



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

## CMC-12 – Exame Final

Prof. Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

# Controlador Não Linear de Barra Articulada

Julho de 2025

Danilo Miranda Oliveira  
Geison Vasconcelos Lira Filho  
José Alberto Feijão Tizon



## 1. Introdução

Este relatório apresenta o projeto final desenvolvido na disciplina CMC-12, cujo objetivo é implementar e analisar um controlador não linear para o sistema que consiste em uma barra articulada sobre a qual uma argola pode deslizar livremente, sem atrito. O controle atua sobre o torque aplicado à barra, visando posicionar a argola em uma posição desejada  $x_r$  ao longo da barra, utilizando como única força externa a gravidade.

A solução implementada para projetar o controlador desse sistema permite que o projetista determine o tipo de controlador – entre P, PI, PD, DI e PID – e escolha três tipos de combinação de requisitos no domínio do tempo, sobressinal + tempo de subida, sobressinal + tempo de acomodação e sobressinal + tempo de pico, para posicionar a argola numa barra infinita. Desse modo, é possível determinar o controlador mais eficaz para a barra do tamanho que se deseja projetar e verificar se os requisitos podem ser obedecidos para todas as posições da barra que se deseja projetar.

## 2. Descrição do Sistema

### 2.1. Modelagem Física

O sistema físico analisado consiste em uma barra rígida, com momento de inércia  $J$ , articulada na posição  $x = 0$  e assumida como infinitamente longa. Solidária a essa barra, uma argola de massa  $m$  desliza livremente, sem atrito. O controle do sistema é realizado por meio da aplicação de um torque  $\tau(t)$  na base da barra, o qual altera seu ângulo  $\theta(t)$  em relação à vertical. A única força externa considerada na modelagem é a força gravitacional atuando sobre a argola.

### 2.2. Equações Dinâmicas Não Lineares

No referencial solidário à barra, as forças atuantes sobre a argola ao longo do eixo  $x$  são a componente da força gravitacional, expressa como  $-mg \sin(\theta)$ , e a força centrífuga decorrente da rotação da barra, dada por  $m\dot{\theta}^2 x$ . Como se desprezam os atritos e forças perpendiculares à barra, como as forças de Coriolis e de Euler, que não influenciam a movimentação ao longo do eixo  $x$ , a equação de movimento da argola no referencial rotativo é representada por:

$$m\ddot{x} = -mg \sin(\theta) + m\dot{\theta}^2 x \quad (1)$$

A dinâmica de rotação da barra é modelada por:

$$\tau(t) = J\ddot{\theta} \quad (2)$$

### 2.3. Linearização via Espaço de Estados

Para fins de análise e projeto de controladores lineares, é conveniente representar a dinâmica do sistema em espaço de estados. A partir do modelo não linear previamente obtido, consideram-se as seguintes equações que descrevem a dinâmica da argola e da barra:

$$m\ddot{x} = -mg \sin(\theta) + m\dot{\theta}^2 x \quad (3)$$

$$J\ddot{\theta} = \tau \quad (4)$$



Definimos o vetor de estados como  $\mathbf{x} = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^\top$ , a entrada como  $u = \tau$ , e consideramos como saída a posição da argola  $y = x$ .

A equação (3), dividida por  $m$ , fornece:

$$\ddot{x} = -g \sin(\theta) + \dot{\theta}^2 x \quad (5)$$

De forma semelhante, da equação (4), temos:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J} \tau \quad (6)$$

Substituindo as variáveis de estado, o sistema dinâmico pode ser reescrito como:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7)$$

$$\dot{x}_2 = -g \sin(x_3) + x_4^2 x_1 \quad (8)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (9)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{J} u \quad (10)$$

Com isso, obtém-se o modelo de espaço de estados não linear na forma compacta:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u), \quad y = h(\mathbf{x}) \quad (11)$$

Para linearizar o sistema, realiza-se uma expansão em série de Taylor de primeira ordem das funções  $f(\mathbf{x}, u)$  e  $h(\mathbf{x})$  em torno do ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ,  $u_e = 0$ . As matrizes do modelo linearizado são dadas por:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e, u_e} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_e, u_e} \quad (12)$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{u_e} \quad (13)$$

Calculando essas derivadas parciais, obtêm-se as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad D = [0]$$

