Nome:José Luís Affonso
Data:19/09/2021

Problema 1

$$u = f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}(x-\bar{x}) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}(y-\bar{y}) \tag{1}$$

O valor esperado para $u = f(x,y)$ considerando o somatório sob as N estimativas, é dado por.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i = \bar{u} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\bar{x},\bar{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x}) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y}) \tag{2}$$

onde o primeiro termo é igual a $Nf(\bar{x},\bar{y})$, o segundo termo é igual a 0 para $\bar{x}-\bar{x}$, o mesmo para o terceiro termo $\bar{y}-\bar{y}$

o erro associado a cada medida indireta de u é dado pelo desvio padrão

$$\sigma_u^2 = \bar{u^2} - \bar{u}^2 \tag{3}$$

o valor de $\bar{u}^2$ pode ser obtido ao evelar a função 2 ao quadrado

$$\bar{u}^2 = f^2(\bar{x},\bar{y}) \tag{4}$$

o calculo para $\bar{u^2}$ éd ado utilizando a equação 1.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^2 = \bar{u^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[f(\bar{x},\bar{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}(x_i-\bar{x}) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}(y_i-\bar{y})\right]^2 \tag{5}$$

o quadrado da soma entre 3 termos é dado por

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \tag{6}$$

logo

$$\bar{u^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[f^2(\bar{x},\bar{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}(x_i-\bar{x})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}(y_i-\bar{y})^2 + 2f(\bar{x},\bar{y})\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}(x_i-\bar{x}) + \right. \tag{7}$$

Fazendo cada atermo separado, teremos:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f^2(\bar{x},\bar{y}) = f^2(\bar{x},\bar{y}) \tag{8}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}(x_i-\bar{x})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}\sigma_x^2 \tag{9}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}(y_i-\bar{y})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}\sigma_y^2 \tag{10}$$

$$2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\bar{x},\bar{y})\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}(x_i-\bar{x}) = 2f(\bar{x},\bar{y})\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x}) = 0 \tag{11}$$

$$2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\bar{x},\bar{y})\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}(y_i-\bar{y}) = 2f(\bar{x},\bar{y})\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y}) = 0 \tag{12}$$

$$2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}(x_i-\bar{x})\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}(y_i-\bar{y}) = 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \tag{13}$$

$$2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\sigma_{xy} \tag{14}$$

σ_{xy} é a media dos produtos de desvio de (x_i, y_i) em relação a suas respectivas médias, é chamda de covariância.

Substituindo na expressão para u, teremos:

$$\bar{u^2} = f^2(\bar{x},\bar{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}\sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\sigma_{xy} \tag{15}$$

substituindo na equação 3, teremos

$$\sigma_u^2 = \bar{u^2} - \bar{u}^2 = f^2(\bar{x},\bar{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}}\sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\sigma_{xy} - f^2(\bar{x},\bar{y}) \tag{16}$$

Logo

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}} \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}} \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}} \sigma_{xy} \tag{17}$$

o erro da media é dado por

$$\sigma_{\bar{u}} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{N}} \tag{18}$$

portando

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \frac{\sigma_u^2}{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}} \frac{\sigma_x^2}{N} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}} \frac{\sigma_y^2}{N} + \frac{2}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}} \sigma_{xy} \tag{19}$$

onde $\sigma_x^2/N = \sigma_{\bar{x}}^2$ e $\sigma_y^2/N = \sigma_{\bar{y}}^2$
Logo

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}} \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}} \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}} \sigma_{xy} \tag{20}$$

Problema 2
i) $u = x \pm y \rightarrow \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 + 2r\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}}}$
como $u = f(x, y) = x \pm y$, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \pm y) = 1 \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}} = 1 \tag{21}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x \pm y) = \pm 1 \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}} = \pm 1 \tag{22}$$

substituindo na equação (20)

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N}\sigma_{xy} \tag{23}$$

Podemos encontrar r também pela covariância.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \rightarrow \sigma_{xy} = r\sigma_x\sigma_y \tag{24}$$

Logo

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}\frac{\sigma_y}{\sqrt{N}} \tag{25}$$

$$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r\sigma_x\sigma_y} \tag{26}$$

ii)
$u = xy$ ou $u = \frac{x}{y}$
vamos considerar primeiro $u = f(x, y) = xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (xy)}{\partial x} = y \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}} = \bar{y} \tag{27}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (xy)}{\partial y} = x \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}} = \bar{x} \tag{28}$$

substituindo em 20

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \bar{y}^2\sigma_{\bar{x}}^2 + \bar{x}^2\sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N}\bar{y}\bar{x}\sigma_{xy} \tag{29}$$

colocando $(\bar{x}\bar{y})^2$ em evidencia e lembrando que $\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}\bar{y}$, teremos:

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = (\bar{x}\bar{y})^2\left[\frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{\bar{x}^2} + \frac{\sigma_{\bar{y}}^2}{\bar{y}^2} + \frac{2}{N}\frac{\sigma_{xy}}{\bar{x}\bar{y}}\right] \rightarrow \left(\frac{\sigma_{\bar{u}}}{\bar{u}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 + \frac{2}{N}\frac{\sigma_{xy}}{\bar{x}\bar{y}} \tag{30}$$

