un vector como tal, pero cuando opera sobre una función escalar, por ejemplo, resulta un vector. Este operador se usa para definir:

- El gradiente de un escalar V: ∇V
- La divergencia de un vector A: $\nabla \cdot A$
- La rotacional de un vector A: $\nabla \times A$
- El Laplaciano de un escalar V: $\nabla^2 V$

10.2.3 Gradiente de un campo escalar: ∇V

El gradiente de un campo escalar V es un vector que representa tanto la magnitud como la dirección de la tasa espacial máxima de aumento de V . En coordenadas cartesianas:

$$\nabla = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (10.22)$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\nabla = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (10.23)$$

En coordenadas esféricas:

$$\nabla = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad (10.24)$$

■ **Notación 10.1** De las formulas de gradiente se puede probar que:

1. $\nabla(V + U) = \nabla V + \nabla U$
2. $\nabla(VU) = V \cdot \nabla U + \nabla V \cdot U$
3. $\nabla \left[\frac{V}{U} \right] = \frac{U \cdot \nabla V - V \cdot \nabla U}{U^2}$
4. $\nabla V^n = n V^{n-1} \nabla V$

Donde U y V son escalares y n es un entero

10.2.4 La divergencia de un vector: $\nabla \cdot \mathbf{A}$

La divergencia de \mathbf{A} en un punto dado P es el flujo hacia el exterior por unidad de volumen como el volumen se encoge sobre P . Por eso:

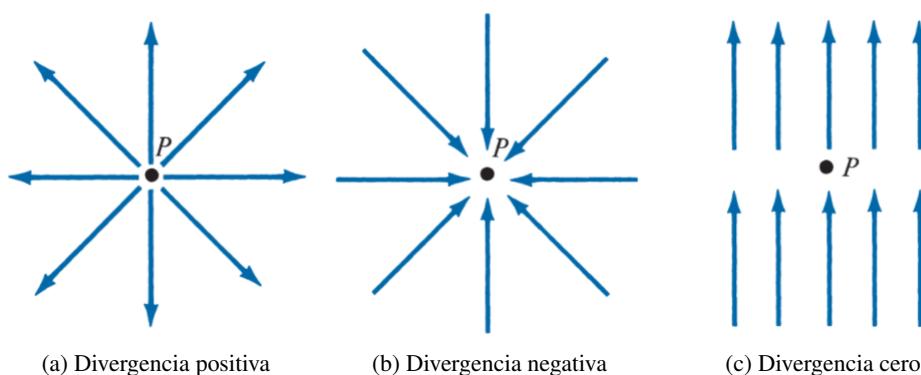


Figure 10.2: Ilustración de la divergencia de un campo vectorial.

$$div \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{V} \quad (10.25)$$

Para los sistemas de coordenadas se define como:

Coordenadas cartesianas:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (10.26)$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (10.27)$$

Para coordenadas esféricas:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (10.28)$$

■ **Notación 10.2** Se cumplen las siguientes propiedades:

1. Se produce un campo escalar porque el producto escalar esta involucrado.
2. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
3. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$

De todo se induce que:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (10.29)$$

Esta es la definición del **Teorema de la divergencia**, el teorema de la divergencia establece que el flujo total hacia afuera de un campo vectorial \mathbf{A} a través de la superficie cerrada S es igual a la integral de volumen de la divergencia de \mathbf{A} .

10.2.5 Rotacional de un vector: $\nabla \times \mathbf{A}$

El rotacional de \mathbf{A} es un vector axial (o rotacional) cuya magnitud es la circunferencia máxima cálculo de \mathbf{A} por unidad de área ya que el área tiende a cero y cuya dirección es la normal dirección del área cuando el área está orientada para hacer la circulación máxima.

La definición del rotacional de \mathbf{A} en coordenadas cartesianas puede ser fácilmente calculado con:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (10.30)$$

O:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \mathbf{a}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \mathbf{a}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \mathbf{a}_z \quad (10.31)$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \quad (10.32)$$

O:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{a}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z \quad (10.33)$$

Y para las esféricas:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin \theta \mathbf{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} \quad (10.34)$$

O:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (A_\phi)}{\partial \theta} \right] - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi \quad (10.35)$$

■ **Notación 10.3** Se describe las propiedades del rotacional:

1. El rotacional de un campo vectorial es otro campo vectorial.
2. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$.
3. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
4. $\nabla \times (V\mathbf{A}) = V\nabla \times \mathbf{A} + \nabla V \times \mathbf{A}$
5. La divergencia de un rotacional de un campo vectorial se desvanece: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
6. El rotacional del gradiente de un campo escalar se desvanece: $\nabla \times \nabla V = 0$ ó $\nabla \times \nabla = 0$

10.2.6 Laplaciano de un escalar: $\nabla^2 V$

El Laplaciano de un campo escalar V , es la divergencia del gradiente de V .

En coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (10.36)$$



El Laplaciano de un vector escalar es otro vector escalar.

En coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (10.37)$$

Y en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad (10.38)$$

10.3 Ley de Coulomb

La ley de Coulomb establece de la fuerza F entre dos cargas Q_1 y Q_2 son:

- A lo largo de la linea que los une.
- Directamente proporcional al producto $Q_1 Q_2$ de las cargas.
- Inversamente proporcional a la distancia R que los separa

Teorema 10.1 — Ley de Coulomb.

$$F = \frac{k Q_1 Q_2}{R^2} \quad (10.39)$$

Donde:

- Q : Cargas en Coulombs(C).
- R : Distancia en metros(m).
- F : Fuerza Newtons(N).

Constantes:

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \simeq \frac{10^{-9}}{36\pi} F/m \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 m/F$$

Si las cargas Q_1 y Q_2 están localizadas en puntos cuyas posiciones están de forma vectorial r_1 y r_2 (figura), así la fuerza de \mathbf{F}_{12} ² sobre la carga 2 debido a la carga 1 esta dado por:

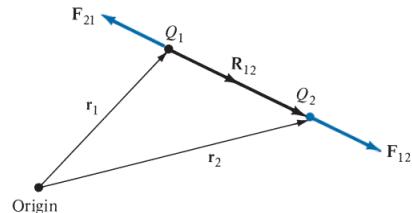
$$F_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_{R_{12}} \quad (10.40)$$

Sean n cargas y se desea hallar la fuerza resultante en una carga Q , se usa el *principio de superposición*. Este principio establece: Si existen N cargas Q_1, Q_2, \dots, Q_N y seas sus vectores posición r_1, r_2, \dots, r_N la fuerza resultante en la carga Q es la sumatoria de las fuerzas de cada una de las cargas:

$$F_Q = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_N$$

o:

$$F = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{Q_k(r - r_k)}{|r - r_k|^3} \quad (10.41)$$



R

De la ecuación 10.41, Q y r son la carga a analizar y el punto de dicha carga, r_k y Q_k son las cargas que actuarán sobre la carga a analizar. En preciso recordar que r se trabajarán de forma cartesiana: (x,y,z) - (x',y',z') y la resta se hará coordenada a coordenada, para luego hallar el módulo mediante una raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de las mismas. Ver ejercicio 4.1 [0].

■ **Notación 10.4 — Ejercicios.** Ejercicios 4.1, 4.2 y 4.3 del libro [0].

10.4 Intensidad de campo eléctrico

■ **Definición 10.1 — Intensidad de campo eléctrico.** La intensidad de campo eléctrico E es la fuerza que una unidad de carga positiva experimenta cuando se coloca en un campo eléctrico.

Teorema 10.2 — Intensidad de campo eléctrico.

$$E = \frac{F}{Q} \quad (10.42)$$

Donde:

- E: Intensidad de campo eléctrico(N/C) o Volts por metro(V/m).
- F: Fuerza(N)
- Q: Carga(Coulombs).

Para $Q > 0$, el E está en la misma dirección de la fuerza F . La intensidad de campo eléctrico en el punto r' debido a una carga localizada en r' es obtenido:

$$E = \frac{Q(r - r')}{4\pi\epsilon_0|r - r'|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r \quad (10.43)$$

²Se lee: La fuerza de la carga 1 a la carga 2

Y bajo el mismo principio de superposición, la intensidad de campo eléctrico en el punto \mathbf{r} :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{Q_k(r - r_k)}{|r - r_k|^3} \quad (10.44)$$

10.5 Campo eléctrico creado por una distribución continua de carga en un punto

Las cargas puntuales ocupan un muy pequeño espacio físico. Es posible tener distribuciones continuas: Es costumbre denotar la densidad de carga lineal $\rho_L(\text{C/m})$, la densidad de carga superficial $\rho_S(\text{C/m}^2)$ y la carga volumétrica $\rho_V(\text{C/m}^3)$.³

$$dQ = \rho_L dl = \lambda dl \rightarrow Q = \int_L \rho_L dl \quad (10.45a)$$

$$dQ = \rho_S ds = \sigma ds \rightarrow Q = \int_S \rho_S ds \quad (10.45b)$$

$$dQ = \rho_V dv = \rho dv \rightarrow Q = \int_V \rho_V dv \quad (10.45c)$$

El campo eléctrico debido a cada distribución de carga puede ser tomado como una sumatoria de los campos contribuidos por numerosas cargas:

$$\vec{E} = \int_L k\lambda \frac{dl}{r^2} \vec{u}_r \quad (10.46a)$$

$$\vec{E} = \int_S k\sigma \frac{ds}{r^2} \vec{u}_r \quad (10.46b)$$

$$\vec{E} = \int_V k\rho \frac{dv}{r^2} \vec{u}_r \quad (10.46c)$$

■ **Notación 10.5 — Ejercicios.** Revisar los ejercicios 4.4, 4.5, y 4.6 del libro [0].

10.6 Densidad de campo eléctrico

Definición 10.2 — Densidad de campo eléctrico. Se dice que la **densidad de flujo eléctrico** es el número de líneas de fuerza por metro cuadrado de superficie.

Para una esfera de radio r , esta dada por:

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{r} \quad (10.47)$$

Así para el espacio libre:

$$\vec{D} = \vec{E} \epsilon_0 \quad (10.48)$$

Donde:

- E: Campo eléctrico(N/C ó V/m).
- D: Densidad de flujo eléctrico(C/m²).

Se define **flujo eléctrico** en términos de la densidad de flujo eléctrico, es decir:

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.49)$$

³No confundir este ρ con subíndice con ρ sin subíndice usado en coordenadas cilíndricas.

Otra forma de ver el flujo eléctrico (figura 10.3), solo si las líneas de campo eléctrico uniforme atraviesan una superficie de área S es:

$$\Phi = ES \cos \theta \quad (10.50)$$

Donde:

- E: Campo eléctrico.
- S: Área de la superficie.
- θ : Ángulo que forman los vectores de campo eléctrico y la normal de la superficie

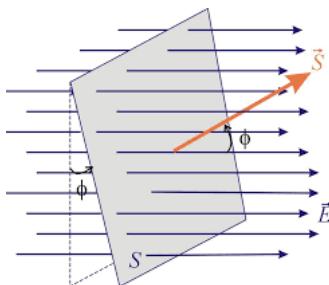


Figure 10.3: Flujo eléctrico

■ **Notación 10.6 — Ejercicios.** Ver ejercicio 4.7 del libro [O].

10.7 Ley de Gauss-Ecuaciones de Maxwell

Definición 10.3 — Ley de Gauss. La ley de Gauss establece que el flujo a través de una superficie que no encierra carga es nulo, en este caso el número neto de líneas de campo que atraviesa la superficie es cero (entran el mismo número de líneas que salen). Por otro lado, el flujo eléctrico total Φ_E a través de la **superficie cerrada** es igual a la carga total encerrada por la superficie.

Por lo tanto:

$$\Phi_E = Q_{enc}$$

que es:

$$\Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \oint_S D \cdot dS$$

La carga total encerrada:

$$Q = \oint_S D \cdot dS = \int_V \rho_v dv \quad (10.51)$$

Aplicando el teorema de la divergencia al término medio.

$$\oint_S D \cdot dS = \int_V \nabla \cdot D dv \quad (10.52)$$

¿Qué pasa si \vec{E} no es uniforme o si S es una superficie general?

Si queremos calcular el flujo eléctrico se calcula dividendo el área en diferenciales de área, y usando la ecuación 10.50 se suma todas las pequeñas partes:

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{E}_i \Delta \vec{A}_i$$

Que puede ser expresada como una integral de superficie (ecuación 10.55)

Teorema 10.3 — Ley de Gauss. El flujo eléctrico que pasa a través de cada superficie gaussiana^a es igual a la carga neta encerrada (suma de las cargas encerradas) entre la *permisividad en el vacío*. Comparando los volúmenes de las dos integrales (ecuación 10.51 y 10.52):

Forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (10.53)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (10.54)$$

Forma integral:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (10.55)$$

Las ecuaciones 10.54, 10.53 y 10.55 son la primera de las 4 ecuaciones de Maxwell establece: *Que el volumen de densidad de carga es la misma que la divergencia de la densidad de flujo eléctrico. Es equivalente a la ley de Coulomb de fuerza entre dos cargas.*

^aSe llama superficie gaussiana a la superficie **imaginaria** que encierra las cargas a analizar, no siempre tiene que coincidir necesariamente con la distribución de carga.

- La ley de Gauss es útil cuando se demuestra por simetría el valor de campo eléctrico es constante sobre nuestra superficie gaussiana.
- Además el vector normal $d\vec{A}$ siempre apunta hacia afuera del volumen encerrado por la superficie cerrada, es necesario decir que no siempre el campo eléctrico no apuntará a una dirección, depende de la carga, si es positiva será hacia afuera del volumen y si es negativa será hacia adentro de la superficie.
- Si \vec{E} es **tangente** a la superficie gaussiana en cada punto, entonces la integral sobre la superficie es cero.

La ley de Gauss también puede ser usada para distribuciones de carga no uniforme es necesario una densidad de carga del cuerpo en estudio varíe según una coordenada espacial y para calcular el campo eléctrico primero se debe calcular la carga encerrada por la superficie gaussiana.

■ **Ejemplo 10.1** ¿Cuál es el módulo de una carga puntual capaz de crear un campo eléctrico de 1N/C en un punto igual a 1m de distancia?

Los datos que tenemos son: Campo Eléctrico y el radio de la superficie gaussiana, lo que tenemos que encontrar es cuánto es la carga encerrada, para ellos tenemos que usar la ecuación 10.55:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Como el campo eléctrico es constante, este sale de la integral:

$$\vec{E} \oint \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Tenemos una integral de superficie, sabemos que se trata de una esfera; y sabemos cuál es el área de una esfera, además sabemos cuánto sabe nuestro campo eléctrico y el radio:

$$1 \cdot (4\pi(1)^2) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

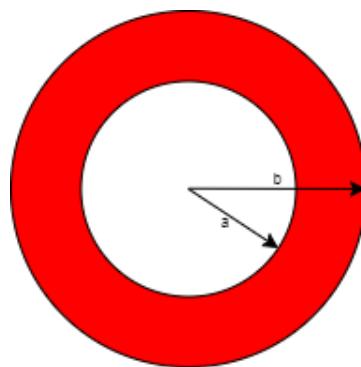
Despejando la carga encerrada:

$$Q_{enc} = 0.111nC$$

■ **Ejemplo 10.2** En la figura se muestra una cáscara esférica con una densidad volumétrica de cargas uniforme $\rho = 1,84nC/m^3$, radio interno $a=10\text{cm}$ y radio externo $b=2a$. Determinar el módulo del campo eléctrico:

- En $r=0\text{ cm}$
- En $r=a/2$
- En $r=a$
- En $r=1,5a$
- En $r=b$
- En $r=3b$

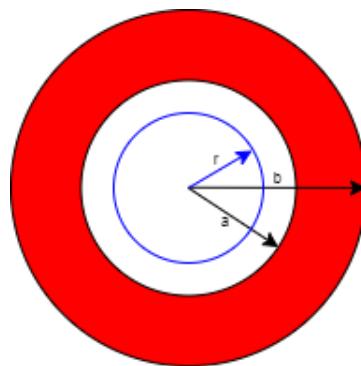
Para explicarlo vamos a dibujar la situación en la nos encontramos, el contorno rojo es donde se encuentra la carga:



Tenemos varios radios en los cuales tenemos que evaluar el campo, si analizamos la imagen vemos que tenemos 3 espacios: la parte hueca, la parte donde se encuentran las cargas y afuera de la esfera. Haremos para cada uno de los casos. Para poder analizar los casos tenemos que ubicar superficies gaussianas:

Caso 1:

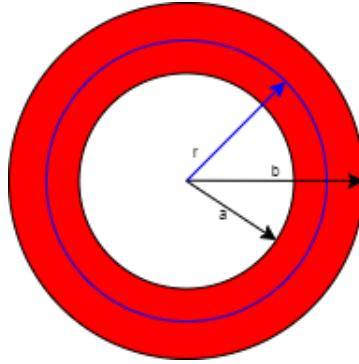
La primera superficie gaussiana estará en la parte hueca



Nos ponemos a analizar la primera situación: ¿Existe una carga encerrada bajo la superficie gaussiana que acabamos de crear? No, no existe ni una carga encerrada desde $r=0$ hasta $r=a$. Por lo tanto el campo eléctrico E es **cero**. En conclusión

- En $r=0\text{ cm} \rightarrow E=0$
- En $r=a/2 \rightarrow E=0$
- En $r=a \rightarrow E=0$

Caso 2:



Ahora crearemos una superficie gaussiana desde $r=a$ hasta $r=b$, en este caso a medida que crezca el radio r , si habrá una carga encerrada, por ello no será cero. Usando la ley de Gauss y sabiendo que se trata de un campo eléctrico constante:

$$E \oint dS = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

A diferencia del ejemplo anterior, aquí tenemos una densidad de carga volumétrica dada por el problema. **Dejaremos en pausa esta ecuación y haremos unos pasos pareados.** Para resolver este tipo de problemas es necesario usar las expresiones de diferenciales de carga, más específicamente, la de volumen(ecuación 10.45c):

$$dQ = 1.84nC/m^3 dv$$

Nosotros necesitamos saber la carga encerrada, no la diferencial de carga; para ello solo integramos a ambos lados:

$$Q = \int \rho_v dv$$

No tenemos la diferencial de volumen, si nos ponemos a pensar: tenemos una esfera y necesitamos hallar la diferencial pero sabemos la expresión del volumen de una esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Derivamos a ambos lados para obtener la diferencial de volumen:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Ahora que tenemos la diferencial de volumen podemos reemplazarla en la integral:

$$Q = \int \rho_v \cdot 4\pi r^2 dr$$

Antes de proceder con la integral definamos los límites: como lo dijimos para este caso estamos tomando desde un radio igual a a hasta radio igual a b , pero estamos **analizando la superficie gaussiana**, es debido a este análisis que los límites de la integral van desde radio mínimo igual a a hasta un radio de valor r que será el radio que queramos siempre y cuando se cumpla que $a < r < b$. Con esto dicho tenemos:

$$Q = \int_{r=a}^{r=r} \rho_v \cdot 4\pi r^2 dr$$

Si desarrollamos la integral obtendremos nuestra carga encerrada:

$$Q_{enc} = \frac{4\pi \cdot \rho_v}{3} (r^3 - a^3)$$

Ahora que sabemos la carga encerrada volvemos a la ley de Gauss que estábamos resolviendo:

$$E \oint dS = \frac{4\pi \cdot \rho_v (r^3 - a^3)}{3\epsilon_0}$$

Y nuevamente nos enfrentamos ante un diferencial de volumen, sabemos que es una esfera, por lo tanto:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{4\pi \cdot \rho_v (r^3 - a^3)}{3\epsilon_0}$$

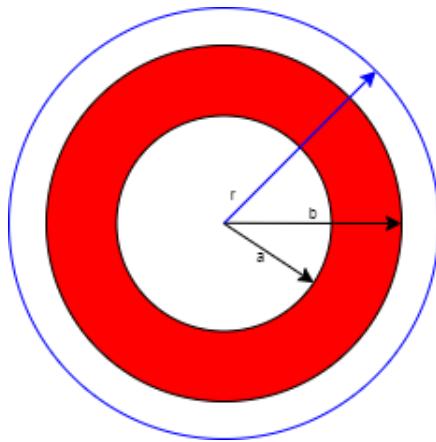
Aplicamos un poco y álgebra y ordenamos:

$$E = \frac{\rho_v (r^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

Reemplazamos los datos, R será los radios que nosotros queramos, siempre y cuando se cumpla que $a < r < R$; los radios que cumplen esta condición son $r=1.5a$ y $r=b$:

- En $r=1.5a \rightarrow E=7.32 \text{ N/C}$
- En $r=b \rightarrow E=12.13 \text{ N/C}$

Caso 3:



En este caso ahora nuestra superficie gaussiana será desde un radio igual a b hasta un radio r , el que queramos. En este caso es el mismo caso que le caso 2, la única diferencia aquí son los límites de los radio. El caso dos, a medida que el radio cambiaba también lo hacia el campo eléctrico por que a más radio encerrábamos más carga. En este caso, el radio de nuestra superficie gaussiana va desde b , es decir, el campo eléctrico ya ha sido encerrado en su totalidad y aunque nuestra r sea muy grande o muy pequeña, la carga no cambiará. Recordemos que para la integral pusimos límites desde radio igual a a y variaba hasta radio igual a r , eso cambia aquí donde nuestros límites de integración en función de radio será desde b hasta r , en decir una superficie cerrada, ahora lo plasmamos en una ecuación:

$$E = \frac{\rho_v (b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

Ya tenemos todos los datos, y el último radio que no falta probar es $r=3.b$, reemplazando y resolviendo:

- En $r=3.b \rightarrow E=1.35 \text{ N/C}$

■

R Es necesario que trabajes en las unidades del SI, de lo contrario no saldrán las respuestas correctas. Las unidades son errores que se suele cometer comúnmente.

Se dejan algunos ejercicios en la sección de Anexos.

10.8 Potencial eléctrico

Supongamos que deseamos mover una carga puntual Q del punto A al punto B en un campo eléctrico E . De la ley de Coulomb, la fuerza sobre Q es $F=QE$ de modo que el trabajo hecho al desplazar la carga por dl es:

$$dW = -F \cdot dl = -QE \cdot dl$$

El signo negativo indica que el trabajo está siendo hecho por un agente externo, por lo tanto el trabajo total hecho o la energía potencial en el movimiento Q de A a B es:

$$W = -Q \int_A^B E \cdot dl$$

(10.56)

Dividiendo entre Q a ambos lados da la energía potencia por unidad de carga, esta cantidad, denotada por V_{AB} , se conoce como la diferencia de potencial entre los puntos A y B. Así

$$V_{AB} = \frac{W}{Q} = - \int_A^B E \cdot dl$$
(10.57)

Note que:

1. Al determinar V_{AB} , A es el punto inicial mientras que B es el punto final.
2. Si V_{AB} es negativo, hay una pérdida de energía potencial al mover Q de A a B; esta implica que el trabajo lo está haciendo el campo. Sin embargo, si V_{AB} es positivo, hay una ganancia de energía potencial en el movimiento; un agente externo realiza el trabajo.
3. V_{AB} es independiente del camino tomado (se mostrará un poco más adelante).
4. V_{AB} se mide en julios por coulomb, comúnmente denominados voltios (V).

■ **Notación 10.7 — Ejercicios.** Ejercicios relacionados:

1. Ejercicio 4.10
2. Ejercicio 4.11

Ambos del libro [0].

10.9 Relación entre E y V-Ecuación de Maxwell

Como se muestra en la sección anterior, la diferencia de potencial entre los puntos A y B es independiente del camino tomado. Por eso:

$$V_{BA} = -V_{AB}$$

que es, $V_{BA} + V_{AB} = \oint_L E \cdot dl = 0$ ó:

$$\oint_L E \cdot dl = 0$$
(10.58)

Esto muestra que la integral de línea de E a lo largo de un camino cerrado como se muestra en la figura 10.4 debe ser cero. Físicamente, esto implica que no se realiza ningún trabajo neto al mover una carga a lo largo de un circuito cerrado. La trayectoria en un campo electrostático. Aplicando el teorema de Stokes a la ecuación 10.58 da:

$$\oint_L E \cdot dl = \int_S (\nabla \times E) \cdot dS = 0$$

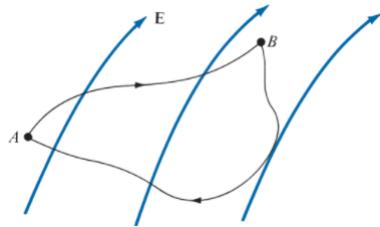


Figure 10.4: La naturaleza conservadora de un campo electrostático.

Teorema 10.4 — Ley de Gauss para campos magnéticos. Esta ley expresa la inexistencia de cargas magnéticas o, como se conocen habitualmente, monopolos magnéticos. Las distribuciones de fuentes magnéticas son siempre neutras en el sentido de que posee un polo norte y un polo sur, por lo que su flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo.

Forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.59)$$

Forma integral:

$$\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (10.60)$$

De la expresión 10.57, se dice que:

$$dV = -E \cdot dl = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

Después de un cálculo multivariable, una cambio total en $V(x,y,z)$ es la suma de cambios parciales con respecto a las variables x , y y z .

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Comparando ambas expresiones de dV :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \quad (10.61)$$

es decir, la intensidad del campo eléctrico es el gradiente de V . El signo negativo muestra que la dirección de E es opuesta a la dirección en la que aumenta V ; E está dirigido desde arriba a niveles más bajos de V .

■ **Notación 10.8 — Ejercicios.** Se recomienda analizar el ejercicio 4.12 del libro [0].

10.10 Dipolo eléctrico

Definición 10.4 — Dipolo eléctrico. Un dipolo eléctrico se forma cuando dos cargas puntuales de igual magnitud pero opuestas el letrero del sitio están separados por una pequeña distancia.

El potencial $P(r, \theta, \phi)$ de la figura 10.5 esta dado por:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right] \quad (10.62)$$

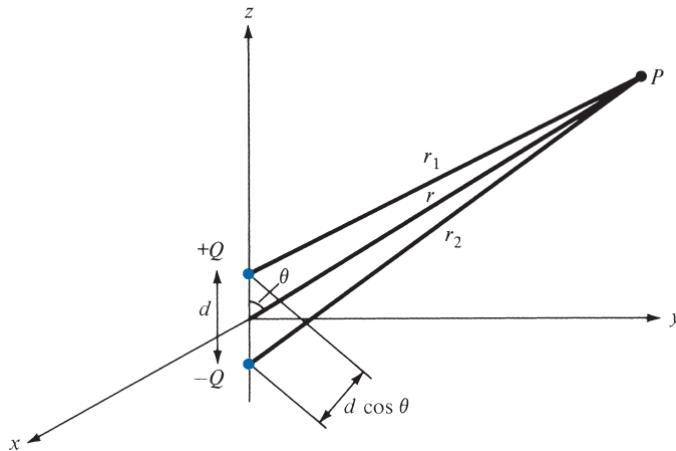


Figure 10.5: Dipolo eléctrico

donde r_1 y r_2 son las distancias entre P y $+Q$ y $-Q$ respectivamente. Si $r \gg d$, $r_2 - r_1 \simeq d \cos \theta$ y $r_2 r_1 \simeq r^2$:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} \quad (10.63)$$

Ya que $d \cos \theta = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r$, donde $\mathbf{d}=da_z$, si nosotros lo definimos como el *momento de dipolo*:

$$p = Qd \quad (10.64)$$

La ecuación 10.62 puede ser escrita como:

$$V = \frac{p \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (10.65)$$

Tenga en cuenta que el momento dipolar p está dirigido de $-Q$ a $+Q$. Si el centro del dipolo no está en el origen pero están en \mathbf{r}' , eq. 10.65 se convierte en:

$$\boxed{V(r) = \frac{p \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}} \quad (10.66)$$

El campo eléctrico debido al dipolo con centro en el origen, que se muestra en la Figura 10.5 puede obtenerse fácilmente a partir de las ecs. 10.61 y 10.62 como:

$$\boxed{E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)} \quad (10.67)$$

donde $p=|\mathbf{p}|=Qd$.

Definición 10.5 — Líneas de flujo eléctrico. Una línea de flujo eléctrico es un camino o línea imaginaria trazada de tal manera que su dirección en cualquier punto es la dirección del campo eléctrico en ese punto.

En otras palabras, son las líneas a las que la densidad de flujo eléctrico D es tangencial en cada punto. Cualquier superficie en la que el potencial es el mismo en todas partes se conoce como superficie equipotencial de prueba. La intersección de una superficie equipotencial y un plano da como resultado una trayectoria o línea conocida como línea equipotencial. No se realiza trabajo al

mover una carga de un punto a otro a lo largo de una línea equipotencial o superficie ($V_A - V_B = 0$) y por lo tanto

$$\int_L E \cdot dl = 0 \quad (10.68)$$

en la línea o superficie. De la ec. 10.68, podemos concluir que las líneas de fuerza o flujo. Las líneas (o la dirección de E) son siempre normales a las superficies equipotenciales Ejemplos de las superficies equipotenciales para una carga puntual y un dipolo se muestran en la figura 10.6.

