



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

CMC-12 – Exame Final

Prof. Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

Controlador Não Linear de Barra Articulada

Julho de 2025

Danilo Miranda Oliveira
Geison Vasconcelos Lira Filho
José Alberto Feijão Tizon



1 Introdução

Este relatório apresenta o projeto final desenvolvido na disciplina CMC-12, cujo objetivo é implementar e analisar um controlador não linear para o sistema que consiste em uma barra articulada sobre a qual uma argola pode deslizar livremente, sem atrito. O controle atua sobre o torque aplicado à barra, visando posicionar a argola em uma posição desejada x_r ao longo da barra, utilizando como única força externa a gravidade.

A solução implementada para projetar o controlador desse sistema permite que o projetista determine o tipo de controlador – entre P, PI, PD, DI e PID – e escolha três tipos de combinação de requisitos no domínio do tempo, sobressinal + tempo de subida, sobressinal + tempo de acomodação e sobressinal + tempo de pico, para posicionar a argola numa barra infinita. Desse modo, é possível determinar o controlador mais eficaz para a barra do tamanho que se deseja projetar e verificar se os requisitos podem ser obedecidos para todas as posições da barra que se deseja projetar.

2 Descrição do Sistema

2.1 Modelagem Física

O sistema físico analisado consiste em uma barra rígida, com momento de inércia J , articulada na posição $x = 0$ e assumida como infinitamente longa. Solidária a essa barra, uma argola de massa m desliza livremente, sem atrito. O controle do sistema é realizado por meio da aplicação de um torque $\tau(t)$ na base da barra, o qual altera seu ângulo $\theta(t)$ em relação à vertical. A única força externa considerada na modelagem é a força gravitacional atuando sobre a argola.

2.2 Equações Dinâmicas Não Lineares

No referencial solidário à barra, as forças atuantes sobre a argola ao longo do eixo x são a componente da força gravitacional, expressa como $-mg \sin(\theta)$, e a força centrífuga decorrente da rotação da barra, dada por $m\dot{\theta}^2 x$. Como se desprezam os atritos e forças perpendiculares à barra, como as forças de Coriolis e de Euler, que não influenciam a movimentação ao longo do eixo x , a equação de movimento da argola no referencial rotativo é representada por:

$$m\ddot{x} = -mg \sin(\theta) + m\dot{\theta}^2 x \quad (1)$$

A dinâmica de rotação da barra é modelada por:

$$\tau(t) = J\ddot{\theta} \quad (2)$$

2.3 Linearização via Espaço de Estados

Para fins de análise e projeto de controladores lineares, é conveniente representar a dinâmica do sistema em espaço de estados. A partir do modelo não linear previamente obtido, consideram-se as seguintes equações que descrevem a dinâmica da argola e da barra:

$$m\ddot{x} = -mg \sin(\theta) + m\dot{\theta}^2 x \quad (3)$$

$$J\ddot{\theta} = \tau \quad (4)$$



Definimos o vetor de estados como $\mathbf{x} = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^\top$, a entrada como $u = \tau$, e consideramos como saída a posição da argola $y = x$.

A equação (??), dividida por m , fornece:

$$\ddot{x} = -g \sin(\theta) + \dot{\theta}^2 x \quad (5)$$

De forma semelhante, da equação (??), temos:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J} \tau \quad (6)$$

Substituindo as variáveis de estado, o sistema dinâmico pode ser reescrito como:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7)$$

$$\dot{x}_2 = -g \sin(x_3) + x_4^2 x_1 \quad (8)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (9)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{J} u \quad (10)$$

Com isso, obtém-se o modelo de espaço de estados não linear na forma compacta:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u), \quad y = h(\mathbf{x}) \quad (11)$$

Para linearizar o sistema, realiza-se uma expansão em série de Taylor de primeira ordem das funções $f(\mathbf{x}, u)$ e $h(\mathbf{x})$ em torno do ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$, $u_e = 0$. As matrizes do modelo linearizado são dadas por:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e, u_e} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_e, u_e} \quad (12)$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{u_e} \quad (13)$$