Rescrevendo novamente a covariância

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 + 2r\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)} \tag{31}$$

Agora considerando $u = f(x,y) = \frac{x}{y}$, iremos ter:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} = \frac{1}{y} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}} = \frac{1}{\bar{y}} \tag{32}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(xy)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}} = -\frac{\bar{x}}{\bar{y}^2} \tag{33}$$

substituindo em 20 teremos:

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{\bar{y}^2} + \frac{\bar{x}^2\sigma_{\bar{y}^2}}{\bar{y}^4} + \frac{2}{N}\frac{\bar{x}}{\bar{y}^3}\sigma_{xy} \tag{34}$$

Colocando $\left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right)^2$

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right)^2\left[\frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{\bar{x}^2} + \frac{\sigma_{\bar{y}^2}}{\bar{y}^2} + \frac{2}{N}\frac{1}{\bar{x}\bar{y}}\sigma_{xy}\right] \tag{35}$$

Rescrevendo a covariância

$$\left(\frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|}\right) = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 - 2r\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}\bar{x}}\right)\left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{N}\bar{y}}\right) \tag{36}$$

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 - 2r\left(\frac{\sigma_x}{\bar{x}}\right)\left(\frac{\sigma_y}{\bar{y}}\right)} \tag{37}$$

Juntando ambas as equações, teremos para um $u = xy^{\pm 1}$:

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 \pm 2r\left(\frac{\sigma_x}{\bar{x}}\right)\left(\frac{\sigma_y}{\bar{y}}\right)} \tag{38}$$

problema 3

precisamos combinar estimativas independentes em um novo mesmo valor referencial, combinação essa que seja tal que as estimativas com menores erros ou melhores erros contribuam mais que as de maior erro ou piores erros.

o metodo a ser utilizado é parecida com ao método dos minimos quadrados. A tarefa é minimizar a quantidade S(a), dada pela equação abaixo, ou seja, determinar o valor constante a que minimiza S(a).

$$S(a) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(x_i - a)}{\sigma_i} \right]^2 \tag{39}$$

Para determinar o ponto de mínimo, derivamos S(a) em relação a a e igualamos a zero:

$$\frac{dS(a)}{da} = -2 \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - a)}{\sigma_i^2} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - a)}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} - a \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} = 0 \tag{40}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{41}$$

para o valor medio combinada de $\bar{x}$ que tem o menor desvio padrão relativo com as estimativas do conjunto x, será

$$\bar{x} = a = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{42}$$

Precisamos achar o valor minimo, não maximo e nem o ponto de inflexão, por tanto:

$$S(a) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(x_i - a)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{x_i^2 - 2x_i a + a^2}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - 2a \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} + a^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} > 0 \tag{43}$$

A função S(a) é quadrática em a e sempre positiva, dado que é definida como a soma de quadrados de números reais, que são sempre positivos. Portante, S(a) é uma parábola de concavidade para cima, o que impõe apenas um ponto de mínimo.

Para encontrar o desvio-padrão das amostras combinadas, vamos definir as seguintes variáveis:

$$\frac{1}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{44}$$

$$\omega_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 \tag{45}$$

na fórmula da media, teremos:

$$\bar{x} = a = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^2 x_i}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i \tag{46}$$

utilizando a equações demonstrada anteriormente para a propagação do erro, teremos:

$$\sigma_{\bar{x}^2} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^4 \sigma_i^2 = \sigma^4 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} = \sigma^2 \tag{47}$$

Logo, teremos:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}} \tag{48}$$

i) a)(14,18)

R:(16-2,16+2)→(16-σ,16+σ)

nivel de confiança de 68,3

b)(12,16)

R:(16-4,16+0)→(16-2σ,16+0σ)

nível de confiança de $\frac{95{,}5\%}{2} = 47,75\%$ correspondendo a metade do intervalo de (16+2σ,16+2σ)

c) (18,20)

R:Nível de confiança de $95,5\%/2 - 68,3\%/2$ correspondendo ao intervalo de (16+1σ,16+2σ)

ii) O conjunto abaixo representa cinco medidas da aceleração da gravidade g em m/s^2

$$\{9,90; 9,68; 9,57; 9,72; 9,80\} \tag{49}$$

Media: 9,73
Erro padrão: 0,05564
Estimativa Padrão: (9,73±0,06)m/s^2

iii) a estimativa padrão para a f.e.m da pilha é

Média: 1,714 V
Erro Padrão 0,031241
Estimativa padrão: (1,71 ± 0,02) V

iv) Resposta

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2 11 \tag{50}$$

isso é, aproximadamente 11 medidas.

v)Resposta

$e_1 \rightarrow |1,72 - 1,60217733|.10^{-19}C = 0,12.10^{-19}C \rightarrow |e_1 - e_{ref}|$ 3σ com σ sendo $(\sigma = 0,04.10^{-19}C)$

$e_2 \rightarrow |1,75 - 1,60217733|.10^{-19}C = 0,15.10^{-19}C \rightarrow |e_2 - e_{ref}|$ 2σ com σ sendo $(\sigma = 0,07.10^{-19}C)$

