Relaciones – Matrices y Grafos

El **producto cartesiano** de dos conjuntos no vacíos A y B, que se simboliza A x B, es el conjunto conformado por todos los pares ordenados de la forma (a, b) que tienen como primer miembro un elemento del conjunto A (a) y como segundo un elemento del conjunto B (b). Si A tiene "n" elementos y B tiene "m" elementos el producto cartesiano tendrá "nxm" elementos.

Los conjuntos utilizados para encontrar un producto cartesiano pueden ser el mismo

Simbólicamente:

$$A\text{x}B = \{(a, b) \,/\, a \in A \;\wedge\; b \in B\}$$

Ejemplo:

Sea $A = \{1; 3; 5\}$ y $B = \{c; d\}$ su producto cartesiano será:

$$A\text{x}B = \{(1; c); (\,1; d); (3; c); (3; d); (5; c); (5; d)\}$$

RELACION ENTRE CONJUNTOS

Una **relación** de un conjunto A a un conjunto B es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A\text{x}B$.

Denotaremos a las relaciones entre A y B como: $R: A \to B$.

Ejemplos: $R_1 = \{(\,1; c); (5; d)\}$; $R_2 = \{(3; c); (\,3; d); (5; c)\}$

Tanto R_1 y R_2, son ejemplos de relaciones.

Veamos dos formas distintas de representar la relación R_1.

DIAGRAMA DE VENN

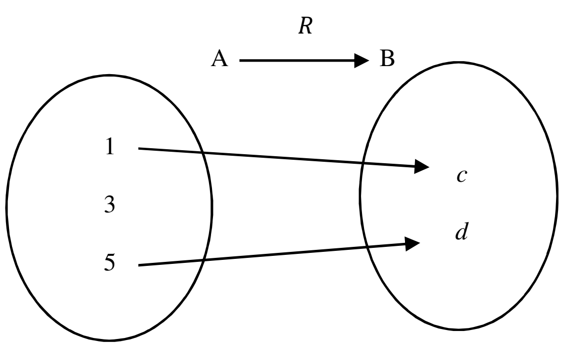
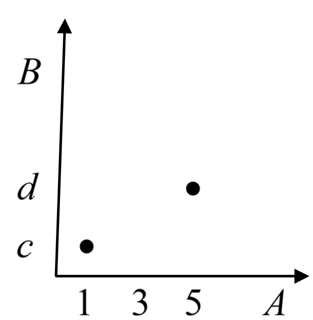


GRAFICO CARTESIANO



<u>Relación definida en A</u>: Se denomina así a todo subconjunto del producto cartesiano A x A.

<u>Ejemplo</u>: Sea $A = \{1; 3; 5\}$ y la R: "x < y" entonces $R = \{(1;3); (1;5); (3;5)\}$

Fuentes: Prof. Norma E. de Campias - Relaciones-Matrices-Grafos — Publicación Didáctica
Smith y otros – Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica – Capítulo 3

DIAGRAMA DE VENN

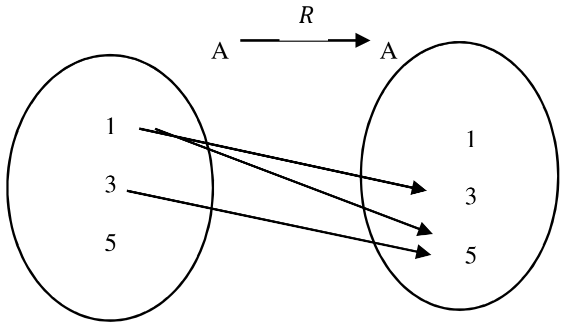
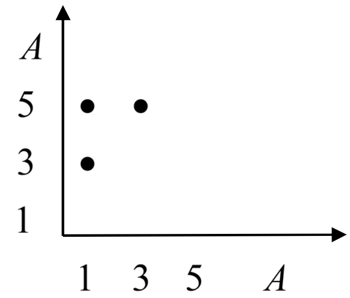


GRAFICO CARTESIANO



Alcance – Rango – Dominio – Imagen

El conjunto de TODOS los elementos del conjunto de partida se denomina ALCANCE.

