Informe de Proyecto de Simulación de Eventos Discretos

Ernesto Alejandro Bárcena Trujillo
José Antonio Concepción Alvarez
Alejandro García González

9 de junio de 2024

1. Introducción

1.1. Breve Introducción

El proyecto tiene como objetivo realizar una simulación de un evento discreto. Para ello es escogió el problema número 7 del epígrafe 6 del libro Aplicando Teoría de Colas en Dirección de Operaciones [1]. Para ello se aplicarán conocimientos de simulación impartidos por las clases del curso de Simulación de la Facultad de Matématica y Computación. Se emplearan además técnicas y análisis del libro "Simulation" [2] que fue consultado como bibliografía.

1.2. El problema

La empresa "Computadoras Reunidas", que alquila ordenadores, considera necesario revisarlos una vez al año. La primera alternativa, con un coste de 750.000€ es hacer un mantenimiento manual en el que cada ordenador necesitaría un tiempo que sigue una distribución exponencial con una media de 6 horas. La segundo opción sería un mantenimiento con máquinas, con un coste de un millón de euros, en este caso el tiempo de mantenimiento es de 3 horas con una distribución exponencial. Para ambas alternativas los ordenadores llegan siguiendo una distribución de poisson 3 al día. El tiempo en que está parado un ordenador tiene un coste de 150€ por hora. ¿Qué alternativa debe elegir la empresa? Se asume que la empresa trabaja 24 horas, 365 días al año.

1.3. Análisis del modelo

Del planteamiento del problema podemos extraer los siguientes datos:

	Alternativa 1	Alternativa 2
Costo Inicial	750.000	1.000.000
Media de la Exponencial	6	3
Media de Poisson	3	3
Costo por Horas en Mantenimiento	150	150

Tabla 1: Variables que describen el problema.

En la Tabla 1, se aprecian las alternativas planteadas por el problema. Estas son similares, pero poseen valores distintos que influyen en el presupuesto de la empresa. Se necesita saber cuál de las dos opciones es más económica para la misma en el tiempo. Para ello se realizará una simulación con las distribuciones y datos proporcionados con el objetivo de dar una respuesta certera.

2. Detalles de Implementación

El problema se puede reducir a modelar la llegada de los ordenadores un proceso de revisión así como su estancia en una 'cola de espera' a su mantenimiento, además del mismo proceso de mantenimiento de cada uno. En la Tabla 1 se describen las distribuciones que siguen los fenómenos a simular. Se sabe que el arribo de ordenadores ocurre con una distribucion de Poisson con media de 3 al día. Para hacer esta simulación se utilizó las propiedades de equivalencia entre la Exponencial y la Poisson, con el objetivo de tener registrado el momento exacto en que llega cada ordenador. Esto permetirá mejorar el nivel de la precisión de la simulación al trabajar con valores más cercanos a un escenario real. Luego, para modelar la cola, se generará la exponencial correspondiente a cada una de las alternativas. En todos los casos se utilizará el método de la transformada inversa para obtener el valor de las distribuciones. Dada la naturaleza de los datos podemos utilizar la modelacion de un servidor simple [3]. Los eventos serían las llegadas y salidas de los ordenadores mientras que las variables serán aquellas que se utilizen para describir los instantes de tiempo, la cantidad entradas y salidas y finalmente los estados.

Dado que no se establece un rango de tiempo en el cual realizar las simulaciones, se harán iteraciones con un valor inicial de 30 días como criterio de parada. En dependencia de los resultados se harán nuevas experimentaciones las cuales serán abordadas con más rigor en la sección 3.

Para realizar las simulaciones se utilizará el lenguaje de programación Python, por su sencillez y legibilidad. A continuación se ofrece un pseudo-código de nuestra solución propuesta.

Algoritmo 1 Simulación del sistema

Definir los parámetros del sistema
λ ▷ tasa de llegadas
μ ▷ tasa de servicio
$t_{\max}$ ▷ tiempo límite de simulación
Inicializar variables:
$t = 0$ ▷ tiempo actual
$n_e = 0$ ▷ número de entradas
$n_s = 0$ ▷ número de salidas
$q = 0$ ▷ longitud de la cola
$W = 0$ ▷ tiempo de espera acumulado
$S = 0$ ▷ tiempo de servicio acumulado