Esse modelo linearizado descreve a dinâmica do sistema nas proximidades do ponto de equilíbrio. Ele será utilizado para o projeto dos controladores lineares na malha externa, uma vez que fornece uma aproximação acurada do comportamento local do sistema não linear original. A partir da modelagem em espaço de estados e da posterior aplicação de uma expansão em série de Taylor de primeira ordem em torno do ponto de equilíbrio  $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}) = (0, 0, 0, 0)$ , obtêm-se as equações linearizadas que descrevem a dinâmica local do sistema. Considerando pequenas oscilações e desprezando termos não lineares de ordem superior, a dinâmica reduz-se às seguintes equações diferenciais lineares:

$$\ddot{x} = -g \cdot \theta \quad (14)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J} \cdot \tau \quad (15)$$

Essas expressões representam, respectivamente, a aceleração da argola em função da inclinação da barra e a aceleração angular da barra em função do torque aplicado. Tal forma linearizada é essencial para a síntese de controladores clássicos baseados em modelos lineares, como controladores PID ou estratégias de realimentação de estados.

### 3. Projeto do Controlador

#### 3.1. Estrutura em Malha Interna e Externa

Devido à natureza hierárquica do sistema, em que a posição  $x$  depende do ângulo  $\theta$ , que por sua vez depende do torque  $\tau$ , adota-se uma abordagem com duas malhas de controle. A malha interna, mais rápida, é responsável por controlar o ângulo da barra a partir do torque aplicado. Para isso, utiliza-se um controlador proporcional com compensação de velocidade (P+V). Já a malha externa, mais lenta, controla a posição da argola ao longo da barra. São testados diferentes controladores (P, PI, PD, DI e PID), todos com pré-filtro na referência para eliminação dos zeros, de forma que seja possível estabelecer uma dinâmica de segunda ordem padrão aproximada para esses controladores.

#### 3.2. Controladores Utilizados nas Malhas

A arquitetura de controle adotada é composta por uma estrutura hierárquica com duas malhas principais. A malha externa é responsável pelo controle da posição da argola e utiliza um controlador PID clássico, atuando sobre o erro de posição para gerar uma referência angular. Já a malha interna é dedicada ao controle da orientação da barra e implementa uma estratégia do tipo P+V. Essa estratégia consiste em duas realimentações aninhadas: uma proporcional sobre o ângulo da barra e outra proporcional sobre sua velocidade angular, funcionando respectivamente como ações de posição e velocidade.

Para o cálculo dos ganhos dos controladores, considera-se o modelo linearizado do sistema, no qual as não linearidades e forças centrífugas são desprezadas. Os parâmetros são calculados de forma analítica, a partir dos requisitos de desempenho definidos para o sistema. Posteriormente, o projeto é validado no ambiente Simulink, onde o modelo exato do sistema é simulado, incluindo as não linearidades e a força centrífuga que foram omitidas na linearização. Dessa forma, verifica-se se o controlador projetado atende adequadamente ao desempenho esperado quando aplicado ao sistema real.

#### 3.3. Compensador PID e pré-filtro

No ambiente do simulink, foram configurados dois blocos referentes à malha externa de posição, um dos blocos consiste em um pré-filtro para a eliminação dos zeros das funções de transferência e outro referentes ao controlador PID geral. A função de transferência da posição  $x$  em relação ao referencial  $x_r$  é mostrada na equação abaixo.

$$(x_r \cdot F(s) - x) \cdot C(s) \cdot \frac{g}{s^2} = x$$

Em que  $x_r$  é a referência de posição,  $g$  é gravidade,  $C(s)$  é o compensador PID e  $F(s)$  é o pré-filtro. As estruturas do pré-filtro e do compensador respectivamente, são apresentadas nas equações abaixo. Se deseja-se um controlador PID, calcula-se



$$F(s) = \frac{fK_p s + K_i}{K_d s^2 + K_p s + K_i}$$
$$C(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

Em que  $K_d$ ,  $K_p$  e  $K_i$  são os ganhos do controlador PID e  $f$  é um fator de correção do pré-filtro para que ele sempre elimine os zeros independente do tipo de controlador utilizado.

### 3.4. Obtenção analítica de ganhos e definição do controlador

Os ganhos foram projetados considerando-se sempre uma dinâmica de segunda ordem padrão baseado na combinação de requisitos e no tipo de compensador escolhidos. O valor de  $M_p$  é o mesmo para as três combinações.

$$\xi = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}}$$

Caso escolha-se o tempo de subida,  $\omega_n$  é dado pela equação abaixo.

$$\omega_n = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{t_r \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Caso escolha-se o tempo de pico, temos a equação abaixo.