$e_3 \rightarrow |1,62 - 1,60217733|.10^{-19}C = 0,02.10^{-19}C \rightarrow |e_3 - e_{ref}|$ 1σ com σ sendo $(\sigma = 0,03.10^{-19}C)$

entre os 3, a estimativa mais satisfatória é a terceira.

vi)Resposta:

Erro associado entre m_1 e m_2 $\rightarrow \sigma = 0,4.10^{-27}$kg $\sigma = \sqrt{(\sigma_{\bar{x_1}^2}) + \sigma_{\bar{x_2}^2}}$

Discrepância entre as massas $\rightarrow$ $|7,8 - 7,0|.10^{-27}$kg $= 0,8.10^{-27}$kg $\rightarrow$ $|m_1 - m_2| = 2\sigma \rightarrow$ discrepância no nivel de 2σ. Podemos dizer o experimento é inconclusivo.

vii)Resposta

a)
Média: 1,9V
Erro padrão: 0,070
Estimativa Padrão: (1,900±0,070)V

b)
viii) Resposta:

Se considerarmos o nível de confiança de 95%, isto é, duas vezes o erro de ambos (2σ), então podemos sim considerar que a discrepância é significativa.

ix) Resposta

O erro é dado por

$$\sigma^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{1}{\frac{1}{5{,}1^2} + \frac{1}{6{,}6^2}} \rightarrow \sigma \sim 4,0 \tag{51}$$

a media combinada será

$$\bar{m_t} = \left(\frac{4,0}{5,1}\right)^2 179,0 + \left(\frac{4,0}{6,6}\right)^2 176,1 = 177,8 \tag{52}$$

o resultado combinado dos dois experimentos será:

$$m_t = 177,8 \pm 4,0 GeV/c^2 \tag{53}$$

x)Resposta

a compatibilidade é dada por

$$|\bar{x} - x_{ref}| < 2\sigma \tag{54}$$

$$|9,78 - 9,5| = 0,28 > 2 * 0,1 \tag{55}$$

o valor encontrado é maior que 2σ, com isso, ele não é compatível com o valor de referência.

xi)Resposta o erro combinado será dado por:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\frac{1}{0{,}01^2} + \frac{1}{0{,}004^2}} = \frac{1}{10000 + 62500} = \frac{1}{72500} \rightarrow \sigma \sim 0,004 \tag{56}$$

a média combinada será

$$x = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 \bar{x}_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 \bar{x}_2 = \frac{10000}{72500}1,022 + \frac{10000}{0,16.72500}1,018 \sim 1,018 \tag{57}$$

Portanto a estimativa-padrão combinada será:

$$1,017 \pm 0,004V \tag{58}$$

Problema 5

Suponha um conjunto de pares de medida (x_i, y_i) e que a incerteza relativa associada ás medidas em x são bem menores que as associadas a y. Suponha também que desejamos ajustar uma reta y(x) =ax+b. Para isso, devemos determinar os parâmetros a e b. Consideraremos aqui que os erros em y são distintos, dados por σ_i. O método dos mínimos quadrados consiste na minimização da soma dos quadrados dos resíduos $(y_i - y(x_i))$, ou seja, minimizar a soma abaixo:

$$S(a) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(y_i - y(x_i))}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right] \tag{59}$$

Precisamos entender o comportamento da curva S(a,b) tanto pra variável a quanto pra variável b. Desta forma, poderemos assegurar que os valores encontrados em breve realmente são mínimos e não máximos, ou pontos de inflexão. Teremos:

$$S(a) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(y_i - y(x_i))}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i^2 - 2(ax_i + b)y_i + (ax_i +)^2}{\sigma_i} \right] = \tag{60}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i^2}{\sigma_i^2} - \frac{2ax_iy_i}{\sigma_i^2} - \frac{2by_i}{\sigma_i^2} + \frac{a^2x_i^2}{\sigma_i^2} + \frac{b^2}{\sigma_i^2} + \frac{2abx_i}{\sigma_i^2} \right] \tag{61}$$

Definindo $\frac{1}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}$ e multiplicando em cima e embaixo por esta variável, teremos:

$$\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 y_i^2 - 2a \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_iy_i - 2b \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 y_i + a^2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 b^2 + 2ab \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma\right. \tag{62}$$

$$S(a,b) = \frac{1}{\sigma^2}(\bar{y^2} - 2a\bar{x}y - 2b\bar{y} + a^2\bar{x^2} + b^2 + 2ab\bar{x}) \tag{63}$$

Todas as médias são ponderadas com peso $\omega = \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2$

Por isso o termo de normalização N não aparece neste caso.

Fixando b, temos que a Função S(a,b = cte) é uma parábola de concavidade para cima devido ao valor positivo do coeficiente que acompanha a^2. Da mesma forma, fixando a, temos que S(a = cte,b) é uma parábola com a concavidade para cima, devido ao valor positivo do coeficiente que acompanha b^2. Portanto, nos asseguramos que derivando S(a,b) e igualando a zero encontraremos valores de a e b que minimizam S(a,b).

