Teoría sintética de GRAFOS

Un **GRAFO O GRAFO NO ORIENTADO** es una terna $G = (V, A, \varphi)$ con $V \neq \emptyset$ donde:

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$: conjunto finito de ***vértices o nodos***.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$: conjunto finito de ***aristas o lados*** y

$\varphi : A \rightarrow X(V)$ ***función de incidencia***, siendo $X(V) = \{X: X \subseteq V \text{ y } |X| = 1 \text{ ó } 2\}$, es decir, que asigna a cada arista un par no ordenado de vértices llamados extremos

Notación: Si $\varphi(\mathbf{a}) = \{v_1, v_2\}$ se dice que:

- v_1 y v_2 son los **extremos** de $\boldsymbol{a}$
- v_1 y v_2 son **vértices adyacentes** (existe una arista que los une)
- la arista ***a* es incidente en los vértices** v_1 y v_2

Un **DIGRAFO O GRAFO ORIENTADO** es una terna $D = (V, A, \varphi)\}$ con $V \neq \emptyset$ donde:
$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$: conjunto de ***vértices o nodos***.
$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$: conjunto de ***aristas o arcos***
$\varphi : A \rightarrow V \times V$ ***función de incidencia***.

Notación: Si $\varphi(a) = \{v_1, v_2\}$ se dice que

- los vértices $\boldsymbol{v_1}$ **y** $\boldsymbol{v_2}$ son adyacentes
- $\boldsymbol{a}$ incide positivamente en $\boldsymbol{v_2}$ y negativamente en $\boldsymbol{v_1}$
- $\boldsymbol{v_1}$ es extremo inicial de la arista a, $\boldsymbol{v_2}$ es extremo final de a

DEFINICIONES RELATIVAS A GRAFOS y DIGRAFOS

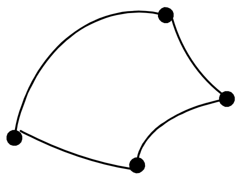
Aristas Adyacentes: Dos aristas son adyacentes si tienen un vértice en común

Aristas paralelas o múltiples: Un grafo (dígrafo) posee aristas paralelas sí y solo sí φ no es inyectiva; es decir, dado $\boldsymbol{a}_1 \in A$ y $\boldsymbol{a}_2 \in A$, $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ son aristas paralelas sí y solo sí $\varphi(\boldsymbol{a}_1) = \varphi(\boldsymbol{a}_2)$ (tienen los mismos vértices por extremos)

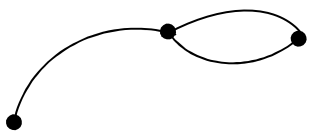
Lazo o bucle: $\boldsymbol{a} \in A$ es un lazo sí y solo sí $\varphi(\boldsymbol{a}) = \{v\}$ (los extremos de la arista coinciden)
$\boldsymbol{a} \in A$ es un bucle sí y solo sí $\varphi(\boldsymbol{a}) = (v, v)$ (En digrafos)

Existen grafos que poseen propiedades destacables. Algunos ejemplos básicos son:

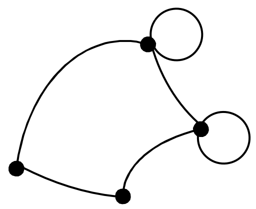
- Grafo vacío: aquel que no tiene aristas.
- Grafo trivial: aquel que tiene un vértice y ninguna arista.
- Grafo simple: aquel que no posee aristas paralelas ni bucles o lazos.
- Grafo propiamente dicho: cuando dos vértices están conectados por una sola arista.



- Multigrafo**:** cuando dos vértices están conectados por más de una arista



- Pseudografo: cuando un vértice puede unirse con el mismo (lazo o bucle)



- Grafo completo: grafo simple en el que cada par de vértices está unido por una arista, es decir, contiene todas las posibles aristas.

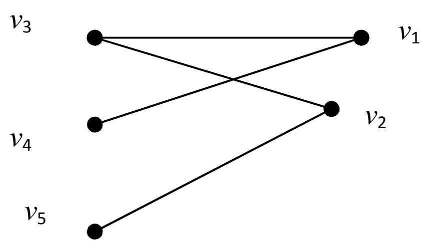
  El conjunto de los grafos completos es denominado usualmente K, siendo K_n el grafo completo de *n* vértices.