Bucle principal:
$t_a \sim \text{Exp}(\lambda)$ ▷ Generar tiempo de llegada:
$t_s \sim \text{Exp}(\mu)$ ▷ Generar tiempo de servicio:
while $t \leq t_{\max}$ **do**
    if $t_a < t_s$ and $t_a \leq t_{\max}$ **then**
        Llegada:
        $t = t_a$.
        $n_e = n_e + 1$.
        $q = q + 1$.
        if la cola está vacía **then**
            $t_s \sim \text{Exp}(\mu)$.
            $t_s = t + t_s$.
        end if
        $W = W + q(t - t_a)$ ▷ Actualizar tiempo de espera acumulado
        $S = S + t_s$ ▷ Actualizar tiempo de servicio acumulado
    else if $t_s < t_a$ and $t_s \leq t_{\max}$ **then**
        Salida:
        $t = t_s$.
        $n_s = n_s + 1$.
        $q = q - 1$.
        if la cola no está vacía **then**
            $t_a \sim \text{Exp}(\lambda)$.
            $t_a = t + t_a$.
        else
            $t_a = t_{\max} + 1$.
        end if
    end if
end while
Comprobar si la simulación ha terminado: Si $t > t_{\max}$, calcular estadísticas.

3. Resultados y Experimentos

3.1. Hallazgos de la simulación

Se realizaron trienta iteraciones de simulaciones para distintos parámetros. Se promediaron algunas métricas para derterminar la factibilidad de una alternativa sobre otra, entre ellas el costo, máximo de ordenadores en cola y otros promedios. En la simulacion para los primeros 30 días se observa un mejor desempeño de la primera alternativa en cuanto a gastos. En la Figura 1 y 2 se puede observar una comparación entre los costos totales de ambas alternativas.

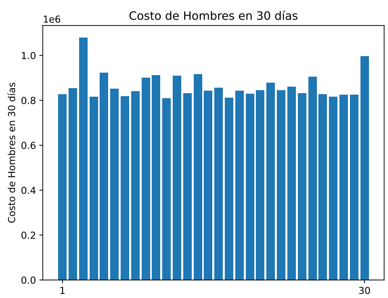

Figura 1: Costo de Alternativa 1 en 30 días.

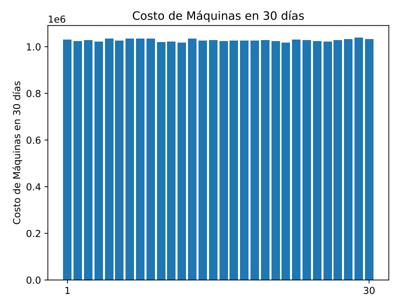

Figura 2: Costo de Alternativa 2 en 30 días.

La contratación de hombres abarata los costos debido a su presupuesto inicial. Además, la cola de espera de los ordenadores no llega a números picos elevados lo que implica un costo reducido en terminos de gastos por ordenadores fuera de servicio. Las siguientes gráficas representan los valores máximos de ordenadores en cola en todo el tiempo de la simulación.

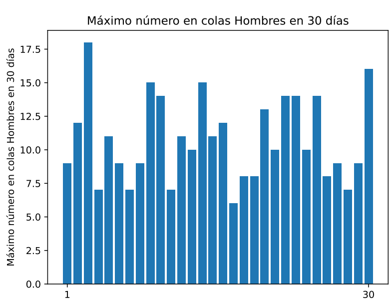

Figura 3: Máximo número en cola de Alternativa 1 en 30 días.

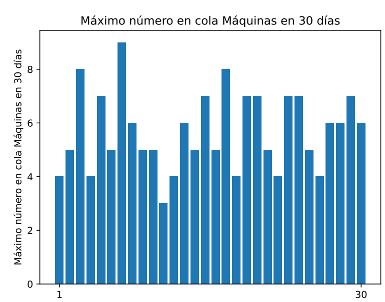

Figura 4: Máximo número en cola de Alternativa 2 en 30 días.

Podemos observar a que en los picos de máximos también existe un aumento en el gasto total para la Alternativa 1. Para la Alternativa 2, se observa una uniformidad en cuanto a gastos y picos máximos de cola, esto da indicios de la estabilidad de la misma en el tiempo.

Para un periodo de 30 días podemos concluir que la Alternativa 1 es más viable que la segunda. Con un promedio de costo positivo a favor de 12400€. Sin embargo, la segunda alternativa presenta mayor estabilidad en cuanto a cantidad máxima de ordenadores en espera.

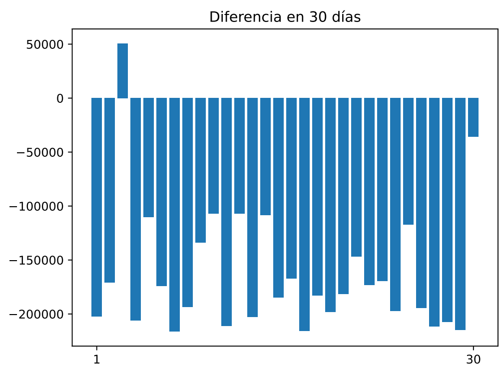

Figura 5: Diferencia de costo entre ambas alternativas (Costo de 2 - Costo de 1)

Dados estos resultados pudieran indicar que en periodos más largos de trabajo, el tiempo de espera de los ordenadores puede aumentar y por ende el precio total. Por lo cual fue necesario realizar nuevas experimentaciones. A continuación se presentan los datos obtenidos en simulaciones más prolongadas.