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\bar{xy} + 2a\bar{x^2} + 2b\bar{x} = 0 \rightarrow a = \frac{\bar{xy} - b\bar{x}}{\bar{x^2}} \tag{64}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\bar{y} + 2b + 2a\bar{x} = 0 \rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} \tag{65}$$

Substituindo b em a, teremos:

$$a = \frac{\bar{xy} - b\bar{x}}{\bar{x^2}} = a = \frac{\bar{xy} - \bar{y}\bar{x} + a\bar{x}^2}{\bar{x^2}} = a(\bar{x^2} - \bar{x}^2) = \bar{xy} - \bar{x}\bar{y} \rightarrow a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{\bar{x}}^2} \tag{66}$$

Teremos então b:

$$b = \bar{y} - \frac{\bar{x}\sigma_{xy}}{\sigma_{\bar{x}}^2} \tag{67}$$

Lembre-se que desde o princípio consideramos os erros em x pequenos o suficiente quando comparados aos de y. Para determinar a incerteza nos parâmetros a e b, vamos partir do que encontramos e fazer a propagação de erro, conforme determinado no exercício anterior:

$$a = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_{\bar{x}}^2} \tag{68}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \tag{69}$$

De a, abrindo o somatório em y_i, lembrando dos pesos $\omega_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2$, temos:

$$a = \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^2(x_i y_i - \bar{x} y_i)}{\sigma_i^2 \sigma_x^2} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_x}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x}) y_i}{\sigma_i^2} \tag{70}$$

em b, teremos:

$$b = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 y_i - a\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 y_i - \left(\frac{\sigma}{\sigma_x}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x}) y_i}{\sigma_i^2} \bar{x} = \tag{71}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 \frac{(x_i - \bar{x})\bar{x}}{\sigma_x^2}\right] y_i = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\omega_i \sigma_x^2 - \omega_i (x_i - \bar{x})\bar{x}}{\sigma_x^2}\right] y_i \tag{72}$$

Agora, vamos propagar o erro em a em relação a y_i:

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_i^2 = \left(\frac{\sigma}{\sigma_x}\right)^4 \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_i^4} \sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_x^4} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} \rightarrow \sigma_a = \frac{\sigma}{\sigma_x} \tag{73}$$

Agora, vamos propagar o erro em b em relação a y_i:

$$\sigma_b^2 = \left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\omega_i \sigma_x^2 - \omega_i (x_i - \bar{x})\bar{x}}{\sigma_x^2}\right]^2 \sigma_i^2 = \tag{74}$$

$$\frac{1}{\sigma_x^4} \sum_{i=1}^{N} \left[\omega_i \sigma_x^2 - \omega_i (x_i - \bar{x}\bar{x})\right]^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{\sigma_x^4} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^4}{\sigma_i^4} \sigma_x^4 \sigma_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^4}{\sigma_i^4} \sigma_x^2 (x_i - \bar{x}) \bar{x} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^4}{\sigma_i^4} (x_i - \bar{x})^2 \bar{x}^2 \sigma_i^2\right] = \tag{75}$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^4} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} - 2\frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} (x_i - \bar{x}) \bar{x} + \frac{\sigma^2}{\sigma_x^4} \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} (x_i - \bar{x})^2 \bar{x}^2 = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} \bar{x}^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} (\sigma_x^2 + \bar{x}^2) = \bar{x^2} \sigma_a^2 \tag{76}$$

Portando:

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\sigma_x} \ ; \ \sigma_b = \sqrt{\bar{x^2}} \sigma_a \tag{77}$$

problema 6

O método dos mínimos quadrados consiste na minimização da soma dos quadrados dos resíduos $(y_i - y(x_i))$, ou seja, minimizar a soma abaixo:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \Big[y_i - y(x_i) \Big]^2 = \sum_{i=1}^{N} \Big[y_i - (ax_i + b) \Big]^2 \tag{78}$$

Precisamos entender o comportamento da curva S(a,b) tanto pra variável a quanto pra variável b. Desta forma, poderemos assegurar que os valores encontrados em breve realmente são mínimos e não máximos, ou pontos de inflexão. Teremos:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \Big[y_i - (ax_i + b) \Big]^2 = \sum_{i=1}^{N} \Big[y_i^2 - 2(ax_i + b)y_i + (ax_i + b)^2 \Big] = \sum_{i=1}^{N} \Big[y_i^2 - 2ax_iy_i + 2by_i + a^2x_i^2 + b^2 \tag{79}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - 2a \sum_{i=1}^{N} x_i y_i + 2b \sum_{i=1}^{N} y_i + a^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} b^2 + 2ab \sum_{i=1}^{N} x_i = \tag{80}$$

$$S(a,b) = N(\bar{y^2} - 2a\bar{xy} - 2b\bar{y} + a^2\bar{x^2} + b^2 + 2ab\bar{x}) \tag{81}$$

Fixando b, temos que a Função S(a,b = cte) é uma parábola de concavidade para cima devido ao valor positivo do coeficiente que acompanha a^2. Da mesma forma, fixando a, temos que S(a= cte,b) é uma parábola com a concavidade para cima, devido ao valor positivo do coeficiente que acompanha b^2. Portanto, nos asseguramos que derivando S(a, b) e igualando a zero encontraremos valores de a e b que minimizam S(a, b).

