Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Universidad de Sonora
Departamento de Física
Profesor:
Carlos Lizarraga Celaya
Alumno:
José Aarón Esquivel Ovilla
Expediente:
219210190

marzo del 2021

Introducción

En este reporte se resumira lo hecho a lo largo de las actividades 10,11,12, en las cuales se trabajo con la solución de ecuaciones diferenciales parciales haciendo uso del método de diferencias finitas y con diferentes condiciones de frontera para poder visualizar como son las soluciones, junto con esto, vimos las tres grandes familias principales de ecuaciones diferenciales parciales, una por atividad, en la cual se desarrollo un código para poder resolverla y aplicando diferentes críterios,las tres grandes familias de soluciones que se vieron son:

- Parabólicas
- Hiperbólicas
- Elípticas

Una ecuación diferencial parcial es aquella ecuación en la que se presentan las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$$

A paritr del resultado que obtengamos con esta ecuación, la clasificaremos en una de las tres familias que se mostraron anteriormente.

Tres grandes familias de ecuaciones diferenciales parciales

Parabólicas

Se clasifican como parabólicas si el determinante de la ecuación diferencial es:

$$B^2 - AC = 0$$

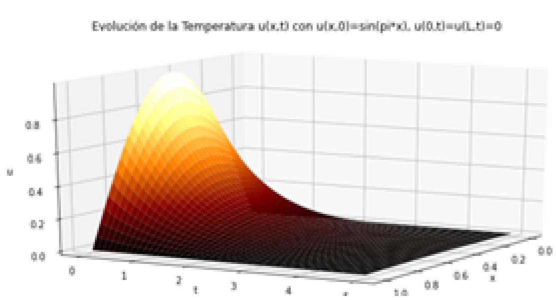
Estas ecuaciones diferenciales parciales se usan con problemas que involucran la conducción de calor y describen la distribución del calor a lo largo del transcurso del tiempo, sus derivadas son siempre continuas. Y tienen la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Para tres dimensiones tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

- k = es la constante de difusividad del material
- $\frac{\partial u}{\partial t}$ = es la razón de cambio de temperatura en un punto respecto del tiempo
- $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + ...$ = son las segundas derivadas parciales (conducciones térmica) de la temperatura respecto de x,y,z respectivamente;



Hiperbólicas

Este tipo de ecuaciones diferenciales parciales surgen cuando el determinante es $B^2 - AC > 0$ (dos soluciones reales) y tienen un problema de valor inicial bien definido para las primeras $n-1$ derivadas.
Un ejemplo de estos tipos de derivadas parciales son las ecuaciones de onda. La Ecuación de Onda describe el movimiento de ondas mecánicas (ondas de agua, ondas de sonido y ondas sísmicas) o también ondas electromagnéticas.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde c^2 es la velocidad de propagación de la información en el dominio de solución.
La solución a esta ecuación puede ser complicada pero se puede analizar como una combinación lineal de soluciones simples que son ondas planas sinusoidales con varias direcciones de propagación y longitudes de onda pero todas con la misma velocidad de propagación c. Este análisis es posible porque la ecuación de onda es lineal; de modo que cualquier múltiplo de una solución también es una solución, y la suma de dos soluciones cualesquiera es nuevamente una solución (principio de superposición).

Elípticas

Por último tenemos a las ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico, las cuales surgen cuando el determinante es $B^2 - AC < 0$. Estac ecuaciones no tienen curvas características reales, curvas a lo largo de las cuales no es posible eliminar al menos una segunda derivada de u, Dado que las curvas características son las únicas curvas a lo largo de las cuales las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales con parámetros suaves pueden tener derivadas discontinuas, las soluciones de ecuaciones elípticas no pueden tener derivadas discontinuas en ninguna parte. Lo que significa que las ecuaciones elípticas son adecuadas para describir estados de equilibrio, donde las discontinuidades ya se han suavizado.
Un ejemplo de estas ecuaciones es la ecuación de Laplace y la ecuación de Poisson(generalización de la ecuación de Laplace). Y tiene la siguiente forma para coordenadas rectangulares:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Tipos de condiciones de frontera

Estas condiciones son las condiciones que deben satisfacer nuestra ecuación al momento de evaluarla en los puntos de frontera.