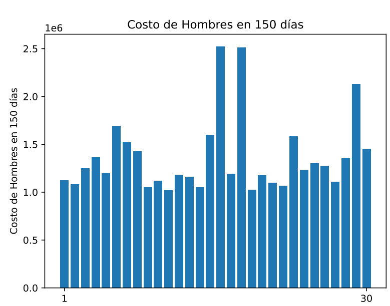

Figura 6: Costo de Alternativa 1 en 150 días.

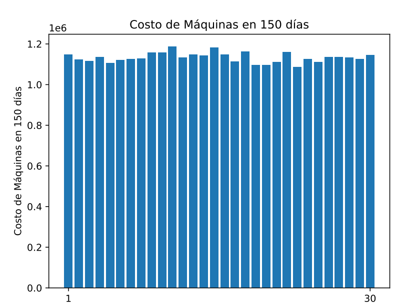

Figura 7: Costo de Alternativa 2 en 150 días.

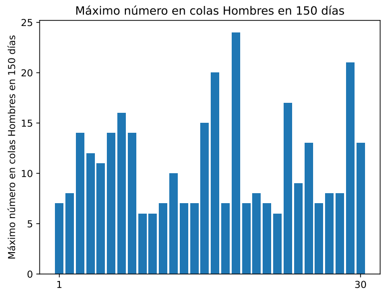

Figura 8: Máximo número en cola de Alternativa 1 en 150 días.

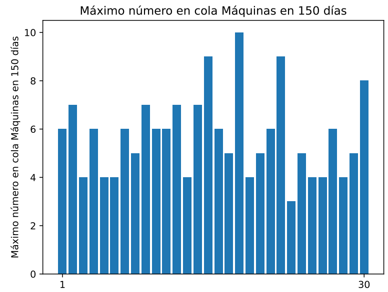

Figura 9: Máximo número en cola de Alternativa 2 en 150 días

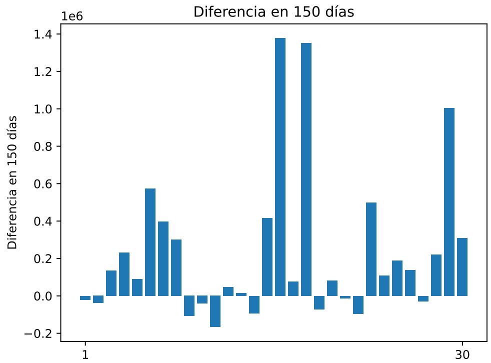

Figura 10: Diferencia entre ambas alternativas.

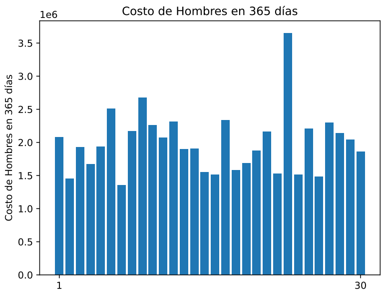

Figura 11: Costo de Alternativa 1 en 365 días.

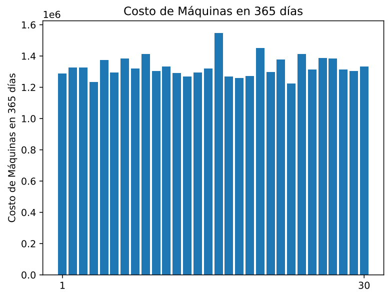

Figura 12: Costo de Alternativa 2 en 365 días.

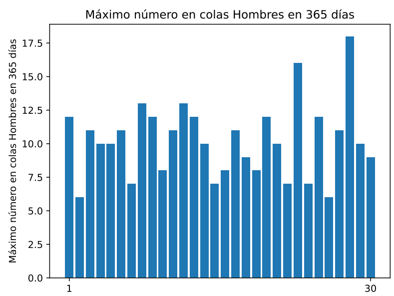

Figura 13: Máximo número en cola de Alternativa 1 en 365 días.

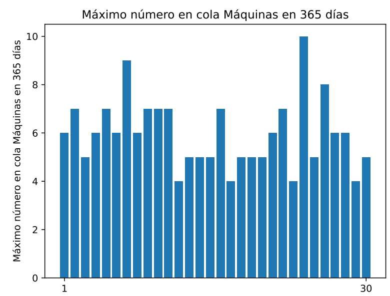

Figura 14: Máximo número en cola de Alternativa 2 en 365 días.