Calculando essas derivadas parciais, obtêm-se as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad D = [0]$$

Esse modelo linearizado descreve a dinâmica do sistema nas proximidades do ponto de equilíbrio. Ele será utilizado para o projeto dos controladores lineares na malha externa, uma vez que fornece uma aproximação acurada do comportamento local do sistema não linear original. A partir da modelagem em espaço de estados e da posterior aplicação de uma expansão em série de Taylor de primeira ordem em torno do ponto de equilíbrio $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}) = (0, 0, 0, 0)$, obtêm-se as equações linearizadas que descrevem a dinâmica local do sistema. Considerando pequenas oscilações e desprezando termos não lineares de ordem superior, a dinâmica reduz-se às seguintes equações diferenciais lineares:

$$\ddot{x} = -g \cdot \theta \quad (14)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J} \cdot \tau \quad (15)$$

Essas expressões representam, respectivamente, a aceleração da argola em função da inclinação da barra e a aceleração angular da barra em função do torque aplicado. Tal forma linearizada é essencial para a síntese de controladores clássicos baseados em modelos lineares, como controladores PID ou estratégias de realimentação de estados.

3 Projeto do Controlador

3.1 Estrutura em Malha Interna e Externa

Devido à natureza hierárquica do sistema, em que a posição x depende do ângulo θ , que por sua vez depende do torque τ , adota-se uma abordagem com duas malhas de controle. A malha interna, mais rápida, é responsável por controlar o ângulo da barra a partir do torque aplicado. Para isso, utiliza-se um controlador proporcional com compensação de velocidade (P+V). Já a malha externa, mais lenta, controla a posição da argola ao longo da barra. São testados diferentes controladores (P, PI, PD, DI e PID), todos com pré-filtro na referência para eliminação dos zeros, de forma que seja possível estabelecer uma dinâmica de segunda ordem padrão aproximada para esses controladores.

3.2 Controladores Utilizados nas Malhas

A arquitetura de controle adotada é composta por uma estrutura hierárquica com duas malhas principais. A malha externa é responsável pelo controle da posição da argola e utiliza um controlador PID clássico, atuando sobre o erro de posição para gerar uma referência angular. Já a malha interna é dedicada ao controle da orientação da barra e implementa uma estratégia do tipo P+V. Essa estratégia consiste em duas realimentações aninhadas: uma proporcional sobre o ângulo da barra e outra proporcional sobre sua velocidade angular, funcionando respectivamente como ações de posição e velocidade.

Para o cálculo dos ganhos dos controladores, considera-se o modelo linearizado do sistema, no qual as não linearidades e forças centrífugas são desprezadas. Os parâmetros são calculados de forma analítica, a partir dos requisitos de desempenho definidos para o sistema. Posteriormente, o projeto é validado no ambiente Simulink, onde o modelo exato do sistema é simulado, incluindo as não linearidades e a força centrífuga que foram omitidas na linearização. Dessa forma, verifica-se se o controlador projetado atende adequadamente ao desempenho esperado quando aplicado ao sistema real.

3.3 Compensador PID e pré-filtro

No ambiente do simulink, foram configurados dois blocos referentes à malha externa de posição, um dos blocos consiste em um pré-filtro para a eliminação dos zeros das funções de transferência e outro referentes ao controlador PID geral. A função de transferência da posição x em relação ao referencial x_r é mostrada na equação abaixo.

$$(x_r \cdot F(s) - x) \cdot C(s) \cdot \frac{g}{s^2} = x$$

Em que x_r é a referência de posição, g é gravidade, $C(s)$ é o compensador PID e $F(s)$ é o pré-filtro. As estruturas do pré-filtro e do compensador respectivamente, são apresentadas nas equações abaixo. Se deseja-se um controlador PID, calcula-se



$$F(s) = \frac{fK_p s + K_i}{K_d s^2 + K_p s + K_i}$$
$$C(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

Em que K_d , K_p e K_i são os ganhos do controlador PID e f é um fator de correção do pré-filtro para que ele sempre elimine os zeros independente do tipo de controlador utilizado.

