Teoría sintética de Matrices y Determinantes (2º Parte)

Determinantes (*)

Asociado a cada matriz cuadrada A hay un número llamado determinante de A.

Determinante de A se puede escribir de dos formas:

$|A|$ determinante de A (no lo confundan con el signo del valor absoluto de un número real)

ΔA, Det A Esta se utiliza a veces en lugar de $|A|$ para evitar la confusión.

Una matriz es de primer orden cuando únicamente tiene un solo elemento: $A = [a_{11}]$ y definimos la determinante de A como $|A| = a_{11}$.

Ahora si la matriz A es una matriz cuadrada de segundo orden tendremos una matriz de 2 x 2 de modo que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ es una matriz cuadrada de segundo orden.

Para hallar el determinante de esta matriz se realiza de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad |A| = \underbrace{(a_{11})(a_{22})}_{\text{multiplicar}} \underset{\text{RESTAR}}{-} \underbrace{(a_{21})(a_{12})}_{\text{multiplicar}}$$

Ejemplo:

Encuentre $|A|$ si $A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{(3)(-1)}_{\text{multiplicar}} \underset{\text{RESTAR}}{-} \underbrace{(4)(-2)}_{\text{multiplicar}} = (-3)-(-8) = -3+8 = 5$

Menor Complementario

Sea A una matriz de orden n ≥ 2, definimos el menor complementario M_{ij} asociado al elemento a_{ij} de A como el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar la fila i-ésima y la columna j-ésima de la matriz A.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces el $M_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Adjunto de un elemento o Cofactor asociado al elemento

El cofactor C_{ij} o adjunto A_{ij} asociado al elemento a_{ij} de A esta dado por $A_{ij} = (-1)^{i+j} . M_{ij}$ o bien $C_{ij} = (-1)^{i+j} . M_{ij}$ **El cofactor nos da como resultado el signo del menor complementario**.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces el $A_{23} = (-1)^{2+3} . M_{23} = (-1)^5 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Si tenemos la matriz A:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Para hallar el menor M_{11}:

a) suprimimos la primera fila y la primera columna así

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

b) tomamos los números que no quedan tapados (los números rojos)

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

c) Tercero hallamos el determinante

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (4)(7) - (5)(6) = 28 - 30 = -2$$

Hallar los menores M_{12}, M_{22} y M_{32}

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = (2)(7)-(1)(6) = 14-6 = 8$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = (1)(7)-(3)(1) = 7-3 = 4$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (1)(6)-(2)(3) = 6-6 = 0$$

MENOR **COFACTOR**

$M_{11} = -2$ $$A_{ij} = (-1)^{i+j}(M_{ij}) = (-1)^{1+1}(-2) = (-1)^2(-2) = (+1)(-2) = -2$$

$M_{12} = 8$ $$A_{ij} = (-1)^{i+j}(M_{ij}) = (-1)^{1+2}(8) = (-1)^3(8) = (-1)(8) = -8$$

$M_{22} = 4$ $$A_{ij} = (-1)^{i+j}(M_{ij}) = (-1)^{2+2}(4) = (-1)^4(4) = (+1)(4) = 4$$

$M_{32} = 0$ $$A_{ij} = (-1)^{i+j}(M_{ij}) = (-1)^{3+2}(0) = 0$$

En una matriz de tercer orden, el signo de los menores seria:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

(*)sectormatematica.cl/media/NM3/**DETERMINANTES**.doc

Determinante de orden n (n ≥ 2)

La **Regla de Sarrus** sólo permite hallar el determinante de una matriz de orden 3, consiste en repetir las dos primeras filas, sumar los productos de los elementos de la diagonal principal y sus paralelas y restar los productos de los elementos de la diagonal secundaria y sus paralelas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{23} a_{32} a_{11} - a_{33} a_{12} a_{21}$$

Si repetimos las dos primeras columnas en vez de las dos primeras filas, se llega al mismo resultado final.

Si tenemos un determinante de orden superior a 3 no podemos usar la Regla de Sarrus pero, podemos evaluarlo **por los elementos de una línea (fila o columna),** este método puede ser usado para hallar el determinante de orden n y consiste en lo siguiente:

El determinante de una matriz A de orden n (n ≥ 2) consiste en multiplicar cada elemento, de cualquier fila o (columna) por su cofactor y luego sumar los productos resultantes, es decir: es igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera, multiplicados por sus adjuntos o cofactores:

Por ejemplo, si desarrollamos un determinante de orden *n* por los adjuntos de la 1ª fila se tiene:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{1j} \, . A_{1j}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

En esta definición se establece un patrón de multiplicar cada elemento de la fila 1 por su cofactor o adjunto, luego se suman todos los resultados para hallar $|A|$.