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Por fim, caso seja feita a escolha do tempo de acomodação, obtemos omega pela expressão abaixo.

$$\omega_n = \frac{3}{\xi t_s}$$

Com os termos da equação de segunda ordem padrão definidos, é possível determinar os ganhos com base neles. Para um compensador P, fazemos  $K_i = 0$  e  $K_d = 0$  e escolhemos o fator  $f = 1$ , assim o pré filtro, o compensador e a equação final do controlador em malha fechada são dados respectivamente pelas equações abaixo.

$$F(s) = 1$$
$$C(s) = K_p$$
$$G(s) = \frac{K_p}{\frac{1}{g}s^2 + K_p}$$

Assim, considerando uma dinâmica de segunda ordem, obtemos que o ganho  $K_p$  é dado pela equação abaixo.

$$K_p = \frac{\omega_n^2}{g}$$

Esse sistema é marginalmente estável, devido a seus polos no eixo imaginário, ele não diverge para infinito mas oscila infinitamente, não atingindo estabilidade e não sendo adequado para uso como controlador, mas ainda assim ele foi incluído no projeto para evidenciar sua inadequação e sua diferença em relação a outros controladores. Para um compensador PD, fazemos  $K_i = 0$



e escolhemos o fator  $f = 1$ , assim o pré filtro, o compensador e a equação final do controlador em malha fechada são dados respectivamente pelas equações abaixo.

$$F(s) = \frac{K_p}{K_d s + K_p}$$
$$C(s) = K_d s + K_p$$
$$G(s) = \frac{K_p}{\frac{1}{g}s^2 + K_d s + K_p}$$

Assim, considerando uma dinâmica de segunda ordem, obtemos que os ganhos  $K_p$  e  $K_d$  são dados pela equação abaixo.

$$K_d = \frac{2\xi\omega_n}{g}$$
$$K_p = \frac{\omega_n^2}{g}$$

Esse sistema, por apresentar zeros somente no semiplano esquerdo, é estável e atinge o equilíbrio em regime na referencia. Para um compensador PI, fazemos  $K_d = 0$  e escolhemos o fator  $f = 0$ , assim o pré filtro, o compensador e a equação final do controlador em malha fechada são dados respectivamente pelas equações abaixo.

$$F(s) = \frac{K_i}{K_p s + K_i}$$
$$C(s) = \frac{K_p s + K_i}{s}$$
$$G(s) = \frac{K_i}{\frac{1}{g}s^3 + K_p s + K_i}$$

Esse sistema tem três polos, porém o polo real não é distante o suficiente da origem para que os polos complexos sejam dominantes, de forma que esse sistema está sujeito a instabilidades de terceira ordem impossíveis de serem resolvidas. Além disso, os polos complexos conjugados estão no semiplano real positivo, de forma que o sistema é instável e não é adequado para ser usado como controlador, mas ainda assim ele foi incluído no projeto para evidenciar sua inadequação e sua diferença em relação a outros controladores. Mesmo assim, considerando uma dinâmica de segunda ordem, obtemos que os ganhos  $K_p$  e  $K_i$  são dados pelas equações abaixo.

$$K_p = \frac{\omega_n^2 - 4\xi^2\omega_n^2}{g}$$
$$K_i = \frac{2\xi\omega_n^3}{g}$$

Para o compensador DI, fazemos  $K_p = 0$  e escolhemos o fator  $f = 0$ , assim o pré filtro, o compensador e a equação final do controlador em malha fechada são dados respectivamente pelas equações abaixo.

$$F(s) = \frac{K_i}{K_d s^2 + K_i}$$
$$C(s) = \frac{K_d s^2 + K_i}{s}$$



$$G(s) = \frac{K_i}{\frac{1}{g}s^3 + K_d s^2 + K_i}$$

Esse sistema apresenta a mesma estrutura de polos do compensador PI, o polo real é próximo da origem de forma que os polos complexos não são dominantes, e os polos complexos estão no semiplano real positivo, de forma que esse controlador é instável e não é adequado para uso, mas ainda assim ele foi incluído no projeto para evidenciar sua inadequação e sua diferença em relação a outros controladores. De qualquer modo, os ganhos  $K_d$  e  $K_i$  são dados pelas equações abaixo.

$$K_d = \frac{\omega_n - 4\xi^2\omega_n}{2\xi g}$$
$$K_i = \frac{\omega_n^3}{2\xi g}$$

Por fim, para o compensador PID, escolhemos o fator  $f = 0$ , assim o pré filtro, o compensador e a equação final do controlador em malha fechada são dados respectivamente pelas equações abaixo.

