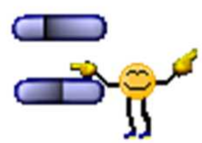
IGUALDAD DE MATRICES

$$A \in K^{mxn} \; y \; A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$$

$$B \in K^{mxn} \; y \; B = \left[b_{ij}\right]_{mxn}$$

$$A = B \Leftrightarrow \left[a_{ij}\right]_{mxn} = \left[b_{ij}\right]_{mxn} \begin{cases} \forall\, i = 1, 2 \ldots m \\ \forall\, j = 1, 2 \ldots n \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & 3+1 & 2^3 \\ 2^2 & 9 & 3^0 \end{bmatrix}_{2x3}$$



$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A = B$$

MATRIZ TRASPUESTA

Es la matriz que se obtiene permutando filas por columnas.

$$A \in K^{mxn} \;\; y \;\; A = \left[a_{ij}\right]_{mxn} \, y$$

$$A^T = \left[a_{ji}\right]_{nxm} \rightarrow A \in K^{nxm}$$

$$Ej: \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

ALGEBRA MATRICIAL

SUMA DE MATRICES: se define la suma para matrices de la misma clase

$$\boldsymbol{A \in K^{mxn}\ y\ A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}}$$
$$\boldsymbol{B \in K^{mxn}\ y\ B = \left[b_{ij}\right]_{mxn}}$$

Se define:

$$\boldsymbol{S = A + B \Leftrightarrow \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{mxn} \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{S = A + B \in K^{mxn} \begin{cases} \forall\ i = 1, 2 \ldots m \\ \forall\ j = 1, 2 \ldots n \end{cases}}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2x3} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}_{2x3}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2x3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 10 & -3 & 5 \end{bmatrix}_{2x3}$$

PROPIEDADES DE LA SUMA:

Ley de cierre: $\forall\, A, B \in K^{mxn}: (A + B) \in K^{mxn}$

Ley Asociativa: $\forall\, A, B, C \in K^{mxn}$:

$$(A + B) + C = A + (B + C) \in K^{mxn}$$

Existencia de elemento neutro:

$$\exists\, E \in K^{mxn} / \forall A \in K^{mxn} : A + E = E + A = A$$

$$E = [0]_{mxn}\ Matriz\ Nula$$

Existencia de elemento simétrico:

$$\forall A \in K^{mxn}\ \exists(-A) \in K^{mxn}:$$

$$A + (-A) = (-A) + A = E = [0]$$

Propiedad conmutativa:

$$\forall\, A, B \in K^{mxn}: A + B = B + A$$

<u>DIFERENCIA DE MATRICES</u>:

dadas dos matrices $\boldsymbol{A\ y\ B}\ \in \boldsymbol{K^{mxn}}$de la misma clase, para efectuar la resta A – B $\boldsymbol{se\ debe\ sumar\ a\ \ la\ matriz\ A,\ \ la\ opuesta\ de\ B}.$

$$\forall\ \boldsymbol{A, B}\ \in\ \boldsymbol{K^{mxn}}: \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$$

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

$Dado\ A \in K^{mxn}$ y $\lambda \in K$ el producto de una matriz por un escalar define una operación externa que da por resultado una matriz de orden mxn cuyos elementos se obtienen de multiplicar cada elemento por el escalar.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{mxn} \Rightarrow \lambda. A = \lambda. \left[a_{ij}\right]_{mxn} = \left[\lambda. a_{ij}\right]_{mxn}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda \,.\, A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

1) Ley de composición externa:

$$\forall\, A \in K^{mxn}\ y\ \lambda \in K(escalar) \Rightarrow \lambda\,.\,A = C \in K^{mxn}$$

2) Asociatividad respecto al producto de escalares:

$$\forall\, A \in K^{mxn}\ y\ \lambda_1 \wedge \lambda_2 \in K \Rightarrow \lambda_1.\,(\lambda_2.\,A) = (\lambda_1.\,\lambda_2)\,.\,A \in K^{mxn}$$

3) El producto es distributivo respecto a la suma de escalares:

$$\forall\, A \in K^{mxn}\ y\ \lambda_1 \wedge \lambda_2 \in K \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2).\,A = \lambda_1\,.\,A + \lambda_2.\,A$$

4) El producto es distributivo respecto a la suma de matrices:

$$\forall\, A, B \in K^{mxn}\ y\ \lambda \in K \Rightarrow \lambda(A + B) = \lambda\,.\,A + \lambda.\,B$$

5) Existencia del escalar neutro:

$$\lambda = 1, \qquad A \in K^{mxn}\ y\ \lambda \in K \wedge \lambda = 1 \Rightarrow A.\,1 = 1\,.\,A$$

PRODUCTO DE MATRICES

Sean las matrices A $[a_{ij}]_{mxn}$ y B $[b_{ij}]_{nxq}$. El producto A . B será factible si los factores cumplen con el requisito siguiente: *el número de columnas de la matriz A debe ser el mismo que el número de filas de la matriz B*.
En la matriz A_{mxn} cada uno de los m vectores fila tiene n componentes y en la matriz B cada uno de sus q vectores columnas tiene n componentes $\Rightarrow$ se puede multiplicar cada vector fila de matriz por cada vector columna de la matriz B y A . B es realizable.

1) A conjunto m vectores filas de n componentes cada uno.
   B conjunto de q vectores columnas de n componentes cada uno.

2) Efectuaremos los m . q productos: "vector fila de A por vector columna de B".

3) Cada producto conforma un elemento de la matriz producto, la que será de clase m x q, tantas filas como A y tantas columnas como B.

$$\Rightarrow \quad A = [a_{ij}]_{mxn} \quad \wedge \quad B = [b_{ij}]_{nxq} \quad \Rightarrow \quad A \,.\, B = P / \quad P = [p_{ij}]_{mxq}$$

El elemento genérico del producto p_{ij} queda definido por la expresión:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Para
i = 1,2... m
j = 1,2... q

$$p_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + a_{i3}\, b_{3j} + \ldots\ldots\ldots + a_{in}\, b_{nj}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{11} & \boldsymbol{b}_{12} \\ \boldsymbol{b}_{21} & \boldsymbol{b}_{22} \\ \boldsymbol{b}_{31} & \boldsymbol{b}_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & b_{11} & b_{12} \\ & & & b_{21} & b_{22} \\ & & & b_{31} & b_{32} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_{11} & p_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_{21} & p_{22} \end{array}$$

$$\mathbf{p_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13}\, b_{31}}$$

$$\mathbf{p_{21} = a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + a_{23}\, b_{31}}$$

$$\mathbf{p_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + a_{13}\, b_{32}}$$

$$\mathbf{p_{22} = a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} + a_{23}\, b_{32}}$$

1) $A . B \neq B . A$ no conmutatividad del producto.

2) $A (B + C) = A B + A C$ Distributividad

3) $(B + C) A = B A + C A$ Distributividad

4) $(A.B) . C = A . (B . C)$

5) $A . B = 0$ no implica $A=0$ ó $B = 0$,

6) $A . B = A . C \not\Rightarrow B = C$

7) $(A.B)^t = B^t . A^t$