  Un K_n, es decir, grafo completo de *n* vértices tiene exactamente $\frac{n\,(n-1)}{2}$ aristas.

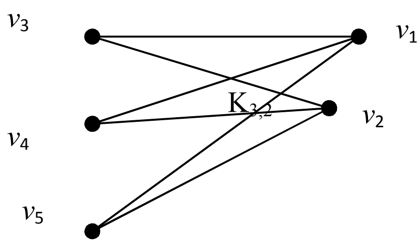
- Grafo complementario: Sea el G = (V, A, φ), se llama complementario de G, se indica: CG = (V´, A´, φ´), al grafo que tiene el mismo conjunto de vértices de G y cuyas aristas son las que le faltan a G para ser completo.

- Grafo bipartito: sea (*X*, W) una partición del conjunto de vértices *V*, grafo bipartito es aquel donde cada arista tiene un vértice en *W* y otro en *X*.

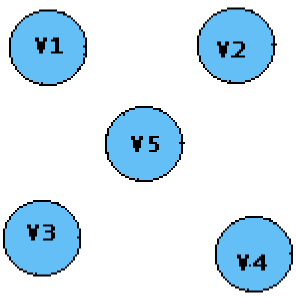
  Ejemplo: $V = \{v_1, v_{2,} v_{3,} v_{4,} v_5\}$; $W = \{v_1, v_2\}$; $X = \{v_{3,} v_{4,} v_5\}$



- Grafo bipartito completo: sea (X, *W*) una partición del conjunto de vértices *V*, se denomina así al grafo donde cada vértice en *W* es adyacente *sólo* a cada vértice en *X*, y viceversa (es decir, todo vértice de W está conectado con todo vértice de X), este grafo se indica $k_{p,q}$, donde p = número de vértices de X y q el número de vértices de W. Ejemplo:



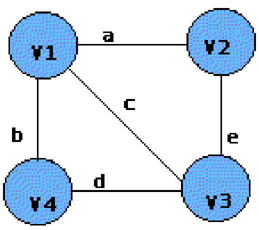
- Grafo nulo: Se dice que un grafo es nulo cuando los vértices que lo componen no están conectados, esto es, que son vértices aislados.

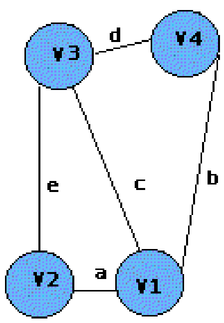


- Grafos Isomorfos: Dos grafos son isomorfos cuando existe una correspondencia biunívoca (uno a uno), entre sus vértices de tal forma que dos de estos quedan unidos por una arista en común.

  Los grafos *G* = (V, A, φ) y *G* = (V´, A´, φ´) son isomorfos si existen funciones biyectivas entre V y V´ y entre A y A´ que conservan las relaciones de incidencia y adyacencia. El isomorfismo entre grafos es una relación de equivalencia

  Ejemplos:

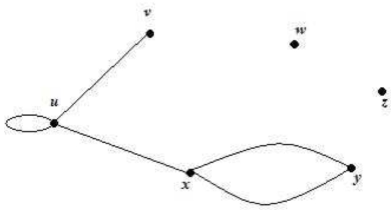




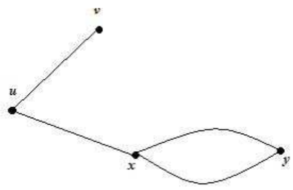
- Un subgrafo de un grafo *G* es un grafo cuyos conjuntos de vértices y aristas son subconjuntos de los de *G*, es decir, Subgrafos particularmente importantes son aquellos que se obtienen de un grafo suprimiendo uno o varios vértices y las aristas incidentes en estos vértices
  Su definición es:
  Sea G=(V, A, φ). G'=(V',A', φ´) se dice subgrafo de G si:
  1- $V' \subset V$
  2- $A' \subset A$
  3- φ´es una restricción de φ a A´

  Ejemplo:

G



G´



GRADO DE UN VÉRTICE O VALENCIA (EN GRAFOS)

Grado de un Vértice: **$g(v)$** es la cantidad de aristas incidentes en él, contando doble en el caso de lazo.