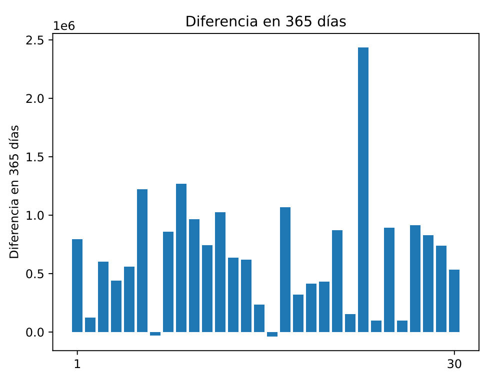

Figura 15: Diferencia entre ambas alternativas.

Se puede observar como a partir de las simulaciones por más 150 días los costos y el número máximo en una cola, se incrementan significativamente, al punto que la segunda alternativa sobrepasa a la primera en los indicadores de costos. En los períodos de un año observamos una tendencia similar. Esto es otro indicio que los tiempos de esperas en promedio de la Alternativa 1 deben ser mayores que los de la Alternativa 2.

Como podemos observar realizar un pago menor por el proceso de mantenimiento es factible a corto plazo, sin embargo, a medida que aumenta el tiempo esta ganancia se amortiza en comparación con la alternativa 2.

4. Modelo Matemático

Del estudio de materiales bibliográficos [1] sabemos que para un sistema de colas MM1 donde:

- λ es la tasa de llegada de clientes
- μ es la tasa de servicio de cada máquina
- N es el número de máquinas
- P_n es la probabilidad de que haya n clientes en el sistema
- L es la cantidad promedio de clientes en el sistema
- W es la cantidad promedio de tiempo de espera en el sistema
- L_q es la cantidad promedio de clientes en cola
- W_q es la cantidad promedio de tiempo de espera en cola

Sea $\rho = \lambda/\mu$, podemos calcular:

$$
\begin{aligned}
P_n &= (1-\rho)\cdot\rho^n \\
L &= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \\
W &= \frac{1}{\mu-\lambda} \\
L_q &= \frac{\lambda^2}{\mu\cdot(\mu-\lambda)} \\
W_q &= \frac{\rho}{\mu-\lambda}
\end{aligned}
$$

Otro resultado interesante es conocer cual es la probabilidad de que haya X o más elementos en el sistema, pues nos permitirá tomar decisiones respecto al dimensionamiento del mismo.

$P(n \leq X) = \rho^X$

En este problema, denotaremos a los parámetros λ_1, μ_1 y λ_2, μ_2 para las alternativas de emplear a los hombres como mano de obra y a las máquinas respectivamente (Las unidades están dadas en horas). Luego, tendríamos que:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 &= 3 \\ \mu_1 &= 4 \\ \mu_2 &= 8 \end{aligned}$$

Para el primer caso, los valores de los indicadores en cuestión serían:

$$\begin{aligned} P_n &= \left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ L &= \frac{3}{4-3} = 3 \\ W &= \frac{1}{4-3} = 1 \\ L_q = \frac{3^2}{4 \cdot (4-3)} &= \frac{9}{4} = 2{,}25 \\ W_q = \frac{\frac{3}{4}}{4-3} &= \frac{3}{4} = 0{,}75 \end{aligned}$$

Para el segundo caso:

$$\begin{aligned} P_n &= \left(1 - \frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^n \\ L &= \frac{3}{8-3} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \\ W &= \frac{1}{8-3} = \frac{1}{5} = 0{,}20 \\ L_q &= \frac{3^2}{8 \cdot (8-3)} = \frac{9}{40} = 0{,}225 \\ W_q &= \frac{\frac{3}{8}}{8-3} = \frac{3}{40} = 0{,}075 \end{aligned}$$

Al realizar una simulación se calcularon estos a valores para constatar el nivel de certeza del modelo. La siguiente tabla expresa una comparación entre los resultados obtenidos analíticamente y los de la simulación.

	Simulación 1	Alternativa 1	Simulación 2	Alternativa 2
W	1.07	1	0.19	0.2
W_q	0.88	0.75	0.14	0.075

Referencias

[1] José Pedro García Sabater. *Aplicando Teoría de Colas en Dirección de Operaciones*. 2015.

[2] Sheldon Ross. Simulation fifth edition by sheldon m. ross. In *Simulation*. Elsevier, 2013.

[3] Colectivo de Simulación. Simulación - simulación basada en eventos discretos. 2021.