Si todo elemento de una fila (o columna) de una matriz cuadrada A es cero, entonces $|A| = 0$.

Nota

Esta regla rebaja el orden del determinante que se pretende calcular en una unidad. Para evitar el cálculo de muchos determinantes conviene elegir líneas con muchos ceros

Ejemplos (*):

1) Hallar el determinante de $|A|$: $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Primero hallamos los adjuntos de los elementos de la primera fila

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 M_{11} = M_{11}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -M_{12}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 M_{13} = M_{13}$$

Luego hallamos los menores de la primera fila

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{M}_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{M}_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{M}_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora lo colocamos como la definición

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = (6)\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + (-5)\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

Ahora operamos

$$= 6.(4.(-3)-5.2)-5\ (2.(-3)-5.1\ )\ +\ 3\ (2.2\ -4.1) = 6(-22)-5(-11)+3(0) = \ -132\ +\ 55 = -77$$

2) Calcule el determinante de

$$A=\begin{bmatrix}1&0&3\\5&0&4\\3&2&5\end{bmatrix}$$

Observe cuidadosamente la matriz A y verá que la segunda columna tiene varias entradas a cero. Por lo que hallaremos el determinante por la segunda columna.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&3\\5&0&4\\3&2&5\end{bmatrix} \quad |A|=(0)\begin{bmatrix}5&4\\3&5\end{bmatrix}+(0)\begin{bmatrix}1&3\\3&5\end{bmatrix}+(2).(-1)\begin{bmatrix}1&3\\5&4\end{bmatrix}=0+0-2(4-15)=22$$

(*)sectormatematica.cl/media/NM3/**DETERMINANTES**.doc

Matrices inversibles

Una matriz cuadrada que posee inversa se dice que es inversible, regular o no singular notada por A^{-1}; tal que pre o post multiplicada por A da como resultado la matriz identidad (I); en caso contrario recibe el nombre de singular.

Propiedades de la inversión de matrices

3) La matriz inversa, si existe, es única
4) $A^{-1}A=A\cdot A^{-1}=I$
5) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
6) $(A^{-1})^{-1}=A$
7) $(kA)^{-1}=(1/k)\cdot A^{-1}$
8) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

Observación

Podemos encontrar matrices que cumplen A·B = I, pero que B·A ≠ I, en tal caso, podemos decir que A es la inversa de B "por la izquierda" o que B es la inversa de A "por la derecha".

Hay varios **métodos para calcular la matriz inversa** de una matriz pero, sólo veremos:

Cálculo de la matriz inversa usando determinantes

Si tenemos una matriz tal que Det (A) ≠ 0, se verifica:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}.Adj.(A)$$

Dada una matriz cuadrada A, se llama matriz adjunta de A, y se representa por Adj(A), a la matriz de los adjuntos, Adj(A) = (A_{ij}).

Para obtener la matriz adjunta de A previamente debemos obtener la matriz traspuesta de A (A^T).

El producto de A por su adjunta da como resultado la matriz escalar donde el escalar (λ) es igual al valor del determinante de A:

$$A.\,Adj(A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

Recordemos que en la matriz escalar los elementos de la diagonal principal son iguales a λ y los demás elementos son iguales a cero.

Resumiendo:

1º) $|A| \neq 0$

2º) A^T

3º) *Adj(A)*

3.1) Verificar *A. Adj(A)*= matriz escalar, donde $\lambda = |A|$

4º) A^{-1}

4.1) Verificar: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1º) $|A| \neq 0; \quad |A| = 22$

2º) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

3º) $Adj.(A) = \begin{bmatrix} -8 & 6 & 0 \\ -13 & -4 & 11 \\ 10 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

3.1) $Adj.(A) = \begin{bmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{bmatrix}$

4º) $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj.(A) = \frac{1}{22}.\begin{bmatrix} -8 & 6 & 0 \\ -13 & -4 & 11 \\ 10 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{22} & \frac{6}{22} & 0 \\ \frac{-13}{22} & \frac{-4}{22} & \frac{11}{22} \\ \frac{10}{22} & \frac{-2}{22} & 0 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} & 0 \\ \frac{-13}{22} & \frac{-2}{11} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{11} & \frac{-1}{11} & 0 \end{bmatrix}$$

4.1) $A^{-1}.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Fuente:

GOICOECHEA – *Álgebra y Geometría – Facultad de Ingeniería- UNNE - 2006*

SMITH, Stanley y otros - *Algebra, Trigonometría y Geometría Analítica* - Ed. Addison Wesley Longman - 1998

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-0

sectormatematica.cl/media/NM3/**DETERMINANTES**.doc