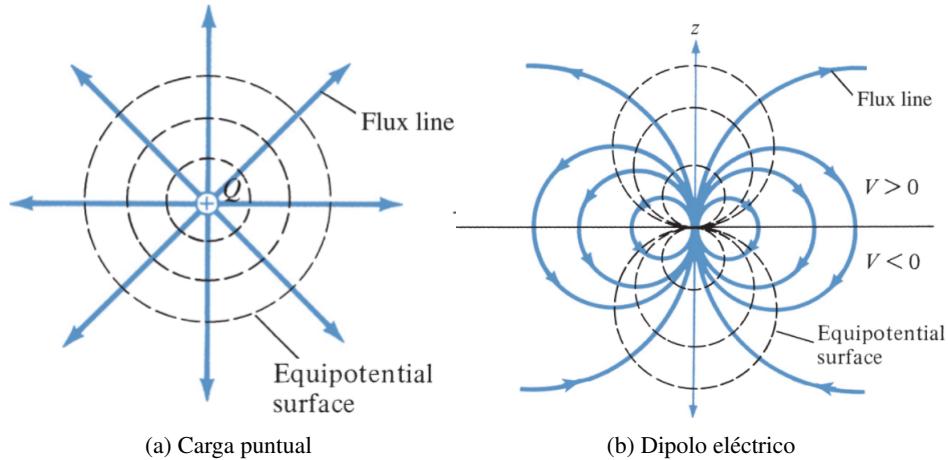
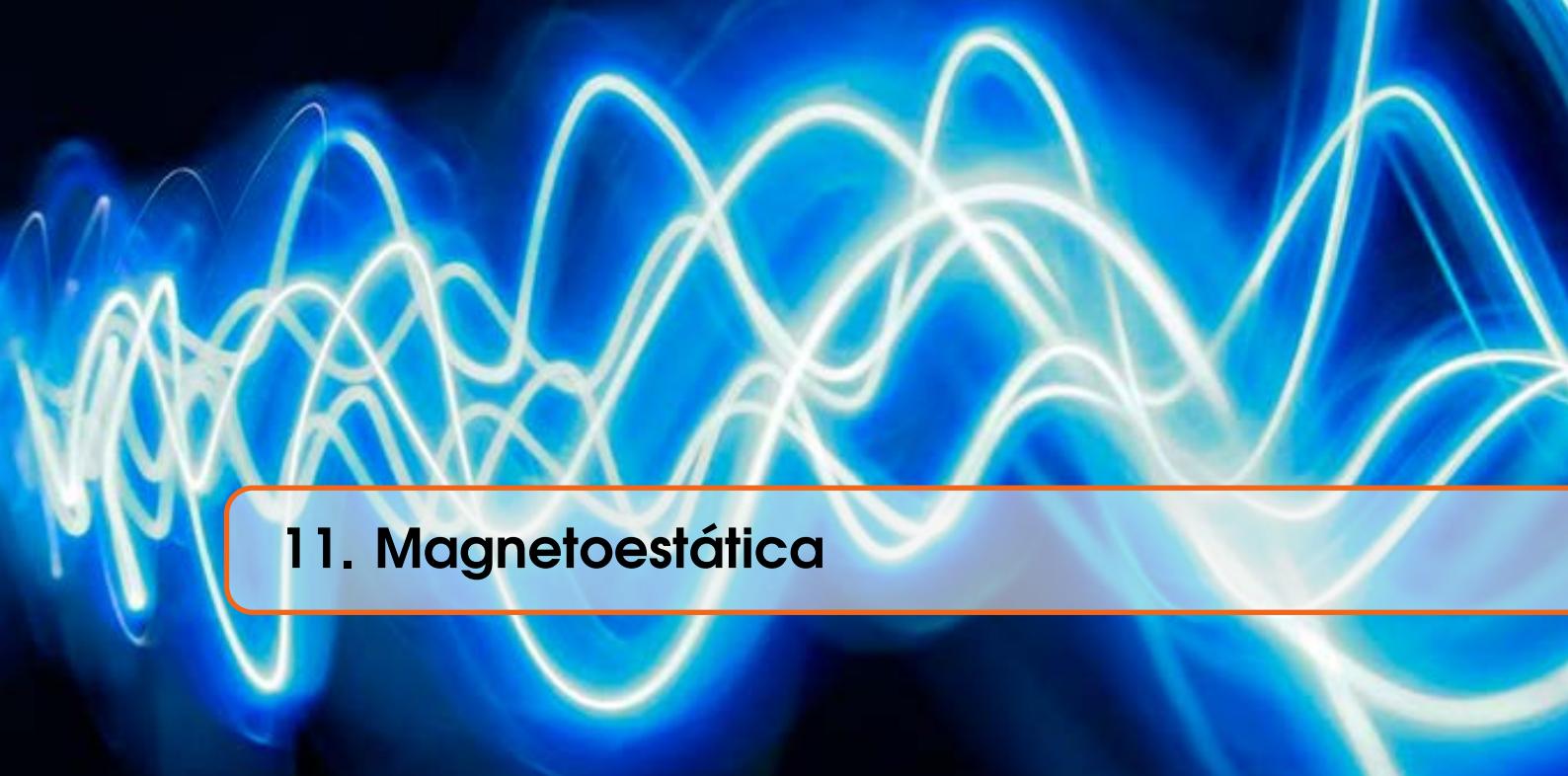


Figure 10.6: Ilustración de la divergencia de un campo vectorial.

- **Notación 10.9 — Ejercicios.** Revisar el ejercicio 4.13 de libro [0].



11. Magnetoestática



12. Ecuaciones de Maxwell y las ondas electromagnéticas

Sistemas de telefonía

13 Telefonía 169

13.1	Evolución de la telefonía	169
13.2	Commutadores	170
13.3	Repasso: Señales analógicas y digitales	170
13.4	Multiplexación	171
13.5	Técnicas de conmutación	173
13.6	Red de telefonía pública	175
13.7	Señalización telefónica	179
13.8	Planta interna y externa	180

14 Herramientas para el análisis telefónico 187

14.1	Tráfico Telefónico	187
14.2	Medidas de tráfico telefónico	188
14.3	Tipos de tráfico	192
14.4	Accesibilidad	193
14.5	<i>Grade of service(GoS)</i>	194
14.6	Diseño de redes	195
14.7	Encaminamiento de tráfico	197
14.8	Erlang-B	201

15 Telefonía IP 207

15.1	Repasso: TCP/IP	212
15.2	VoIP	216
15.3	Digitización de la voz	217
15.4	Componentes de VoIP	220
15.5	Tecnología IP	222
15.6	Vocabulary	224



13. Telefonía

13.1 Evolución de la telefonía

La era de las telecomunicaciones se inicia en el siglo XIX con la invención del telégrafo en los años 1830's.

El teléfono se patentó en 1876 por Graham Bell, y con ello fue posible transportar la voz humana de un lugar a otro. Inicialmente las comunicaciones eran punto a punto, los dispositivos terminales debían conectarse directamente. Ya se torna complicado cuando aparecen más teléfonos



Figure 13.1: Enlace cableado de dos teléfonos

en la red, por ejemplo con 4 teléfonos el cableado se elevaba considerablemente:

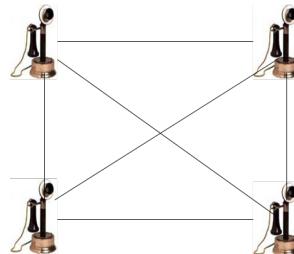


Figure 13.2: Cableado con 4 teléfonos

La ecuación que describe este comportamiento y la cantidad necesaria de cableado para poder establecer la conexión entre todos los equipos es el siguiente:

Teorema 13.1 — Cantidad de enlaces. Sea N el número de dispositivos a conectar, se crearán E enlaces para que todos estén interconectados:

$$E = \frac{N \times (N - 1)}{2} \quad (13.1)$$

13.2 Conmutadores

Debido a este problema es que se crean los conmutadores: “Comutación es el proceso de crear enlaces virtuales entre los equipos para permitirles la comunicación”

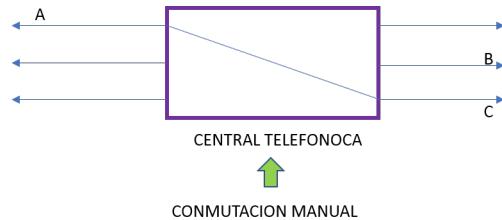


Figure 13.3: Principio básico de los conmutadores

Al principio estos eran manuales, tal cual vemos en las películas: una señorita operadora nos recibe y dándole al lugar donde queremos llamar nos conecta; sin embargo ahora se ha automatizado permitiendo menos personal, eficiencia y rapidez.//Cuando juntamos ambos temas vistos se produce un sistema de telefonía como se ve en la imagen, cada enlace entre cada elemento recibe un nombre en específico.

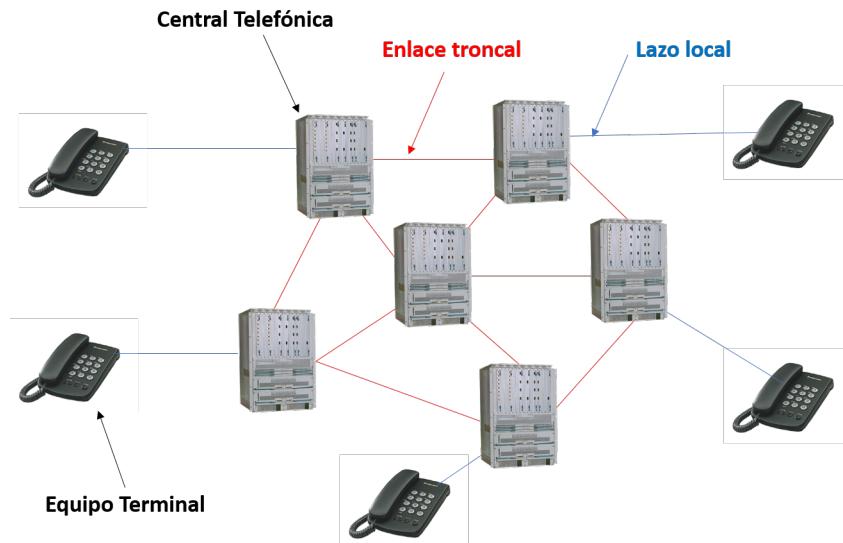


Figure 13.4: Principio básico de los conmutadores

13.3 Repaso: Señales analógicas y digitales

13.3.1 Ventajas y desventajas de las señales analógicas

- El procesamiento de las señales analógicas es relativamente más simple que las señales digitales, los circuitos electrónicos involucrados en la interpretación de la señal son más simples y por lo tanto de menor coste.
- La transmisión de la señal es ligeramente más simple, aunque la eficacia dependerá del alcance de la señal en el medio.
- La principal desventaja es la eficacia y las posibles interferencias que se puedan generar en la emisión y recepción de la señal.

Señal analógica	Señal digital
Varían su amplitud continuamente	Su amplitud es constantes en un lapso de tiempo
Varían Continuamente, todo el tiempo cambian	Cambian después de un periodo de tiempo
Pueden representar infinitos valores	Representan valores discretos (finitos)
Son muy afectadas por el ruido (ruido es todo aquello que perturba a la señal)	Tienen mayor tolerancia al ruido
No se pueden regenerar	Es posible regenerarlas (por lo tanto las señales digitales pueden viajar a mayores distancias con regeneradores intermedios)

Table 13.1: Cuadro comparativo de las características principales entre las señales analógicas y señales digitales

13.3.2 Ventajas y desventajas de las señales digitales

- Ante la atenuación, la señal digital puede ser amplificada y al mismo tiempo reconstruida gracias a los sistemas de regeneración de señales.
- La señal digital permite la multigeneración infinita sin pérdidas de calidad.
- Como principal desventaja se puede comentar que el procesamiento es mas complejo, aunque a medida que la tecnología avanza este diferencia se reduce cada vez mas.
- La señal digital requiere mayor ancho de banda para ser transmitida que la analógica.
- Se necesita una conversión analógica-digital previa y una decodificación posterior, en el momento de la recepción.
- La transmisión de señales digital requiere una sincronización precisa entre los tiempos del reloj de transmisor, con respecto a los del receptor. Un desfase cambia la señal recibida con respecto a la que fue transmitida.

13.4 Multiplexación

La multiplexación es el proceso de transmisión simultánea de dos o más señales individuales a través de un único canal de comunicación, ya sea por cable o inalámbrico.

Es una técnica que permite la transmisión de señales de información y cuya idea consiste en ocupar un canal (normalmente de gran capacidad) de trasmisión a partir de distintas fuentes.

13.4.1 ¿Para qué sirve?

Aumenta el número de canales de comunicación para poder transmitir más información. En las telecomunicaciones se usa la multiplexación para dividir las señales en el medio por el que vayan a viajar dentro del espectro electromagnético. Por ejemplo para poder enviar varios canales de voz por un mismo medio podemos utilizar multiplexación en el tiempo o en la frecuencia. En otras palabras: es compartir la capacidad de transmisión de datos sobre un mismo enlace para aumentar la eficiencia, ademas sirve para minimizar la cantidad de líneas físicas requeridas y maximizar el uso del ancho de banda de los medios.

El mayor uso de la multiplexación se da en el sistema telefónico, donde millones de llamadas se multiplexan en cables, líneas de fibra óptica de larga distancia, satélites y canales inalámbricos.

La multiplexación aumenta la capacidad del operador telefónico para gestionar más llamadas, minimizando los costos del sistema y el uso del espectro.

13.4.2 Multiplexación por división de tiempo o TDM (*time-division multiplexing*)

Consiste en asignar a cada usuario, durante unas determinadas "ranuras o fracciones de tiempo", la totalidad del ancho de banda disponible.



Figure 13.5: Multiplexación: esquema

Multiplexor	Demultiplexor
Combina los datos de las líneas de entrada. Los transmite a través de un enlace de mayor capacidad.	Acepta la cadena multiplexada. Separa los datos de acuerdo al canal del que provienen y los distribuye a la línea apropiada de salida.

Table 13.2: Función de cada parte de la multiplexación

13.4.3 Multiplexación por división de frecuencia o FDM (*frequency-division multiplexing*)

Esta técnica que consiste en dividir mediante filtros el espectro de frecuencias del canal de transmisión y desplazar la señal a transmitir dentro del margen del espectro correspondiente mediante modulaciones, de tal forma que cada usuario tiene posesión exclusiva de su banda de frecuencias. Algunas características del FDM:

- El ancho de banda del medio debe ser mayor que le ancho de banda de la señal transmitida. Capacidad de transmisión de varias señales a la vez.
- La señal lógica trasmisita a través del medio es analógica. La señal recibida puede ser analógica o digital.
- Para la comunicación analógica el ruido tiene menos efecto.

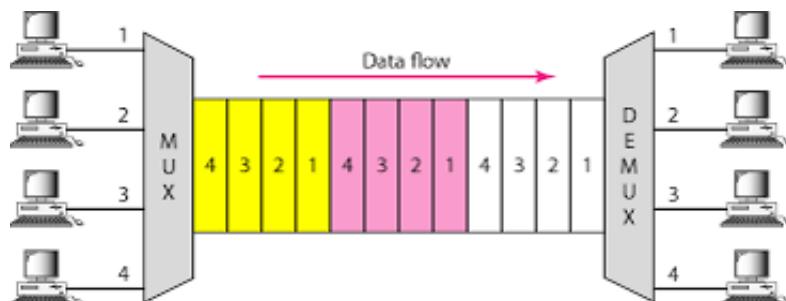


Figure 13.6: TDM ejemplificación

Ventajas	Desventajas
<p>El uso de la capacidad es alto. Combina los datos de las líneas de entrada.</p> <p>Cada uno para ampliar el número de usuarios en un sistema en un coste bajo.</p>	<p>La sensibilidad frente a otro problema de usuario es alta.</p> <p>El coste inicial es alto y la complejidad técnica es más</p>

Table 13.3: TDM: Ventajas y desventajas

13.4.4 Multiplexación por división de longitud de onda o WDM (*wavelength-division multiplexing*)

Se quieren combinar múltiples haces de luz dentro de una única luz en el multiplexor, Hacer a operación inversa en el demultiplexor. Combinar y dividir haces de luz se resuelve fácilmente mediante un prisma. Un prisma curva un rayo de luz basándose en el ángulo de incidencia y la frecuencia

13.4.5 Multiplexación por Estadística por División de Tiempo o STDM(*Statistical time-division multiplexing*)

Es un canal de comunicaciones que se divide en un número arbitrario de las secuencias de datos de velocidad de transmisión de bites variables de los canales digitales.

Trabaja con señales digitales transmite los datos de los canales que en cada momento tengan información disponible para transmitir, lo que mejora la eficiencia del canal de transmisión.

13.5 Técnicas de conmutación

13.5.1 Conmutación por circuitos

Esta multiplexacion implica un camino dedicado entre el transmisor y el receptor de datos mediante una TDM.

Esta comutacion posee 3 fases:

1. Inicio de conexión
2. Transferencia de datos
3. Liberación de la conexión

Una vez que se establece la llamada a traves de los conmutadores se puede llegar a la conclusión que la comunicación es bilateral entre dos telefonos como lo propuso Graham Bell. El número de B se transmite una sola vez, al inicio de la conexión, antes de la conversación. La conexión se realiza de extremo a extremo, luego pasa la información de usuario donde el retardo de la información casi 0 seg. El enlace es utilizado solo para paso de la información entre el usuario A y B, por lo tanto los nodos no requieren memoria para almacenar la información del usuario puesto que una vez que el enlace culmina esta lista para que sea usado por otro par de usuarios para una nueva conexión.

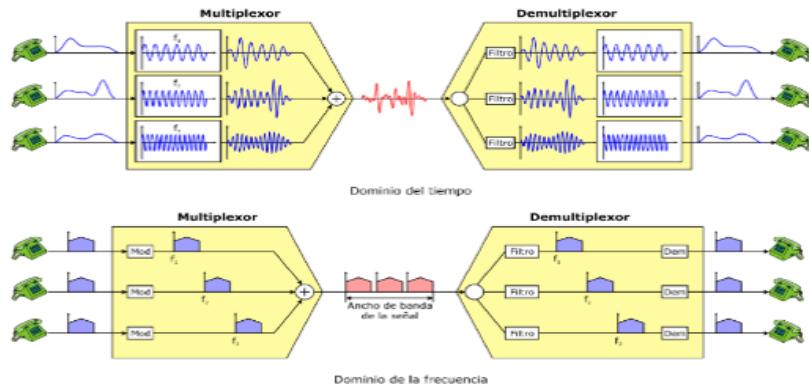


Figure 13.7: FDM ejemplificación

Ventajas	Desventajas
<p>El usuario puede ser añadido al sistema, simplemente añadiendo otro par de modulador de transmisor y receptor.</p> <p>El sistema de FDM apoya el flujo de dúplex total de información que es requerido por la mayor parte de la aplicación.</p>	<p>En el sistema FDM, el coste inicial es alto y un problema para un usuario puede afectar a veces a otros.</p> <p>En el sistema FDM, cada usuario requiere una frecuencia de portador precisa.</p>

Table 13.4: TDM: Ventajas y desventajas

Es importante resaltar que los nodos no realizan corrección de error.

13.5.2 Comutador por paquetes

A diferencia del anterior, esta forma no tiene una conexión directa entre ambos puntos, sino que la información viaja en paquetes, estos paquetes son independientes entre si; es por eso que la información completa sobre las direcciones de origen y destino se envían con el paquete.

- El enlace es utilizado para varias comunicaciones.
- El numero del terminal de destino se transmite en cada paquete.
- No necesariamente se realiza la conexión de extremo a extremo para transmitir la información.
- Utiliza protocolos. Ejm: TCP, UDP, IP
- Retardo de la información considerable

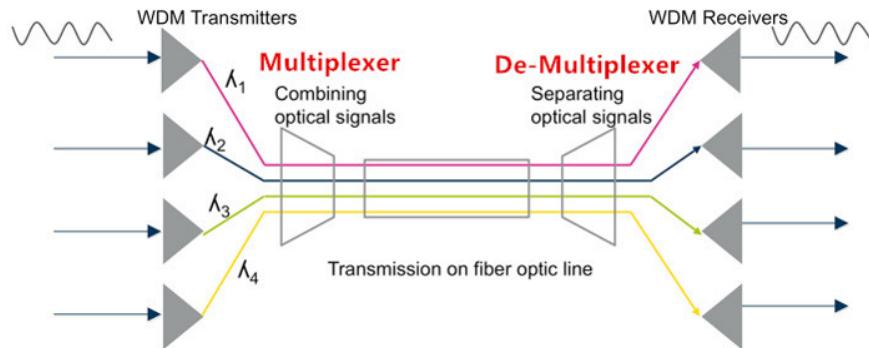


Figure 13.8: WDM ejemplificación

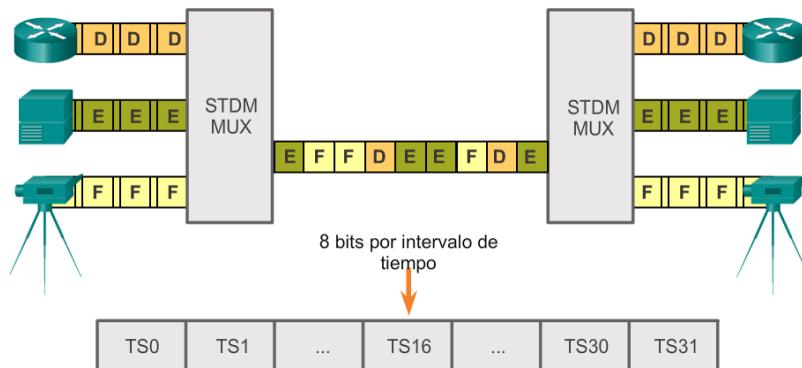


Figure 13.9: STDM ejemplificación

Resumen comparativo

Características	Circuitos	Paquetes
Tiempo para establecer el trayecto.	Según la señalización utilizada.	No existe fase de establecimiento.
Retardo de transmisión End to End.	Despreciable.	Existe en toda comunicación, para tiempo real es negativo
Asignación de circuitos.	Único y exclusivo para cada comunicación	Compartido por otras comunicaciones simultáneas.
Identificación del destino.	Sólo en la fase de establecimiento.	Se incluye un identificador en cada paquete
Necesidad de almacenar en la red.	No es necesario.	Si, en los nodos de la red.
Flexibilidad de la red.	Encaminamiento alternativo.	Gran flexibilidad.

Table 13.5: Cuadro comparativo entre conmutación por circuito y por paquete

13.6 Red de telefonía publica

13.6.1 Red de telefonía publica conmutada-PSTN

Compuesta por:

- El equipo terminal: normalmente un teléfono(Analógicos / Digitales).

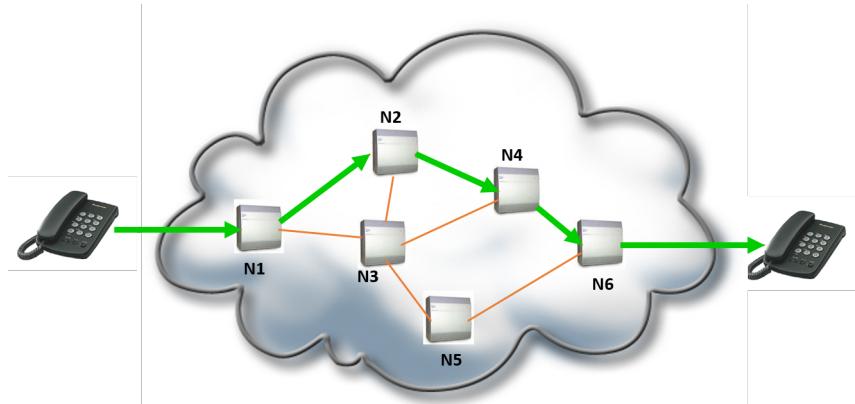


Figure 13.10: Comunicación por circuitos

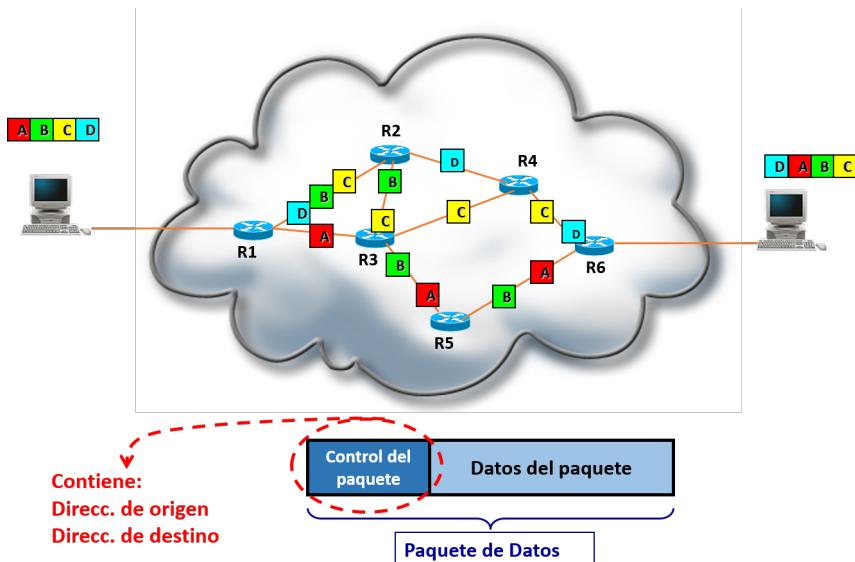


Figure 13.11: Comunicación por paquetes

- La central de conmutación: Que puede ser pública o privada (PBX)(Privada y Públicas)
- El bucle de abonado o usuario.(Lazo abonado)
- Las troncales de comunicación.(Troncales Analógicas y Digitales)

La Red Telefónica Pública Conmutada o **PSTN**, es una red pública basada en conmutación de circuitos tradicional, diseñada principalmente para la transmisión de voz en tiempo real.

En un principio estaba basada únicamente en sistemas analógicos, POST¹.

Actualmente ha evolucionado a sistemas digitales e incluso basados en IP.

La PSTN, está formada por un conjunto de dispositivos de conmutación (centrales telefónicas) y enlaces (troncales / líneas de abonado) que transportan la voz de los abonados distribuidos en un área geográfica, optimizada para comunicaciones de voz en tiempo real.

13.6.2 Características

- El bucle de abonado(usuario) es generalmente analógico.
- Ofrece a cada usuario un circuito (bucle de abonado) para señales analógicas con una banda base de 4KHz para cada conversación entre dos dispositivos terminales.

¹(Plain Old Telephone Service) hace referencia al servicio teléfono tradicional conformado por dispositivos analógicos que utilizan el cableado de cobre.

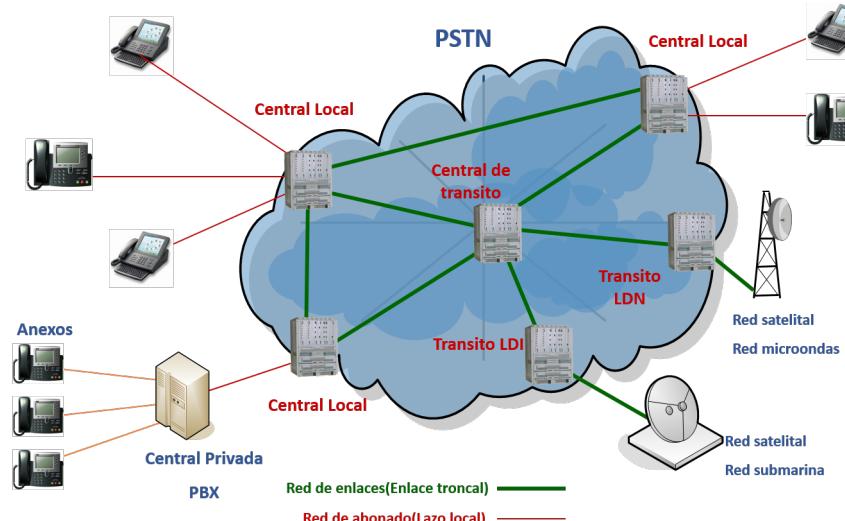


Figure 13.12: Red de telefonía

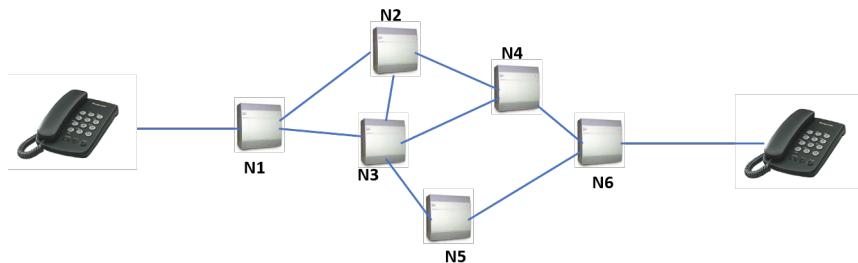


Figure 13.13: Red de telefonía pública commutada

- Los enlaces troncales son en la mayoría digitales.
- Ancho de banda en los troncales de 64Kbps.
- Conexión dúplex circuit-switched.
- Movilidad limitada.

