Instituto Tecnológico de Aeronáutica

CMC-12 – Exame Final

Prof. Marcos Ricardo Omena de Albuquerque Maximo

Controlador Não Linear de Barra Articulada

Julho de 2025

Danilo Miranda Oliveira
Geison Vasconcelos Lira Filho
José Alberto Feijão Tizon

1 Introdução

Este relatório apresenta o projeto final desenvolvido na disciplina CMC-12, cujo objetivo é implementar e analisar um controlador não linear para o sistema que consiste em uma barra articulada sobre a qual uma argola pode deslizar livremente, sem atrito. O controle atua sobre o torque aplicado à barra, visando posicionar a argola em uma posição desejada x_r ao longo da barra, utilizando como única força externa a gravidade.

A solução implementada para projetar o controlador desse sistema permite que o projetista determine o tipo de controlador – entre P, PI, PD, DI e PID – e os requisitos de tempo de subida e de sobressinal para posicionar a argola numa barra infinita. Desse modo, é possível determinar o controlador mais eficaz para a barra do tamanho que se deseja projetar e verificar se os requisitos podem ser obedecidos para todas as posições da barra que se deseja projetar.

2 Descrição do Sistema

2.1 Modelagem Física

O sistema físico analisado consiste em uma barra rígida, com momento de inércia J, articulada na posição $x = 0$ e assumida como infinitamente longa. Solidária a essa barra, uma argola de massa m desliza livremente, sem atrito. O controle do sistema é realizado por meio da aplicação de um torque $\tau(t)$ na base da barra, o qual altera seu ângulo $\theta(t)$ em relação à vertical. A única força externa considerada na modelagem é a força gravitacional atuando sobre a argola.

2.2 Equações Dinâmicas Não Lineares

No referencial solidário à barra, as forças atuantes sobre a argola ao longo do eixo x são a componente da força gravitacional, expressa como $-mg\sin(\theta)$, e a força centrífuga decorrente da rotação da barra, dada por $m\dot{\theta}^2 x$. Como se desprezam os atritos e forças perpendiculares à barra, como as forças de Coriolis e de Euler, que não influenciam a movimentação ao longo do eixo x, a equação de movimento da argola no referencial rotativo é representada por:

$$m\ddot{x} = -mg\sin(\theta) + m\dot{\theta}^2 x \tag{1}$$

A dinâmica de rotação da barra é modelada por:

$$\tau(t) = J\ddot{\theta} \tag{2}$$

2.3 Linearização via Espaço de Estados

Para fins de análise e projeto de controladores lineares, é conveniente representar a dinâmica do sistema em espaço de estados. A partir do modelo não linear previamente obtido, consideram-se as seguintes equações que descrevem a dinâmica da argola e da barra:

$$m\ddot{x} = -mg\sin(\theta) + m\dot{\theta}^2 x \tag{3}$$

$$J\ddot{\theta} = \tau \tag{4}$$

Definimos o vetor de estados como $\mathbf{x} = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^\top$, a entrada como $u = \tau$, e consideramos como saída a posição da argola $y = x$.

A equação (??), dividida por m, fornece:

$$\ddot{x} = -g\sin(\theta) + \dot{\theta}^2 x \tag{5}$$

De forma semelhante, da equação (??), temos:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J}\tau \tag{6}$$

Substituindo as variáveis de estado, o sistema dinâmico pode ser reescrito como:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{7}$$
$$\dot{x}_2 = -g\sin(x_3) + x_4^2 x_1 \tag{8}$$
$$\dot{x}_3 = x_4 \tag{9}$$
$$\dot{x}_4 = \frac{1}{J}u \tag{10}$$

Com isso, obtém-se o modelo de espaço de estados não linear na forma compacta:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u), \quad y = h(\mathbf{x}) \tag{11}$$

Para linearizar o sistema, realiza-se uma expansão em série de Taylor de primeira ordem das funções $f(\mathbf{x}, u)$ e $h(\mathbf{x})$ em torno do ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$, $u_e = 0$. As matrizes do modelo linearizado são dadas por:

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_e, u_e} \qquad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\mathbf{x}_e, u_e} \tag{12}$$
$$C = \left.\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_e} \qquad D = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{u_e} \tag{13}$$

Calculando essas derivadas parciais, obtêm-se as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