3.4 Obtenção analítica de ganhos e definição do controlador

Os ganhos foram projetados considerando-se sempre uma dinâmica de segunda ordem padrão baseado na combinação de requisitos e no tipo de compensador escolhidos. O valor de M_p é o mesmo para as três combinações.

$$\xi = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}}$$

Caso escolha-se o tempo de subida, ω_n é dado pela equação abaixo.

$$\omega_n = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{t_r \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Caso escolha-se o tempo de pico, temos a equação abaixo.

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Por fim, caso seja feita a escolha do tempo de acomodação, obtemos omega pela expressão abaixo.

$$\omega_n = \frac{3}{\xi t_s}$$

Com os termos da equação de segunda ordem padrão definidos, é possível determinar os ganhos com base neles. Para um compensador P, fazemos $K_i = 0$ e $K_d = 0$ e escolhemos o fator $f = 1$, assim o pré filtro, o compensador e a equação final do controlador em malha fechada são dados respectivamente pelas equações abaixo.

$$F(s) = 1$$
$$C(s) = K_p$$
$$G(s) = \frac{K_p}{\frac{1}{g}s^2 + K_p}$$

Assim, considerando uma dinâmica de segunda ordem, obtemos que o ganho K_p é dado pela equação abaixo.

$$K_p = \frac{\omega_n^2}{g}$$

Esse sistema é marginalmente estável, devido a seus polos no eixo imaginário, ele não diverge para infinito mas oscila infinitamente, não atingindo estabilidade e não sendo adequado para uso como controlador, mas ainda assim ele foi incluído no projeto para evidenciar sua inadequação e sua diferença em relação a outros controladores. Para um compensador PD, fazemos $K_i = 0$



e escolhemos o fator $f = 1$, assim o pré filtro, o compensador e a equação final do controlador em malha fechada são dados respectivamente pelas equações abaixo.

$$F(s) = \frac{K_p}{K_d s + K_p}$$
$$C(s) = K_d s + K_p$$
$$G(s) = \frac{K_p}{\frac{1}{g}s^2 + K_d s + K_p}$$

Assim, considerando uma dinâmica de segunda ordem, obtemos que os ganhos K_p e K_d são dados pela equação abaixo.

$$K_d = \frac{2\xi\omega_n}{g}$$
$$K_p = \frac{\omega_n^2}{g}$$

Esse sistema, por apresentar zeros somente no semiplano esquerdo, é estável e atinge o equilíbrio em regime na referencia. Para um compensador PI, fazemos $K_d = 0$ e escolhemos o fator $f = 0$, assim o pré filtro, o compensador e a equação final do controlador em malha fechada são dados respectivamente pelas equações abaixo.

$$F(s) = \frac{K_i}{K_p s + K_i}$$
$$C(s) = \frac{K_p s + K_i}{s}$$
$$G(s) = \frac{K_i}{\frac{1}{g}s^3 + K_p s + K_i}$$

Esse sistema tem três polos, porém o polo real não é distante o suficiente da origem para que os polos complexos sejam dominantes, de forma que esse sistema está sujeito a instabilidades de terceira ordem impossíveis de serem resolvidas. Além disso, os polos complexos conjugados estão no semiplano real positivo, de forma que o sistema é instável e não é adequado para ser usado como controlador, mas ainda assim ele foi incluído no projeto para evidenciar sua inadequação e sua diferença em relação a outros controladores. Mesmo assim, considerando uma dinâmica de segunda ordem, obtemos que os ganhos K_p e K_i são dados pelas equações abaixo.