13.6.3 Componentes

13.6.3.1 Equipos Terminales

Son los dispositivo que le permite al usuario establecer una comunicación. Cada terminal es utilizado por los usuarios (abonados) para transmitir voz u otro tipo de datos a otros terminales que están conectados a la red. Ejemplos: teléfono, fax, modem.

Pueden ser analógicos o digitales, se conectan a las centrales telefónicas a través del lazo de abonado.

Los símbolos utilizados para representar diferentes tipos de aparatos y terminales telefónicos son los siguientes:

13.6.3.2 Central telefónica

Es el nodo que establece, mantiene y termina las conexiones (llamadas) entre 2 o más usuarios. También se le conoce como equipo o central de conmutación. Se encarga de la señalización así como de facilitar la información sobre su progreso.

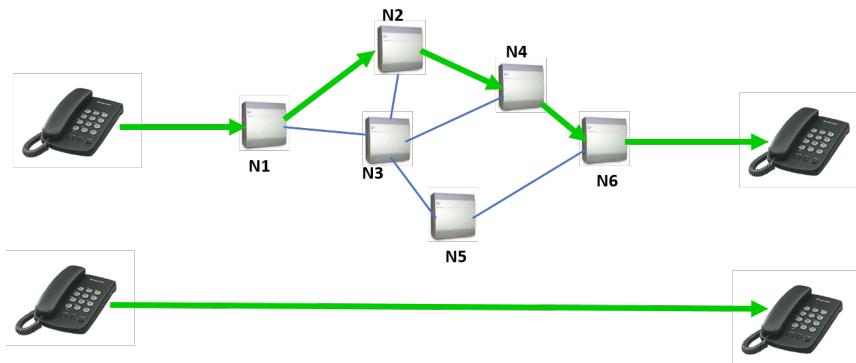


Figure 13.14: Apreciamos que llegamos al mismo punto inicial, enlace bidireccional

Elemento	Símbolo
Aparato telefónico en general.	
Aparato telefónico con dispositivo de marcación.	
Aparato telefónico con batería local.	

Figure 13.15: Símbolos representativos

13.6.3.3 Red de enlace

Esta formado por las troncales que enlazan las centrales de commutación, pueden tener miles de kilómetros y transportan gran cantidad de llamadas multiplexadas.

13.6.3.4 Troncales

Interconectan centrales de commutación telefónica, y llevan las señales de voz permitiendo la comunicación de los usuarios.

13.6.3.5 Lazo de abonado o local

El lazo de abonado interconecta a la central telefónica con el terminal del usuario.

Presenta las siguientes características:

- Red analógica
- 6 a 7 Km de distancia (usuario a la central)
- Gran cantidad de cableado
- Red que transporta poco tráfico
- 2 hilos

El lazo de abonado transporta la voz telefónica dentro del rango de frecuencias de 300 a 3400 Hz.

13.6.3.6 SLIC y BORSCHT

Cada teléfono conectado a la central telefónica está provisto de un grupo de circuitos básicos que alimentan al teléfono y proporcionan todas las funciones básicas: llamada, tono de marcación y supervisión de la marcación. Estos circuitos colectivamente se llaman interfase del suscriptor o circuitos de interfase de línea del suscriptor (SLIC, subscriber line interface circuits).

La SLIC proporciona siete funciones básicas llamadas BORSCHT (acrónimo de las funciones batería, protección de sobrevoltaje, llamada, supervisión, codificación, bobina híbrida y prueba).

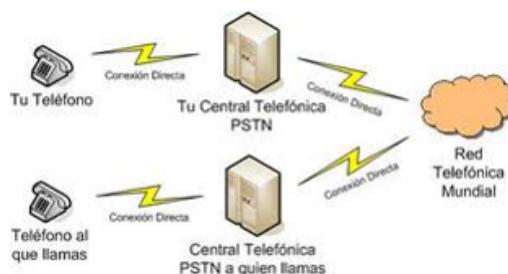


Figure 13.16: Diagrama del accionamiento de una central telefónica

Elemento	Símbolo
Dispositivo de conmutación (Forma 1).	
Dispositivo de conmutación con líneas de entrada y de salida.	
Dispositivo de conmutación (Forma 2).	

Figure 13.17: Simbología de una central telefónica (conmutador)

Las funciones del BORSCHT son:

Battery Hace referencia al voltaje de alimentación de -48V DC entre los dos conductores que llegan al terminal, para transmitir la voz y generar la corriente de señalización.

Overvoltage Protection La planta externa aérea se expone a sobrecorrientes por lo que esta función hace referencia a la protección

Ringing Generación de la corriente de timbrado.

Signaling También conocido como supervisión, esta función hace referencia a la detección de la corriente de colgado y descolgado

Coding Hace referencia a la codificación y decodificación. Incluye funciones de conversión A/D y D/A.

Hybrid Circuito híbrido que convierte el ingreso de 2 hilos a 4 hilos.

Test Debe ser posible conectar el lazo local y el terminal al equipo de prueba en la oficina central.

13.7 Señalización telefónica

A manera de recordar, tenemos el conocimiento acerca de los hilos necesarios para las troncales analógicas:

- 2 hilos para transmitir(T_x)
- 2 hilos para recibir(R_x)
- 2 hilos para señalizar

Ejercicio 13.1 En el diseño de una red telefónica se ha establecido que la ruta directa entre las centrales A y B debe ser capaz de mantener en promedio unas 86 llamadas simultáneas.

¿Cuántos pares de hilos de cobre debe tener el cable que se instale en esta ruta?

¿Cuántos de esos pares se van a dedicar a señalización? **Solución:**

Con un promedio de 86 llamadas simultáneas es necesario por cada llamada 3 pares de hilos de cobre, por lo tanto:

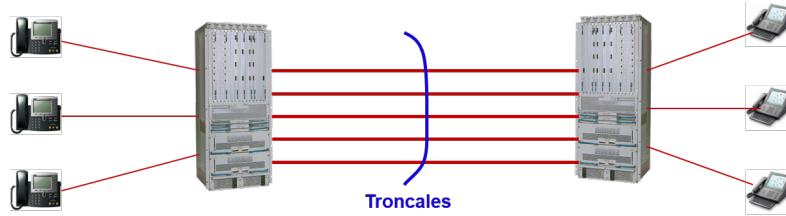


Figure 13.18: Diagrama iconográfico de las troncales

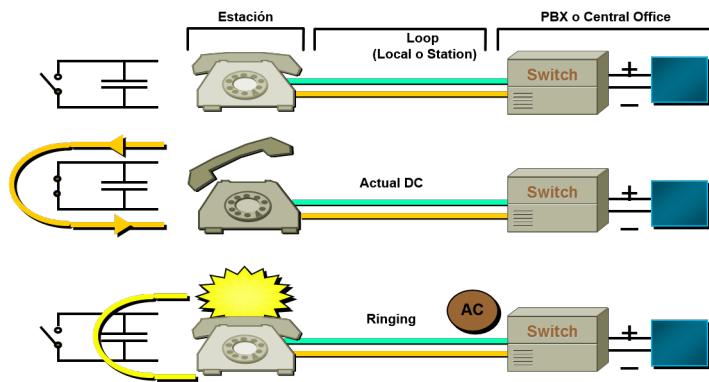


Figure 13.19: Lazo de abonado o bucle de abonado, va desde la central de conmutación hasta el abonado.

$$N \text{ de pares de cobre} = \text{número de llamadas} \times 3$$

$$N = 86 \times 3 = 258 \quad (13.2)$$

Necesitamos 258 pares de cobre.

Cada llamada requiere 3 pares de cobre, es decir, un tercio de los pares totales por llamada (3 pares o 6 cables de cobre). Por lo tanto:

$$T_s = \frac{258}{3} = 86 \quad (13.3)$$

Son 86 pares de cobre dedicados a la señalización. ▀

13.8 Planta interna y externa

Se forma de los siguientes componentes:

13.8.1 Planta Interna

- **Distribuidor general y fosa de cables:** Unen la planta interior con la exterior.
- **Equipos de transmisión:** Se encarga de enviar las señales eléctricas.

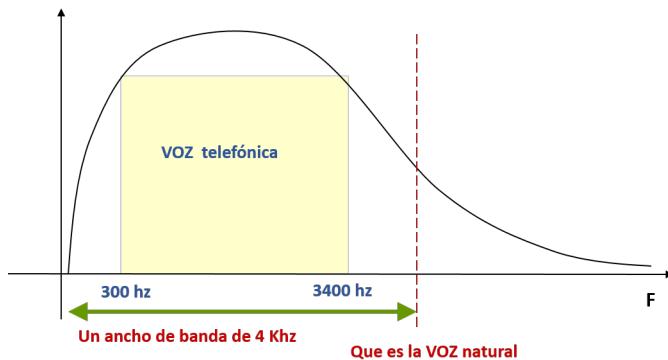


Figure 13.20: Rango de frecuencias

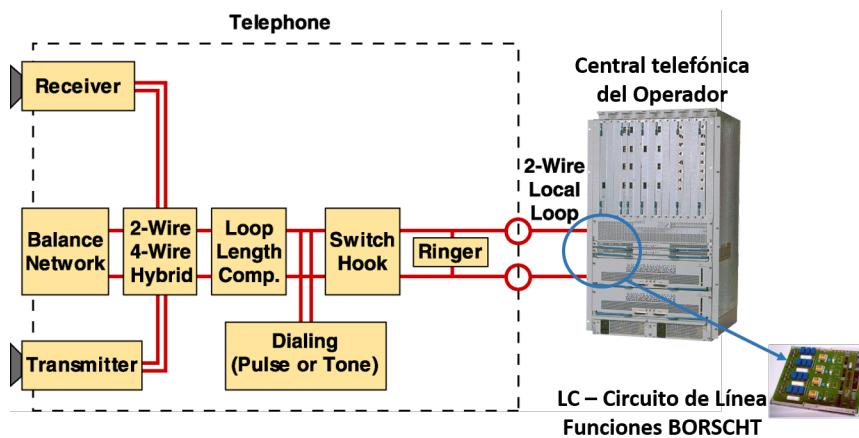


Figure 13.21: Diagrama de bloques de un teléfono analógico

- **Equipos de conmutación:** Sirven para que la señal de los equipos de transmisión llegue a los receptores.
- **Planta de fuerza y banco de baterías:** Proveen la energía necesaria para que los equipos funcionen.

13.8.2 Planta externa

La planta externa está constituida por la canalización de red principal y red secundaria:

- **Canalización.** Es la red subterránea por la que se envían los cables de cobre.
- **Cajas de distribución.** Conectan la red principal con la red secundaria, mediante puentes.
- **Postes.** Sirven para tender los cables de cobre.
- **Cajas terminales.** Son un punto de dispersión de la red. Hasta aquí llegan los cables de cobre.

Tipos de planta externa:

Rígidas Son aquellas en las que todos los conductores se prolongan eléctricamente desde el repartidor principal hasta el punto de distribución (caja terminal) mediante empalmes cerrados. Las redes de este tipo son económicas a condición de que la densidad telefónica sea reducida o de que las líneas de abonado sean muy cortas, pues, de lo contrario, los gastos de instalación y explotación de los puntos de sub repartición (cualquier punto entre la central y el punto de distribución) serían superiores a las economías de pares que se conseguirán con una red flexible. Son adecuadas para las zonas rurales y para las zonas urbanas inmediatamente próximas a la central (zona de servicio directo).

Flexibles Cuando se intercalan entre el repartidor principal y los elementos de distribución puntos de

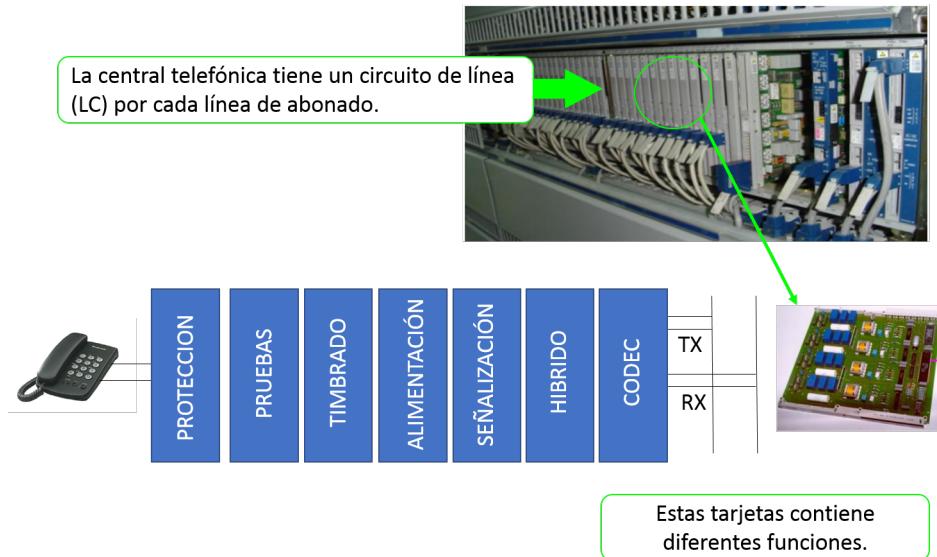


Figure 13.22: Diagrama de bloques de un teléfono analógico

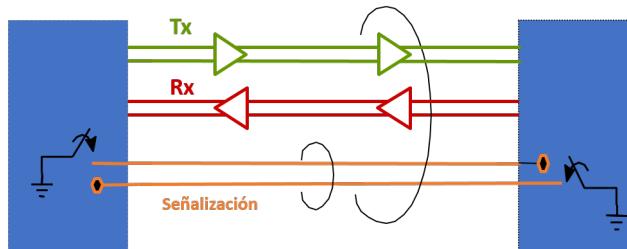


Figure 13.23: Hilos de las troncales analógicas

subrepartición (armarios) se obtiene una estructura denominada red flexible, de esta manera la red de línea de abonado queda dividida en dos secciones distintas: Sección de cables principales y Sección de cable de distribución.

Son adecuadas para las zonas de demanda no definida, zonas urbanas, zonas de largo alcance.

Las redes semirígidas Combinan el uso de empalmes y el uso de armarios para la distribución del cableado de red hacia los abonados.

Es así como la planta externa forma el conjunto de elementos e instalaciones que sirven de vínculo entre el abonado y su correspondiente central, como así también el vínculo entre dos centrales.

Elementos de la planta externa

MDF Es el elemento principal de distribución de líneas, y que se encuentra ubicado en el edificio de la central, se conectan los cables de enlace, de red directa y los cables alimentadores. Los blocks de conexión de líneas, son de 100 pares y se instalan en forma vertical para los cables de planta externa y horizontal para los cables de planta interna

Armarios de distribución Elemento subrepartidor de líneas, que por medio de puentes, permite conectar un par primario con cualquier par secundario. Puente: Par de conductores (24 AWG), que se usa en los MDF y armarios, como medio de conexión entre los diferentes blocks. Las capacidades se obtienen sumando número de pares primarios más los pares secundarios.

Canalización Es el sistema construido en forma subterránea, para permitir la instalación, retiro, protección y mantenimiento de los cables; en una red de servicios de telecomunicaciones, a partir del túnel de cables. Las canalizaciones están conformadas por **Cámaras** que son pozos subterráneos destinados a alojar los empalmes y facilitar, la instalación y cambio de dirección de los cables; y **Ducterias** que son ductos que conecta cámaras entre si, una cámara con el

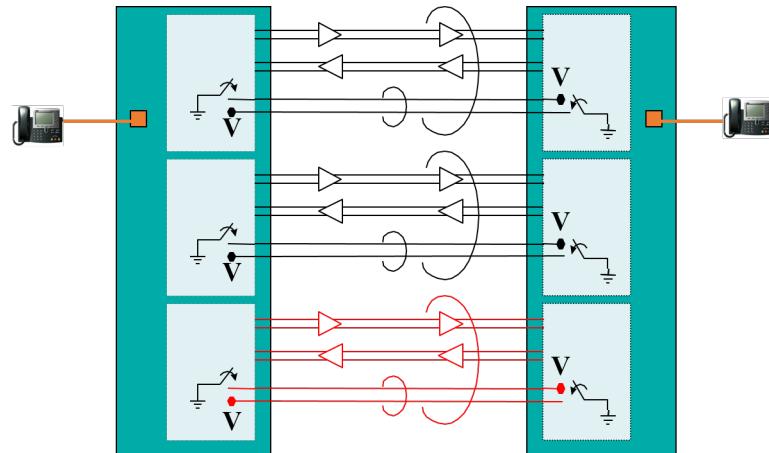


Figure 13.24: Hilos en la troncal

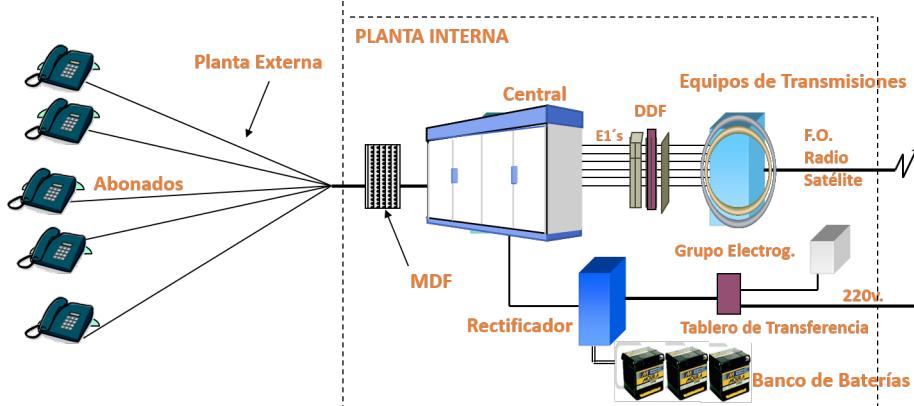


Figure 13.25: Diagrama planta interna

túnel de cables, una cámara a subida a poste, fachada , edificios o base de un armario.

Postes Elemento de soporte que se utiliza para la instalación de los cables de redes de telecomunicaciones en forma aérea. Se tiene dos tipos: Los de **madera** de 7mt y de **concreto** de 9,11 y 15m.

Características:

1. Poseen 3 niveles de líneas de cables
2. Los postes de concreto se usan en redes urbanas de gran tamaño y de madera para zonas rurales.
3. La separación entre poste y poste es variable de 30 a 70 mts.
4. Los postes pueden tener 2 líneas de cables por nivel.



Figure 13.26: Main Distribution Frame:Une la planta externa con la interna



Figure 13.27: Fosa de cables:Recibe los cables por galerías subterráneas



Figure 13.28: Equipos de transmisión:Pueden ser de cobre o fibra óptica



Figure 13.29: Commutadores:Establecen la llamada y determinan la ruta.

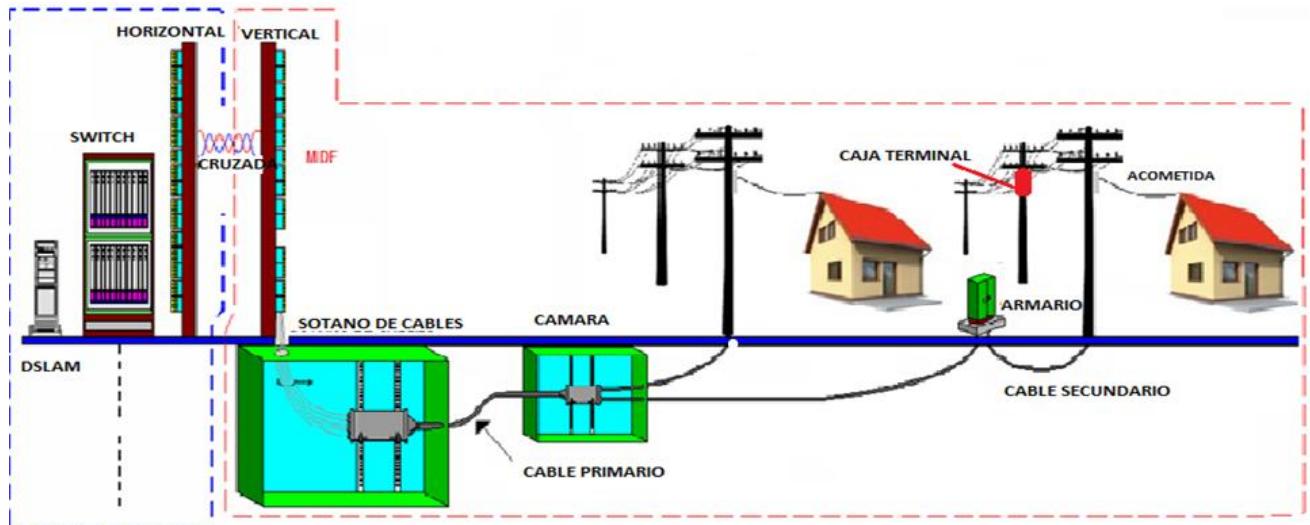


Figure 13.30: Planta externa

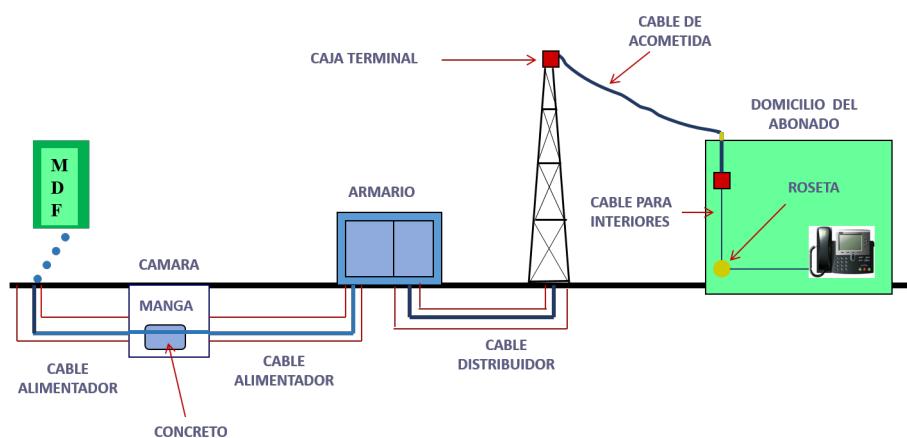


Figure 13.31: Planta externa diagrama

14. Herramientas para el análisis telefónico

14.1 Tráfico Telefónico

En el diseño de sistemas telefónicos un factor muy importante es la ingeniería de tráfico ya que juega un papel muy importante en buscar la solución optima en función del costo y la eficiencia del diseño de la red. El tráfico telefónico esta ligado al concepto de ocupación, por lo que decimos que un circuito esta cursando tráfico cuando esta ocupado. El tráfico telefónico es medible, en términos de tiempo, que se entiende en tiempo de ocupación. Este depende del número de llamadas y de la duración de las mismas. Esta de más decir que el tráfico es aleatorio, por lo que naturaleza estadística.

14.1.1 Variaciones

Existen variaciones que depende del tiempo en el que se muestrea, por ejemplo tenemos las variaciones diarias, semanales, anuales y accidentales

14.1.1.1 Variaciones Diarias

A nivel diario, se puede medir a lo largo de un día el comportamiento de un abonado, es decir, posee ciertos hábitos que caracterizan un día: hora de almuerzo, break del trabajo, salida, hora de trabajo, etc.

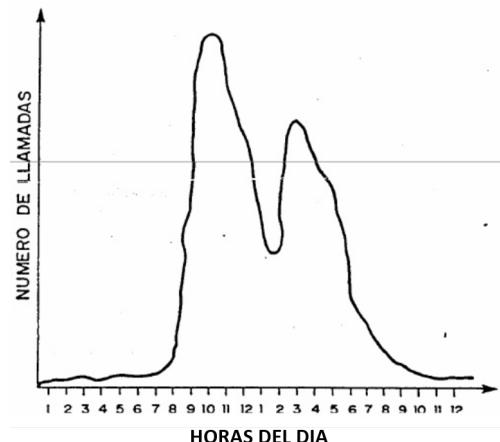


Figure 14.1: Variación diaria

14.1.1.2 Variación Semanal

Con el mismo usuario o con un grupo más grande se puede caracterizar una semana, los hábitos al igual que el diario son los actores de todo: días de trabajo, días de relajo, viernes por la noche, domingo de descanso, etc.

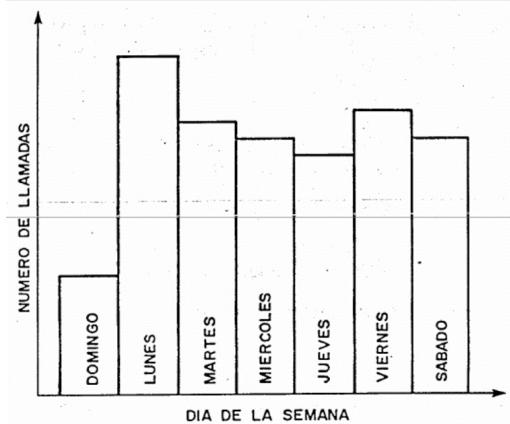


Figure 14.2: Variación semanal

14.1.1.3 Variación anual

La anual se caracteriza o se ve afectada por épocas o estaciones; por ejemplo verano es caracterizado por las vacaciones, por lo que las llamadas crecen a comparación de actividades normales(dependiendo de la actividad).

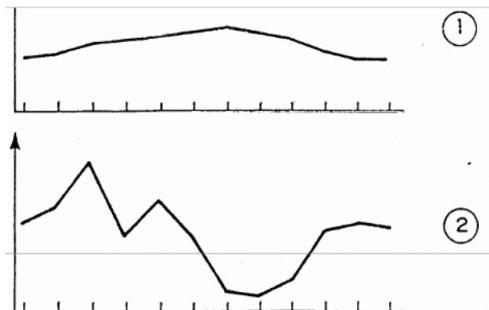


Figure 14.3: a)Variación anual en verano b)Variación anual en actividad industrial

14.1.1.4 Variación accidental

Los eventos aleatorios son eventos que afectarán nuestra variación, hay unos que pueden llamarse aleatorios que se pueden prever pero no del todo(elecciones políticas, conciertos, festivales, etc) y otros totalmente impensables(crisis políticas en un país, guerras, pandemias, etc)

14.2 Medidas de tráfico telefónico

14.2.0.1 Volumen del tráfico(V_t)

El tráfico telefónico está ligado al concepto de ocupación y puede medirse en términos de tiempo. Por lo que se puede concluir que se refiere al tiempo de ocupación de un circuito telefónico. Es decir, si un teléfono está ocupado durante una hora al día, el volumen de tráfico cursado durante dicho día por el teléfono es de una hora, y si un teléfono está ocupado durante una hora a la semana, el

volumen de tráfico cursado durante la semana por el teléfono es también de una hora. Este concepto se puede expandir a un conjunto de circuitos y no solo restringido a un solo sistema.

Definición 14.1 — Volumen del tráfico. Dado un cierto número de llamadas(valor adimensional) y una duración media de cada llamada(horas, minutos o segundos); es posible calcular el **volumen del tráfico** de la siguiente manera:

$$V_t = n \times d \quad (14.1)$$

Donde:

n:número de llamadas.

d:duración promedio de cada llamada.

Ejercicio 14.1 Una central telefónica tiene 3 troncales.

1. Ha cursado 5 llamadas cada una con un promedio de duración de 10 min.
2. Ha cursado 8 llamadas cada una con un promedio de duración de 5 min.
3. Ha cursado 3 llamadas cada una con un promedio de duración de 7min.

Calcular los volúmenes de tráfico individuales y total de toda la troncal.

Solución

Nos pide calcular volumen, por lo que tenemos que extraer tan solo dos datos para cada uno: número de llamadas y su duración promedio y aplicar la ecuación 14.1

1. Troncal 1: 5 llamadas con duración de 10 min:

$$V_t = 5\text{llamadas} \times 10\text{min}$$

$$V_t = 50\text{min}$$

2. Troncal 2: 8 llamadas con duración de 5 min:

$$V_t = 8\text{llamadas} \times 5\text{min}$$

$$V_t = 40\text{min}$$

3. Troncal 3: 3 llamadas con duración de 7 min:

$$V_t = 3\text{llamadas} \times 7\text{min}$$

$$V_t = 21\text{min}$$

4. Troncal total: tan solo sumamos los volúmenes individuales:

$$V_t = 50\text{min} + 40\text{min} + 21\text{min}$$

$$V_t = 111\text{min}$$

Algunas unidades para medir el volumen han sido creadas para su mejor compresión:

- **Llamada reducida(LLR)** es un tiempo de ocupación de 2 min.

$$1LLR = 2\text{min} = 120\text{s}$$

- **Centum Call Seconds(CCS)** es un tiempo de ocupación de 100s.

$$1CCS = 100\text{s}$$

- La relación entre ellos está dada por

$$1LLR = 1.2CCS \rightarrow 1CCS = \frac{1}{1.2LLR} = 0.833LLR$$

14.2.0.2 Tiempo de observación(T_o)

El volumen de tráfico, por sí solo, no es una magnitud capaz de dar idea del grado de ocupación. Para tener una idea completa del grado de ocupación de un circuito o grupo de circuitos, necesitamos además saber el periodo durante el cual se ha observado el circuito o grupo de circuitos. A este periodo de tiempo se le denomina tiempo de observación, o tiempo de referencia

14.2.0.3 Intensidad de tráfico(I_t)

La intensidad de tráfico es una medida más completa por lo que no solo toma en cuenta el volumen de tráfico sino también el tiempo de observación.