Nota: Si $g(v) = 0$ se dice que v es ***vértice aislado***.
Si $g(v) = 1$ se dice que v es ***vértice pendiente***

Propiedades:

- La suma de los grados de los vértices de un grafo es igual al doble de la cantidad de aristas.
- La cantidad de vértices **de grado impar** de un grafo G= {**V**, A, φ}, es un número **par.**

GRADO DE UN VÉRTICE O VALENCIA (EN DIGRAFOS)

***Grado positivo de un vértice*: $g+(v)$:**es la cantidad de aristas que inciden positivamente en v. (flechas que llegan)

***Grado negativo de un vértice*: $g -(v)$** es la cantidad de aristas que inciden negativamente en v (flechas que salen).

Nota: El bucle se cuenta como arista incidente positiva y negativamente en el vértice por lo tanto se lo cuenta en $g+$ (v) y en $g –$ (v).
Si $g+ (v) = g – (v) = 0$ se dice que v es ***vértice aislado***.

***Grado total de un vértice*: $gt(v)$:** $g(v) = g+(v) + g-(v)$

Propiedad:
La suma de los grados positivos de los vértices es igual a la suma de los grados negativos y es igual a la cantidad de aristas del dígrafo: $\Sigma g_{+}(v) = \Sigma g_{-}(v) = |A|$

GRAFO (DIGRAFO) k-REGULAR

- . Un grafo G = (V, A, φ) es k-regular sí y sólo sí $v \in$ V: $g(v)$ = k
- Un dígrafo D = (V, A, φ) es k-regular sí y sólo sí $v \in$ V: $g+(v) = g-(v)$ = k

CADENA, CICLO y LONGITUD EN GRAFOS

Cadena: es una sucesión de aristas adyacentes. Una cadena puede indicarse también por los vértices.

Cadena Sencilla: cuando las aristas utilizadas son todas diferentes, caso contrario, la cadena se denomina compuesta.

Cadena elemental: cuando a cada vértice que define la cadena se lo encuentra una sola vez.

Ciclo: es una cadena finita en la cual el vértice inicial coincide con el vértice final

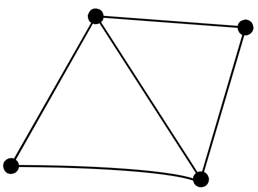
Ciclo sencillo: cuando todas las aristas que lo componen son distintas.

Ciclo elemental: cuando cada vértice aparece una sola vez, excepto el primero y el último.

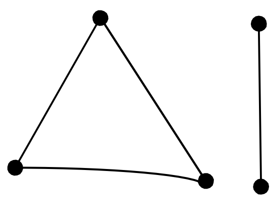
Longitud de una cadena o ciclo: es el número de aristas de la sucesión.

Grafos conexos: un grafo es conexo si entre dos vértices cualesquiera y distintos existe una cadena de cualquier longitud.

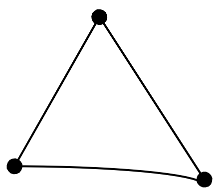
Grafo conexo (figura 1)



Grafo no conexo (figura 2)



Un subgrafo de un grafo dado que sea conexo se llama *componente conexa*.
Ejemplo: (figura 2)



CAMINOS, CIRCUITOS y CICLOS (EN GRAFOS)

Camino: es una sucesión de arcos adyacentes tales que el extremo final de uno coincide con el extremo inicial del siguiente. Un camino puede ser finito (número finito de arcos) o infinito (número infinito de arcos). Un camino se puede indicar también por los vértices que lo componen.

Camino Simple o Elemental: es un camino que *no repite vértices*

Camino sencillo: cuando los arcos que lo componen son todos diferentes, caso contrario el camino se denomina compuesto.

Circuito: es un camino finito en el cual el vértice inicial coincide con el vértice final

Circuito sencillo: cuando cada arco aparece una sola vez

Circuito Simple: circuito que no repite vértices, a excepción del origen y el extremo que coinciden o en el caso trivial $v_0 = v_n$

Longitud de un camino: es el número de arcos de la sucesión.

Bucle: es un circuito de longitud uno.

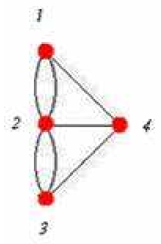
Un digrafo es *fuertemente conexo* si entre dos vértices v_1 y v_2 distintos existe un camino de cualquier longitud que va de v_1 a v_2.

Una *componente fuertemente conexa* es un subgrafo dirigido fuertemente conexo de un digrafo dado.

