

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD Y SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA PRESA-DEPREDADOR CON RESPUESTAS FUNCIONALES DE TIPO II DE HOLLING PARA PRESAS ADULTAS

Daniel Machado
Daniel Toledo
Osvaldo Moreno
José A. Concepción
Adrián Navarro

TEMAS A TRATAR

- 1 INTRODUCCIÓN
- 2 MODELO PROPUESTO
- 3 MODELO PROPUESTO
- 4 SIMULACIONES NUMÉRICAS
- 5 BIBLIOGRAFÍA DEL TEMA

El artículo titulado "Local Analysis of the Prey-Predator Model with Stage-Structure Prey and Holling Type Functional Responses" por Dian Savitri analiza el modelo presa-depredador utilizando respuestas funcionales de Holling de tipo II para presas adultas y tipo I para presas jóvenes.

OBJETIVOS

- Analizar los resultados del artículo
- Determinar los puntos de equilibrio del modelo.
- Analizar la estabilidad local de los puntos de equilibrio utilizando la matriz jacobiana y valores propios.
- Observar el comportamiento dinámico del modelo mediante simulaciones numéricas.

TÉCNICAS UTILIZADAS

- Análisis matemático para determinar los puntos de equilibrio y condiciones de estabilidad.
- Cálculo de la matriz jacobiana y valores propios en cada punto de equilibrio.
- Aplicación del Criterio de Routh-Hurwitz para analizar la estabilidad del equilibrio interior.
- Simulaciones numéricas utilizando el método Runge-Kutta de cuarto orden.
- Análisis de bifurcación para estudiar la posible existencia de ciclos límite.

MODELO PROPUESTO

El artículo analiza previamente tres modelos matemáticos que abordan las interacciones presa-depredador con diferentes enfoques. Se definen $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ como la densidad de la población de presas jóvenes, presas adultas y depredadores respectivamente.

MODELO PROPUESTO

MODELO MATEMÁTICO

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \beta x - \alpha xz \\ \frac{dy}{dt} &= \beta x - \frac{\eta yz}{y + m} - \mu y \\ \frac{dz}{dt} &= \alpha_1 xz + \rho z^2 - \frac{\eta_1 z^2}{y + m}\end{aligned}\tag{1}$$

RESPUESTAS FUNCIONALES DE HOLLING

HOLLING TIPO I

Expresa la existencia de un aumento lineal en la tasa de captura del depredador con respecto a la densidad de presas, hasta alcanzar el valor en el que la tasa máxima de depredación permanece constante. Esta respuesta funcional es una función continua por partes, con una sección lineal y una sección constante.

HOLLING TIPO II

Expresa un aumento en el consumo que se desacelera a medida que aumentan las presas consumidas, alcanzando la tasa máxima de consumo de depredadores de forma asintótica. La respuesta funcional de Holling tipo II es monotóna creciente, lo que significa que la tasa de consumo de los depredadores aumenta con la densidad de presas.

PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD LOCAL

Los puntos de equilibrio estan dados por aquellos que satisfagan la igualdad:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD LOCAL

POSTULADOS

Haciendo los cálculos pertinentes se obtienen como resultado los siguientes valores. $E_1 = (0,0,0)$, $E_2 = (\frac{k(r-\beta)}{r}, \frac{\beta k(r-\beta)}{\mu r}, 0)$ y $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$.

MATRIZ JACOBIANA

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx}{k} - \beta - \alpha z & 0 & -\alpha x \\ \beta & -\frac{\eta z}{y+m} + \frac{\eta yz}{(y+m)^2} - \mu & -\frac{\eta y}{y+m} \\ \alpha_1 z & \frac{\eta_1 z^2}{(y+m)^2} & 2\rho z - \frac{2\eta_1 z}{y+m} + \alpha_1 x \end{bmatrix}$$

PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD LOCAL E1

Al evaluar la matriz jacobiana en E_1 obtuvimos:

Resultados obtenidos	Resultado de Savitri
$J(E_1) = \begin{bmatrix} r - \beta & 0 & 0 \\ \beta & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$J(E_1) = \begin{bmatrix} (-1 + r) & 0 & 0 \\ \beta & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD LOCAL E1

$$\begin{vmatrix} r - \beta - \lambda & 0 & 0 \\ \beta & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = (r - \beta - \lambda)(\mu - \lambda)(\lambda) = 0$$

Los valores propios de la matriz $J(E_1)$ son: $\lambda_1 = r - \beta$ (el cual puede ser negativo si $\beta > r$), $\lambda_2 = -\mu$ y $\lambda_3 = 0$. Por lo tanto, el punto de equilibrio E_1 es inestable.

PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD LOCAL E2

Para el punto E_2 tenemos:

$$\begin{vmatrix} (\beta - r) - \lambda & 0 & \frac{\alpha k(\beta - r)}{r} \\ \beta & -\mu - \lambda & \frac{\eta \beta k(\beta - r)}{r\mu \left(\frac{\beta k(r - \beta)}{\mu r} + m \right)} \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_1 k(\beta - r)}{r} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD LOCAL E2

Los valores propios de la matriz $J(E_2)$ son $\lambda_1 = \beta - r$, $\lambda_2 = -\mu$ y $\lambda_3 = -\frac{\alpha_1 k(\beta - r)}{r}$. El autor plantea que E_2 es estable bajo la condición $r > \beta$. Sin embargo, si $r > \beta$ entonces $-\frac{\alpha_1 k(\beta - r)}{r} > 0$ por lo que el punto de equilibrio E_2 es inestable.

PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD LOCAL E3

Para E_3 tenemos la siguiente matriz jacobiana:

$$J(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx^*}{k} - \beta - \alpha z^* & 0 & -\alpha x^* \\ \beta & -\frac{\eta z^*}{y^* + m} + \frac{\eta y z^*}{(y^* + m)^2} - \mu & -\frac{\eta y^*}{y^* + m} \\ \alpha_1 z^* & \frac{\eta_1 z^{*2}}{(y^* + m)^2} & 2\rho z^* - \frac{2\eta_1 z^*}{y^* + m} + \alpha_1 x^* \end{bmatrix}$$

PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD LOCAL

Puntos de Equilibrio	Estabilidad Local
$E_1 = (0, 0, 0)$	Inestable
$E_2 = \left(\frac{k(r-\beta)}{r}, \frac{\beta k(r-\beta)}{\mu r}, 0 \right)$	Inestable
$E_3 = (x^*, y^*, z^*)$	Asintóticamente estable

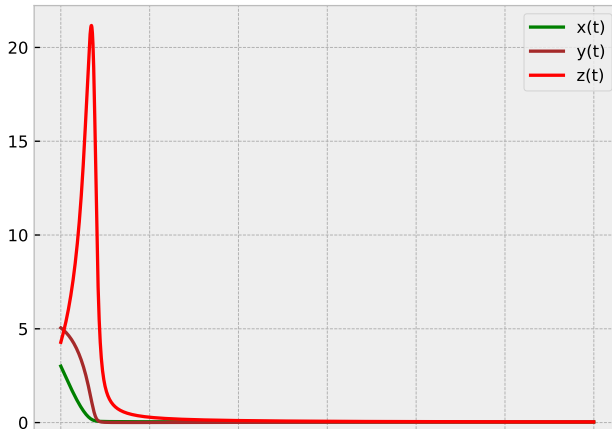
PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD LOCAL E3

Tabla con los tres valores

SIMULACIONES NUMÉRICAS

[b]0.5

S1[3.01 5.05 4.28]



CONCLUSIONES

Este estudio proporciona una comprensión más profunda de las complejas interacciones entre los depredadores y sus presas en los ecosistemas naturales. Durante este trabajo hemos aprendido sobre varios temas relacionados con las ecuaciones diferenciales y el modelado matemático. Hemos aprendido a resolver sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando diferentes métodos numéricos, como el método de Euler o el método de Runge-Kutta. Además, hemos aprendido a modelar la interacción entre dos especies, analizando la dinámica de este modelo y estudiando su estabilidad. También hemos aprendido a utilizar las matemáticas para modelar problemas del mundo real y la importancia de los modelos matemáticos en varias disciplinas.

RECOMENDACIONES

Se puede extender los resultados a modelos...

BIBLIOGRAFÍA



M. A. Fernández Sanjuán (2016). Dinámica No Lineal, Teoría del Caos y Sistemas Complejos: una perspectiva histórica. *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat.* **Vol.** 109, N. 1?2, pp. 107-126.