Definición 14.2 — Intensidad de tráfico. La intensidad de tráfico si nos da una medida del grado de ocupación. La intensidad de tráfico, se expresa en ERLANGS. Esta definida como:

$$I_t = \frac{V_t}{T_o} \quad (14.2)$$

Donde:

V_t :volumen de tráfico.

T_o :Tiempo de observación.

 Para que la intensidad pueda ser medida en Erlangs es esencial que tanto el volumen de tráfico y tiempo de observación estén en horas.

14.2.0.4 Erlang

El Erlang es independiente del tiempo de observación , por ejemplo, si se tiene un canal de datos que cursa un tráfico de 1 hora en un periodo de 1 hora se dice que la intensidad de tráfico es 1 Erlang, ahora si se tiene otro canal que cursa un tráfico de 1 día en un periodo de 1 día también se dirá que hay una intensidad de tráfico de 1 Erlang. Por lo general se toma 1 hora de observación, por ejemplo, si una oficina tiene dos operadores de teléfonos y ambos están ocupados durante todo el tiempo, esto representa 2 Erlangs de tráfico, o si un canal de radio está ocupado durante treinta minutos en una hora se dice que soporta un tráfico de 0.5 Erlangs. De forma alternativa, un Erlang puede ser considerado como "multiplicador de utilización" por unidad de tiempo, así un uso del 100% corresponde a 1 Erlang, una utilización de 200% son 2 Erlangs, y así sucesivamente. Por ejemplo, si el uso total del móvil en un área por hora es de 180 minutos, esto representa $180/60 = 3$ Erlangs.

Ejercicio 14.2 5 circuitos de una central de conmutación, cursan cada uno de ellos 32 llamadas de una duración media de 2 minutos cada una.

1. Calcular el volumen de tráfico en minutos.
2. Calcular el volumen de tráfico en LLR.
3. Calcular el volumen de tráfico en CCS.

Solución

1. Para cada circuito se halla el volumen de tráfico, pero tenemos en cuenta que son 5 circuitos, por lo que podemos incluir esta cantidad en la ecuación, es como hallar individualmente cada volumen y luego sumar todos los circuitos:

$$V_t = 5 \times 32 \times 2 = 320\text{min}$$

2. Para transformar en LLR dividimos entre 2, puesto que nuestro volumen está en min, así

que es posible pasarlo a LLR:

$$V_t = \frac{320\text{min}}{2\text{min}} = 120\text{LLR}$$

3. Para pasarlo a CCS tenemos que asegurarnos que están en segundos, de ahí recién podemos hacer la conversión:

$$V_t = 320\text{min} \times \frac{60\text{s}}{1\text{min}} = 19200\text{s}$$

Una vez que están en segundos recien podemos hacer la conversión:

$$V_t = \frac{19200\text{s}}{100\text{s}} = 192\text{CCS}$$

■

Ejercicio 14.3 Calcular la intensidad de tráfico por un aparato telefónico, que cursa 27 llamadas de una duración media de 5 minutos, en un día.

Solución

$$V_t = 27 \times 5 = 135\text{min}$$

Para recalcar, vamos a expresar en Erlangs, así que es necesario que todo este en horas.

$$V_t = \frac{135\text{min}}{60} = 2.25\text{h}$$

Ahora podemos calcular la intensidad de tráfico en Erlangs, es por ello que usamos 1 día=24 horas:

$$I_t = \frac{2.25}{24} = 0.09375\text{ Erlangs} \quad (14.3)$$

■

14.2.0.5 Hora cargada

En la práctica suele tomarse como Tiempo de Observación, la denominada hora cargada (HC); es el período de 60 minutos consecutivos durante los cuales el volumen de tráfico es máximo. Al ser una hora de uso, es común modificar las anteriores medidas(LLR y CCS)para que puedan ser usadas con esta hora.

- **Llamada reducida en la hora cargada(LLR/HC)**es la intensidad de tráfico correspondiente a un volumen de tráfico de una llamada reducida (LLR) cursada por un órgano o grupo de órganos, o por un circuito o grupo de circuitos, durante la hora cargada.
- **CIENTOS DE SEGUNDOS EN LA HORA CARGADA (CCS/HC)**la intensidad de tráfico correspondiente a un volumen de tráfico de 100 segundos (1CCS) cursado por un órgano o grupo de órganos, o por un circuito o grupo de circuitos, durante la hora cargada.
- **Equivalencias:**
 - 1 Erlang=30 LLR/HC=36 CCS/HC
 - 1 LLR/HC = 0.033 ERLANGS = 1.2 CCS/HC
 - 1 CCS/HC = 0.028 ERLANGS = 0.833 LLR/HC

Inclusive hay nuevas unidades como **Segundos de llamada(CS)** y **Minutos de llamada(CM)** que tambien son usados como medida de la intensidad:

$$1\text{Erlang} = 36\text{CCS} = 3600\text{CS} = 60\text{CM}$$

Continuando con la hora cargada, como su nombre lo dice: Es la hora en el que el volumen de tráfico es el máximo: Se elige la hora de mayor tráfico, lo que asegura un suficiente número de

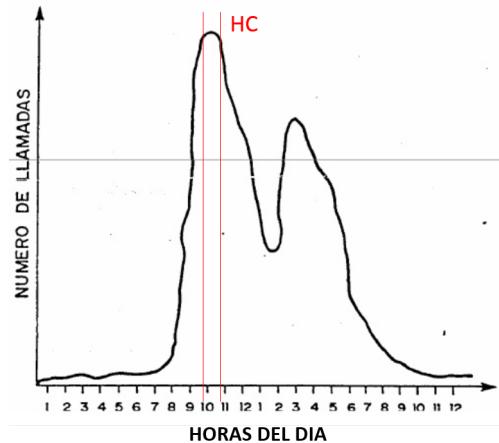


Figure 14.4: Representación de la Hora Cargada

elementos para poder cursar todas las llamadas que se presenten en los restantes períodos de menor carga. No obstante, se toma la intensidad de tráfico media a lo largo de dicha hora carga. Esto quiere decir que habrá en este período momentos de intensidad mayor, durante los cuales se rechazarán las llamadas que no puedan ser atendidas a causa de la saturación. En general, cada día del año tiene su HC y pueden presentarse variaciones de unos días a otros, tanto en la situación de dicha HC como en la intensidad de tráfico que se curse en ella.

Para fines de dimensionamiento de grupos de circuitos, conviene tomar una hora cargada de referencia, de forma que la intensidad de tráfico durante ésta sea el promedio de la que generalmente se cursa en las horas cargadas de la época de mayor carga. Mas no deben considerarse HC anormales(eventos aleatorios únicos) como una crisis, un evento único, etc.

En la práctica, se simplificará la determinación si se consideran períodos completos de 15 minutos y se hace una lectura global de cada período; la HC que se determine de esta forma será la correspondiente a los cuatro períodos consecutivos de 15 minutos que dan una suma mayor.

14.3 Tipos de tráfico

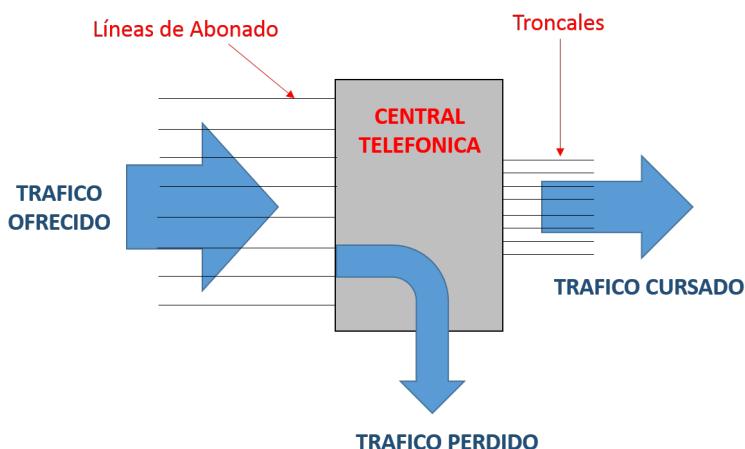


Figure 14.5: Diagrama de tipos de tráfico

Existen varios tipos de tráfico:

1. **Tráfico ofrecido:** es el tráfico que los abonados intentan cursar y lo ofrecen al conjunto de circuitos de la central para ser cursados. En otras palabras, es el total de llamadas que ingresan a un circuito.
2. **Tráfico cursado:** Es el tráfico que logró alcanzar un circuito, en otras palabras es el tráfico atendido por los grupos de circuitos cuando se han establecido las llamadas.
3. **Tráfico desbordamiento:** es el tráfico que no pudo ser cursado por los grupos de circuitos directos de la central y puede ser entregado a otro grupo de circuitos de desborde. Este tráfico aún está en el circuito y no son rechazados, sino que están a la espera que uno circuito se desocupe para poder ingresar en su lugar.
4. **Tráfico Perdido:** es el tráfico de desbordamiento que no pudo ser cursado. El tráfico perdido es la diferencia entre el tráfico ofrecido y el tráfico cursado y se puede reducir aumentando la capacidad del sistema. Ahora sí, este es el tráfico que ha sido rechazado y fue perdido(colgado). El tráfico perdido es el tráfico que no pudo ser cursado al encontrar el sistema en congestión. De la imagen 14.5 se puede deducir que:

$$\text{Tráfico Ofrecido} - \text{Tráfico Perdido} = \text{Tráfico Cursado} \quad (14.4)$$

El tráfico ofrecido es un concepto teórico y se utiliza sólo para propósitos de planificación teórica. Sólo el tráfico cursado es medida en la práctica y por supuesto depende de la capacidad de la red o sistema.

Desde el punto de vista económico, la capacidad de la red siempre será menor que el tráfico ofrecido, esto se debe al carácter aleatorio de las comunicaciones lo que produce que en condiciones normales de funcionamiento sólo un porcentaje de los usuarios de la red solicitan recursos a la misma.

14.4 Accesibilidad

El rendimiento de un grupo de circuitos de salida, queda determinado esencialmente por la cantidad de líneas de salida del grupo que pueda alcanzarse.

Es decir cuantas líneas de salida pueden alcanzarse desde una línea de entrada. Esa cantidad se llama **accesibilidad**.

14.4.0.1 Accesibilidad completa

Cuando las líneas de entrada pueden acceder a cualquiera de las líneas de salida disponibles:

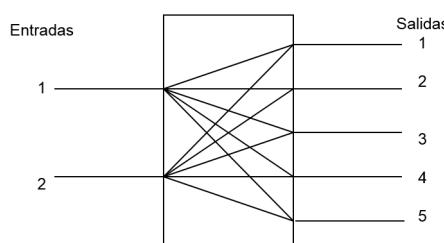


Figure 14.6: Accesibilidad completa de grado 5

14.4.0.2 Accesibilidad Limitada

Cuando el numero de líneas de salida que pueden ser alcanzadas por una línea de entrada es inferior al total, es decir, se restringen las salidas para una o más entradas, en la figura 14.7 vemos que las salidas K para el usuario de la linea 1 y 2 es K=3 aunque el sistema tiene un grado de accesibilidad 6(porque tiene 6 salidas). Es por ello que llegamos a una generalidad:

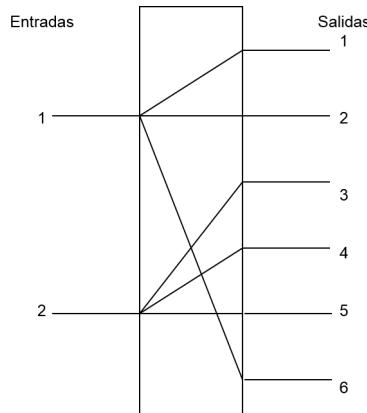


Figure 14.7: Accesibilidad limitada de grado 6

Definición 14.3 La accesibilidad(salidas) de cada usuario individual debe ser menor o igual a la accesibilidad(salidas) total.

$$K_u \leq N \quad (14.5)$$

Donde:

K_u =número de salidas del u -ésimo usuario.

N =Salidas(accesibilidad) total.

14.4.0.3 Sistemas de pérdida

En los sistemas de pérdidas el abonado que solicita una comunicación y encuentra congestión recibe el tono de ocupado que lo obliga a cancelar o "perder" su comunicación para repetir posteriormente.

14.4.0.4 Sistema a Espera

En el sistema de espera, si el abonado trata de establecer una comunicación no existiendo enlaces libres, no recibe el tono de ocupado en forma inmediata sino que se le permite esperar hasta que surjan las disponibilidades necesarias, vale decir que el intento se almacena sin necesidad de repetir la llamada.

14.5 Grade of service(GoS)

Nos da una idea de la "calidad" que reciben nuestros usuarios.

En sistemas con pérdida, se define como la probabilidad de pérdida (o probabilidad de congestión). Coincide con la probabilidad de que un usuario, al realizar una llamada, se encuentre con el sistema sin recursos.

En sistemas de demora se suele relacionar con la probabilidad de esperar para disponer de un recurso.

También se puede definir como el tiempo medio de espera antes de obtener un recurso para cursar la llamada.

En un escenario real sin bloqueo en una central, es necesario proporcionar tantas líneas como abonados haya, esta opción es la mejor pero no es económico debido a que no siempre se estarán usando el 100% de las redes, así que se pone una cantidad ideal(después de un estudio del sistema) y barata al mismo tiempo. Por lo tanto, algunas llamadas tienen que ser rechazadas y reintentadas cuando las líneas están siendo utilizadas por otros abonados.

Definición 14.4 El grado de servicio se refiere a la proporción de llamadas fallidas en relación con el número total de llamadas.

También se define como la proporción de tráfico perdido respecto al tráfico ofrecido.

$$GoS = \frac{T_p}{T_o} = \frac{C_p}{C_t} \quad (14.6)$$

Donde:

T_p :Tráfico perdido

T_o :Tráfico ofrecido

C_p :Llamadas perdidas

C_t :Llamadas totales

R Es obvio que el número de llamadas perdidas debe ser el menor número posible mientras que el número total de llamadas tiene que ser el máximo posible, es así que llegamos a la conclusión que un número óptimo de GoS tiene que ser el menor posible como 0.002, donde podemos inferir que por cada 1000 llamadas podemos perder 2.

R Para que GoS será cero se requiere que la cantidad de abonados sea igual a la cantidad de servidores. Es preciso señalar que el GoS estará entre **0 y 1 por ser una probabilidad**.

El GoS se aplica a una conexión de terminal a terminal. Pero normalmente un centro de conmutación se divide en los siguientes pares de componentes para poder analizarlos:

- Una llamada interna (abonado a central de conmutación).
- Una llamada saliente a la red troncal (central de conmutación a troncal).
- La red troncal (troncal a troncal).
- Una llamada de terminación (central de conmutación a abonado).

Ver ejercicios:¹

14.6 Diseño de redes

Para el encaminamiento de redes se tiene dos posibles escenarios: linea directa o linea alternativa. La red mostrada en la figura 14.8 es un sistema de ejemplo debido a su simplicidad; en la vida real,

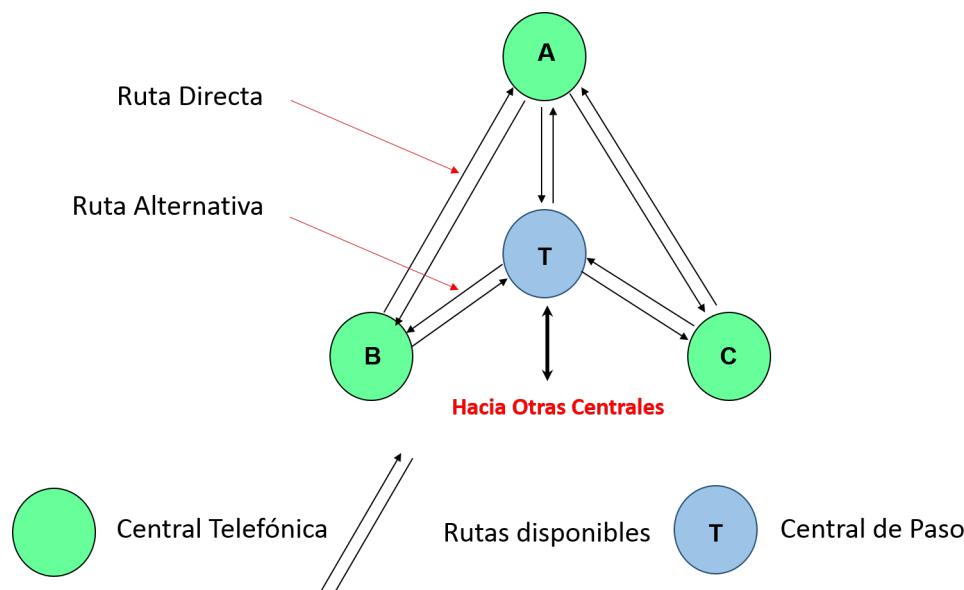


Figure 14.8: Redes de encaminamiento

¹Ver ejercicios resueltos 16.8 y 16.11

redes gigantes serían muy laboriosas de graficar, es por ello que diagramas como la imagen 14.8 se expresa de otra manera. A continuación se detalla la forma equivalente de la figura 14.8. Para ello es necesario recordar un poco de la figura 14.5.

Imaginemos que nos encontramos en la estructura de la figura 14.9, tenemos un "circuito de agua", donde el propósito es llegar de A hacia B. El agua(*tráfico ofrecido*) será vertida por la entrada de A, el agua avanzará y se encontrará con la primera bifurcación(*Troncales directas A-B*): una parte del agua caerá y seguirá haciendo todo el recorrido(*tráfico de desbordamiento*) mientras que la otra llegará de frente a B(*tráfico cursado*), hasta aquí decimos que no nos importa el agua que logró alcanzar el atajo, pues esta agua ya logró el cometido: llegar de A a B, sigamos analizando el flujo de agua que no logró alcanzar este atajo.

Agua que no logró alcanzar este atajo de A a B aún tiene una oportunidad: llegar a otro atajo(*troncales hacia B*). Es este punto tenemos el mismo escenario anterior; no todos van a lograr llegar a B, habrá un flujo que logre pasar este atajo(*Tráfico cursado*) y otro simplemente será desecharido(*tráfico perdido*).

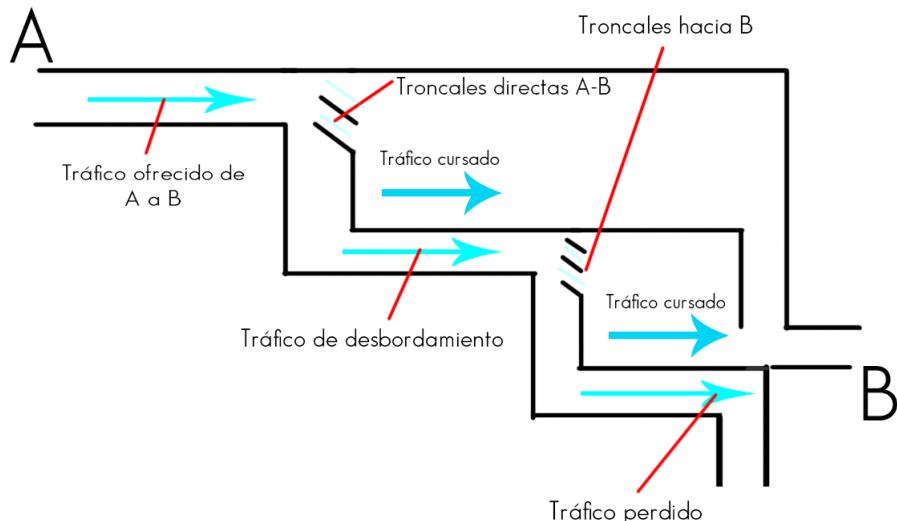


Figure 14.9: Analogía gráfica equivalente

Aprenderemos la ilustración que ilustra el encaminamiento de tráfico desde una determinada central frente las demás, como flechas y troncales salientes de la misma(figura 14.10a).

Viendo la figura 14.10b vemos que consta(generalmente) de 2 niveles y 3 rutas de intensidad de tráfico, entonces podemos generalizar:

- Ae** Tráfico ofrecido
- C** Troncales directas de A-B
- m** Tráfico desbordamiento
- S** Troncales hacia B
- A'** Tráfico perdido

Sabiendo esto y usando el ejemplo de la figura 14.8 podemos expresar todas las maneras posibles de ruteo, en otras palabras, las diferentes formas en las que A,C y T pueden llegar a B; B, T y A pueden llegar a C y B, C y T pueden llegar a A.

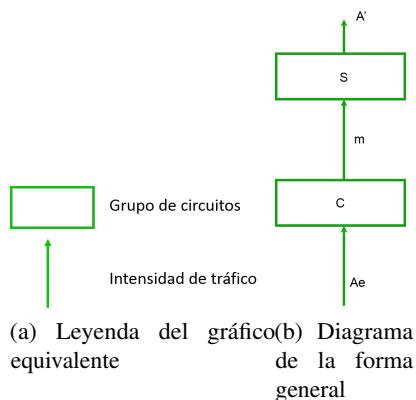


Figure 14.10: Generalidades

Ejercicio 14.4 Hallar la ruta de encaminamiento para A de la figura 14.8:

Solución

Viendo la figura tenemos 3 orígenes de tráfico: B, C y T. Por lo tanto habrá 3 "fuentes" de tráfico que irán hacia A.

Para B-A:

Vemos una ruta directa B-A, como son centrales telefónicas asumimos que, entre las dos existen una troncal directa, por que existe una ruta directa. Si hay una ruta directa se aplica la ruta "común" de la figura 14.10b entonces de A a B decimos que existe una ruta donde el tráfico pasará por las troncales directas A-B y luego pasará por cualquier troncal hacia B.

Para C-A

Para este caso vemos que es lo mismo que el caso B-A, habrá una linea ruta directa que empieza de C para ir a A. Como es directa aplicamos el diagrama de la figura 14.10b.

Con eso tenemos dos rutas cubiertas.

Para T-A

Sabemos por la figura 14.10b que nuestro tráfico va primero por la central directa A-B(C), y luego va por la central hacia B(S), es así que de la figura del ejercicio T no es una central, al contrario, es una **central de paso**, es por eso que ahora no vamos a representar el camino T-A como lo solíamos hacer usando de referencia el esquema de 14.10b, sino que haremos una pequeña variación. Como esta es la central alternativa, ignoraremos totalmente las troncales directas A-B, lo hacemos por que esta troncal ya hemos analizado debido a que en este ejemplo ya hay una ruta directa B-A. Entonces solo nos quedaría: el tráfico de desbordamiento, troncales hacia A(no confundir con troncales directas B-A) y el tráfico perdido.

Tenemos 3 diagramas por separado, pero algo en común de los 3 son las troncales hacia A, podemos decir, de manera coloquial que, vamos a factorizar estas troncales para unir los 3 diagramas. El resultado final sería la figura 14.11

Si quieres practicar, puedes hacerlo con las otras centrales(B, C y T)

14.7 Encaminamiento de tráfico

Cuando nuestro tráfico telefónico va hacia una troncal y luego hacia nuestro destino es probable que no exista una ruta directa, ya sea por varios factores: que la troncal directa este saturada, que no tenga mucha capacidad, que haya habido un problema, etc. Entonces, no podemos utilizar esta "vía directa", por ende pasamos de ser tráfico ofrecido a tráfico de desbordamiento, y ¿Cómo se desborda un río?: el agua buscará una ruta alternativa para que pueda volver a su cauce, igualmente en nuestro caso: nuestro tráfico de desbordamiento tendrá que buscar más rutas para poder llegar y

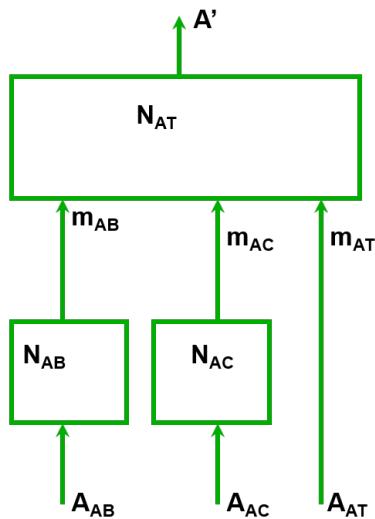


Figure 14.11: Ejemplo para A

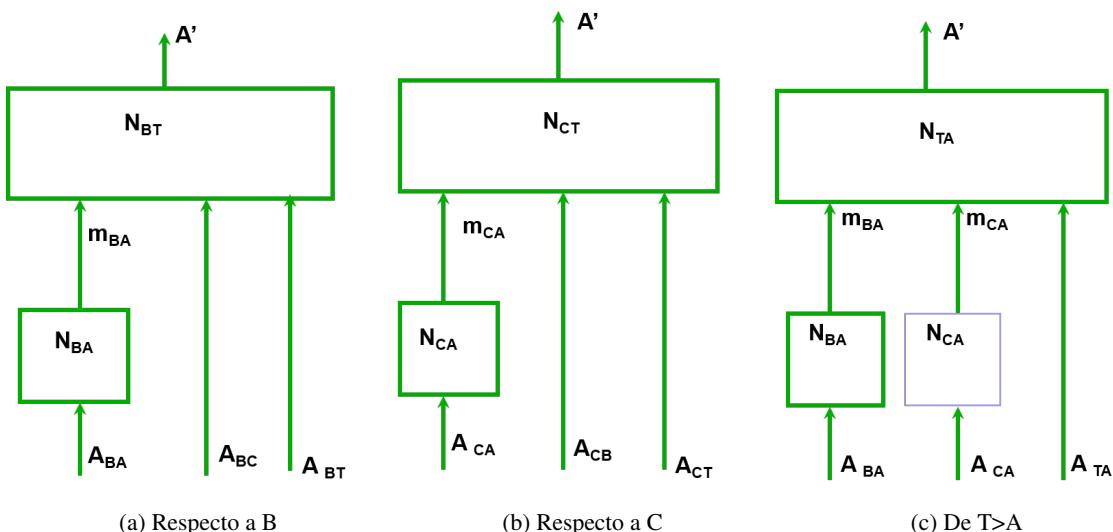


Figure 14.12: Gráficos de práctica resueltos

tratar en lo posible de no perder esta llamada.

Pero no podemos redirigir el tráfico como sea, existen ciertos criterios que se definen para poder lograr un encaminamiento óptimo, puede ser un poco difícil de entender pero trataré de explicarlo detalladamente:

Criterios de encaminamiento:

Estos son los 3 criterios que usaremos, léelos lentamente y trata de entender:

- Criterio 1:** Si entre la central donde se decide el encaminamiento y la central de destino final de la llamada existe una sección directa, se encaminara el tráfico por esta como primera opción.

Aquellas llamadas que no puedan ser cursadas por esta sección directa (TRAFICO DE DESBORDAMIENTO), lo harán por sección final correspondiente.

- Criterio 2:** Si existe sección directa entre la central donde se decide el encaminamiento y una central que sea, por red jerárquica, de rango superior a la central de destino final de la llamada, se cursara por esta, y el tráfico de desbordamiento se cursara por la sección final

correspondiente.

Si existen varias secciones directas que cumplan esta condición, se hará por la mas corta.

El trafico que una sección directa no pueda cursar, nunca se cursara por otra sección directa, sino por sección final.

3. **Criterio 3:** Se encamina el trafico como única opción por la sección final correspondiente.

El trafico que dicha sección final no pueda cursar, no podrá encaminarse y constituirá lo que se denomina TRAFICO PERDIDO.

Estos 3 criterios jugarán bajos las siguientes reglas:

1. El encaminamiento se hace desde el abonado A al abonado B, haciendo los tránsitos necesarios en centrales intermedias.
2. Cada central toma **uno y solo uno** de los criterios: si no puede tomar el primer criterio tomará el segundo, si no puede con el segundo tomará el tercero.
3. Cuando se aplique el primer o segundo criterio, tendrá que estudiarse por separado cada uno de los caminos que se obtienen como opción.
4. La alternativa a una sección directa **nunca** es otra sección directa.
5. Las centrales que toman decisiones de encaminamiento dependen del origen y destino de la llamada, y de las decisiones de encaminamiento previas.
6. Se tomarán con preferencia las secciones directas por los que los encaminamientos sean más cortos
7. Solo se puede elegir una ruta directa en los casos:
 - Si está conectada directamente a la central de destino.
 - Si la central de destino está conectada a un nodo en jerarquía superior por una final.
 - No se puede cursar dos secciones directas para llegar a un destino, solo se toma una por recorrido.
8. Si un nodo tiene varias opciones de rutas finales se preferir la de desbordamiento.

