# Teoría sintética de Matrices y Determinantes (1º Parte)

## Definición de matriz

Se llama **matriz** de orden **m×n** a todo conjunto rectangular de elementos $\boldsymbol{a_{ij}}$ dispuestos en **m** filas y **n** columnas de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El elemento genérico de la matriz A es $a_{ij}$ con i =1, 2, ..., m, j =1, 2, ..., n. Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila (i) y el segundo la columna (j). Por ejemplo el elemento $a_{25}$ será el elemento de la fila 2 y columna 5.

Podemos escribir: Sea $A = (a_{ij})_{mxn}$, o bien $A \in K^{mxn}$, es decir, A pertenece a la clase de matrices mxn

Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

## Algunos tipos de matrices

**Atendiendo a la forma**

**Matriz Rectangular:** Es aquella en la que el número de filas es distinto al número de columnas, es decir **m ≠ n**.

Ejemplo: $B_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, m = 2 y n = 3

**Matriz fila:** Es una matriz que solo tiene una fila, es decir m =1 y por tanto es de orden **1xn**.

Ejemplo: $A_{1x3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

**Matriz columna:** Es una matriz que solo tiene una columna, es decir, n =1 y por tanto es de orden **m x1**.

Ejemplo: $A_{3x1} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$

**Matriz cuadrada:** Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir **m = n**. En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden n, y no n x n.

Los elementos $a_{ij}$ con i **=** j, son los que forman la llamada diagonal principal de la matriz cuadrada, y los elementos $a_{ij}$ con i + j **=** n +1 la diagonal secundaria.

**Ejemplo**: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$,

2, 6 son los elementos de la diagonal principal y 4 y 5 los elementos de la diagonal secundaria

**Matriz simétrica:** Una matriz cuadrada A es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j.

**Ejemplo:** $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ donde $a_{12} = a_{21} = 4$

**Matriz antisimétrica:** Una matriz cuadrada es antisimétrica si si $a_{ij} = -a_{ji}$ i, j.y los elementos de la diagonal principal son nulos

**Ejemplo:** $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

**Atendiendo a los elementos**

**Matriz nula** es aquella que todos sus elementos son 0 y se representa por **0**.

**Ejemplo:** $A_{2x2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Matriz diagonal o casi escalar:** Es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.

**Ejemplo:** $A_{3x3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

**Matriz escalar:** Es una matriz donde los elementos de la diagonal principal son iguales y los demás elementos son nulos.

**Ejemplo:** $A_{3x3} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

**Matriz unidad** o **identidad:** Es una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal iguales a 1.

**Ejemplo**: $A_{3x3} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Matriz Triangular:** Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que están a un mismo lado de la diagonal principal. Las matrices triangulares pueden ser de dos tipos:

**Triangular Superior:** Si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, $a_{ij} = 0$ si i<j.

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 11 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

**Triangular Inferior:** Si los elementos que están por encima de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, $a_{ij}$ =0 si j<i.

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 5 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matriz traspuesta:** Dada una matriz A, se llama traspuesta de A, y se representa por $A^T$, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas. La primera fila de A es la primera columna de $A^T$ , la segunda fila de A es la segunda columna de $A^T$, etc.

De la definición se deduce que si A es de orden m x n, entonces $A^T$ es de orden n x m.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Ejemplo**: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ entonces $A^T_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

**Propiedades de la trasposición de matrices**

1. Dada una matriz A, siempre existe su traspuesta y además es única.
2. $(A^T)^T$ = A.

## Suma de matrices

Para sumar dos matrices A=($a_{ij}$), B=($b_{ij}$), éstas deben ser del mismo orden o dimensión y la matriz resultante, es otra matriz S=($s_{ij}$) de la misma dimensión que los sumandos y con término genérico $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, es decir, la suma se realiza elemento a elemento.

La suma de las matrices A y B se denota por A+B.