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2N\bar{xy} + 2Na\bar{x^2} + 2Nb\bar{x} = 0 \rightarrow a = \frac{\bar{xy} - b\bar{x}}{\bar{x^2}} \tag{82}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2N\bar{y} + 2Nb + 2Na\bar{x} = 0 \rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} \tag{83}$$

Substituindo b em a, teremos

$$a = \frac{\bar{xy} - b\bar{x}}{\bar{x^2}} = \frac{\bar{xy} - \bar{y}\bar{x} + a\bar{x}^2}{\bar{x^2}} = a(\bar{x^2} - \bar{x}^2) = \bar{xy} - \bar{x}\bar{y} \rightarrow a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \tag{84}$$

Teremos então b:

$$b = \bar{y} - \frac{\bar{x}\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \tag{85}$$

Lembre-se que desde o princípio consideramos os erros em x pequenos o suficiente quando comparados aos de y. E, além disso, os erros em y, representados por $\sigma_1 = \sigma_2 = ...\sigma_N = \epsilon_y$, são todos idênticos. Para determinar a incerteza nos parâmetros a e b, vamos partir do que encontramos e fazer a propagação de erro, conforme determinado no exercício anterior:

$$a = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x^2}\ ;\ b = \bar{y} - a\bar{x} \tag{86}$$

de a, abrindo somatório em y_i, temos:

$$a = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i - \bar{x} y_i}{N\sigma_x^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})y_i}{N\sigma_x^2} \tag{87}$$

em b, teremos:

$$b = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{N} - a\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{N} - \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})y_i}{N\sigma_x^2}\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{N} - \frac{(x_i - \bar{x})\bar{x}}{N\sigma_{\bar{x}^2}}\right] y_i = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\sigma_x^2 - (x_i - \bar{x})\bar{x}}{\sigma_x^2 N}\right] y_i \tag{88}$$

Agora, vamos propagar o erro em a em relação a y

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 \epsilon_y^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{a})^2}{N^2\sigma_X^4}\epsilon_y^2 = \frac{\epsilon_y^2}{N\sigma_x^4} \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{a})^2}{N} = \frac{\epsilon_y^2}{N\sigma_x^2} \rightarrow \sigma_a = \frac{\epsilon_y}{\sqrt{N}\sigma_x} \tag{89}$$

$$\sigma_b^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\sigma_x^2 - (x_i - \bar{x})\bar{x}}{\sigma_x^2 N}\right]^2 \epsilon_y^2 = \tag{90}$$

$$= \frac{\epsilon_y^2}{(\sigma_x^2 N)^2} \sum_{i=1}^{N} \left[\sigma_x^2 - (x_i - \bar{x})\bar{x}\right]^2 = \frac{\epsilon_y^2}{(\sigma_x^2 N)^2} \left[\sum_{i=1}^{N} \sigma_x^4 - 2\sigma_x^2 \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\bar{x} + \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\bar{x}^2\right] = \tag{91}$$

$$\frac{\epsilon_y^2}{(\sigma_x^2 N)^2}\left[\sigma_x^2 + \bar{x}^2\right] = \frac{\epsilon_y^2}{(\sigma_x^2 N)^2}\bar{x^2} \rightarrow \sigma_b = \sqrt{\bar{x^2}}\sigma_a \tag{92}$$

e erro ϵ_y é a estimativa em cada medida de y, que pode ser calculado por:

$$\epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - (ax_i + b)]^2}{N-2}} \tag{93}$$

problema 7

Resposta:

A probabilidade de se sortear um aluno é a razão entre a quantidade de alunos e a quantidade total de pessoas, ou seja, a probabilidade para sortear um estudante do sexo masculino, será dada por:

$$P(A) = \frac{2587}{2587 + 2832} = \frac{2587}{5419} \sim 0,48 \tag{94}$$

um estudante do sexo feminino:

$$P(B) = \frac{2832}{2587 + 2832} = \frac{2832}{5419} \sim 0,52 \tag{95}$$

a probabilidade de sortear um estudante do sexo masculino da área tecnológica, será dada por:

$$P(TA) = \frac{1291}{2587} \sim 0,5 \tag{96}$$

a probabilidade de sortear um estudante do sexo feminino da área tecnologica, será dado por:

$$P(TB) = \frac{547}{2587} \sim 0,19 \tag{97}$$

Desta forma, a probabilidade de uma pessoa ser sorteada em algum curso da área tecnológica será a probabilidade de se sortear alguém que é da área tecnológica, dado que é aluno, vezes a probabilidade de se sortear um aluno, mais a probabilidade de se sortear alguém que é da área tecnológica, dado que é aluna, vezes a probabilidade de se sortear uma aluna:

$$P(T) = P(TA)P(A)+P(TB)+P(B) = 0,5\times0,48+0,19\times0,52 = 0,24+0,0988 = 0,339 \tag{98}$$

Podemos usar a formula abaixo para determinar a probabilidade P(AT) de se sortear um aluno dado que é da área tecnológica:

$$P(AT) = \frac{P(TA)P(A)}{P(T)} = \frac{0,5 \times 0,48}{0,339} \sim 0,71 \tag{99}$$