Lo sé, es mucha teoría pero no se entiende. Primero antes de hacer un ejercicio tenemos que tener en cuenta ¿Cuál es la jerarquía de centrales(figura 14.13)?

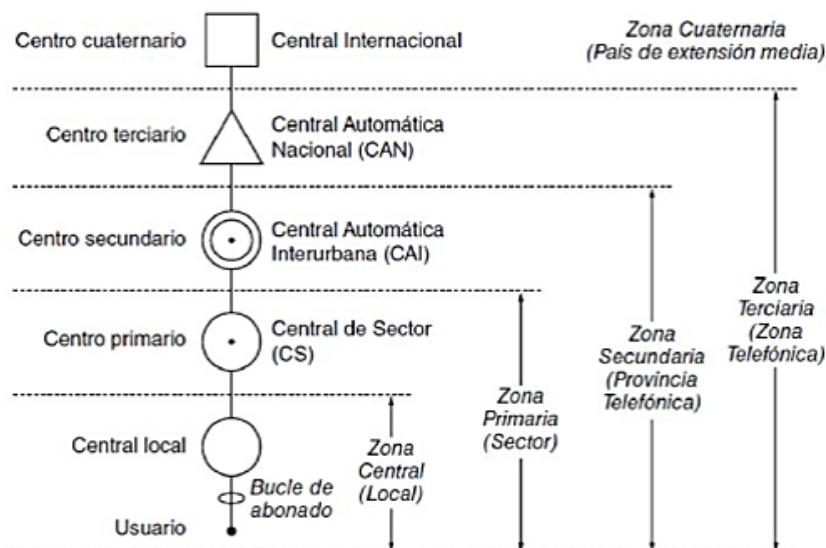


Figure 14.13: Jerarquía de centrales

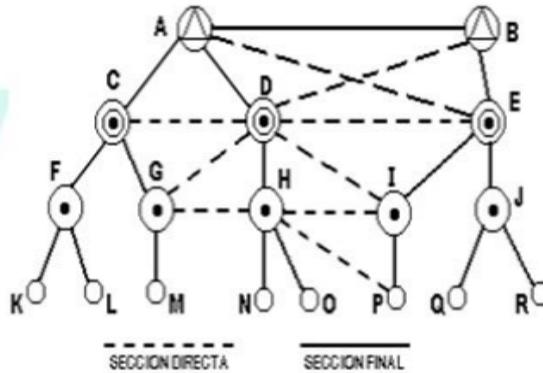


Figure 14.14: Encaminamiento de ejemplo

Ejercicio 14.5 Dada la figura 14.14, encaminar una llamada desde N hasta P de la red.

Solución:

Primera opción: Felizmente podemos usar el primer criterio, tenemos todo para ello: N es usuario, como único camino tenemos la sección final hacia H(central primaria); que nos dice el primer criterio:...entre la central donde se decide el encaminamiento y la central de destino final de la llamada existe una sección directa, se encaminara el tráfico por esta como primera opción...; nuestra central(la única) es H, la central de destino es P, ¿Existe una sección directa? Sí, entonces nos encaminamos por esa ruta, por lo tanto como primera alternativa tenemos:

$$N > H > P$$

Segunda opción: ¿Qué pasaría si H esté saturada? no podríamos pasar por ahí, nos rechazaría el paso, así que buscamos otra ruta alternativa: Estamos en H, varados, ¿A dónde vamos?, le criterio 1 ya no podemos utilizarlo porque H está "prohibida" para cruzar así que leemos el criterio 2:*Si existe sección directa entre la central donde se decide el encaminamiento(en este caso, estamos en D por que H nos ha encaminado a otra central, ademas tenemos en cuenta la 4ta regla, si o si llegamos a D) y una central que sea, por red jerárquica, de rango superior a la central de destino final de la llamada(en nuestro caso, algo con más rango jerárquico a P es I, y existe la sección directa mencionada el principio), se cursará por esta, y el tráfico de desbordamiento se cursará por la sección final correspondiente(que es la sección directa I-P)..* Así tenemos la segunda opción:

$$N > H > D > I > P$$

Tercera opción: Nos ponemos en el caso que la central D está saturada, nos encaminará a otra de más rango jerárquico, **NO** es posible ir de D a C o de D a E(porque tienen el mismo rango), así que pasamos a A. En A usamos el segundo criterio, ¿por qué? pues el primer criterio no se puede, no existe una sección directa desde A hacia P, recordemos que hemos subido de jerarquía en la *segunda opción*(P tuvo que subir a I **solo** por que tenemos sección final y es prácticamente lo mismo, en otras palabras, llegamos a I y automáticamente llegamos a P por sección final). En A usamos el segundo criterio, lo usamos por que tenemos una **sección directa**, y es de menor rango(A es mayor que E), ademas como nuestra "central final" es I, vemos que entre E e I hay una **sección final**, realmente podemos usar el segundo criterio en todo su esplendor.

$$N > H > D > A > E > I > P$$

R Vemos que A y B están conectados mediante una **sección final**, esto nos quiere decir que pueden ser comutables, en otras palabras, podemos ir de A a E como el tercer caso pero como están unidas por una **recta final**, la tenemos que tener el cuenta.

R No podemos usar D>E por que ya usamos la sección directa D>I, y como dice la regla 4, tenemos prohibido usar esa sección directa

Es así que, por esa aclaración tenemos como resultado final:

$$N > H > D > A > B > E > I > P$$

Esta respuesta se ve graficada en el imagen 14.17. ■

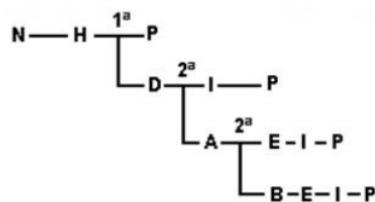


Figure 14.15: Gráfica de la solución

Como siempre, tendrás algunos ejercicios resueltos en el anexo 16.14

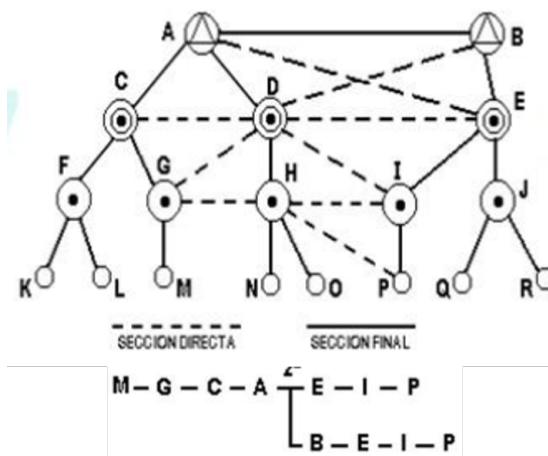


Figure 14.16: Encaminamiento de M a P

14.8 Erlang-B

Analizamos el tráfico no por que sí, sino porque tenemos que diseñar centrales capaces de poder soportar todas(o al menos la mayoría) las llamadas y hacer que la probabilidad de pérdida sea la mínima.

Es así que Erlang(matemático danés) estudió el comportamiento del tráfico telefónico. En 1917 publicó su trabajo. Realizó las siguientes hipótesis:

- Las llamadas se generan aleatoriamente y solamente una cada vez (modelo de Poisson).
- La probabilidad de que en una ruta estén ocupados un determinado número de enlaces no varía en el tiempo. Es decir, existe equilibrio estadístico.
- Las llamadas que llegan a la ruta y no encuentran ningún enlace libre se pierden, sin esperar ningún tiempo y sin ocupar ningún enlace. No se producen reintentos.
- La duración de las llamadas sigue una distribución exponencial negativa. La probabilidad de que en un tiempo t no llegue ninguna llamada es $e^{-\lambda t}$

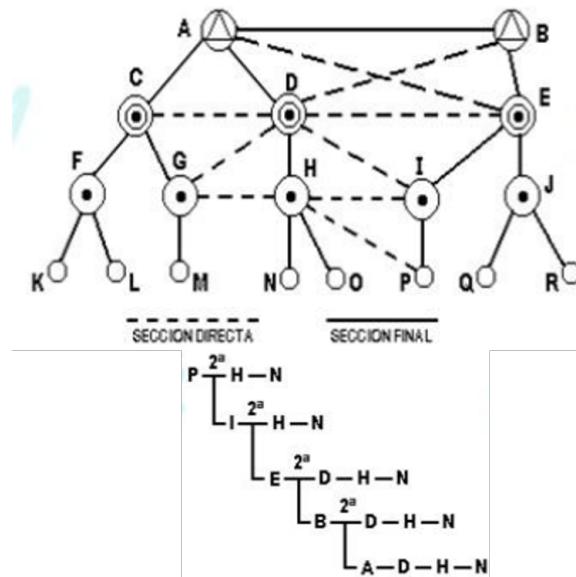


Figure 14.17: Encaminamiento de P a N

- El número de fuentes es infinito. En la práctica, es mucho mayor que el número de enlaces.

Definición 14.5 — Intensidad de tráfico II. Existen dos expresiones que dan origen a la ecuación 14.2, las ecuaciones primitivas son:

$$I_t = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{T} \quad (14.7)$$

$$h = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{c} \quad (14.8)$$

Donde:

I_t : Intensidad de tráfico en Erlangs.

T: Tiempo de observación.

h_i : Duración de cada llamada individual.

n: Número total de llamadas.

h: tiempo medio de la toma de enlace.

Despejando las ecuaciones 14.7 y 14.8(igualando las sumatorias de los numeradores):

$$I_t \times T = n \times h$$

Y despejando la **intensidad de tráfico(I)** obtenemos:

$$I_t = \frac{n \times h}{T}; eq 14.2$$

14.8.1 Erlang-B para un enlace

En Erlang-B para un enlace, se relacionan 3 parámetros:

1. I_T : Intensidad de tráfico.
2. N: Número de enlaces de ruta.
3. B: Probabilidad de que una llamada encuentre todos los enlaces ocupados y no pueda cursarse (**probabilidad de bloqueo**); exacto, es el GoS.

Suponemos una ruta con infinitos enlaces. El procedimiento de toma de enlaces de esta ruta consiste en intentar siempre en primer lugar el primer enlace. Si está ocupado se intenta el segundo, y así sucesivamente hasta encontrar un enlace libre. En otras palabras, la llamada intentará el primer enlace, ¿Está ocupado?, intentará con el segundo enlace, ¿Está ocupado?, intentará el tercero y así sucesivamente. Esto de mas decir que, si una llamada tuvo que irse al segundo enlace(o cualquiera) y llega otra llamada y ve que esta vacío el primer enlace, pues irá por el primer enlace.

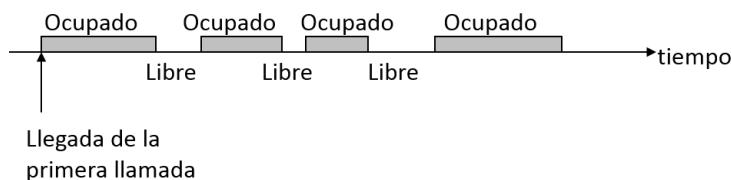


Figure 14.18: Primer enlace: rechazará llamadas mientras este ocupado, caso contrario la aceptará

14.8.1.1 Formula Erlang-B para un enlace

Definición 14.6 — Probabilidad B. Probabilidad de que una llamada encuentre el primer enlace bloqueado es igual a la proporción entre tiempo ocupado y total:

$$B = \frac{I_t}{1 + I_t} \quad (14.9)$$

Donde:

I_t : Intensidad de tráfico B: Probabilidad de que una llamada encuentre el primer enlace bloqueado

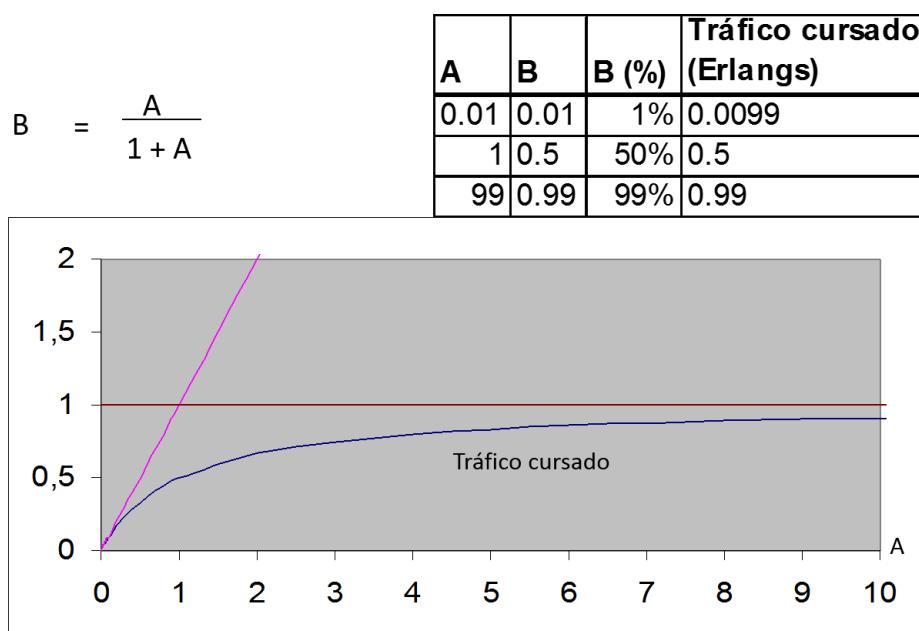


Figure 14.19: Primer enlace: rechazará llamadas mientras este ocupado, caso contrario la aceptará

Algunos puntos a resaltar son:

- Para obtener una probabilidad de bloqueo aceptable (1% o menor) el tráfico ofrecido debe ser mucho menor que la “capacidad aparente” (0.01 Erlangs frente a 1 Erlang).

- Para obtener una ocupación muy alta hay que ofrecer mucho tráfico, el cual se pierde (bloquea) casi todo.
- Por muy poco tráfico que se ofrezca, siempre hay una probabilidad de perdida (bloqueo).
- El máximo tráfico que se puede cursar es 1 Erlang.

14.8.2 Erlang-B para N enlaces

Posee esta forma:

Definición 14.7 — Erlang para N enlaces. Definida por:

$$p(x+1) = \frac{I_t}{x+1} \quad (14.10)$$

La ecuación 14.10 se puede generalizar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p(1) &= \frac{I_t}{1} \times p(0) \\ p(2) &= \frac{I_t}{2} \times p(1) = \frac{I_t}{2} \times \frac{I_t}{1} \times p(0) \\ p(3) &= \frac{I_t}{3} \times p(2) = \frac{I_t}{3} \times \frac{I_t}{2} \times \frac{I_t}{1} \times p(0) \\ p(x) &= \frac{I_t^x}{x!} \times p(0) \end{aligned} \quad (14.11)$$

Donde:

$p(x)$: probabilidad de que haya x enlaces ocupados

I_t : Intensidad de tráfico

A continuación haremos una gráfica para representar la ecuación 14.11, solo para graficar usaremos $I_t=5$ (usaremos x , solo cambiamos de variable) y $p(0)=0.02$:

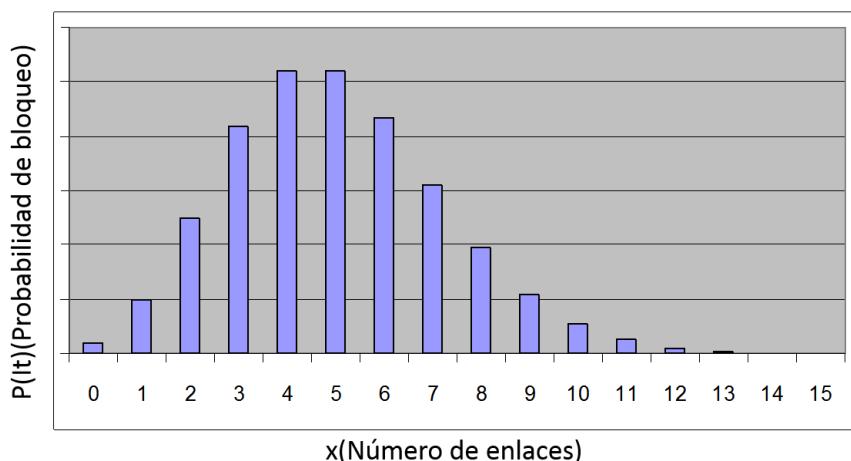


Figure 14.20: Gráfica de la ecuación 14.11 con $I_t(x)=5$ y $p(0)=0.02$

14.8.2.1 Distribución de Poisson

Para calcular la probabilidad de bloqueo se tiene una expresión para cierto enlace x ; a su vez se suscitan dos casos particulares: x es un número cualquiera entero y cuando x es igual al número total de enlaces.

Definición 14.8 — Distribución de Poisson para X específico. La distribución de probabilidad se denomina distribución de Poisson truncada o distribución de pérdidas de Erlang, y se define por:

$$P(x) = \frac{I_t^x}{x! \sum_{k=0}^N \frac{I_t^k}{k!}} \quad (14.12)$$

Se lee: *La probabilidad de que el enlace x este ocupada es*

Donde:

x: troncal escogida.

N: Número de troncales.

I_t : Intensidad de tráfico(Erlangs).

¿Qué pasaría si x=N? La ecuación 14.12 cambiará ligeramente:

Definición 14.9 — Distribución de Poisson cuando X es igual a N. En particular, cuando x = N, la probabilidad de pérdida viene dada por:

$$P(x) = P(N) = B(N, I_t) = \frac{A^N}{N! \sum_{k=0}^N \frac{I_t^k}{k!}} \quad (14.13)$$

Donde:

I_t :Intensidad de tráfico.

N: Número total de troncales.

B: Probabilidad de pérdida o bloqueo(Gos).

La expresión 14.13 iterativa se expresa de forma extendida de la siguiente manera:

$$B(N, I_t) = \frac{I_t^N}{N!(1+A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^N}{N!})} \quad (14.14)$$



Este resultado se conoce como fórmula de Erlang del primer tipo, fórmula de Erlang-B o fórmula de pérdida de Erlang.

La ecuación especifica la probabilidad de bloqueo para un sistema con llegadas aleatorias desde una fuente infinita y distribuciones de tiempo de espera arbitrarias.

La fórmula Erlang B da la congestión temporal del sistema y relaciona la probabilidad de bloqueo con el tráfico ofrecido y el número de líneas troncales.

Los valores de $B(N, I_t)$ obtenidos, se han representado frente a los Erlangs de tráfico A ofrecidos para diferentes valores del número de líneas N. Se introducen dos medidas: Número medio de troncales ocupadas y ocupación de una troncal, ambas ecuaciones se detallan a continuación:

Definición 14.10 — Número medio de troncales ocupadas(carga cursada). El número medio de troncales ocupadas u ocupación se define como la **carga cursada**:

$$I'_t = I_t(1 - B(N, I_t)) \quad (14.15)$$

Así, la carga cursada es la posición de la carga ofrecida que no se pierde del sistema. La carga cursada por línea se conoce como ocupación de la red.

Definición 14.11 — Ocupación de una troncal. La ocupación de la red ρ es una medida del grado de utilización de un grupo de líneas y se denomina a veces **factor de utilización**. Definida

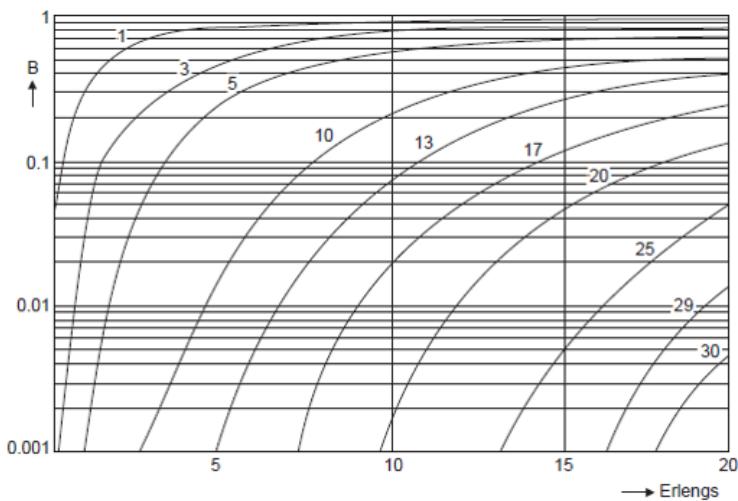


Figure 14.21: Gráfica de B en función de I_t (Erlangs) para distintos N

por:

$$\rho = \frac{I'_t}{N} = \frac{I_t(1 - B(N, I_t))}{N} \quad (14.16)$$

15. Telefonía IP

VoIP es un acrónimo de *Voice Over Internet Protocol* (Voz sobre Protocolo de Internet), o en términos más comunes, *Servicio Telefónico a través de Internet*. Dale una leída a 13.5 antes de seguir.

15.0.1 Redes de computadoras

Las redes de computadoras trabajan con tramas y paquetes, a manera de ejemplificar: Para ello, es

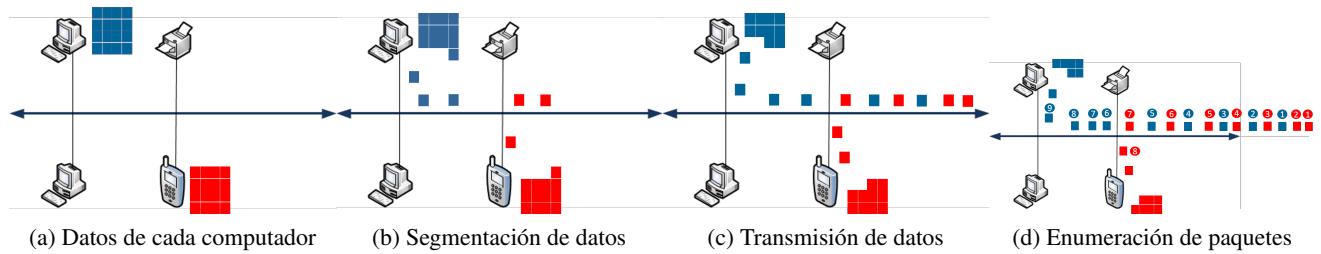


Figure 15.1: Enviar datos de computadoras por el mismo canal

necesario recordar sobre que trata la segmentación y la multiplexación.

Segmentación Dividir la información en piezas mas pequeñas, para hacer mas fácil el manejo de la data dentro de la red. Además es posible aprovechar mejor el ancho de banda.

Multiplexación Al dividir la información en piezas mas pequeñas es posible además enviar diferentes conversaciones a través del mismo medio.

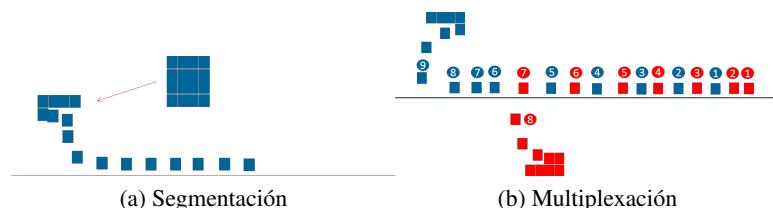


Figure 15.2: Representación alusiva a segmentación y multiplexación

Hablando teóricamente es muy sencillo, pero ¿Cómo nos aseguramos que cada "cuadradito" de color irá a donde debe ir?. Para ello existen protocolos como el **PDU**(Protocol Data Unit).

15.0.2 PDU

Una **Protocol data unit** (PDU) es un término de interconexión de sistema abierto (OSI) utilizado en telecomunicaciones que se refiere a un grupo de información agregada o eliminada por una capa del modelo OSI. Cada capa del modelo utiliza la PDU para comunicarse e intercambiar información, que solo puede ser leída por la capa de pares en el dispositivo receptor y luego se pasa a la siguiente capa superior después de la extracción. En palabras simples, cada capa tiene un "lenguaje distinto", por eso, nuestra cabecera mientras pasa de capa en capa, cada una de estas le añade una pequeña información propia para que cuando llegué a la misma capa pero en otro sistema este lo pueda entender e interpretar. Recordar que la información irá desde la capa de aplicación hasta la capa física en el emisor, mientras que en el receptor irá desde la capa física hasta la capa de aplicación. Es debido a esto que los añadidos a nuestra cabezera a lo largo de las capas en el emisor desaparecerán cuando lleguen al receptor. Si cogemos solo un solo nivel, se puede decir que:

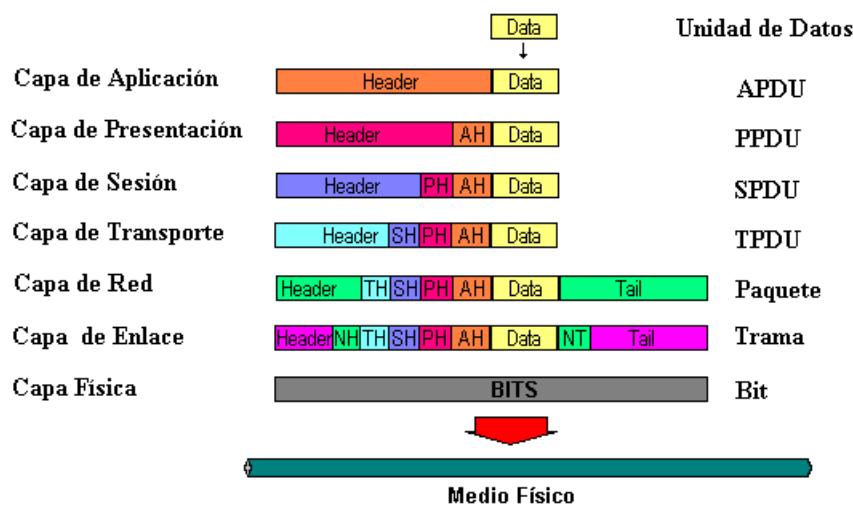


Figure 15.3: PDU

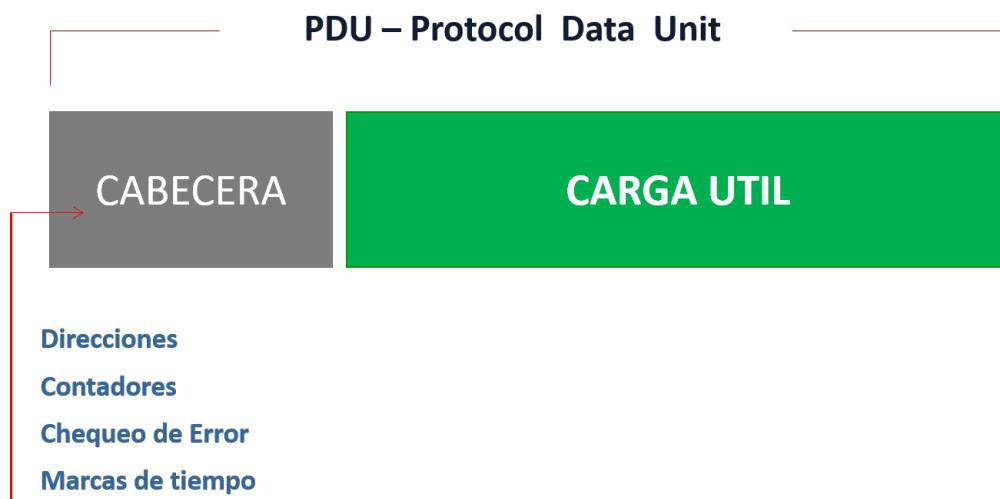


Figure 15.4: PDU añade cabezales en cada capa propia ellos

15.0.3 Arquitectura de red

La arquitectura de una red está dada por las capas y sus funciones, así como los protocolos que las implementan. Dentro de la arquitectura se definen interfaces que actúan entre las capas como medio de comunicación. Las interfaces ponen a disposición operaciones y servicios para las capas superiores. Los protocolos implementan estas operaciones y servicios y escuchan en las interfaces las peticiones por atender. La lista de estos protocolos es conocida como pila de protocolos.