Tipo Dirichlet

Este tipo de frontera es una condición que lleva el nombre de Peter Gustav Lejeune Dirichlet.Cuando en una ecuación diferencial ordinaria o una en derivadas parciales, se le especifican los valores de la solución que necesita la frontera del dominio.
En las ecuaciones diferenciales ordinarias, tenemos que estas condiciones tienen la forma:

$$y(0) = \alpha_1$$

$$y(1) = \alpha_2$$

Y para las ecuaciones diferenciales parciales:

$$y(x) = f(x) \forall x \epsilon \partial\Omega$$

Este tipo de condiciones tiene numerosas aplicaciones tales como:

- Ingeniería mecánica y civil (curva elástica), donde un extremo de una viga está fija en el espacio.
- Termodinámica, donde una superficie tiene una temperatura fija.
- Electrostática, donde un nodo de un circuito tiene un voltaje fijo o constante.

Tipo Neumann

Es un tipo de condición de frontera o contorno, llamada así en alusión a Carl Neumann. Se presenta cuando a una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales, se le especifican los valores de la derivada de una solución tomada sobre la frontera o contorno del dominio.
En las ecuaciones diferenciales ordinarias, las condiciones de frontera de tipo Neumann pueden ser:

$$\frac{dy}{dx}(0) = \alpha_1$$

$$\frac{dy}{dx}(1) = \alpha_2$$

Para ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\partial y}{\partial n}(x) = f(x) \forall x \epsilon \partial\Omega$$

Donde n es la normal a la frontera $\partial\Omega$ y f es una función escalar.

Tipo Robin

Las condiciones de tipo Robin son una combinación de las condiciones de tipo Dirichlet y las condiciones de tipo Neumann. Denominado así en honor a Victor Gustave Robin. Es el contraste de la condiciones de frontera mixtas, las cuales son condiciones de frontera de diferentes tipos especificadas en diferentes subconjuntos de la frontera. Las condiciones de frontera de Robin también se denominan condiciones de frontera de impedancia, por su aplicación en problemas electromagnéticos. Si tomamos a Ω como el dominio en el cual se resuelve la ecuación y $\partial\Omega$ como su frontera, entonces su condición esta dada por:

$$au + b\frac{\partial u}{\partial n} = g$$

Sobre $\partial\Omega$
Las condiciones de frontera de Robin se utilizan frecuentemente para resolver problemas de Sturm-Liouville que aparece en muchos contextos en la ciencia y la ingeniería.

Método de diferencias finitas

La aproximación de las derivadas por diferencias finitas desempeña un papel central en los métodos de diferencias finitas del análisis numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales con la aproximación de derivadas tanto el dominio espacial como el intervalo de tiempo se discretizan o se dividen en un número finito de pasos, y el valor de la solución en estos puntos discretos se aproxima resolviendo ecuaciones algebraicas que contienen diferencias finitas y valores de puntos cercanos.

Solución de la ecuación de calor

Resolviendo la Ecuación de Calor mediante Diferencias Finitas.

El método de diferencias finitas utiliza Series de Taylor para aproximar las derivadas.

Aproximación de la primer derivada.

Si se conoce el valor de una función $f(x)$ en un punto x_0, se puede conocer el valor en una vecindad $x_0 + h$, con h pequeño, utilzando una Serie de Taylor

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

de la ecuación anterior, obtenemos el valor aproximado de la primer derivada

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

El término $\mathcal{O}(h^2)$ denota términos de orden h^2 y superior.

Esta aproximación de la primera derivada, se le conoce como *diferencias finitas de* $f'(x_0)$ *hacia enfrente*, porque involucra un punto hacia enfrente en la derivada.
De la misma forma se obtiene el término de diferencias finitas hacia atrás

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Podemos promediar las dos ecuaciones anteriores y se obtiene una *diferencia finita centrada* de orden superior

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^3)$$

Aproximación de la segunda derivada

Podemos utilizar esta última ecuación para calcular la aproximación de la segunda derivada

$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

y substituimos $f(x_0 + h)$ por una *diferencia finita hacia atrás*

$$f'(x_0 + h) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

y la derivada $f'(x_0)$ por una *diferencia finita hacia atrás*

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Finalmente obtenemos la *diferencia finita centrada de segundo orden* para $f''(x_0)$ que involucra los valores en 3 puntos.