Esse modelo linearizado descreve a dinâmica do sistema nas proximidades do ponto de equilíbrio. Ele será utilizado para o projeto dos controladores lineares na malha externa, uma vez que fornece uma aproximação acurada do comportamento local do sistema não linear original. A partir da modelagem em espaço de estados e da posterior aplicação de uma expansão em série de Taylor de primeira ordem em torno do ponto de equilíbrio $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}) = (0, 0, 0, 0)$, obtêm-se as equações linearizadas que descrevem a dinâmica local do sistema. Considerando pequenas oscilações e desprezando termos não lineares de ordem superior, a dinâmica reduz-se às seguintes equações diferenciais lineares:

$$\ddot{x} = -g \cdot \theta \tag{14}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J} \cdot \tau \tag{15}$$

Essas expressões representam, respectivamente, a aceleração da argola em função da inclinação da barra e a aceleração angular da barra em função do torque aplicado. Tal forma linearizada é essencial para a síntese de controladores clássicos baseados em modelos lineares, como controladores PID ou estratégias de realimentação de estados.

3 Projeto do Controlador

3.1 Estrutura em Malha Interna e Externa

Devido à natureza hierárquica do sistema, em que a posição x depende do ângulo θ, que por sua vez depende do torque τ, adota-se uma abordagem com duas malhas de controle. A malha interna, mais rápida, é responsável por controlar o ângulo da barra a partir do torque aplicado. Para isso, utiliza-se um controlador proporcional com compensação de velocidade (P+V). Já a malha externa, mais lenta, controla a posição da argola ao longo da barra. São testados diferentes controladores (P, PI, PD, PID, Lead), todos com pré-filtro na referência.

3.2 Controladores Utilizados nas Malhas

A arquitetura de controle adotada é composta por uma estrutura hierárquica com duas malhas principais. A malha externa é responsável pelo controle da posição da argola e utiliza um controlador PID clássico, atuando sobre o erro de posição para gerar uma referência angular. Já a malha interna é dedicada ao controle da orientação da barra e implementa uma estratégia do tipo P+V. Essa estratégia consiste em duas realimentações aninhadas: uma proporcional sobre o ângulo da barra e outra proporcional sobre sua velocidade angular, funcionando respectivamente como ações de posição e velocidade.

Para o cálculo dos ganhos dos controladores, considera-se o modelo linearizado do sistema, no qual as não linearidades e forças centrífugas são desprezadas. Os parâmetros são calculados de forma analítica, a partir dos requisitos de desempenho definidos para o sistema. Posteriormente, o projeto é validado no ambiente Simulink, onde o modelo exato do sistema é simulado, incluindo as não linearidades e a força centrífuga que foram omitidas na linearização. Dessa forma, verifica-se se o controlador projetado atende adequadamente ao desempenho esperado quando aplicado ao sistema real.

4 Simulações e Resultados

4.1 Descrição dos Casos Simulados

Foram simulados diferentes casos, variando-se as condições iniciais da argola e da barra, bem como os valores de referência x_r. O objetivo foi verificar o comportamento do sistema sob diferentes regimes de operação e testar a robustez dos controladores projetados.

4.2 Resultados

Os gráficos obtidos mostram a evolução temporal da posição da argola $x(t)$, do ângulo da barra $\theta(t)$, do torque aplicado $\tau(t)$, bem como do erro de rastreamento $x(t) - x_r$. Esses resultados permitem avaliar o desempenho do sistema de controle em termos de estabilidade, precisão e tempo de resposta.

4.3 Análise dos Resultados

A partir das simulações, observa-se o comportamento dinâmico do sistema frente a diferentes controladores e referências. São analisados aspectos como a estabilidade do sistema, o tempo de acomodação, a presença de oscilações, e a robustez frente a variações nos parâmetros do modelo. Resultados satisfatórios indicam que a estratégia de controle adotada foi eficaz dentro das condições simuladas.

5 Conclusão

O desenvolvimento deste projeto permitiu compreender os principais desafios envolvidos no controle de sistemas não lineares, especialmente na presença de malhas hierárquicas e interdependentes. A estratégia de controle adotada, com malhas interna e externa, mostrou-se efetiva para garantir o rastreamento da posição desejada pela argola, mesmo em condições adversas. Como possíveis extensões do trabalho, sugere-se a análise do sistema com perturbações externas, como atrito ou impa