$$F(s) = \frac{K_i}{K_d s^2 + K_p s + K_i}$$
$$C(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$
$$G(s) = \frac{K_i}{\frac{1}{g}s^3 + K_d s^2 + K_p s + K_i}$$

Com três ganhos, o polo real não fica determinado com base nos outros polos, de forma que podemos escolhê-lo de forma que os polos complexos sejam dominantes, além disso, os polos complexos estão no semiplano real negativo, o que indica que esse sistema é adequado para ser utilizado como controlador. Os ganhos  $K_d$ ,  $K_p$  e  $K_i$  respectivamente são dados pelas equações abaixo.

$$K_d = \frac{7\xi\omega_n}{g}$$
$$K_p = \frac{10\xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2}{g}$$
$$K_i = \frac{5\xi\omega_n^3}{g}$$

As equações dos ganhos com base nos requisitos foram implementadas no matlab para serem usadas no modelo geral do controlador.

## 4. Resultados e Discussão

### 4.1. Comparação entre simuladores

Inicialmente, foi realizada uma comparação entre os tipos de controladores disponíveis para analisar qual deles é capaz de estabilizar. Nesse teste, foi realizada a simulação do sistema para referência fixa  $x_r = 0,9$  e com requisitos fixos, de modo que a resposta dos diferentes tipos de compensador podem ser observadas na figura 1.

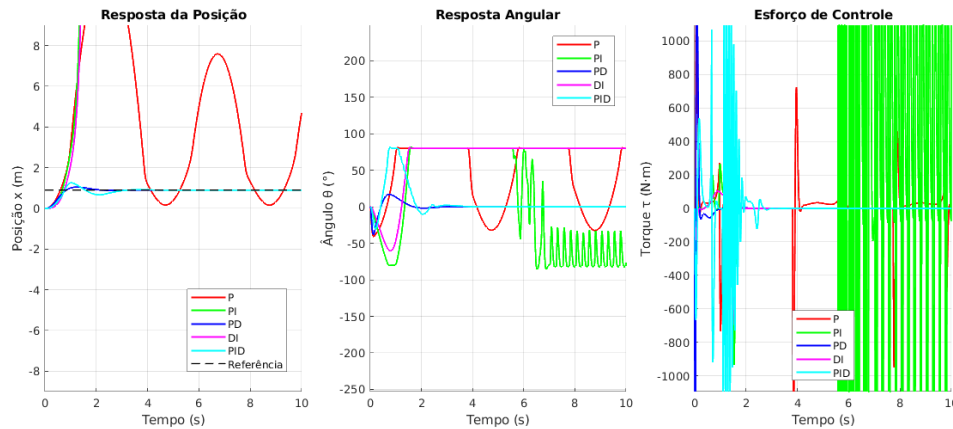


Figura 1: Análise do comportamento do sistema para os diferentes tipos de controladores

Observa-se, na resposta de posição, que os controladores PD e PID são os únicos capazes de rastrear corretamente a referência, promovendo estabilização e erro de regime próximo de zero. Entre eles, o controlador PD apresentou o \*melhor desempenho global\*, com rápida convergência, menor sobrelevação e uso mais eficiente do esforço de controle.

O controlador P resultou em um sistema \*marginamente estável\*, caracterizado por oscilações sustentadas e ausência de amortecimento. Apesar de não divergir, o sistema não converge para a referência, evidenciando a limitação dessa estrutura em sistemas com dinâmicas acopladas.

Os controladores PI e DI mostraram-se totalmente instáveis, apresentando crescimento exponencial da posição e do ângulo, com comportamento divergente e torques irrealisticamente elevados. Tal comportamento inviabiliza sua aplicação em qualquer cenário realista.

Na resposta angular, o PD se destaca novamente, controlando o ângulo da barra de forma suave e eficiente. O PID, embora estável, apresentou resposta mais lenta e esforço de controle mais elevado que o PD, além de apresentar mais oscilação para estabilizar na posição de referência.

## 4.2. Avaliação de diferentes referências

## 4.3. Avaliação de diferentes tipos de requisitos

## 5. Conclusão

O desenvolvimento deste projeto permitiu compreender os principais desafios envolvidos no controle de sistemas não lineares, especialmente na presença de malhas hierárquicas e interdependentes. A estratégia de controle adotada, com malhas interna e externa, mostrou-se efetiva para garantir o rastreamento da posição desejada pela argola, mesmo em condições adversas. Como possíveis extensões do trabalho, sugere-se a análise do sistema com perturbações externas, como atrito ou inércia.