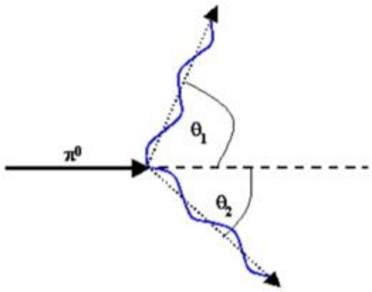
Lista Cinemática

José Luís Affonso

Exercício 0

Usando o referencial do laboratório e a conservação de energia e do momentum.



$$
\begin{aligned}
E_{\pi^0} &= E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} \\
\gamma m_{\pi^0} c^2 &= hf_1 + hf_2 \\
\gamma m_{\pi^0} v &= hf_1 \cos\theta_1/c + hf_2 \cos\theta_2/c \\
\frac{hf_1 \sin\theta_1}{c} &= \frac{hf_2 \sin\theta_2}{c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\theta_2 : (\gamma mv - hf_1 \cos\theta_1/c)^2 &= (hf_2/c)^2\left(1-\sin^2\theta_2\right) = (hf_2/c)^2 - (hf_1/c)^2 \sin^2\theta_1 \\
hf_2 : (\gamma mv - hf_1 \cos\theta_1/c)^2 + (hf_1/c)^2 \sin^2\theta_1 &= (hf_2/c)^2 = (\gamma mc - hf_1/c)^2
\end{aligned}
$$

Resolvendo, obtemos:

$$\boldsymbol{hf_1 = \frac{mc^2}{2\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)\cos\theta_1} = E_\gamma}$$

Exercício 1

Com as variáveis de Maldestam:

$$s = (p_{1L} + p_{2L})^2 = p_{1L}^2 + p_{2L}^2 + 2\left((p_{1L})^0 (p_{2L})^0 - \vec{p}_{1L} \cdot \underbrace{\vec{p}_{2L}}_{=0}\right)$$

Sabendo que:

$p_1^2 = m_1^2$ e $p_2^2 = m_2^2$; $\vec{p}_{1L} = E_1^{lab}$

$$\boldsymbol{E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab} m_2}}$$

Exercício 2

Sabendo que a E_1^{lab} para valores grandes, a soma dentro da raiz é determinada pelo fator logo multiplicado pela energia, logo as massas são desprezadas.

$$\sqrt{2E_1^{lab}m_2}$$

Exercício 3

Sabendo que $p_{i\mu}p^{i\mu} = \left(\frac{E_i^0}{c}\right)^2$

$$(E_1^0)^2 - 2(E_1E_3/c^2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3) + (E_3^0/c)^2 = (E_4^0)^2 - 2(E_2E_4/c^2 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4) + (E_2^0/c)^2$$

Introduzindo o ângulo de espalhamento (θ e ϕ)

$$(E_1^0)^2 - 2(E_1E_3 - c^2p_1p_3\cos\theta) + (E_3^0)^2 = (E_2^0)^2 - 2(E_2E_4 - c^2p_2p_4\cos\phi) + (E_4^0)^2$$

No referencial do Centro de Massa fazemos $p_2 = 0$ e $E_2 = E_2^0$

$$(E_1^0)^2 - 2(E_1E_3 - c^2p_1p_3\cos\theta) + (E_3^0)^2 = (E_2^0)^2 - 2E_2^0E_4 + (E_4^0)^2$$

Como a energia total do sistema é conservada e fazendo $c = 1$

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 = E_1 = E_2^0$$
$$E_4 = E_1 + E_2^0 - E_3$$

Usando a relação da variável de Mandelstam,

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2$$

e fazendo

$$E = m$$

Logo,

$$\boldsymbol{E_T = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2E_1E_2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left(1 - \frac{|\vec{p}_1|}{E_1}\frac{|\vec{p}_2|}{E_2}\cos\theta\right)}}$$

Exercício 4

Temos do exercício anterior:

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1 p_2 \cos\theta$$

O produto escalar é igual a 1, logo:

$$2E_1E_2\left(1 - \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1}{E_1E_2}\right) = 0$$