Portanto, a probabilidade de se sortear aleatoriamente um estudante do sexo masculino da área tecnológica é, aproximadamente, 71

problema 8

Resposta:

se 15% dos taxis são azuis, então podemos escrever a probabilidade de um dado taxi ser azul, como:

$$P(A) = 0,15 \tag{100}$$

Como só existem taxis azuis e verdes, então a probabilidade são complementares, ou seja, a probabilidade de um dado taxi ser verde, será:

$$P(V) = 1 - 0,15 = 0,85 \tag{101}$$

Como a testemunha acerta 80% das vezes e erra 20% das vezes, podemos escrever que a probabilidade da pessoa dizer que o táxi é azul, dado que o táxi é azul (o que vamos chamar de $P(T_A|A)$), será a probabilidade de acerto:

$$P(T_A|A)) = 0,8 \tag{102}$$

$P(T_A|V)$ será a probabilidade de que a testemunha disse que o táxi é azul, dado que o táxi é verde, ou seja, a probabilidade de erro:

$$P(T_A|V) = 0,2 \tag{103}$$

Agora utilizamos a fórmula de Bayes para determinar a probabilidade do carro ser azul, dado que a testemunha disse que é azul, ou seja:

$$P(A|T_A) = \frac{P(T_A|A)}{P(T_A|A)P(A) + P(T_A|V)P(V)} = \frac{0,8 \times 0,15}{0,8 \times 0,15 + 0,2 \times 0,85} = \frac{0,12}{0,12 + 0,17} = \frac{0,12}{0,29} \sim \tag{104}$$

Portando, a probabilidade do táxi envolvido no acidente ser azul é, aproximadamente, 41%

Problema 9:

Resposta:

A taxa de incidência do cancer P(C), é a probabilidade de uma mulher ter câncer, ou seja:

$$P(C) = 0,008 \tag{105}$$

A probabilidade de uma mulher não ter câncer pode ser obtida a partir do complemento da probabilidade do evento anterior, chamaremos de $P(C_N)$

$$P(C_N) = 1 - P(C) = 1 - 0,008 = 0,992 \tag{106}$$

A taxa de falso-positivo é a probabilidade de detectar-se o cancer quando ele não existe, ou seja, a probabilidade de sim quando não há cancer, que chamaremos de $P(F, C_N)$.

$$P(FP, C_N) = 0,07 \tag{107}$$

Por outro lado, a probabilidade de dizer que não há cancer, dado que há, é a taxa de falso negativo, dada por:

$$P(FN, C) = 0,1 \tag{108}$$

Portanto, a probabilidade de dizer que não há cancer, quando de fato não há, é dada por:

$$P(S|C) = 1 - 01 = 0,9 \tag{109}$$

Podemos determinar a probabilidade de ter câncer, quando diz-se que há, através da fórmula de bayes:

$$P(C|S) = \frac{0,9 \times 0,008}{0,9 \times 0,008 + 0,07 \times 0,992} = \frac{0,0072}{0,0072 + 0,06944} = \frac{0,0072}{0,07664} \sim 0,094 \tag{110}$$

$$P(C|S) = 9,4 \tag{111}$$

problema 10:

Resposta:

A probabilidade de escolher uma urna entre trˆes, ´e 1/3, ou seja P(ui) $= \frac{1}{3}$ sendo que u_i pode corresponder à primeira, segunda ou terceira urna. A primeira urna contém 5 bolas brancas e 6 bolas pretas: u_1 = 5B, 6P. A segunda urna contém 4 bolas brancas e 5 bolas pretas: u_2 = 4B, 5P. A terceira urna contém 4 bolas brancas e 4 bolas pretas: u_3 = 4B, 4P.

Podemos, facilmente, calcular a probabilidade condicional $P(P|u_i)$ de sortear uma bola preta, dado que a urna é a u_1:

$$P(P|u_1) = \frac{}{5+6} = \frac{6}{11} \tag{112}$$

$$P(P|u_2) = \frac{5}{4+5} = \frac{5}{9} \tag{113}$$

$$P(P|u_3) = \frac{4}{4+4} = \frac{1}{2} \tag{114}$$

Utilizando a formula de bayes para a probabilidade $P(u_3|P)$ de que a urna é a três, dado que a bola sorteada é a preta:

$$P(u_3|P) = \frac{1/2}{6/11 + 5/9 + 1/2} = \frac{1}{2} . \frac{198}{139} \sim 0,71 \tag{115}$$

$$P(u_3|P) = 71 \tag{116}$$

Problema 11:

Resposta: A densidade de probabilidade é dada por:

$$\rho(x) = A\sin^2\frac{\pi}{a}x \tag{117}$$

na qual A é uma constante de normalização. Vamos normalizar a equação. como 0¡x¡a, devemos ter.