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Solución de la Ecuación de Calor por un método híbrido (EDP ¿EDO).
Podemos escribir la ecuación del calor como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\
&\approx \kappa \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}
\end{aligned}
$$

y luego integrar en el tiempo como si tuviéramos una ecuación diferencial ordinaria.

Para un determinado punto (jh,t), tendremos la ecuación diferencial ordinaria $u(jh,t) = u_j(t)$

$$
\frac{du_j(t)}{dt} = \kappa \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2}
$$

Para la cual proporcionamos la condición inicial al tiempo $t = 0$

$$
u(0) = f(x)
$$

Y condiciones a la frontera: $u_0 = c_1, u_N = c_2$, para el tipo de Dirichlet Del tipo Neumann, $du_0/dx = 0$ ó $dx_N/dx = 0$, para casos de equilibrio térmico.
Condiciones a la frontera tipo Neumann

Tenemos que definir cómo estimar la derivada en la frontera, digamos en la frontera $x = L$. Recordando que usamos una aproximación de segundo orden para $\partial^2 u/\partial x^2$, debemos encontrar una aproximación para la primer derivada también de orden h^2

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} = 0 \\
u_{N+1} &= u_{N-1}
\end{aligned}
$$

Formalmente u_{N+1} esta "fuera"de nuestro dominio, pero utilizamos esto para determinar la ecuación que se satisface en la frontera, reemplazando $u_{N+1} = u_{N-1}$ en la ecuación del calor obteniendo

$$
\frac{du_N(t)}{dt} = \kappa \frac{2u_{N-1}(t) - 2u_N(t)}{h^2}
$$

link de la actividad 10
Actividad10

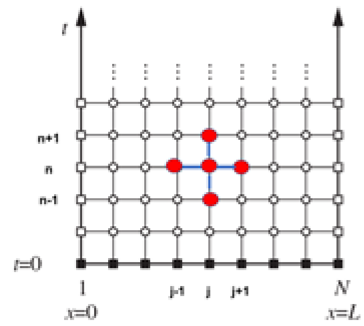
Solución de la ecuación de onda

Solución de la Ecuación de Onda en una dimensión por el Método de Diferencias Finitas.

Comenzamos aproximando las segundas derivadas por diferencias finitas centradas de segundo orden.
Si h es el incremento en la dirección $x = \Delta x$ y $k = \Delta t$ es el incremento en el tiempo. Entonces en un punto de la malla discreta (x,t) tendremos

$$
\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} = c^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}
$$

Esta ecuación define un esténcil computacional de 5 puntos. Lo que nos permite calcular los valores de $u(x,t)$ en el espacio discretizado: $x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_M = L, t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_N = T$, espaciados uniformamente por $h = \Delta x$ y $k = \Delta t$.



Primero tendremos que calcular el primer nivel de $u(x, k)$ en $t = k$, usando sólo la información de la condición inicial, con otro esténcil de 4 puntos similar al que utilizamos en la Ecuación de Calor.
Una vez hecho esto, ya podremos calcular todos los valores futuros de $u(x, t+k)$ ya que se conocen los valores de $u(x, t)$ y $u(x, t-k)$.
Ecuación de Onda en diferencias finitas.
Si definimos $u(x, t) = u(jh, nk) = u_j^n$, la ecuación de onde la podemos expresar.

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

Y despejamos para el valor desconocido u_j^{n+1}

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + C^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Donde hemos introducido la constante $C^2 = c^2k^2/h^2$, conocida como la constante de Courant.