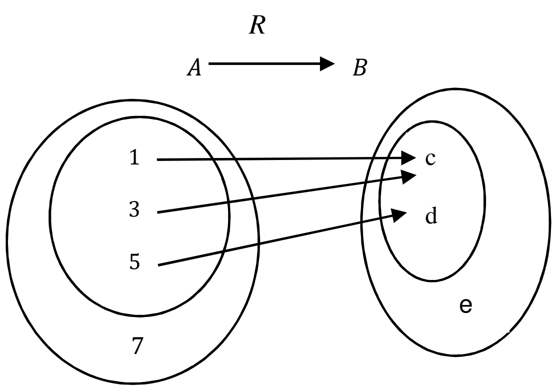
El conjunto de TODOS los elementos del conjunto de llegada se denomina RANGO.

El conjunto de todos los primeros miembros de una relación se denomina DOMINIO (puede o no ser igual al alcance)

El conjunto de todos los segundos miembros de una relación se denomina IMAGEN (puede o no ser igual al rango)

Ejemplo: Sea $A = \{1; 3; 5; 7\}$ y $B = \{c; d; e\}$ su producto cartesiano será:

$$R = A\text{x}B = \{(1; c); (3; c); (5; d)\}$$



Alcance: $A = \{1; 3; 5; 7\}$; Rango: $B = \{c; d; e\}$; Dominio: {1; 3; 5} ; Imagen:{c; d}

Matriz de una Relación: Sea una relación R definida entre un conjunto A de m elementos y un conjunto B de n elementos, podemos representar la relación por medio de una matriz $M = [i; j]_{mxn}$ definida de la siguiente manera:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; (a_i; b_j) \in R \\ 0 \; si \; (a_i; b_j) \notin R \end{cases}$$

Fuentes: Prof. Norma E. de Campias - Relaciones-Matrices-Grafos — Publicación Didáctica
Smith y otros – Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica – Capítulo 3

Ejemplo: $A=\{1;2;3;5;8\}$; $B=\{1;4;6\}$; $R:"x<y"$
$R=\{(1;4);(1;6);(2;4);(2;6);(3;4);(3;6);(5;6)\}$

$$M=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 5\\ 8 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Recíprocamente, toda matriz cuyos elementos son ceros y unos, puede ser pensada como representante de una relación existente entre dos conjuntos:

A: tiene tantos elementos como indica el número de filas de la matriz
B: tiene tantos elementos como indica el número de columnas de la matriz

Ejemplo: $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ número de filas: $4 \Rightarrow A=\{a;b;c;d\}$
número de columnas: $3 \Rightarrow B=\{o;p;q\}$

De acuerdo a lo definido: $m_{ij}=1 \Leftrightarrow (a_i;b_j)\in R$ y $m_{ij}=0 \Leftrightarrow (a_i;b_j)\notin R$ entonces podemos escribir la relación: $R=\{(a;o);(b;p);(b;q);(c;o);(d;o);(d;q)\}$

Si la relación está definida en un conjunto A, se procede de la misma manera solo que la matriz será cuadrada.

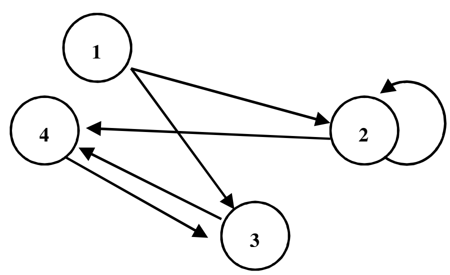
<u>Grafo de una Relación</u>: En este caso consideramos relaciones definidas en un solo conjunto.

Para construir el grafo cada elemento de ese conjunto es representado por un vértice y estos vértices serán unidos por arcos para indicar los pares ordenados de la relación.