$$A\int_0^a \sin^2\frac{\pi}{a}xdx = 1 \tag{118}$$

$$\frac{A}{2}\int_0^a \left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right)dx = \frac{A}{2}\int_0^a dx - \frac{A}{2}\int_0^a \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx = A\frac{a}{2} = 1 \tag{119}$$

$$A = \frac{2}{a} \tag{120}$$

O valor médio será:

$$\bar{x} = \frac{2}{a}\int_0^a x\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)^2 = \frac{1}{a}\int_0^a x\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right)dx = \frac{2}{a}\int_0^a xdx - \frac{2}{a}\int_0^a x\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx = \frac{a}{2} \tag{121}$$

$$\bar{x} = \frac{a}{2} \tag{122}$$

A média quadrática será:

$$\bar{x^2} = \frac{2}{a}\int_0^a x^2\sin^2(\frac{\pi}{a}x)dx = \frac{1}{a}\int_0^a x^2\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right)dx = \frac{2}{a}\int_0^a x^2dx - \frac{2}{a}\int_0^a x^2\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx \tag{123}$$

$$\int_0^a x^2\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx = \frac{a}{2\pi}x^2\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\Big|_0^a - \frac{a}{\pi}\frac{(-a^2)}{2\pi} = \frac{a^3}{2\pi^2} \tag{124}$$

$$\int_0^a x^2\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx = -\frac{a}{2\pi}x^2\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\Big|_0^a + 0 = \frac{-a^2}{2\pi} \tag{125}$$

Logo

$$\bar{x^2} = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\pi^2} \tag{126}$$

a variância, será:

$$\sigma_x^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\pi^2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{2\pi^2} \tag{127}$$

$$\sigma_x = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{1 - \frac{6}{\pi^2}} \tag{128}$$

Problema 12

Resposta:

$$B(m|N,p) = \frac{N!}{m!(N-m)!}p^m(1-p)^{N-m} \tag{129}$$

para as 3 câmeras, a eficiência é dada por:

$$B(3|3;0,6) = \frac{3!}{3!(3-3)!}0,6^3(1-0,6)^{3-3} = 0,6^3 = 21,6\% \tag{130}$$

Ou seja, a cada 100 múons que passa pela câmera, por volta de 21,6% são registrados.

para 4 câmaras, somamos as assinaturas dos múons em três ou quatros câmeras. Então, a eficiência é:

$$B(3|4;0,6) = \frac{4!}{3!(4-3)!}0,6^3(1-0,6)^{4-3}+\frac{4!}{4!(4-4)!}0,6^3(1-0,6)^{4-4} = 4\times 0,6^3\times 0,4+0,6^4 = 47,57 \tag{131}$$

Para 5 câmeras, temos que somar quando os múons deixa sinal em 3, 4 ou 5 câmeras. A eficiência será dada por:

$$B(3|5;0,6) + B(4|5;0,6) + B(5|5;0,6) \tag{132}$$

$$\frac{5!}{3!(5-3)!}0,6^3(1-0,6)^{5-3}+\frac{5!}{4!(5-4)!}0,6^4(1-0,6)^{5-4}+\frac{5!}{5!(5-5)!}0,6^5(1-0,6)^{5-5} = \tag{133}$$

$$5\times 2\times 0,6^3\times 0,4^2\times +5\times 0,6^4\times 0,4+0,6^5 = 68,256 \tag{134}$$

Problema 13

Resposta: Sem levar em conta os anos bissextos, o número total de possibilidades de que a data de aniversário de duas pessoas quaisquer possam coincidir durante um ano é dado por: $365 \times 365 = (365)2$. A probabilidade de que um determinado par de pessoas aniversariem em um dia qualquer do ano (o que o evento (i, j) ocorra) é dada por:

$$P(i,j) = \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365} \tag{135}$$

Considerando que ambos os eventos (i,j) e (k,l) em que ambos são diferentes um do outro, ou seja, i≠j≠k≠l são independentes, o número de pares distintos (dentre N pessoas) de pessoas que podem fazer aniversario no mesmo dia, é igual a:

$$A_N = \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2} \tag{136}$$

Utilizando a distribuição binominal, a probabilidade de que não ocorra conincidências de aniversarios (P(B)), m=0, será dada por:

$$P(B) = P_{m=0} = \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{A_N} \tag{137}$$

então, a probabilidade de que ao menos 2 pessoas façam aniversario no mesmo dia, será da por:

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \tag{138}$$

Podemos utilizar também a aproximação de Poisson, com m=0, a probabilidade de que não ocorram conincidências de aniversario, será dado por:

$$P(B) = e^{-\frac{A_N}{365}} \tag{139}$$

Logo, a probabilidade de que ao menos 2 pessoas façam aniversario no mesmo dia, será dado por:

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - e^{-\frac{N(N-1)}{730}} \tag{140}$$

Com N = 60, as chances são altas de que 2 pessoas façam aniversario no mesmo dia.

$$P(A; n = 60) = 1 - e^{-\frac{60\times 59}{730}} \sim 99,22\% \tag{141}$$

Para N = 720, é certo que pelos menos 2 pessoas vão fazer aniversario no mesmo dia.