Es común trabajar con capa porque los modelos de capas reducen la complejidad de diseño e implementación de soluciones de comunicación; haciendo que cada capa cumpla funciones definidas, que son ofrecidas como servicios a las capas superiores. Los modelos de capas permiten realizar cambios y mejoras en una capa sin tener que afectar las funciones de las demás. Cada capa encapsula sus funciones lo que mantiene una estructura simple para el resto de capas, que solo conocen los servicios a los que pueden acceder, pero no necesitan saber como son implementados. No se transfieren datos de manera directa desde la capa n de una máquina a la capa n de otra máquina, sino que cada capa pasa los datos y la información de control a la capa inmediatamente inferior, hasta que se alcanza a la capa más baja. Debajo de la capa 1 se encuentra el medio físico a través del cual ocurre la comunicación real. La estructura general de verlas es como se gráfica en la figura Existen dos arquitecturas de redes importantes: el modelo de referencia OSI y el modelo de

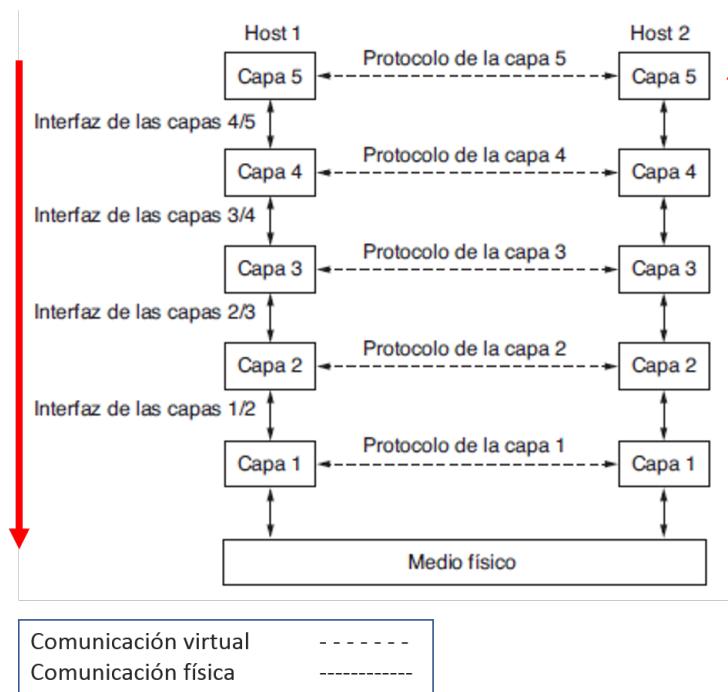


Figure 15.5: Estructura general de capas: A veces pueden tener más o menos capas como el protocolo OSI(7 capas) o TCP/IP(4 capas)

referencia TCP/IP. Aunque ya casi no se utilizan los protocolos asociados con el modelo OSI, el modelo en sí es bastante general y sigue siendo válido; asimismo, las características en cada nivel siguen siendo muy importantes. El modelo TCP/IP tiene las propiedades opuestas: el modelo en sí no se utiliza mucho, pero los protocolos son usados ampliamente.

¿Por qué razones los protocolos del modelo OSI no se adoptaron en forma generalizada?

A principios de 1980 el desarrollo de redes originó desorden en muchos sentidos. Se produjo un enorme crecimiento en la cantidad y tamaño de las redes. A medida que las empresas tomaban conciencia de las ventajas de usar tecnologías de conexión, las redes se agregaban o expandían a casi la misma velocidad con la que se introducían las nuevas tecnologías de red, solo había un

problema: cada empresa creaba una nueva "tecnología" de comunicación entre redes, esto hacia que existiesen muchas variantes por lo que dificultó la comunicación entre varios sistemas. Debido a su problema de incompatibilidad de redes, la Organización Internacional para la Estandarización (ISO) investigó nuevos modelos de conexión como la red de Digital Equipment Corporation (DECnet), la Arquitectura de Sistemas de Red (Systems Network Architecture) y TCP/IP a fin de encontrar un conjunto de reglas aplicables de forma general a todas las redes. Con base en esta investigación, la ISO desarrolló un "modelo de red" que ayuda a los fabricantes a crear redes que sean compatibles con otras redes. Existen diversos protocolos de acuerdo a cómo se espera que sea la comunicación. Este conjunto de protocolos se denomina TCP/IP. TCP/IP se ha convertido en el estándar de-facto para la conexión en red corporativa. Las redes TCP/IP son ampliamente escalables, para lo que TCP/IP puede utilizarse tanto para redes pequeñas como grandes.

¿Cuáles son los problemas que tiene el modelo TCP/IP?

- El modelo no distingue bien entre servicios, interfaces y protocolos, lo cual afecta al diseño de nuevas tecnologías en base a TCP/IP.
- Es más difícil de configurar y mantener a pesar de tener menos capas.
- Es algo más lento en redes con un volumen de tráfico medio bajo, puede ser más rápido en redes con un volumen de tráfico grande donde haya que enrutar un gran número de tramas.
- Peor rendimiento para uso en servidores de fichero e impresión

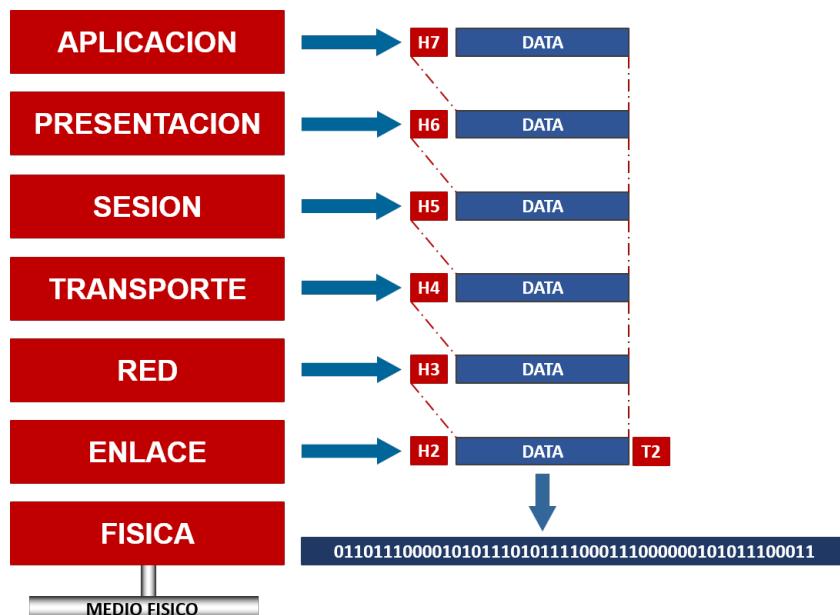


Figure 15.6: La información más la cabecera de cada capa pasa a la siguiente. La información es encapsulada en cada capa hasta salir como una cadena de bits por el medio físico.

15.0.4 Tipos de servicios

15.0.4.1 Orientado a la conexión

Es un servicio que garantiza el control del flujo de mensajes: inicia, mantiene y termina las comunicaciones entre el cliente y el servidor. Está modelado a partir del sistema telefónico. Para hablar con alguien se levanta el auricular, se marca el número, hablamos y después se cuelga. En algunos casos al establecer una conexión, el emisor, el receptor y la subred llevan a cabo una negociación en cuanto a los parámetros que se van a usar, como el tamaño máximo del mensaje, la calidad

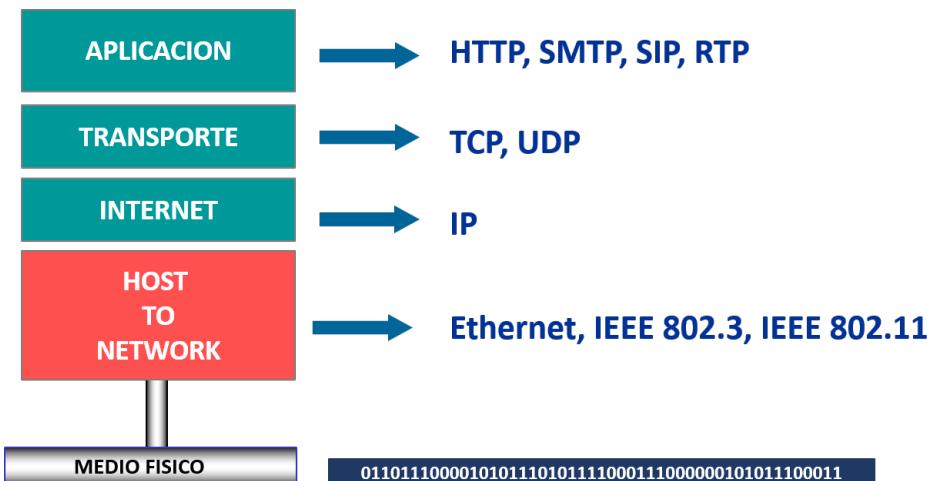


Figure 15.7: Capas del modelo TCP/IP: resaltando que el SIP es el más importante para telefonía IP. Lo que más interesa de este modelo no son las capas sino los protocolos usados por cada una de ellas

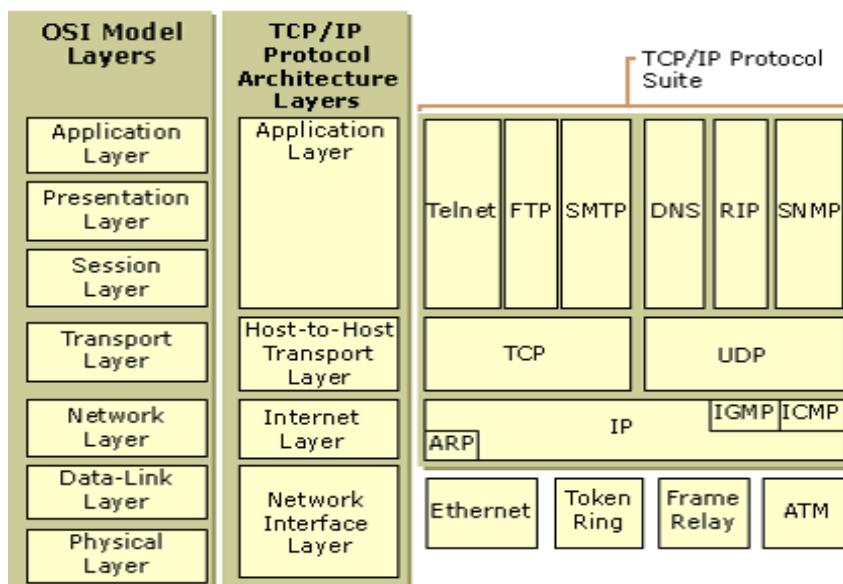


Figure 15.8: Comparación entre ambos modelos: OSI vs TCP/IP y los protocolos de cada capa

requerida del servicio y demás cuestiones relacionadas. También es llamado **circuito**, ese es otro nombre para una conexión con recursos asociados.

Características:

- Es confiable.
- Se establece un circuito virtual.
- El estado de los mensajes es conocido en todo momento.
- Se tiene un control de secuencia de mensajes.
- Existe confirmación y retransmisión de mensajes.
- Se mantiene un control de flujo.
- Se genera overhead adicional.
- Es lento.

Un ejemplo en la que es apropiado un servicio orientado a la conexión es la transferencia de

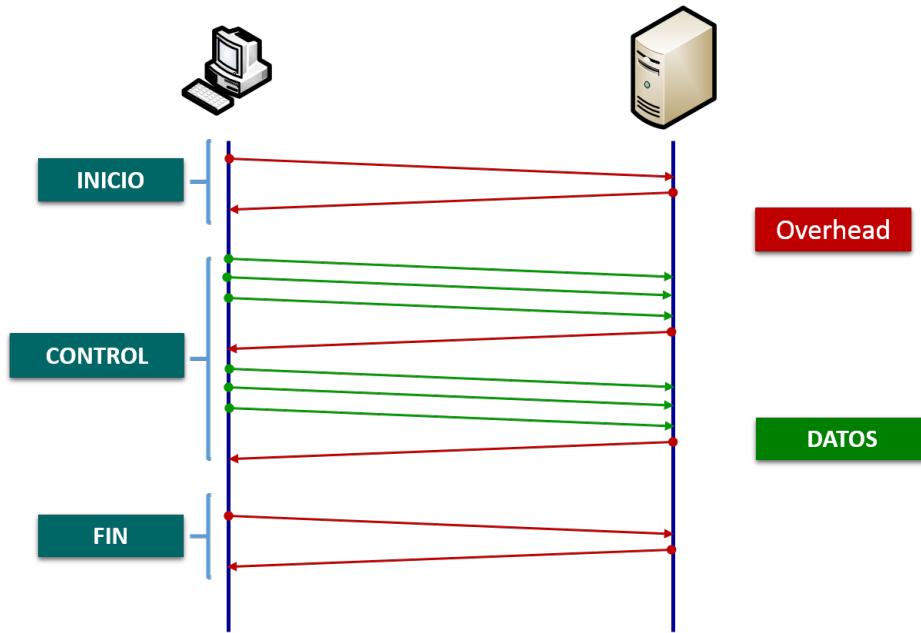


Figure 15.9: Orientado a la conexión: El usuario del servicio establece primero una conexión, la utiliza y después la libera.

archivos. El propietario del archivo desea estar seguro de que todos los bits lleguen correctamente y en el mismo orden en el que se enviaron. Sería poco aceptable un servicio que ocasionalmente pierda unos cuantos bits, incluso aunque fuera mucho más rápido.

15.0.4.2 No orientado a la conexión

Es un servicio que solo se centra en el envío de mensajes, pero no garantiza el control del flujo de mensajes, ni el estado de los mensajes. Está modelado a partir del sistema postal. Cada mensaje lleva la dirección de destino completa, y cada uno es enrutado hacia los nodos intermedios, en forma independiente a todos los mensajes subsecuentes. Hay distintos nombres para los mensajes en diferentes contextos: un paquete es un mensaje en la capa de red. A este servicio también se le conoce como servicio de **datagramas**.

Características

- No es confiable.
- El estado de los mensajes no es relevante.
- No hay control de secuencia de mensajes.
- No existe confirmación y ni retransmisión de mensajes.
- No interesa el control de flujo.
- Es rápido.

Por ejemplo, los emisores de correo electrónico basura (spammers) envían su correo a muchos destinatarios. El emisor no quiere tener que pasar por el problema de establecer una conexión con un destinatario sólo para enviarle un mensaje. Tampoco es esencial una entrega cien por ciento confiable, sobre todo si eso es más costoso. Todo lo que se requiere es una forma de enviar un solo mensaje que tenga muy alta probabilidad de llegar, aunque sin garantías.

15.1 Repaso: TCP/IP

A manera de recordar las capas vista en el capítulo de Infraestructura vamos a repasar las capas del modelo TCP/IP.

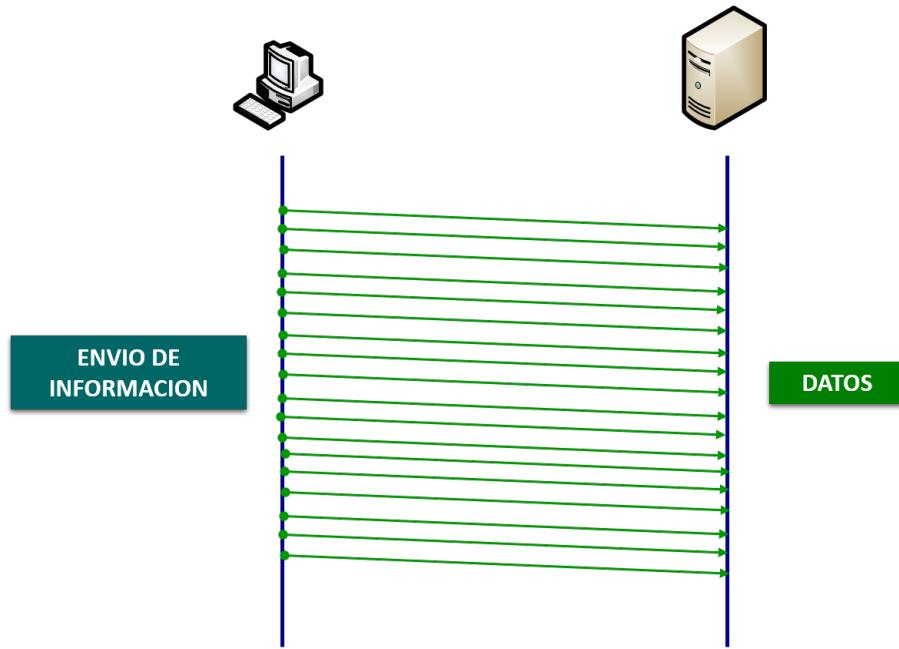


Figure 15.10: NO orientado a la conexión

Tipo de servicio	Servicio	Ejemplo
Orientado a la conexión	Flujo de mensajes confiable. Flujo de bytes confiable. Conexión no confiable.	Secuencia de páginas. Descarga películas. Voz sobre IP
Sin conexión	Datagrama no confiable. Datagrama confirmación no recepción. Solicitud-respuesta	Correo electrónico basura. Mensajería de texto. Consulta de una base de datos.

Table 15.1: Ejemplos de los servicios Orientado y NO orientado a la conexión

15.1.1 Capa de transporte

Un solo dispositivo puede utilizar varios servicios como e-mail, web, mensajería instantánea, etc. La información de cada aplicación debe ser empaquetada, transportada y entregada a la aplicación apropiada en el dispositivo destino. Para conseguir entregar los flujos de datos a las aplicaciones correctas, la capa de transporte debe identificar la aplicación destino. Para esto se utiliza un identificador el numero de puerto. Además, cada flujo de datos debe ser enviado en piezas que sean manejables a través de la red, la capa de transporte agrega a cada pieza la información necesaria para ser enviada hasta el otro extremo y ser desensamblada. En la figura 15.9 es ejemplo es el protocolo TCP/IP mientras que para la figura 15.10 un claro ejemplo es el protocolo UDP. Por encima de la capa de transporte se encuentra la capa de aplicación, capa que contiene los protocolos de alto nivel como TELNET(terminal virtual), FTP(transferencia de archivos) y SMTP(correo electrónico)

15.1.2 Capa de internet

Se encarga de combinar varios enlaces múltiples en redes, y redes de redes en interredes. La capa de red provee el mecanismo necesario para que los dispositivos terminales puedan enviar paquetes

TPC/IP	UDP
Confiabilidad. Confirmación de paquetes Retransmisión de paquetes perdidos. Entrega de la información de acuerdo al orden de envío. En tiempo real sensible al retraso.	Rapidez y bajo overhead. Sin confirmación de paquetes Sin retransmisión de paquetes. Entrega de la información como llega. No sensible al retraso.

Table 15.2: Capa de transporte-Tipo de servicio

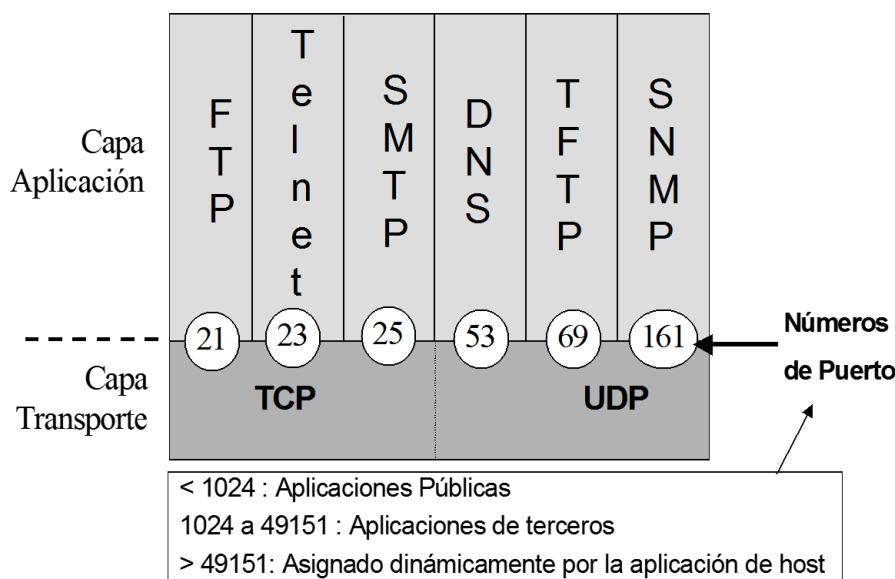


Figure 15.11: Direccionamiento de puertos

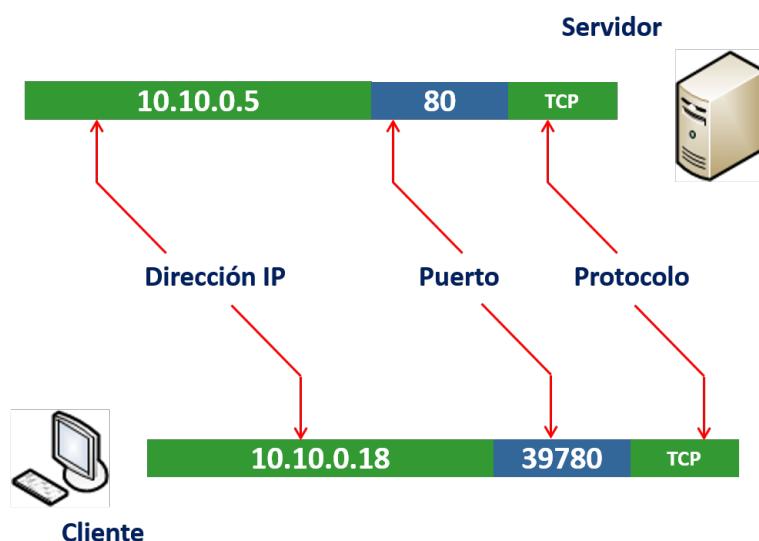


Figure 15.12: Representación de la conformación de paquetes en la capa de transporte.

de un extremo a otro dentro de una trayectoria a través de diferentes redes. Para cumplir esta tarea utiliza los siguientes mecanismos:

- Direccionamiento.
- Enrutamiento.

15.1.2.1 Direccionamiento

La capa de red provee el mecanismo de direccionamiento para que los paquetes viajen de un extremo a otro a través de un conjunto de redes. Como cada paquete lleva una parte de un flujo mas grande de información hacia un dispositivo terminal remoto este ultimo debe tener una dirección única. Es por eso que en este nivel todos los hosts que forman parte de la red deben tener una dirección, para ser ubicados.

15.1.2.2 Enrutamiento

Una vez que tenemos direcciones asignadas a todos los dispositivos de la red; la capa de red debe proveer un servicio que guíe a los paquetes a seguir la ruta hacia su destino. El origen y el destino no están siempre dentro de la misma red; por lo que los paquetes viajaran a través de varias redes diferentes. Los dispositivos intermedios que conectan las redes son los ruteadores, su rol es encontrar caminos hacia otras redes y dirigir a los paquetes a través de ellos.

15.1.2.3 IPv4

IPv4 es actualmente la versión mas utilizada de IP, es el único protocolo utilizado en capa 3 para mover la información de los usuarios a través de internet. Fue diseñado como un protocolo de bajo overhead; proveyendo funciones que son necesarias para entregar un paquete desde el origen en una red hasta el destino en otra red a través de un sistema interconectado de redes. Su diseño no se ocupa de monitorear y administrar el flujo de paquetes; esto es dejado a protocolos de capa superiores. El protocolo IPv4 provee un modelo de direccionamiento jerárquico, basado en direcciones de 32 bits, esto permite que los dispositivos puedan emplear lógica digital para realizar operaciones de comparación entre otras. Sin embargo, para que nosotros podamos recordar y utilizar estas direcciones utilizamos un formato decimal para representarlas: cuatro números decimales separados por puntos. Donde cada uno de estos números decimales representa un numero binario de ocho bits.

1. Clase A: este bloque de direcciones puede soportar redes extremadamente grandes con más de 16 millones de hosts. Como condición, el primer bit del primer octeto debe mantenerse en “0”, lo que implica que el primer octeto solo puede tener 128 subredes.
2. Clase B: este bloque de direcciones puede soportar redes medianamente grandes con más de 65 000 hosts. Como condición, los dos primeros bits del primer octeto deben mantenerse en “10”. Este bloque distribuye mejor el espacio de direcciones que la clase A, ya que tiene aprox. La misma cantidad de redes que de hosts.
3. Clase C: este bloque de direcciones puede soportar redes con más de 254 hosts. Como condición, los tres primeros bits del primer octeto deben mantenerse en “110”. Puede proveer direcciones a aprox. 2 millones de redes.

Según el RFC 3330 describe las direcciones ipv4 especiales asignadas por la IANA. Entre ellas podemos identificar las direcciones públicas y privadas.

- Públicas: La gran mayoría de direcciones unicast IPv4 son públicas, es decir son direcciones designadas para ser accesibles desde internet.
- Privadas: Son direcciones unicast IPv4 que pueden utilizarse dentro de redes privadas que no tienen acceso directo a internet y por lo que es posible reutilizarlas entre una red y otra. Los bloques de direcciones privados son:
- 10.0.0.0 – 10.255.255.255 (10.0.0.0 /8)
- 172.16.0.0 – 172.31.255.255 (172.16.0.0 /12)
- 192.168.0.0 – 192.168.255.255 (172.16.0.0 /24)

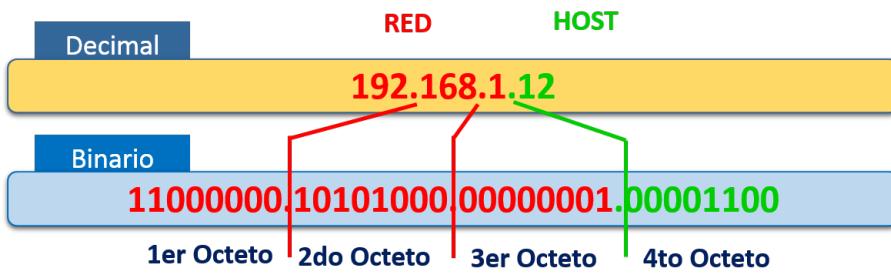
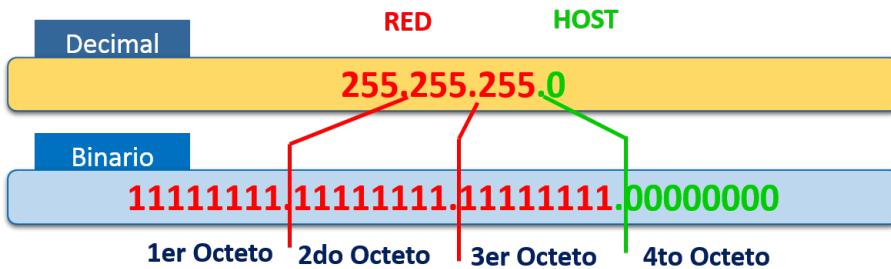
**Mascara:**

Figure 15.13: Las direcciones IPv4 están divididas en dos bloques, un numero de bits comenzando por los mas significativos indican la red. En el ejemplo los primeros 24 bits y finalizando con los bits menos significativos determinan el numero de Host. En el ejemplo los últimos 8 bits.

CLASE	DIRECCIONES DISPONIBLES		CANTIDAD DE REDES	CANTIDAD DE HOSTS	APLICACIÓN
	DESDE	HASTA			
A	0.0.0.0	127.255.255.255	128*	16.777.214	Redes grandes
B	128.0.0.0	191.255.255.255	16.384	65.534	Redes medianas
C	192.0.0.0	223.255.255.255	2.097.152	254	Redes pequeñas
D	224.0.0.0	239.255.255.255	no aplica	no aplica	Multicast
E	240.0.0.0	255.255.255.255	no aplica	no aplica	Investigación

* El intervalo **127.0.0.0 a 127.255.255.255** está reservado como dirección loopback y no se utiliza.

Figure 15.14: Clases de IPv4

15.2 VoIP

Voz sobre el Protocolo de Internet o VoIP se refiere a la transmisión del tráfico de voz sobre redes de datos utilizando el protocolo IP. Es decir utilizaremos la pila de protocolos TCP/IP y sus funcionalidades para que la voz pueda ir de un extremo a otro de la red.

A priori esta idea nos permite obtener conclusiones inmediatas, y de la misma forma apreciar las ventajas de esta tecnología, entre otras:

- Puede utilizarse aprovechando la infraestructura creada para una red local o de Internet, con independencia de los medios de transmisión utilizados, permitiendo mantener varias conversaciones simultáneas.
- En empresas no requiere de una instalación simultánea de cableado telefónico para conectar los teléfonos a la centralita o PBX.
- Permite comunicarnos con otra persona sin importarnos la distancia ni el lugar en el que nos encontramos, no siendo necesario utilizar el sistema de telefonía tradicional para efectuar llamadas internacionales, con el consiguiente ahorro económico.
- No requiere de grandes inversiones para su puesta en funcionamiento. Con una computadora con tarjeta de sonido, altavoces, micrófono y el software apropiado, sería suficiente. Cualquier otro dispositivo como un móvil de última generación, preparado para utilizarse en una red

TCP/IP, nos serviría, de ahí el carácter portable de dicha tecnología.

- Al basarse en la arquitectura TCP/IP, no sólo se puede utilizar para la transmisión de voz, permitiendo también el envío de imágenes, vídeo o texto, tal y como lo hacemos a través de una red o Internet.
- Hace más eficiente el ancho de banda, utilizando técnicas de compresión y evitando el envío de información durante los espacios de silencio que se producen durante las conversaciones, ya que carece de sentido.

15.3 Digitización de la voz

Las desventajas sobre las señales analógicas usadas en la telefonía convencional. Estas desventajas son:

- La voz analógica no se propaga bien a largas distancias.
- La señal decae con la distancia.
- Ruido de fondo llega a ser comparable a la señal.
- Amplificación de la señal también amplifica el ruido.

Debido a esto, es una gran alternativa la digitalización para contra-restar estos efectos, así se logra discriminar mejor la señal del ruido. Hoy en día, la voz se transmite siempre en forma digital, excepto en el “local loop” (excepto ISDN que extiende la voz digital hasta el abonado). Para realizar la digitalización, al igual que en la modulación donde se utilizan moduladores, aquí se usa **codecs**.