$$K_p = \frac{\omega_n^2 - 4\xi^2\omega_n^2}{g}$$
$$K_i = \frac{2\xi\omega_n^3}{g}$$

Para o compensador DI, fazemos $K_p = 0$ e escolhemos o fator $f = 0$, assim o pré filtro, o compensador e a equação final do controlador em malha fechada são dados respectivamente pelas equações abaixo.

$$F(s) = \frac{K_i}{K_d s^2 + K_i}$$
$$C(s) = \frac{K_d s^2 + K_i}{s}$$

$$G(s) = \frac{K_i}{\frac{1}{g}s^3 + K_d s^2 + K_i}$$

Esse sistema apresenta a mesma estrutura de polos do compensador PI, o polo real é próximo da origem de forma que os polos complexos não são dominantes, e os polos complexos estão no semiplano real positivo, de forma que esse controlador é instável e não é adequado para uso, mas ainda assim ele foi incluído no projeto para evidenciar sua inadequação e sua diferença em relação a outros controladores. De qualquer modo, os ganhos K_d e K_i são dados pelas equações abaixo.

$$K_d = \frac{\omega_n - 4\xi^2\omega_n}{2\xi g}$$

$$K_i = \frac{\omega_n^3}{2\xi g}$$

Por fim, para o compensador PID, escolhemos o fator $f = 0$, assim o pré filtro, o compensador e a equação final do controlador em malha fechada são dados respectivamente pelas equações abaixo.

$$F(s) = \frac{K_i}{K_d s^2 + K_p s + K_i}$$

$$C(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

$$G(s) = \frac{K_i}{\frac{1}{g}s^3 + K_d s^2 + K_p s + K_i}$$

Com três ganhos, o polo real não fica determinado com base nos outros polos, de forma que podemos escolhê-lo de forma que os polos complexos sejam dominantes, além disso, os polos complexos estão no semiplano real negativo, o que indica que esse sistema é adequado para ser utilizado como controlador. Os ganhos K_d , K_p e K_i respectivamente são dados pelas equações abaixo.

$$K_d = \frac{7\xi\omega_n}{g}$$

$$K_p = \frac{10\xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2}{g}$$

$$K_i = \frac{5\xi\omega_n^3}{g}$$

As equações dos ganhos com base nos requisitos foram implementadas no matlab para serem usadas no modelo geral do controlador.

4 Resultados e Discussão

4.1 Comparação entre simuladores

Inicialmente, foi realizada uma comparação entre os tipos de controladores disponíveis para analisar qual deles se adequa melhor ao sistema ;;;

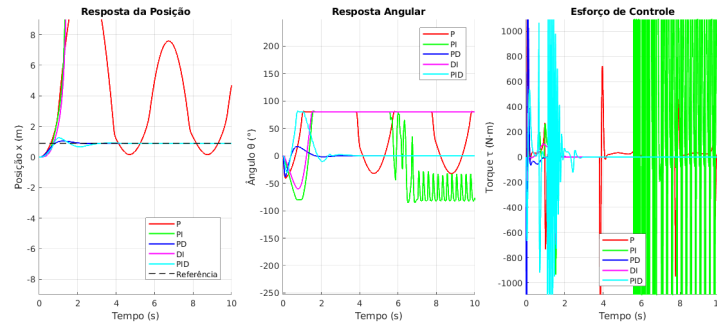


Figura 1: Tipos de controlador

4.2 Avaliação de diferentes referências

4.3 Avaliação de diferentes tipos de requisitos

5 Conclusão

O desenvolvimento deste projeto permitiu compreender os principais desafios envolvidos no controle de sistemas não lineares, especialmente na presença de malhas hierárquicas e interdependentes. A estratégia de controle adotada, com malhas interna e externa, mostrou-se efetiva para garantir o rastreamento da posição desejada pela argola, mesmo em condições adversas. Como possíveis extensões do trabalho, sugere-se a análise do sistema com perturbações externas, como atrito ou inércia.