**Ejemplo**: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ $y$ $B_{2x2} = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$ $entonces$ $A + B = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$

**Para cualesquiera matrices A, B y C de las mismas dimensiones, se cumplen las siguientes propiedades:**

1. A + (B + C) = (A + B) + C (propiedad asociativa)
2. A + B = B + A (propiedad conmutativa)

3. A + 0 = A (0 es la matriz nula)
4. La matriz –A, que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de A, recibe el nombre de matriz opuesta de A, ya que A + (–A) = 0.
5. A.(B + C) = A.B + A.C (propiedad distributiva)

La diferencia de matrices A y B se representa por A–B, y se define como: A–B = A + (–B)

**Ejemplo**: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ , $B_{2x2} = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$ , $-B = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -3 & -13 \end{bmatrix}$

$$entonces\ A + (-B) = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

## Producto de una matriz por un número

El producto de una matriz A = ($a_{ij}$) por un número real k es otra matriz B = ($b_{ij}$) de la misma dimensión que A y tal que cada elemento $b_{ij}$ de B se obtiene multiplicando $a_{ij}$ por k, es decir, $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

**Ejemplo**: $Sea\ A = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\ y\ k = 2, entonces\ 2.A = B = \begin{bmatrix} 28 & -4 \\ 4 & -14 \end{bmatrix}$

El producto de la matriz A por el número real k se designa por k·A. Al número real k se le llama también escalar, y a este producto, producto de escalares por matrices.

**Propiedades del producto de una matriz por un escalar**

1. k (A + B) = k A + k B (propiedad distributiva 1ª)
2. (k + h)A = k A + h A (propiedad distributiva 2ª)
3. k [h A] = (k h) A (propiedad asociativa mixta)
4. 1·A = A (elemento unidad)

**Propiedades simplificativas**

1. A + C = B + C si A = B.
2. k A = k B si A = B y k es distinto de 0.
3. k A = h A si h = k y A es distinto de 0.

## Producto de matrices

Para poder multiplicar dos matrices A y B, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz, y su producto es otra matriz P donde el orden o dimensión estará dado por el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda matriz, es decir:

El producto de la matriz $A_{mxn}$ por la matriz $B_{nxp}$ es una matriz P de orden mxp

$$P_{ij} = \sum a_{ik}\ .b_{kj}$$

Es evidente que el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B.

Podemos generalizar al producto de matrices como: $P_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, . \, b_{kj}$

**P = A . B** en donde: $P_{ij} = a_{i1} \, . \, b_{1j} + a_{i2} \, . \, b_{2j} + \dots\dots\dots + a_{ip} \, . \, b_{pj}$

**Ejemplos** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ; $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, entonces $A_{2x2} . B_{2x3} = P_{2x3}$

| A.B | $\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \end{matrix}$ | |
|---|---|---|
| $\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -1 & 1 & 4 \\ -9 & 15 & 12 \end{matrix}$ | P |

**Propiedades del producto de matrices**

1. A·(B·C) = (A·B)·C
2. El producto de matrices en general no es conmutativo.
3. Si A es una matriz cuadrada de orden **n** se tiene $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.
4. Dada una matriz cuadrada A de orden n, no siempre existe otra matriz B tal que $\mathbf{A \cdot B = B \cdot A = I_n}$.
   Si existe dicha matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa por $\mathbf{A}^{-1}$ .
5. El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices, es decir:
   **A . (B + C) = A . B + A·C**

**Consecuencias de las propiedades**

1. Si A·B= 0 no implica que A=0 ó B=0.
2. Si A·B=A·C no implica que B = C.
3. En general $(A+B)^2$□ = □$A^2 + 2AB + B^2$ , ya que A·B = B·A.
4. En general (A+B)·(A–B) = □$A^2 – B^2$, ya que A·B = B·A.

Fuente:


- SMITH, Stanley y otros - *Algebra, Trigonometría y Geometría Analítica* - Ed. Addison Wesley Longman - 1998
- http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html