15.3.1 ¿Cómo se digitaliza la voz?

Para poder digitalizar la voz se utiliza el famoso **Teorema de Nyquist**, que nos dice que:

Definición 15.1 La frecuencia de muestro es dos veces la frecuencia máxima de la señal a muestrear:

$$f_s \geq 2 * f_a \quad (15.1)$$

Donde:

f_s : Frecuencia de muestreo. f_a : Frecuencia de la señal a muestrear(frecuencia analógica)

A manera de repaso de este tema los pasos para la digitalización se hace de la siguiente manera:

15.3.1.1 Muestreo

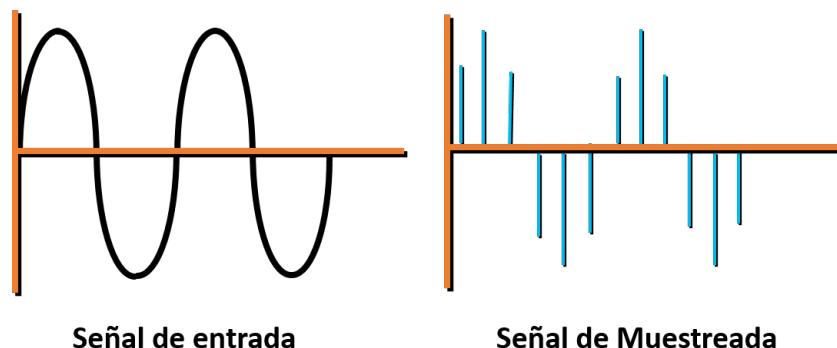


Figure 15.15: Muestreo de una señal seno.

Tomar muestrear cada cierto tiempo de la señal a muestrear, mientras más muestras se tiende a perder menor información.

15.3.1.2 Cuantificación

Como hemos tomado muestras a lo largo del tiempo en el muestreo, tenemos que cuantificar, en otras palabras, tenemos que elegir que valores tomaran los valores del eje Y. La cuantificación es usado para representar el nivel eléctrico de cada muestra. Dependiendo del número de niveles se necesitará un numero específico de bits. Si tenemos planificado cuantificar en 8 niveles necesitamos

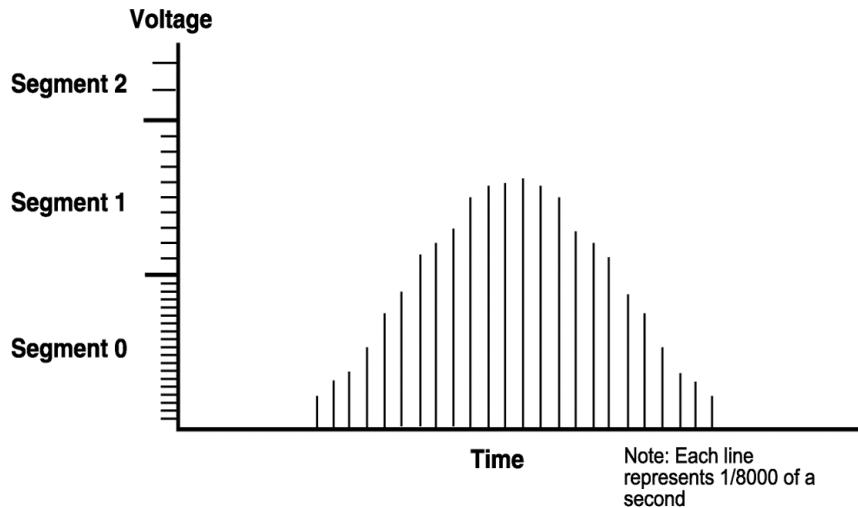


Figure 15.16: Cuantificación del muestreo de una señal seno.

3 bits, que quiere decir esto:

Tenemos 8 niveles: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Como estamos cuantificando recordemos que solo usamos ceros y unos, ademas tienen que ser únicos, es por ello que usando el sistema binario se asigna una combinación única a cada uno.

1. Nivel 1: 000
2. Nivel 2: 001
3. Nivel 3: 010
4. Nivel 4: 011
5. Nivel 5: 100
6. Nivel 6: 101
7. Nivel 7: 110
8. Nivel 8: 111

Se ha asignado un código binario único a cada uno, este número también es:

$$\text{Bits necesarios} = 2^n, \text{ donde } n \text{ es el número de niveles.} \quad (15.2)$$

15.3.1.3 Codificación

De acuerdo al número de bits seleccionado durante el proceso de cuantificación se establecen los códigos que representarán los niveles y se asignan a las diferentes muestras. Una forma común de codificar en PCM(*Pulse Code Modulation*), utiliza codificación por forma de onda y se basa en el teorema de Nyquist:

Definición 15.2 — Tasa de transmisión binaria. También llamada **tasa de transmisión de bits**, define el número de bits que se transmiten por unidad de tiempo a través de un sistema de transmisión digital o entre dos dispositivos digitales. Así pues, es la velocidad de transferencia de datos.

$$V_{bin} = f_s \times nbm \quad (15.3)$$

Donde:

V_{bin} : Tasa de transmisión de bits.

f_s : Frecuencia de muestreo.

nbm: Número de bits por muestra.

Ejercicio 15.1 Con un rango de frecuencia de voz de 4kHz, y una resolución de 8 bits por muestra, se puede calcular, la transmisión binaria, primero, usando la ecuación 15.1 obtenemos:

$$f_s \geq 2 \times 4\text{kHz}$$

$$f_s = 8\text{kHz}$$
(15.4)

Así entonces, usando la ecuación 15.3:

$$V_{bin} = 8\text{KHz} \times 8\text{bits/m}$$

$$V_{bin} = 8000\text{m/s} \times 8\text{bits/m}$$

$$V_{bin} = 64\text{kbytes}$$
(15.5)

15.3.1.4 CODECs

Los CODECS nos dan la posibilidad de utilizar menos ancho de banda por canal de voz. Permitiéndonos pasar más canales de voz (llamadas) por la red.

- G.711(ulaw / alaw) → 64Kbps
- G.726 → 32 Kbps
- G.729 → 8 Kbps (Necesita de licencia)
- GSM → 13 Kbps

Codec	Bandwidth	Sample period	Frame size	Frames/packet	Ethernet Bandwidth
G.711 (PCM)	64 kbps	20 ms	160	1	95.2 kbps
G.723.1A (ACELP)	5.3 kbps	30 ms	20	1	26.1 kbps
G.723.1A (MP-MLQ)	6.4 kbps	30 ms	24	1	27.2 kbps
G.726 (ADPCM)	32 kbps	20 ms	80	1	63.2 kbps
G.728 (LD-CELP)	16 kbps	2.5 ms	5	4	78.4 kbps
G.729a (CS-CELP)	8 kbps	10 ms	10	2	39.2 kbps
AMR-WB/G.722.2 (ACELP)	6.6 kbps	20 ms	17	1	38.0 kbps

Figure 15.17: COCECs.

15.3.2 Transporte de Voz

Una vez digitalizada la voz en un mensaje a través de CODECS, éste se divide en fragmentos más pequeños o paquetes para enviarlos al destinatario de la conversación. VoIP debe establecer unos mecanismos que al menos aseguren que la voz codificada y comprimida, se entregue a su destinatario en un intervalo de tiempo determinado y con la calidad suficiente. En caso contrario la conversación tendría cortes y por tanto se degradaría la calidad del servicio. Para garantizar la transmisión, VoIP se integra en la arquitectura TCP/IP utilizando una serie de protocolos en la capa de aplicación, que recurren al protocolo de la capa de transporte UDP. El protocolo UDP no ejerce control sobre la transmisión como TCP, haciendo que sea más rápido y por tanto recomendable

para la transmisión de voz en tiempo real.

La combinación de protocolos que permiten la transmisión de paquetes de voz en cuestión de nanosegundos, son los siguientes:

NTP (Network time protocol o Protocolo de tiempo de red): este protocolo se encarga de controlar que los fragmentos de voz digitalizada llegan a su destinatario en el intervalo de tiempo requerido.

RTP (Real-time transport protocol o Protocolo de transporte en tiempo real): proporciona funciones de transporte de red extremo a extremo, encapsulando la voz digitalizada en paquetes. Se transporta generalmente sobre otros protocolos y NO se usa un puerto definido *well-known port*, teniendo al 5004 como puerto por defecto, además que debe ser par y el puerto de control debe ser el siguiente valor(impar).

RTCP (Real-time transport control protocol o Protocolo de control de transporte en tiempo real): este protocolo se complementa con RTP, realizando un seguimiento del reparto de paquetes de voz digitalizada mediante el envío periódico de paquetes de control, permitiendo gestionar la calidad del servicio (QoS).

15.4 Componentes de VoIP

Las redes VoIP se basan en elementos de hardware y software que podemos encontrar en la implantación de un sistema. Las redes VoIP se basan principalmente en los siguientes elementos:

- Red de telefonía
- Terminal IP (teléfono IP)
- Gatekeepers (centralitas IP)
- Gateway IP (puerta de enlace IP)

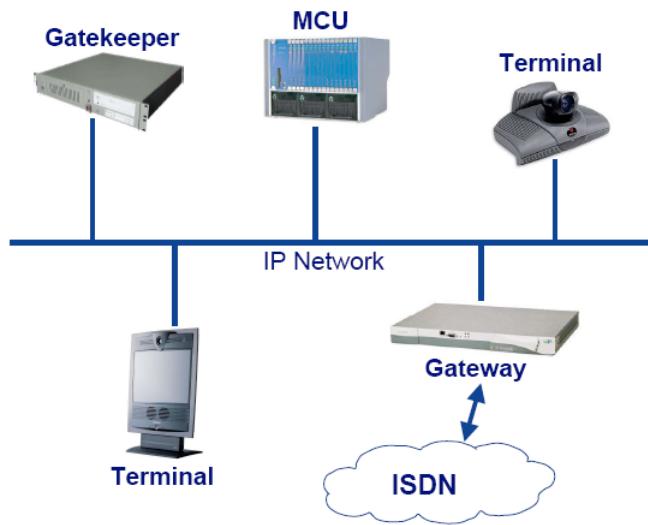


Figure 15.18: Componentes de VoIP

15.4.1 Terminal IP

Permiten conectarse directamente a la red de datos, ya que poseen al menos un puerto para establecer la conexión. Los más habituales disponen de un conector hembra RJ45, el cual se conectarán mediante un latiguillo a una toma de red de pared. Los terminales IP necesitan de alimentación eléctrica suministrada mediante la red eléctrica, aunque también puede obtener la energía eléctrica mediante la red Ethernet utilizando tecnología PoE (Power over Ethernet o Alimentación sobre Ethernet)

- Son puntos finales de la Comunicación.
- Comunicación bidireccional en tiempo real.
- Q.931 para señalización de llamada.
- H.245, negocia el uso del canal y capacidades.
- RAS (Registration/Admission/Status) ⇒ Gatekeeper.
- RTP/RTCP para secuenciar paquetes de Audio y Video.

15.4.2 Centralita IP

Las centralitas IP o IP-PBX (Private Branch eXchange o Centralita Secundaria Privada), son unas centralitas telefónicas para gestionar las llamadas internas, las entrantes y/o salientes con autonomía sobre cualquier otra central telefónica de la RTB u otra centralita de proveedor de VoIP. La PBX se encarga de centralizar todas las conexiones, pero solo cuando existe, pues no es necesaria.

Están conectadas directamente a la RTB por medio de líneas troncales en un extremo, y a la red VoIP en otro (con gateway, router, switch, hub...).

Son un sistema informático compuesto por un servidor VoIP, con software de servidor VoIP (por ejemplo Asterix PBX para Linux, GNUlk, OpenH323...) que remplaza todas las funciones de una centralita hardware de telefonía convencional. Su función es dar servicio desde una LAN a la RTC (y viceversa) o de internet a la RTC. Una centralita evita conectar varios teléfonos de una oficina o edificio de manera separada a la red RTC, y evita la necesidad de que las comunicaciones entre teléfonos internos deban salir a la red RTC, con lo que se ahorran muchos gastos fijos y variables. Además, la PBX permite gestionar llamadas directas a todos los teléfonos asignando extensiones locales (de la red VoIP) al número público (del proveedor de telefonía tradicional o VoIP). Otra de las ventajas es que las centralitas físicas tienen una vida útil de unos 15 años, en cambio las centralitas software son para siempre.

15.4.3 Gateway

La característica principal de VoIP es poder transmitir voz a través de una red de datos, aunque a veces el destinatario no se encuentra en ella y es necesario el acceso a otro tipo de redes, como una RTC (Red Telefónica Conmutada) o una red de telefonía móvil.

La función de un gateway es posibilitar el acceso a otras redes, generalmente de carácter público, reduciendo en ocasiones el coste de las facturas.

En una organización o empresa, estos dispositivos pueden conectarse al PBX de forma que todos los usuarios dispongan de acceso a otras redes.

FXS y FXO son los nombres de los puertos usados por las líneas telefónicas analógicas o teléfonos.

FXS – Foreign eXchange Subscriber (Interfaz de suscriptor externo): Es el puerto que envía la línea analógica al suscriptor. En otras palabras, es el enchufe de la pared que envía tono de marcado, corriente para la batería y tensión de llamada.

15.4.3.1 Gateway FXS

Los gateways FXS se usan para conectar una o más líneas de una centralita tradicional con una centralita IP o proveedor telefónico VoIP. Se necesitará un gateway FXS cuando desea conectar los puertos FXO (que normalmente se conectan a la empresa telefónica) a la Internet o centralita VoIP. **FXO – Foreign eXchange Office (Interfaz de central externa):** Es el puerto que recibe la línea analógica. Es un enchufe del teléfono, aparato de fax o el enchufe de su centralita telefónica analógica. Envía una indicación de colgado/descolgado (cierre de bucle).

15.4.3.2 Gateway FXO

Para conectar líneas telefónicas analógicas con una centralita IP, se necesita un gateway FXO. Ello le permitirá conectar el puerto FXS con el puerto FXO del gateway, que luego convierte la línea telefónica analógica en una llamada VoIP.

15.4.4 Adaptador FXS

El adaptador FXS se usa para conectar un teléfono analógico o aparato de fax a un sistema telefónico VoIP o a un prestador VoIP. Se necesitará para conectar el puerto FXO del teléfono/fax con el adaptador.

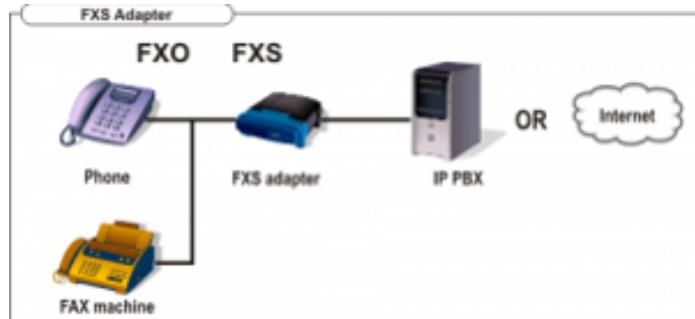


Figure 15.19: Adaptador FXS

FXO y FXS son siempre pares, es decir, similar a un enchufe macho/hembra.

15.4.5 Unidad de control MCU

Un MCU esta formado por el Multipoint Controller y por el Multipoint procesor.

1. MP: Comutación y mezclado de las tramas multimedia.
2. MC: Señalización de llamadas, control de conferencias

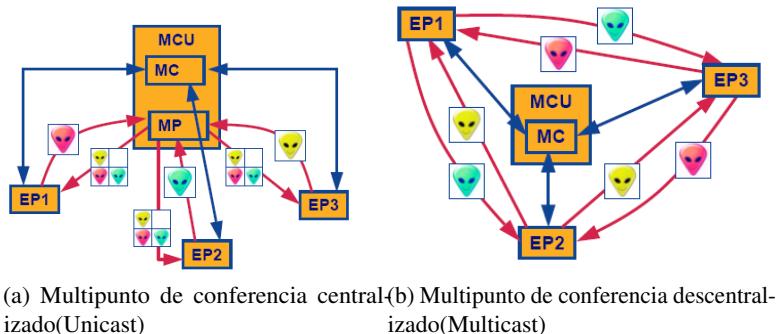


Figure 15.20: Tráfico multimedia

15.5 Tecnología IP

15.5.1 DSL

DSL (línea de suscriptor digital) es tecnología de banda ancha que proporciona transmisión de información a alta velocidad (hasta 7.1 Mbps) a través de una línea telefónica existente. Las velocidades son hasta 50 veces más rápidas que las de un módem por dial-up estándar de 28.8 Kbps. Además, el servicio DSL es instantáneo - con sólo un clic tendrás una conexión a Internet superrápida. Está basada en utilizar la RTB para la transmisión de información a alta velocidad. Una variante de estas redes es ADSL (Asymmetric Digital Subscriber Line o Línea Digital Asimétrica de Abonado) y se llama asimétrica porque la velocidad de transmisión en un sentido es menor que en otro.

Como contrapartida, también existen las líneas SDSL (Symmetric Digital Subscriber Line o Línea Digital Simétrica de Abonado), donde la comunicación se realiza a la misma velocidad en ambos

sentidos. ADSL utiliza circuitos integrados ASP (Advanced Signal Processor o Procesador de Señales Avanzado) para eliminar electrónicamente todas las interferencias producidas en la comunicación. Las redes ADSL pueden utilizar diferentes protocolos de transporte de datos, como TCP/IP o ATM. ATM permite la difusión de películas y la videoconferencia de alta calidad.

15.5.2 RDSI

La red RDSI dispone de su propio cableado, permitiendo no sólo la transmisión de voz, sino de datos, de imagen y sonido en tiempo real, etc. Para permitir diferentes tipos de transmisión, se utiliza la técnica de multiplexación creando canales independientes para ser transmitidos por un único medio. Cuando se contrata una conexión RDSI, los terminales a utilizar deben ser digitales, aunque también se puede utilizar un dispositivo denominado TA (Terminal Adapter o Adaptador de Terminal) para conectar terminales analógicos, realizando la conversión analógico-digital de las señales.

15.5.3 LMDS

LMDS (Local Multipoint Distribution System o Sistema Local de Distribución Multipunto) es un sistema que utiliza el aire como medio de transmisión para la comunicación desde una estación base a los abonados del servicio. Permite la transmisión de voz, datos, Internet y vídeo mediante la emisión de ondas radioeléctricas de alta frecuencia (28 - 40Ghz), y se suele utilizar para cubrir zonas geográficas donde es difícil el acceso mediante cable. A mayor frecuencia las velocidades son más altas (hasta 8Mbps), pero la zona de cobertura es menor.

15.5.4 GSM

GSM (Global System for Mobile communications o Sistema Global para las Comunicaciones Móviles) es un estándar que utiliza la conmutación de circuitos para la comunicación entre teléfonos móviles, y que realiza la transmisión de voz y señalización en formato digital. Para su funcionamiento se utiliza una red compleja de estaciones base o BS (Base Station) que dan cobertura a un área geográfica determinada, denominada celda o célula. Los terminales de usuario buscan siempre una estación base a la que conectarse utilizando una banda de frecuencia comprendido entre 900 MHz y 1800 MHz.

15.6 Vocabulary

- **Vocabulario 15.1 — Congestión.** Es cuando todos los circuitos capaces de cursar tráfico en una central están ocupados.

VII

Extras

16	Artificios matemáticos	227
16.1	Logaritmos y exponenciales	227
16.2	Matrices	227
16.3	Integrales	228
16.4	Números complejos	228
16.5	Producto cruz y producto escalar	229

JL
 $x_2 = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \beta \\ -\delta \end{pmatrix}$
 $\omega \sin x$
 $\sum_{i=0}^n (p_i(x_i) - y_i)^2$
 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
 $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$
 $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
 $\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 1$
 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda$
 $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda^2$
 $F_2 = 2 \times y_2 - 1 = 1$
 $x_1 = \begin{pmatrix} 2p \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}$
 $y = x^3$
 $y = x^2$
 $2 \operatorname{arctg} x - x = 0, I = (1, 10)$
 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx$
 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma dx$
 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
 $\sum_{i=0}^n (p_i(x_i) - y_i)^2$
 $\int_0^{\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}r}^2 \left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} r^2 d\sigma \right) dr \right) dp$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt[3]{3n^2 + 2n - 1}}$
 $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$
 $y = \sqrt[3]{x+1}, i = x = \operatorname{tg} t$
 $(1+e^x)yy' = e^x, y(1) = 1$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
 $-3A - 7B + 2C = -10,3$
 $-18A + 6B - 3C = 15$
 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
 $\alpha + \beta = C$
 $\zeta = (0, 1), (1, 0)$
 $f(x) = 2^{-x} + 1, \epsilon = 0.005$
 $y = \operatorname{cotg} x$
 $\lambda_1 = i\sqrt{14}$
 $\lambda_2 = \frac{\sqrt{24+6}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$
 $\frac{\sin x}{x} \leq \frac{x}{x} = 1$
 $\lambda_3 = \frac{\sqrt{24-6}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
 $\eta_1 = \lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 1 = 0$
 $\gamma_x = 2 \sin x \cdot \cos x$
 A
 B
 c
 $e^2 - xy^2 = e, A[0, e, 1]$
 $\frac{2x}{\sqrt{2+2x^2}} = 2, z = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$

16. Artificios matemáticos

En esta sección se detallaran trucos, repasos, propiedades que son vitales saberlas pero, típico del ser humano, a veces se nos olvida.

16.1 Logaritmos y exponentiales

$$e^{\ln|x|} = x \quad (16.1)$$

$$\ln(e^x) = x \frac{\ln(e)}{1} = x \quad (16.2)$$

$$\log_a(b) = b \cdot \log_a(a) \quad (16.3)$$

$$\log_c(a) - \log_c(b) = \log_c\left(\frac{a}{b}\right) \quad (16.4)$$

$$\log(a)^b = b \cdot \log(a) \quad (16.5)$$

$$\log(\sqrt[b]{a}) = \frac{\log(a)}{b} \quad (16.6)$$

16.2 Matrices

16.2.1 Conformabilidad de matrices

Para que un producto de matrices este definido es necesario saber si las matrices son conformables. Dos matrices son conformables si las columnas de la matriz multiplicando es igual a las filas del multiplicador. Si son iguales, son matrices conformables y esta definido el producto, de lo contrario no existe el producto. Las dimensiones del producto de dos matrices conformables es igual al tamaño de las filas del multiplicando y las columnas del multiplicador:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_{[3 \times 3]} \underbrace{\begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}}_{[3 \times 1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} a \cdot j + b \cdot k + c \cdot l \\ d \cdot j + e \cdot k + f \cdot l \\ g \cdot j + h \cdot k + i \cdot l \end{bmatrix}}_{[3 \times 1]} \quad (16.7)$$

Recordando que el producto **no es conmutativa**, no es lo mismo $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ que $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

16.3 Integrales

16.3.1 Integral por tabulación

Sean a y b dos funciones en función de x en una integral:

$$\int a \cdot b dx$$

La integral se puede desarrollar:

Derivar	Integral
a	b
$\frac{da}{dx}$	$\int b \cdot dx$
$\frac{da}{d^2x}$	$\int \int b \cdot dx dx$
\vdots	\vdots
0	$\int \dots \int b dx \dots dx$

El mismo proceso se realiza hasta que en la columna de derivar se llegue a cero, ahora multiplica cada valor de la columna derivar por el valor de la columna integrar en el otro extremo de la flecha. El signo más o menos le indica si desea agregar o restar este término:

$$\int a \cdot b dx = +a \cdot \int b \cdot x d - \frac{da}{dx} \cdot \int \int b \cdot dx dx + \frac{da}{d^2x} \dots \quad (16.8)$$

16.4 Números complejos

Sea el número complejo:

$$A = 10 + j5 \quad (16.9)$$

El número se puede expresar de distintas maneras:

$$A = \Re(A) + j\Im(A)$$

$$\therefore A = 10 + j5$$

$$A = C \cdot e^{j\theta}, \text{ donde :}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{\Re(A)^2 + \Im(A)^2} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\Im(A)}{\Re(A)} \right)$$

$$\therefore C = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.18 \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{5}{10} \right) = 26.56^\circ$$

$$\Rightarrow A = 11.18 \cdot e^{j26.56}$$

$$A = C \cdot \cos \theta + jC \sin \theta = C(\cos \theta + j \sin \theta)$$

$$\therefore A = 11.18(\cos 26.56 + j \sin 26.56)$$

$$A = C/\theta^\circ$$

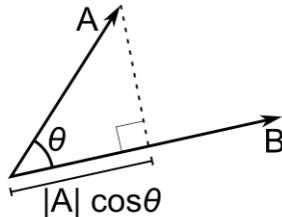
$$\therefore A = 11.18/26.56^\circ$$

16.5 Producto cruz y producto escalar

16.5.1 Producto escalar

Sea el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$, es el módulo del vector \vec{a} por el módulo del \vec{b} por el coseno del menor ángulo que forman:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cos \theta \quad (16.10)$$



Si el producto escalar de dos vectores es cero, y el módulo de los dos vectores es distinto de cero, entonces los dos vectores son perpendiculares entre sí.

16.5.2 Producto cruz

Sean los vectores, se define el producto vectorial como $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = c_x \vec{i} - c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \quad (16.11)$$

Los signos de izquierda a derecha son intercalados y empiezan con $+,-,+,-,\dots$, El resultado de esta operación es un vector, es decir una cantidad que sí tiene dirección. Cuyo módulo de \vec{c} :

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \quad (16.12)$$

El módulo del vector producto vectorial coincide con el área del paralelogramo definido por los dos vectores

16.5.3 Propiedades

- Si $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ y el módulo de ambos vectores es diferente de cero, entonces ambos vectores son paralelos.
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
- $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \neq \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} = a_x(b_y c_z - b_z c_y) - a_y(b_x c_z - b_z c_x) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \quad (16.13)$$

Se resuelve igual que la matriz de producto cruz, con la misma distribución de signos.

VII

Anexos

16.6	Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía . .	233
16.7	Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía . .	234
16.8	Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía . .	235
16.9	Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía 2 . .	236
16.10	Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía 2 . .	237
16.11	Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía 2 . .	238
16.12	Ejercicios resueltos U2-Encaminamiento de tráfico telefónico	239
16.13	Ejercicios resueltos U2-Encaminamiento de tráfico telefónico	240
16.14	Ejercicios resueltos U2-Encaminamiento de tráfico telefónico	241
16.15	Ejercicios resueltos U2-Erlang B	242
16.16	Ejercicios resueltos U2-Erlang B	243
16.17	Ejercicios resueltos U2-Erlang B	244
16.18	Ejercicios de la ley de Gauss	245

16.6 Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía

1. Problemas propuestos

- 1.1. Una oficina realiza un promedio de 43 llamadas al día, cada llamada tiene una duración en promedio de 8 minutos, si el horario de oficina es de 8:00 am a 4:00 pm y se asume que las llamadas se realizan de manera proporcional en todo el horario, calcular la intensidad de tráfico.

Datos:

Número de llamadas(n): 43 llamadas/día

Tiempo promedio(t_p): 8min

Tiempo de observación(t_0)=8 horas

Resolución

$$V_t = n * t$$

$$V_t = 43 * 8$$

$$V_t = 344 \text{ min} \quad (1)$$

$$I_t = \frac{V_t}{t_o}$$

$$I_t = \frac{344 \text{ min}}{8 \text{ hours}} * \frac{1 \text{ hour}}{60 \text{ min}}$$

$$I_t = 0,716E \quad (2)$$

- 1.2. Determinar la intensidad de tráfico, si una línea está ocupada durante una hora y 100 usuarios solicitan una llamada con una duración promedio de 3 minutos.

Datos:

Número de llamadas(n): 100 llamadas

Tiempo promedio(t_p): 3min

Tiempo de observación(t_0)=1 horas

Resolución

$$V_t = n * t$$

$$V_t = 100 * 3$$

$$V_t = 300 \text{ min} \quad (3)$$

16.7 Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía

$$\begin{aligned}
 I_t &= \frac{V_t}{t_o} \\
 I_t &= \frac{300\text{min}}{1\text{hours}} * \frac{1\text{hour}}{60\text{min}} \\
 I_t &= 5\text{Erlangs}
 \end{aligned} \tag{4}$$

- 1.3. Consideremos un centro de atención al cliente ONLINE vía telefónica. El tiempo completo de la fase de marcado se asume a ser de 20 s, incluye la invitación a marcar y el anuncio de todas las opciones. Se esperan 10.000 llamadas en la hora pico. Calcular la intensidad de tráfico.