MATRIZ DE ADYACENCIA DE VÉRTICES PARA GRAFOS NO ORIENTADOS

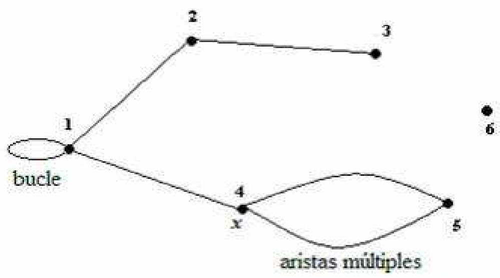
.

$$M = \begin{cases} m_{ij} = 1 & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ m_{ij} = 0 & \text{si } v_i \text{ no es adyacente a } v_j \\ m_{ij} = 1 & \text{si en } v_i \text{ hay un lazo} \\ \text{Si entre } v_i \text{ y } v_j \text{ hay n aristas, entonces } m_{ij} = n \end{cases}$$



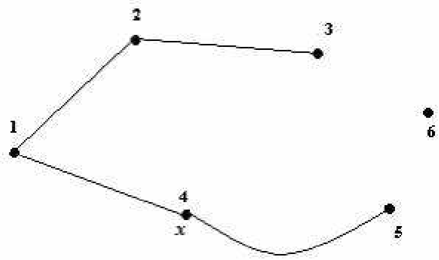
G

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



H

$$A(H) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

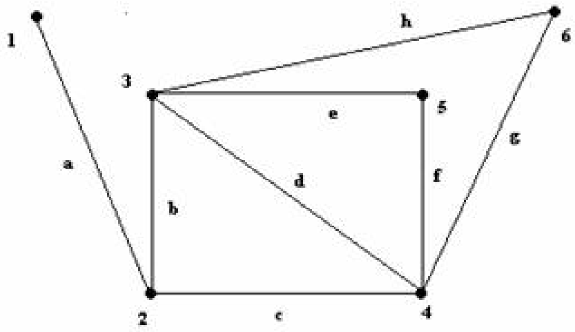


H'

$$A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE INCIDENCIA DE ARISTAS PARA GRAFOS NO ORIENTADOS

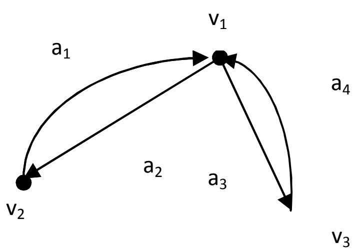
$$M = \begin{cases} m_{ij}= 1 & \text{si } v_i \text{ y } a_i \text{ son incidentes} \\ m_{ij}= 0 & \text{si } v_i \text{ y } a_i \text{ no son incidentes} \end{cases}$$



$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

MATRIZ DE INCIDENCIA EN GRAFOS ORIENTADOS, DIRIGIDOS O DIGRAFOS

$$M = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es el origen del arco } a_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es el extremo del arco } a_j \\ 0 & \text{si, } a_j \text{ no incide en } v_i \\ 2 & \text{si } v_i \text{ es el origen y extremo de } a_j \end{cases}$$



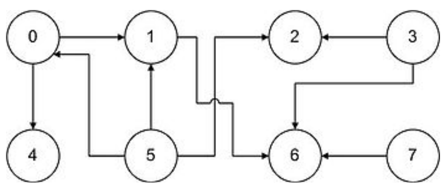
	a_1	a_2	a_3	a_4
v_1	-1	1	1	-1
v_2	1	-1	0	0
v_3	0	0	-1	1

MATRIZ DE ADYACENCIA DE VÉRTICES PARA GRAFOS ORIENTADOS

.

$$M = \begin{cases} m_{ij}= 1 & \text{si hay un arco de } v_i \text{ a } v_j \\ m_{ij} = 0 & \text{si no hay un arco de } v_i \text{ a } v_j \\ m_{ij} = 1 & \text{si en vi hay un bucle} \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Fuente:

NICOLINI, Ángeles / SANTA MARÍA, Graciela / VASINO, Susana – *Matemática para Arquitectura y Diseño* – Ed. Nueva Librería – 1998

MATOUšEK, Jiři / JAROSLAV, Nešetřil – *Invitación a la matemática discreta* – Editorial REVERTÉ – 2008

CAMPIAS, Norma Enia de – *Grafos* – Cátedra: Matemática Discreta – UTN-FRR

http://materias.fi.uba.ar/6107/grafos_definiciones.pdf

http://docencia.udea.edu.co/regionalizacion/teoriaderedes/definicionesu1.html