Como no podemos aplicar el esténcil de 5 puntos pata calcular el primer nivel usaremos un esténcil similar de 4 puntos con la información de la condición inicial para calcular $u(x, t = k)$.
Remplazamos la condición inicial por diferencias finitas centradas de segundo orden

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j^0 = \frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2k} = 0$$

Lo que indica que $u_j^1 = u_j^{-1}$.
Sustituimos la igualdad anterior en la ecuación de onda y nos queda que

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{C^2}{2}(u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0)$$

Y ya tendremos dos niveles de valores para $u(x, t)$ para calcular los valores de u_j^{n+1} usando el esténcil de 5 puntos. Link de la actividad 11
Actividad11

Solución de la Ecuación de Poisson

Se busca la solución de la ecuación

$$-\nabla^2 u = f$$

dadas las condiciones en la frontera Γ

$$u(x, y)_\Gamma = g(x, y)$$

No requerimos una condición inicial, pues no hay dependencia en el tiempo. Sólo requerimos conocer los valores a la frontera.

Supongamos que tenemos un dominio rectangular cartesiano $\Gamma = (a,b) \times (c,d)$, sobre el cual generamos una malla

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih_x \quad i = 0,1,2,\ldots,M \\ y_k &= c + kh_y \quad k = 0,1,2,\ldots,N \end{aligned}$$

donde los incrementos h_x y h_y estan definidos como

$$\begin{aligned} h_x &= \frac{(b-a)}{M} \\ h_y &= \frac{(d-c)}{N} \end{aligned}$$

Si aproximamos las derivadas parciales de segundo orden de la ecuación de Poisson por diferencias finitas centradas de segundo orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i,y_k)}{\partial x^2} &= \frac{u(x_{i+1},y_k) - 2u(x_i,y_k) + u(x_{i-1},y_k)}{h_x^2} + \mathcal{O}(\langle_\S^\ni) \\ \frac{\partial^2 u(x_i,y_k)}{\partial y^2} &= \frac{u(x_i,y_{k+1}) - 2u(x_i,y_k) + u(x_i,y_{k-1}}{h_y^2} + \mathcal{O}(\langle_\dagger^\ni) \end{aligned}$$

Si denotamos por $U_{i,k}$ el valor aproximado de $u(x_i,y_k)$, la ecuación de Poisson se puede aproximar por

$$-\frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h_x^2} - \frac{U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1}}{h_y^2} = f_{i,k} + \mathcal{O}(\langle_\S^\ni, \langle_\dagger^\ni)$$

Simplificando la expresión anterior y eliminando errores de orden superior, tendremos

$$\begin{aligned} - &\left(\frac{U_{i+1,k} + U_{i-1,k}}{h_x^2} + \frac{U_{i,k+1} + U_{i,k-1}}{h_y^2} \right) \\ + &\ 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) U_{i,k} = f_{i,k} \end{aligned}$$

Donde los valores de $i = 1,2,\ldots,M-1$ y $k = 1,2,\ldots,N-1$ representan los puntos del interior del dominio. Los valores en la frontera ya han sido determinados en la definición del problema.

La ecuación anterior requiere un esténcil de 5 puntos como el que ya hemos utilizado con anterioridad.

Supongamos por conveniencia que $h_x = h_y = h$, entonces el algoritmo para resolver la ecuación de Poisson se simplifica

$$4U_{i,k} - U_{i-1,k} - U_{i,k-1} - U_{i+1,k} - U_{i,k+1} = h^2 f_{i,k}$$

Resolvamos el caso $M = N = 5$.

$$A\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

Definimos las siguientes matrices de los puntos internos

$$\mathbf{U_1} = \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U_2} = \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U_3} = \begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix};$$

las cuales las integramos en un vector $\mathbf{U}$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U_1} \\ \mathbf{U_2} \\ \mathbf{U_3} \end{bmatrix}$$

Los puntos de la frontera se encuentran definidos por las condiciones de Dirichlet
Primer grupo de valores internos:

$$\begin{aligned} i=1, k=1 &\quad : \quad 4U_{1,1} - U_{1,2} - U_{2,1} = h^2 f_{1,1} + U_{1,0} + U_{0,1} \\ i=2, k=1 &\quad : \quad 4U_{2,1} - U_{1,1} - U_{3,1} - U_{2,2} = h^2 f_{2,1} + U_{2,0} \\ i=3, k=1 &\quad : \quad 4U_{3,1} - U_{2,1} - U_{3,2} = h^2 f_{3,1} + U_{3,0} + U_{4,1} \end{aligned}$$