Esto significa que existirá un arco del vértice v_i al vértice v_j $\Leftrightarrow (v_i;v_j)\in R$

La representación que se obtiene en este caso de R es un grafo orientado (digrafo).

Ejemplo: Sea el conjunto $A=\{1;2;3;4\}$ y la relación $R=\{(1;2);(1;3);(2;2);(2;4);(3;4);(4;3)\}$, al representarla se obtiene el siguiente dígrafo simple:



El dominio está formado por los vértices del grafo de los cuales sale, por lo menos, un arco y la imagen por los vértices a los cuales llega, por lo menos, un arco.

Dominio= {1; 2; 3; 4} ; Imagen= {2; 3; 4}

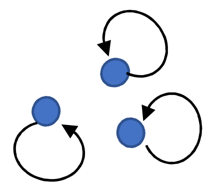
<u>Propiedades de las relaciones definidas en un conjunto</u>

- **R es reflexiva** $\Leftrightarrow \forall x \in A : (x;x) \in R$

La matriz de una relación reflexiva debe tener todos los elementos de la diagonal principal iguales a uno:

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} \qquad \forall i,\ m_{ii} = 1$$

El grafo de una relación reflexiva tiene un bucle en cada vértice:

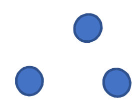


- **R es arreflexiva** $\Leftrightarrow \forall x \in A : (x;x) \notin R$

La matriz de una relación arreflexiva debe tener todos los elementos de la diagonal principal iguales a cero:

$$\begin{pmatrix} 0 & . & . \\ . & 0 & . \\ . & . & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall i,\ m_{ii} = 0$$

El grafo de una relación arreflexiva no tiene bucles en los vértices:



- **R es no reflexiva** $\Leftrightarrow$ R no es reflexiva ni arreflexiva.

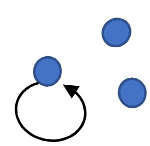
R es no reflexiva $\Leftrightarrow -(\text{R es reflexiva}) \Leftrightarrow -(\forall x \in A : (x;x) \in R) \Leftrightarrow \exists x \in A / x \not R\, x$

La matriz de una relación no reflexiva tiene unos y ceros en la diagonal principal:

a uno:

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . \\ . & 0 & . \\ . & . & 0 \end{pmatrix} \qquad \exists m_{ii} = 1 \wedge \exists m_{ii} = 0$$

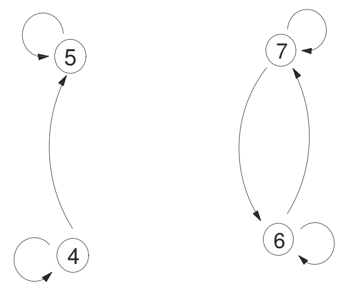
El grafo de una relación no reflexiva tiene bucles en algunos vértices:



<u>Ejemplos</u>: Sea $A = \{4;5;6;7\}$

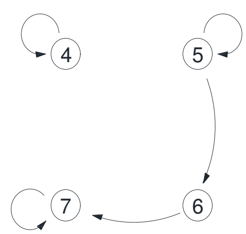
$R_1 = \{(4;4);(4;5);(5;5);(6;6);(6;7);(7;6);(7;7)\}$ es Reflexiva

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



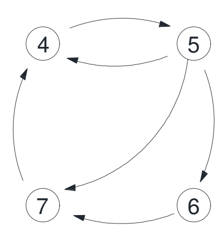
$R_2 = \{(4;4);\ (5;5);(5;6);(6;7);(7;7)\}$ es No Reflexiva

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$R_3 = \{(4;5);\ (5;4);(5;6);(5;7);(6;7);(7;4)\}$ es Arreflexiva

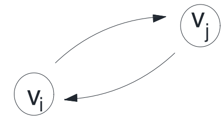
$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- **R es simétrica** $\Leftrightarrow \forall x \forall y \in A : x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$