Onde E = m, temos:

$$\boldsymbol{E_T = \sqrt{s} = 2E_1}$$

Exercício 5

$$\begin{aligned}
p_1^\mu &= (E_p, \vec{p}_1) \\
p_2^\mu &= (m_p, \vec{0}) \\
s = (p_1^\mu + p_2^{mu})^2 &= [(E_p, \vec{p}_1) + (m_p, \vec{0})]^2 \\
s &= (E_p + m_p)^2 - \vec{p}^2 \\
s &= E_p^2 + 2E_pm_p + m_p^2 - \vec{p}^2 \\
s &= 2m_p^2 + 2E_pm_p \\
\sqrt{s} &= \sqrt{2m_p^2 + 2E_pm_p} \approx \sqrt{2E_pm_p}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\sqrt{s} = 14.2\mathrm{GeV}}$$

b) Seria necessário apenas a energia do centro de massa, na ordem de 7,1 GeV

c) Temos o Atlas/CMS e o LHCB. A escolha depende do objetivo de uso, além disso tem a facilidade e são mais baratos para construir.

Exercício 5 (a)

Usando a solução do exercício 4, temos:

$$\sqrt{s} = 2E_1 = 2 \cdot 3.5\text{TeV} = 7\text{TeV}$$

Exercício 6

$\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$

- **Canal - s**

$$\begin{aligned}
s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 + p_2^2 \\
s = m_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 + m_2^2 \\
s = 2m_1^2 + 2(E_1E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \\
s = 2m_1^2 + 2(E_1^2 + p_1^2) \\
s = 2m_1^2 + 2((m_1^2 + p_1^2) + p_1^2) \\
\boldsymbol{s = 4(m_2 - p^2)}
\end{aligned}$$

- **Canal - t**

$$\begin{aligned}
t = (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 + p_3^2 \\
t = 2m_1^2 - 2E_1E_3 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 \\
t = 2m_1 - 2E_1^2 + 2p_1^2 \cos\theta \\
\boldsymbol{t = -2p^2(1 - \cos\theta) \leq 0}
\end{aligned}$$

- **Canal - u**

$$\begin{aligned}
u = (p_1 - p_4)^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4 \\
\boldsymbol{u = -2p^2(1 + \cos\theta)}
\end{aligned}$$

Exercício 7

Consideramos

$$p_i^2 = m_i^2$$

Onde i = 1,2,3,4

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$
$$p_1 = -p_2 + p_3 + p_4$$

Utilizando algumas relações anteriores e fazendo a soma s + t + u

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4$$

Onde: $m_3 = M_1$ e $m_4 = M_2$

$$\boldsymbol{s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2}$$

Exercício 8

Usando as transformadas de Lorentz inversa:

$$y = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\gamma(E' + \beta p'_z) + \gamma(\beta E' + p'_z)}{\gamma(E' + \beta p'_z) - \gamma(\beta E' + p'_z)}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{E' + p'_z}{E' - p'_z}\right] + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+\beta}{1-\beta}\right]$$

$$y = y' + y_{cm}$$

Desenvolvendo:

$$\ln\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \tanh^{-1}\left(\tanh\left(\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} - \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}\right) =$$

$$= \tanh^{-1}\left(\frac{(1-\beta)-(1+\beta)}{(1-\beta)+(1+\beta)}\right) = -\tanh^{-1}\beta$$

$$\boldsymbol{y' = y - \tanh^{-1}\beta}$$

Exercício 8.1

Usando a equação do momentum:

$$p_2 = P - p_1$$
$$p_2^2 = (P - p_1)^2 = P^2 - 2P \cdot p_1 + p_1^2$$
$$m_2^2 = M^2 - 2ME_1 + m_1^2$$

Onde $P.p_1 = M.E_1$

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}$$

Onde:

$$p_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$$

Então:

$$E_1 = \frac{\sqrt{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4M^2 m_1^2}}{2M} = \frac{[(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)]^{1/2}}{2M}$$

Exercício 9

$$\left.\begin{array}{r}m_\pi = 0.1396\\ m_\mu = 0.1057\\ m_\nu = 0.0000\end{array}\right\}$$

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\nu^2}{2m_\pi} = 0.1098\text{GeV}$$

$$E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\nu^2}{2m_\pi} = 0.0298\text{GeV} = p_\mu = p_\nu 7$$