Matricialmente el sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{1,0} + U_{0,1} \\ U_{2,0} \\ U_{3,0} + U_{4,1} \end{bmatrix}$$

De forma similar, trabajando en la segunda columna interior obtenemos una ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ f_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{0,2} \\ 0 \\ U_{4,2} \end{bmatrix}$$

Por último de la tercera columna interior obtenemos la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,3} \\ f_{2,3} \\ f_{3,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{0,3} + U_{1,4} \\ U_{2,4} \\ U_{4,3} + U_{3,4} \end{bmatrix}$$

En resumen, las expresiones anteriores se pueden expresar como

$$-\mathbf{U}_{i-1} + B\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i+1} = h^2 \mathbf{f}_i + \mathbf{g}_i$$

Donde B es la matriz tridiagonal $(M-2) \times (M-2)$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

El vector $\mathbf{g}$ surge de los valores de la frontera superior e inferior

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{0,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{M,i} \end{bmatrix}$$

Cuando $i = 1$ ó $i = M - 1$, los valores de las fornteras verticales se aplican

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} g_{0,1} \\ g_{0,2} \\ \vdots \\ g_{0,M-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{U}_M = \mathbf{g}_M = \begin{bmatrix} g_{M,1} \\ g_{M,2} \\ \vdots \\ g_{M,M-1} \end{bmatrix}$$

Finalmente, la ecuación matricial de diferencias se puede compactar como

$$A\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

Donde la matriz A es una matriz de estructura tridiaginal de $(M-2)^2 \times (M-2)^2$ de la forma

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} B & -I & & & \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B & -I \\ & & & -I & B \end{bmatrix}$$

Y la matriz de valores desconocidos $\mathbf{U}$ y valores conocidos $\mathbf{F}$ son de dimensiones $R^{(M-2)^2}$.

La matriz I es la matriz identidad $(M-2)\times(M-2)$ y el vector $\mathbf{F}$ de la derecha de dimensiones $(M-2)^2 \times 1$, está dado por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 + (g_0 + g_1)/h^2 \\ f_2 + g_2/h^2 \\ \vdots \\ f_{M-2} + g_{M-2}/h^2 \\ f_{M-1} + (g_{M-1} + g_M)/h^2 \end{bmatrix}$$

A y B sólo guardar los valores distintos de cero.
Link de la actividad 12
Actividad12

Resumen y conclusiones

En estas tres últimas actividades pudimos trabajar con la solución de ecuaciones diferenciales parciales y dependiendo del resultado del determinante las clasificamos en una de las tres grandes familias de ecuaciones diferenciales parciales que se nos enseñaron, trabajamos principalmente con casos de tipo parabólico, elíptico y hiperbólico, gracias a los programas hechos en Fortran, pude ver como se comportaban esas tres diferentes soluciones y como eran sus problemas de frontera, junto con poder interpretar dichos resultados mediante la gráfica resultante.
Aunque estos temas los vimos en muy poco tiempo y considerando que son nuevos temas para mí y requieren de un tipo de conocimiento más amplio en ello, creo que pude aprender lo necesario para captar mejor estas escuaciones, pero tengo que informarme más, ya que esto es lo que usando en el resto de la carrera y es importante que lo aprenda bien

Referencias bibliogrficas

- https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equation
- https://en.wikipedia.org/wiki/Parabolic_partial_differential_equation
- https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_partial_differential_equation
- https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_partial_differential_equation
- https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation
- https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation
- https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace%27s_equation

- https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_boundary_condition
- https://en.wikipedia.org/wiki/Neumann_boundary_condition
- https://en.wikipedia.org/wiki/Robin_boundary_condition
- https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method
- https://www.ugr.es/~prodelas/ftp/ETSICCP/Resoluci
- http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/uami/hect/Ecuaciones_en_Derivadas_Parciales/libro_Gabrile.pdf