Datos:

Número de llamadas(n): 10000 llamadas

Tiempo promedio(t_p): 20 seg

Tiempo de observación(t_0)=1 horas

Resolución

$$\begin{aligned}
 V_t &= n * t \\
 V_t &= 10000 * 20\text{seg} * \frac{1\text{min}}{60\text{seg}} \\
 V_t &= 3333,3\text{min} \\
 I_t &= \frac{V_t}{t_o} \\
 I_t &= \frac{3333,3\text{min}}{1\text{hours}} * \frac{1\text{hour}}{60\text{min}} \\
 I_t &= 55,555\text{Erlangs}
 \end{aligned} \tag{5}$$

- 1.4. En un grupo de 25 líneas se cursaron 150 llamadas en media hora, con un promedio de duración de 3 minutos. Calcular el tráfico total y por línea.

Datos:

Número de llamadas(n): 150 llamadas

Tiempo promedio(t_p): 3min

Tiempo de observación(t_0)=0.5 horas

Líneas: 5

Resolución

16.8 Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía

$$V_t = n * t$$

$$V_t = 150 * 3$$

$$V_t = 450 \text{ min} \quad (7)$$

$$I_t = \frac{V_t}{t_o}$$

$$I_t = \frac{450 \text{ min}}{0,5 \text{ hours}} * \frac{1 \text{ hour}}{60 \text{ min}}$$

$$I_t = 15E \quad (8)$$

$$\text{Traffic}_{line} = \frac{I_t}{N_l}$$

$$\text{Traffic}_{line} = \frac{15E}{25} \quad (9)$$

$$\text{Traffic}_{line} = 0,6E \quad (10)$$

16.9 Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía 2

Problem 1

Considerar un grupo de 1200 abonados que generan 600 llamadas durante la hora cargada. El tiempo medio de espera es de 2.2 minutos. ¿Cuál es el tráfico ofrecido en erlangs, LLR y CCS.

Solution

- a) El tráfico ofrecido está definido por:

$$V_t = n * d \quad (1)$$

Usando la ecuación 1:

$$V_t = 600 * 2,2;$$

$$V_t = 1320 \text{ min} \rightarrow 22 \text{ Horas}$$

La intensidad, descrita como:

$$I_t = \frac{V_t}{T_0} \quad (2)$$

$$I_t = A_0 = \frac{22}{1}$$

- b) En LLR:

$$1 \text{ Erlang} = 33 \text{ LLR} \quad (3)$$

$$A_0 = 22 * 30$$

$$A_0 = 660 \text{ LLR}$$

- c) En CCS:

$$1 \text{ Erlang} = 36 \text{ CCS} \quad (4)$$

$$A_0 = 22 * 36$$

$$A_0 = 792 \text{ CCS}$$

Problem 2

Durante la hora cargada, se ofrecen 1200 llamadas a un enlace de transmisión, pero seis de ellas no se transmiten (se pierden). El tiempo medio de duración de la llamada es de 3 minutos. Calcular:

- a) el tráfico ofrecido
- b) el tráfico cursado
- c) el tráfico perdido

16.10 Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía 2

Solution

a) Usando la ecuación 1 entonces:

$$V_t = 1200 * 3$$

$$V_t = 3600\text{min} \rightarrow 60\text{horas}$$

Con la ecuación 2:

$$I_t = \frac{60}{1}$$

$$I_t = A_o = 60 \text{ Erlangs}$$

b) Usando la ecuación 1 entonces:

$$V_t = 1194 * 3$$

$$V_t = 3582\text{min} \rightarrow 59,7\text{horas}$$

Con la ecuación 2:

$$I_t = \frac{59,7}{1}$$

$$I_t = 59,7 \text{ Erlangs}$$

$$A_c = 59,7 \text{ Erlangs}$$

c) Usando la ecuación 1 entonces:

$$V_t = 6 * 3$$

$$V_t = 18\text{min} \rightarrow 3\text{horas}$$

Con la ecuación 2:

$$I_t = \frac{0,3}{1}$$

$$I_t = 0,3 \text{ Erlangs}$$

Problem 3

Durante la hora cargada, se ofrecieron 1400 llamadas a un grupo de troncales y se perdieron 14. La duración media de las llamadas es de 3 minutos. Encontrar:

- a) el tráfico ofrecido
- b) el tráfico cursado
- c) GoS
- d) duración del periodo de congestión

16.11 Ejercicios resueltos U2-Sistemas de telefonía 2

Solution

a)

$$V_T = 1400 * 3$$

$$V_T = 4200 \text{min} \leftrightarrow 70 \text{Horas}$$

$$I_t = \frac{70}{1} = 70 \text{ ERLANGS}$$

b) Usando la ecuación 1

$$V_T = 14 * 3$$

$$V_T = 42 \text{min} \leftrightarrow 0,7 \text{Horas}$$

Aplicando la ecuación 2

$$I_t = \frac{0,7}{1} = 70 \text{ ERLANGS}$$

$$A_c = 70 \text{Erlangs} - 0,7 \text{Erlangs} = 69,3 \text{Erlangs}$$

c) Tenemos dos datos importantes: 14(tráfico perdido) y 1400(tráfico ofrecido)

$$GoS = \frac{A_p}{A_o} \quad (5)$$

reemplazando los datos en 5

$$GoS = \frac{14}{1400}$$

$$GoS = 0,01$$

d) El congestionamiento esta dado por:

$$\text{Congestionamiento} = GoS * T_0 \quad (6)$$

Reemplazando en 6:

$$\text{Congestionamiento} = 0,01 * 3600s$$

$$\text{Congestionamiento} = 36s$$

Problem 4

La capacidad de un help desk se ha diseñado para ofrecer un GoS de 2% durante la hora cargada. El número total de llamadas ofrecidas durante este intervalo de tiempo es de 300 (solicitudes de ayuda).

a) ¿Cuál es el número total de llamadas perdidas?

b) ¿Durante cuántos minutos está congestionado el servicio de asistencia durante la hora cargada?

16.12 Ejercicios resueltos U2-Encaminamiento de tráfico telefónico

Problem 1

Para la red telefónica de la figura y en virtud del Plan de Encaminamiento, llenar la tabla siguiente:

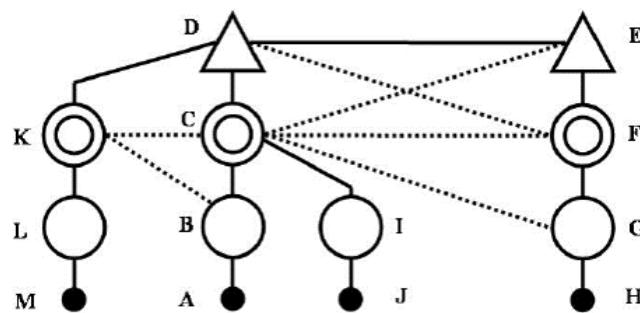


Figura 1: Problema 1

Solution

Central Origen	Central Destino	Ruta directa	Ruta alternativa 1	Ruta alternativa 2	Ruta final
A	H	ABCGH	ABCDFGH	-	ABCDEFGH
H	A	HGCBA	HGFBCBA	HGFECBA	HGFEDCBA
M	H	MLKDFGH	MLKDFGH	-	MLKDEFGH
H	M	HGFDKLM	HGFCKLM	HGFECKLM	HGFEDKLM
A	M	ABKLM	ABCKLM	-	ACDKLM
M	A	MLKBA	-	-	MLKDCBA
M	J	MLKCIJ	-	-	MLKDCIJ

Problem 2

Para la red telefónica de la figura y en virtud del Plan de Encaminamiento, llenar la tabla siguiente:

16.13 Ejercicios resueltos U2-Encaminamiento de tráfico telefónico

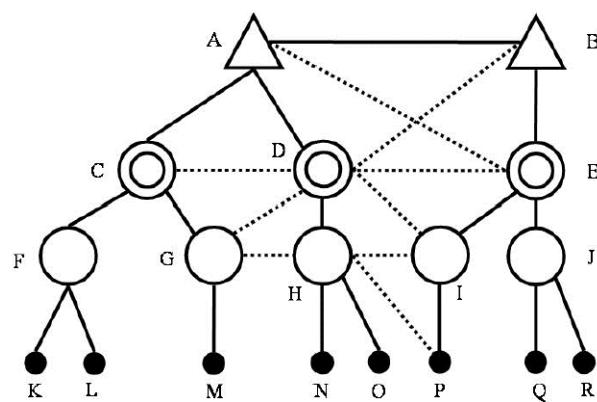


Figura 2: Problema 2

Solution

	De N a P	De P a N
Ruta directa	NHP	PHN
Ruta alternativa 1	NHDIP	PIHN
Ruta alternativa 2	NHDAEIP	PIEDHN
Ruta alternativa 3	-	PIEBDHN
Ruta final	NHDABEIP	PIEBADHN

Problem 3

Indicar las rutas posibles con origen en A y destino en la central K.

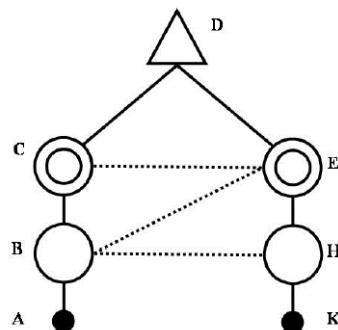


Figura 3: Problema 3

16.14 Ejercicios resueltos U2-Encaminamiento de tráfico telefónico**Solution**

Ruta	De A a K
Ruta directa	ABHK
Ruta alternativa 1	ABCEHK
Ruta final	ABCDEHK

16.15 Ejercicios resueltos U2-Erlang B

Problem 1

Consideremos un grupo troncal con una carga ofrecida de 4.5 erlangs y una probabilidad de bloqueo de 0.01. Si el tráfico ofrecido aumenta a 13 erlangs, para mantener la misma probabilidad de bloqueo a) Encuentre el número de troncales necesarias. b) Calcule también la ocupación de las troncales.

Solution

a) Encuentre el número de troncales necesarias.

Para ellos usamos la ecuación:

$$B(N, A) = \frac{A^N}{N! \sum_{k=0}^N \left(\frac{A^k}{k!}\right)} \quad (1)$$

Como tenemos que averiguar el número de troncales, crearemos un código sencillo para esto, donde N será la variable independiente. Usando su gráfica, nos movemos hacia una probabilidad de 0.01, apreciamos que necesitamos **aproximadamente 22 troncales**¹.

b) Calcule también la ocupación de las troncales.

Para ello usamos la siguiente ecuación:

$$\rho = \frac{A(1 - B(N, A))}{N} \quad (2)$$

Reemplazando en la ecuación 2

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{A(1 - B(N, A))}{N} \\ &= \frac{13(1 - 0,01)}{22} \\ &= 0,585 \end{aligned} \quad (3)$$

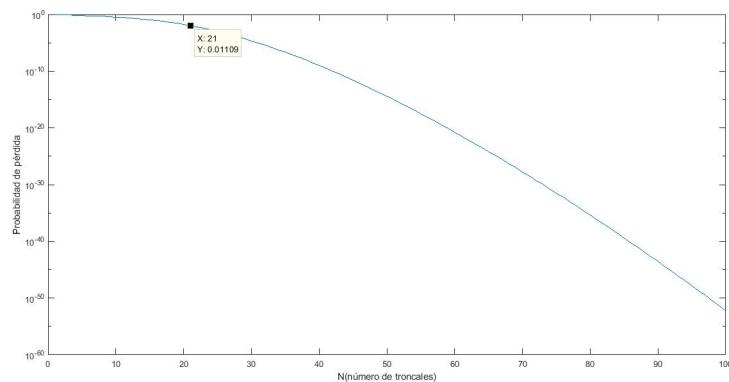


Figura 1: Análisis gráfico

¹Es mejor tener sistemas de redundancia

16.16 Ejercicios resueltos U2-Erlang B

```

1  for i=1:length(N)
2      s=0;
3      for k=0:i
4          g=(13^k)/factorial(k);
5          s=s+g;
6      end
7      B(i)=(13^N(i))/(factorial(N(i))*s);
8  end
9 semilogy(N,B)

```

Código 1: Código 1

Problem 2

A un grupo de 7 troncales se le ofrecen 4E de tráfico, hallar: **a)** El grado de servicio **b)** La probabilidad de que sólo una troncal esté ocupada **c)** La probabilidad de que sólo una troncal esté libre **d)** La probabilidad de que al menos una troncal esté libre.

Solution

a) El grado de servicio

El grado de servicio es la probabilidad de bloqueo, usando la ecuación 1:

$$\begin{aligned}
 B(N, A) &= \frac{A^N}{N! \sum_{k=0}^N \left(\frac{A^k}{k!}\right)} \\
 &= \frac{4^7}{7! \sum_{k=0}^7 \left(\frac{4^k}{k!}\right)} \\
 &= 0,062
 \end{aligned} \tag{4}$$

b) La probabilidad de que sólo una troncal esté ocupada

$$\begin{aligned}
 P(1) &= \frac{\frac{4^1}{1!}}{\sum_{k=0}^7 \frac{4^k}{k!}} \\
 &= 0,077
 \end{aligned} \tag{5}$$

c) La probabilidad de que sólo una troncal esté libre

$$\begin{aligned}
 P(6) &= \frac{\frac{4^6}{6!}}{\sum_{k=0}^7 \frac{4^k}{k!}} \\
 &= 0,1172
 \end{aligned} \tag{6}$$

16.17 Ejercicios resueltos U2-Erlang B

d) La probabilidad de que al menos una troncal esté libre.

$$\begin{aligned} P(x < 5) &= 1 - P(7) \\ &= 1 - GoS \\ &= 1 - 0,063 \\ &= 0,937 \end{aligned} \tag{7}$$

16.18 Ejercicios de la ley de Gauss

DEPARTAMENTO DE FISICA

ING JOEL PACO S.

Ejemplo N°3.9

En la figura se muestra 2 partículas cargadas fijas que se encuentran encima del eje x, $q_1 = -3,2 \times 10^{-19} C$ y $q_2 = 3,2 \times 10^{-19} C$; las coordenadas de q_1 son (-3,0) m y las coordenadas de q_2 son (3,0) m, hallar:

- a) El módulo y la orientación respecto al eje x del campo eléctrico en el punto P de coordenadas (0,4) m.

Solución:**Datos**

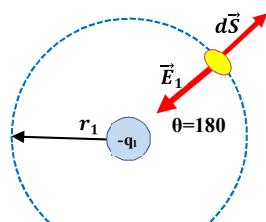
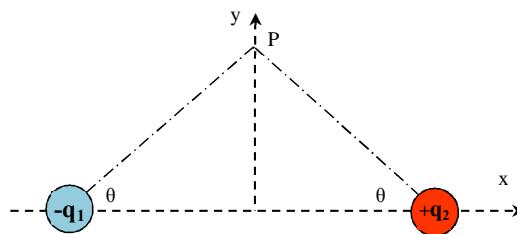
$$q_1 = -3,2 \times 10^{-19} C$$

$$q_2 = +3,2 \times 10^{-19} C$$

q_1 es (-3,0)

q_2 es (3,0)

P es (0,4).



Aplicando la ecuación de gauss

$$\Phi = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$\oint E_1 \cdot ds \cdot \cos 180^\circ = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$-E_1 \cdot \oint ds = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$E_1 \cdot A_\odot = \frac{-q_n}{\epsilon_0} \rightarrow E_1 = \frac{-q_n}{\epsilon_0 \cdot A_\odot} \rightarrow E_1 = \frac{-q}{4 \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot \epsilon_0} \rightarrow E_1 = \frac{-(3,2 \times 10^{-19})}{4 \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 8,85 \times 10^{-12}}$$

$$E_1 = 1,151 \times 10^{-10} \text{ N/C}$$

Calculo del radio r_1

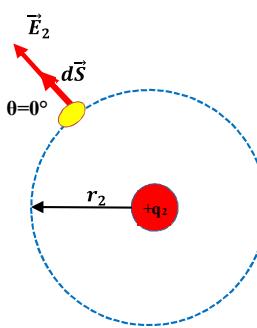
$$r_1 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$$

$$r_1 = 5 \text{ m}$$

Calculo del θ

$$\tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$\theta = 53,130^\circ$$



Aplicando la ecuación de gauss

$$\Phi = \oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$\oint E_2 \cdot ds \cdot \cos 0^\circ = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$E_2 \cdot \oint ds = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$E_2 \cdot A_\odot = \frac{q_n}{\epsilon_0} \rightarrow E_2 = \frac{q_n}{\epsilon_0 \cdot A_\odot} \rightarrow E_2 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot \epsilon_0} \rightarrow E_2 = \frac{3,2 \times 10^{-19}}{4 \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 8,85 \times 10^{-12}}$$

$$E_2 = 1,151 \times 10^{-10} \text{ N/C}$$

Calculo del radio r_2

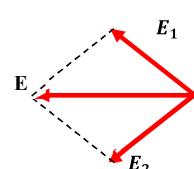
$$r_2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$r_2 = 5 \text{ m}$$

Calculo del θ

$$\tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$\theta = 53,130^\circ$$

D.C.L. punto P

Calculo del campo en el punto P

$$E = \sqrt{(E_1)^2 + (E_2)^2 + 2 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \cos(2\theta)}$$

$$E = \sqrt{(1,151 \times 10^{-10})^2 + (1,151 \times 10^{-10})^2 + 2 \cdot (1,151 \times 10^{-10}) \cdot (1,151 \times 10^{-10}) \cos(2 \cdot 53,130^\circ)}$$

$$E = 1,38 \times 10^{-10} \text{ N/C}$$

Calculo de E respecto al eje x

debido a la simetría de E_1 y E_2

$$\alpha = 180^\circ$$

Ejemplo N°3.10

En la figura se muestra un tubo metálico largo de paredes delgadas con un radio externo de $R=3\text{ cm}$ y una densidad lineal de carga $\lambda=2 \times 10^{-8} \text{ C/m}$. Determinar el módulo del campo eléctrico a una distancia radial r : a) $r=R/2$ b) $r=2R$ c) grafique el campo en función de r para $0 \leq r \leq 2R$

Solución:**Datos**

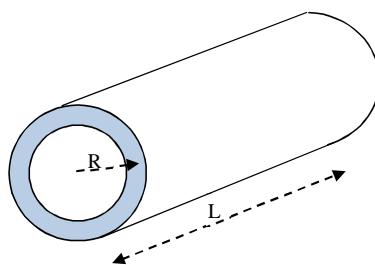
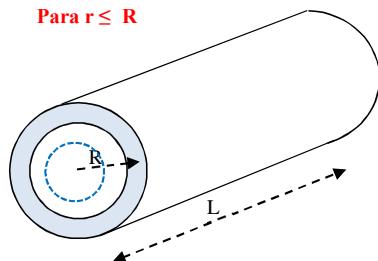
$$R = 3 \text{ cm}$$

$$\lambda = 2 \times 10^{-8} \text{ C/m}$$

$$\text{a)} E \rightarrow r = 1,5 \text{ cm}$$

$$\text{b)} E \rightarrow r = 6 \text{ cm}$$

$$\text{c)} \text{Gráfico } E-r$$

**Para $r \leq R$** 

Aplicando la ecuación de gauss

$$\Phi_T = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_T = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

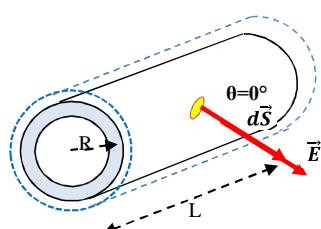
La q encerrada en la sup. gausiana es 0

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$E = 0$$

Por lo tanto para :

$$\text{a)} r = 1,5 \text{ cm} \rightarrow E = 0 \text{ N/C}$$

Para $r \geq b$ 

Aplicando la ecuación de gauss

$$\Phi_T = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

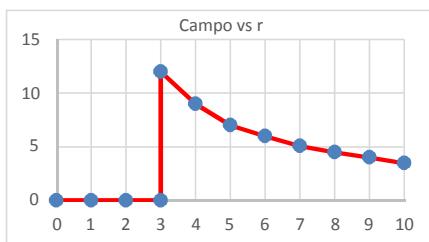
$$\oint E \cdot ds \cdot \cos\theta = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot \oint ds = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot A_\odot = \frac{q_n}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{q_n}{\epsilon_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \epsilon_0}.$$

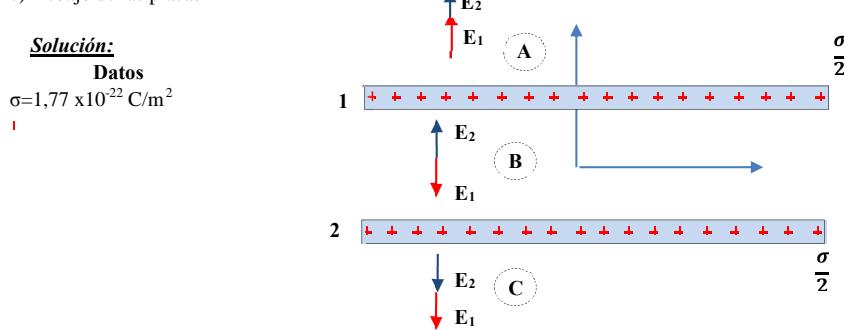
Por lo tanto :

$$\text{b)} r = 0,06 \text{ m} \rightarrow E = \frac{2 \times 10^{-8}}{2 \cdot \pi \cdot 0,06 \cdot 8,85 \times 10^{-12}} \rightarrow E = 5994,53 \text{ N/C}$$



Ejemplo N°3.11

En la figura se muestra las secciones de 2 placas en paralelo no conductores con una densidad superficial de carga $\sigma = 1,77 \times 10^{-22} \text{ C/m}^2$. Determinar el campo eléctrico en términos de vectores unitarios, a) Encima de las placas b) Entre las placas c) Debajo de las placas



a) Encima de las placas punto A

Calculo del campo producido por un placa aplicando gauss

$$\Phi_T = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\left(\frac{q}{2}\right)}{\epsilon_0}$$

$$\oint E \cdot ds \cos \theta = \frac{q}{2 \cdot \epsilon_0}$$

$$E \cdot \oint ds = \frac{q}{2 \cdot \epsilon_0}$$

$$E \cdot A = \frac{q}{2 \cdot \epsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot A} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \quad (\text{Ec. 1})$$

Por lo tanto :

$$E_A = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} + \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \rightarrow E_A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow E_A = \frac{1,77 \times 10^{-22}}{8,85 \times 10^{-12}} \rightarrow E_A = 2 \times 10^{-11} \text{ N/C} \rightarrow \vec{E}_A = (0i + 2 \times 10^{-11} j) \text{ N/C}$$

b) En medio de las placas punto B

Aplicando la ecuación (Ec.1) en el punto B

$$E_A = E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} - \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \rightarrow E_A = 0 \text{ N/C} \rightarrow \vec{E}_A = (0i + 0j) \text{ N/C}$$

c) Debajo de las placas punto C

Aplicando la ecuación (Ec.1)

Por lo tanto :

$$E_A = -E_1 - E_2 = -\frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} - \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \rightarrow E_A = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow E_A = -\frac{1,77 \times 10^{-22}}{8,85 \times 10^{-12}} \rightarrow \vec{E}_A = -2 \times 10^{-11} \text{ N/C} \rightarrow E_A = (0i - 2 \times 10^{-11} j) \text{ N/C}$$



Bibliography

Articles

Books

- [0] A. Ambardar. *Analog and Digital Signal Processing*. A Volume in the PWS BookWare Companion Series. PWS Pub., 1995. ISBN: 9780534940867. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=JnVGAAAAYAAJ>.
- [0] R.L. Boylestad and L. Nashelsky. *Electrónica teoría de circuitos*. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., 1989. ISBN: 9789688801543. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=Z1-GPQAACAAJ>.
- [0] S.C. Chapra, R.P. Canale, and S.M.S. Ortega. *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill, 2013. ISBN: 9786071512949. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=nuAPkAEACAAJ>.
- [0] L.W. Couch. *Sistemas de comunicación digitales y analógicos*. Pearson Educación de México. ISBN: 9789702612162. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=A6im0gAACAAJ>.
- [0] T.L. Floyd. *Fundamentos de sistemas digitales*. Fuera de colección Out of series. Pearson Educación, 2006. ISBN: 9788483220856. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=pdIcAAAACAAJ>.
- [0] B.A. Forouzan and S.C. Fegan. *Data Communications and Networking*. Data Communications and Networking. McGraw-Hill Higher Education, 2007. ISBN: 9780072967753. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=bwUNZvJbEeQC>.
- [0] H.P. Hsu. *Analisis de Fourier*. Addison: Teoría y problemas con solución. Fondo Educativo Interamericano, 1998. ISBN: 9789684443563. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=aGnxPgAACAAJ>.
- [0] C. Latham-Koenig, C. Oxenden, and J. Lambert. *English File: Student's book. Elementary*. Oxford University Press, 2019. ISBN: 9780194031516. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=EgMvwQEACAAJ>.
- [0] P.V. O'Neil and J.C.R. Aguilar. *Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería*. CENGAGE Learning, 2014. ISBN: 9786075220246. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=w3lRvgAACAAJ>.

- [0] A.V. Oppenheim and R.W. Schafer. *Tratamiento de señales en tiempo discreto 3 ed.* Fuera de colección Out of series. Pearson Educación, 2011. ISBN: 9788483227183. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=9R7bXwAACAAJ>.
- [0] J.G. Proakis and D.G. Manolakis. *Tratamiento digital de señales.* Fuera de colección Out of series. Pearson Educación, 2007. ISBN: 9788483223475. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=8rhdNQAAQAAJ>.
- [0] M.N.O. Sadiku. *Elements of Electromagnetics.* The Oxford series in electrical and computer engineering. Oxford University Press, 2018. ISBN: 9780190698614. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=dYYDtAEACAAJ> (cited on pages 152–154, 159, 160, 162).
- [0] M. Schwartz. *Internet of Things with ESP8266.* Packt Publishing, 2016. ISBN: 9781786466679. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=R0nUDQAAQBAJ>.
- [0] M. Schwartz. *ESP8266 Internet of Things Cookbook.* Packt Publishing, 2017. ISBN: 9781787283558. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=7UEwDwAAQBAJ>.
- [0] R.A. Serway. *Física para ciencias e ingeniería: Volumen 1.* CENGAGE Learning, 2018. ISBN: 9786075266718. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=jj9HyQEACAAJ>.
- [0] R.A. Serway and J.W. Jewett. *Física para ciencias e ingeniería: Volumen 2.* Física: para ciencias e ingeniería. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., 2018. ISBN: 9786075266701. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=2MrjvQEACAAJ>.



Index

A

Accesibilidad	193
Axiomas	42

B

Back-end	119
----------------	-----

C

Campo eléctrico creado por una distribución continua de carga en un punto	153
Codificador y Decodificador	60
Componentes de VoIP	220
Compuertas lógicas	33
Conceptos introductorios	15
Conectar a una red Wi-Fi	95
Commutadores	170
Corollaries	136
Crear un servidor local	99
Crear una red Wi-Fi	97
Cálculo vectorial	146

D

Definitions	135
Densidad de campo eléctrico	153
Digitización de la voz	217
Dipolo eléctrico	160
Diseño de redes	195
División de frecuencia	76

E

Ecuaciones Diferenciales Exactas	21
Ecuaciones diferenciales lineales	19
Ecuaciones Diferenciales No Exactas	23
Ecuaciones por sustitución	25
Encaminamiento de tráfico	197
Equivalente al Hola Mundo pero en Placas	94
Erlang-B	201
ESP8266	93
Evolución de la telefonía	169
Examples	136
Equation and Text	136
Paragraph of Text	136
Exercises	137

F

Figure	137
Flip-Flops	70
Formas de expresar funciones booleanas	38
Front-end	124

G

Grade of service	194
Grafos de estados	82

H

Hardware	118
----------------	-----

I

Instalación	94
-------------------	----

Instalación Windows:Materiales 94
 Integrales 228
 Intensidad de campo eléctrico 152

L

Latch 66
 Lectura Analógica 101
 Ley de Coulomb 151
 Ley de Gauss-Ecuaciones de Maxwell ... 154
 Logaritmos y exponenciales 227

M

Mapas de Karnaugh 45
 Matrices 227
 Medidas de tráfico telefónico 188
 Monoestables 77
 Multiplexación 171
 Multiplexor y Demultiplexor 64
 Máquina de estados 79

N

Notations 135
 Números complejos 228

P

Parámetros TTL y CMOS 52
 Planta interna y externa 180
 Potencial eléctrico 159
 Problems 137
 Producto cruz y producto escalar 229
 Propositions 136
 Several Equations 136
 Single Line 136
 Proyecto explicativo 1 105

R

Relación entre E y V-Ecuación de Maxwell159
 Remarks 136
 Repaso: TCP/IP 212
 Repaso:Señales analógicas y digitales....170
 Resumen comparativo 175

S

Sensor de temperatura y humedad DHT11 108
 Señalización telefónica 179

Sistemas de coordenadas y transformaciones 143
 Software 113
 Sumador 57

T

Table 137
 Tecnología IP 222
 Teoremas del álgebra de conmutación 42
 Theorems 135
 Several Equations 135
 Single Line 135
 Tipos de tráfico 192
 Tráfico Telefónico 187
 Técnicas de conmutación 173

V

Variables separables 17
 Vocabulary 137, 224
 VoIP 216