Problema 14

Resposta: a) na proxima folha

Tabela 1: Probabilidade de acertar m questões

m	P_m
0	0,0134
1	0,0668
2	0,1559
3	0,2252
4	0,2252
5	0,1651
6	0,0917
7	0,0393
8	0,0131
9	0,0039
10	0,0068
11	$1{,}028\times10^{-4}$
12	$1{,}144\times10^{-5}$
13	$8{,}800\times10^{-7}$
14	$4{,}191\times10^{-8}$
15	$9{,}313\times10^{-10}$

c) A probabilidade de se acertar ao menos 3 questões é dada por:

$$P(m \geq 3) = 1-(P_0+P_1+P_2) = 1-0,0134-0,00668-0,1559 = 0,764 \quad (142)$$

Problema 15 Resposta: a)

$$\frac{203 + 2 \cdot 383 + 3 \cdot 525 + 4 \cdot 532 + 5 \cdot 408 + 6 \cdot 273 + 7 \cdot 139 + 8 \cdot 45 + 9 \cdot 27 + 10 \cdot 10 + 11 \cdot 4 + 12}{57 + 203 + 383 + 525 + 532 + 408 + 273 + 139 + 45 + 27 + 10 + 4 + 2} \tag{143}$$

$$\bar{f_m} = \frac{10,094}{2,608} = 3,87 \tag{144}$$

Problema 16

Resposta: Uilizando uma distribuição gaussiana padrão, de media 0 até variância 1, vamos descobrir o valor de x, tal que:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}dx = 0,9 \tag{145}$$

Consultando a tabela da distribuição de guass, obtemos para x um valor de 1,29, ou seja:

$$P(x < 1,29) = 90\% \rightarrow x = 1,29 \tag{146}$$

Como neste caso, temos uma média de 170 e desvio padrão de 5, teremos:

$$x = \frac{a - \bar{x}}{\sigma} = 1,29 \rightarrow a = 176,4cm \tag{147}$$

Problema 17

Resposta: a distribuição gaussiana padrão é dada como:

$$x = \frac{0,491 - 0,482}{0,004} \rightarrow x = \left| \frac{0,473 + 0,482}{0,004} \right| = 2,25 \qquad (148)$$

Pela tabela de distribuição de guass, com ϕ = -0,9878, teremos:

$$P(|x| < 2,25) = 2(1 - \phi(2,25)) = 0,0244 \qquad (149)$$

2,44%.

Problema 18:

Resposta:
Considerando

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right] \tag{150}$$

em que $y(x_i) = ax_i + b$, $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$. Escrevendo $y_i - y(x_i) = (y_i - \bar{y}) - a(x_i - \bar{x})$, implica,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(y_i - \bar{y})^2 + a^2(x_i - \bar{x}^2 - 2a(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))}{\sigma_i^2} \right] = \frac{1}{\sigma^2}(\sigma_y^2 + a^2\sigma_x^2 - 2a\sigma_{xy}) = \tag{151}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} \right) \tag{152}$$

ou seja,

$$\chi^2 = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \right)^2 \right) = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma} \right)^2 (1 - r^2) \tag{153}$$

b)
Para uma amostra homocedástica
para $\sigma_i = \epsilon_y$, temos $\frac{1}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma} = \frac{N}{\epsilon_y^2}$, logo:

$$\chi^2 = \frac{\sigma_y^2}{\epsilon_y^2/N}(1 - r^2) \tag{154}$$

Se queremos um ajuste linear bom, faremos uma aproximação de χ^2 proximo de n = N-2, tem-se

$$\sum_{i=1}^{N} = \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{\epsilon_y^2(N-2)} \simeq \epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{N-2}} \tag{155}$$

Problema 19

Resposta: Expressando a relação como:

$$\ln(D) = n\ln(E) + \ln(k) \tag{156}$$

sendo 0,25 o valor esperado de n, pelo método dos mínimos quadrados, temos,

$$x \pm \sigma_n = (0,26 \pm 0,03) \tag{157}$$

problema 20

Resposta: Fazendo a hiótese de nulidade:
H $->\mu \sim 120$
O valor crítico de t que corresponde ao nível de 5% (a=0,05) de significância é dado por:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt = 0,05 \rightarrow t_{5\%} = -1,645 \tag{158}$$

Sabendo que $t = \frac{115,8-120}{22/\sqrt{100}} = -1,91 < t_{5\%}$ não podemos considerar a hipótese de nulidade, ou seja, o valor esperado é inferior a 120. O valor de p para $t < -1,91$,

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+1,91} exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt < a \tag{159}$$

Problema 21

$$t = \frac{3,4 - 3}{2/\sqrt{100}} = 2\ rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt = 0,046 < a \quad (160)$$

Desconsideramos a hipótese de nulidade.

Problema 24:

Como estamos falando de um novo evento, então a probabilidade de enxerga-lo é nula, logo $n_s = 0$, desta forma, reduzimos nossa equação da Distribuição de Poisson da seguinte maneira

$$P(n|n_b; n_s) = \frac{(n_b)^n}{n!} e^{-(n_b)} = \frac{4,5^{15}}{15!} e^{-4,5} \tag{161}$$

o número de eventos observados que sejam maior ou igual a 15 é:

$$P(n \geq n_{observado}) = 1 - \sum_{n=0}^{n_{observado}} \frac{n_b^n}{n_b!} e^{-n_b} = 2,04 \times 10^{-5} \tag{162}$$