La matriz de esta relación es simétrica, es decir $m_{ij} = m_{ji} \quad \forall i, \forall j$ $\begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & 1 \\ . & 1 & . \end{pmatrix}$

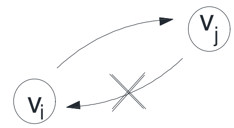
En el grafo de la relación simétrica, para todo par de vértices, si existe el arco de v_i a v_j entonces existe el arco de v_j a v_i



- **R es Asimétrica** $\Leftrightarrow \forall x \forall y \in A : x\,R\,y \Rightarrow y \not R\, x$

La matriz de una relación asimétrica presenta la siguiente característica:

$$\begin{cases} si\ m_{ij} = 1 \Rightarrow m_{ji} = 0 \\ si\ m_{ij} = 0 \Rightarrow m_{ji} = 1 \\ \quad m_{ii} = 0 \qquad \forall i \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



En el grafo, cuando existe el arco de v_i a v_j no puede existir el arco de v_j a v_i

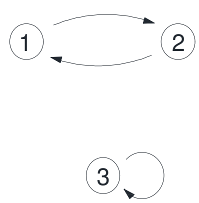
- **R es No simétrica:** la relación no es simétrica ni asimétrica: $\exists x \exists y \in A / x\,R\,y \wedge y \not R\, x$

- **R es Antisimétrica** $\Leftrightarrow \forall x \forall y \in A : (x\,R\,y \wedge y\,R\,x) \Rightarrow x = y$ o bien el contrarrecíproco: $\forall x \forall y \in A : x \neq y \Rightarrow (x \not R\, y \vee y \not R\, x) \Rightarrow$ ¨

Ejemplos: Sea $A = \{1; 2; 3\}$

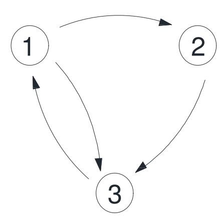
$R_1 = \{(1;2);(2;1);(3;3)\}$ es Simétrica

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



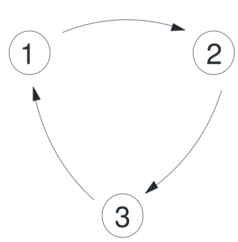
$R_2 = \{(1;2);(2;3);(1;3);(3;1)\}$ es No Simétrica

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



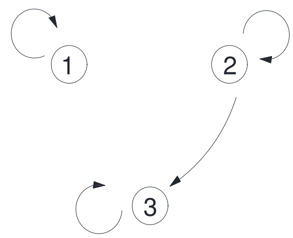
$R_3 = \{(1;2);\ (1;3);\ (2;3)\}$ es Asimétrica

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$R_4 = \{(1;1);(2;2);(3;3);(2;3)\}$ es Antisimétrica

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

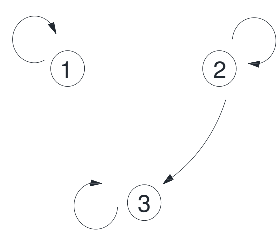


- **R es Transitiva** $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z \in A : (x\,R\,y \wedge y\,R\,z) \Rightarrow x\,R\,z$
- **R es Atransitiva** $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z \in A : (x\,R\,y \wedge y\,R\,z) \Rightarrow x \not{R}\, z$
- **R es No Transitiva** $\Leftrightarrow \exists x \exists y \exists z \in A / (x\,R\,y \wedge y\,R\,z) \wedge x \not{R}\, z$

Ejemplos: Sea $A = \{1; 2; 3\}$

$R_1 = \{(1;1); (2;2); (3;3); (2;3)\}$ es Transitiva

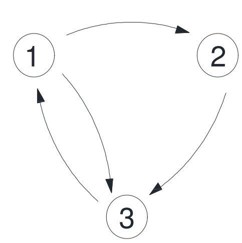
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$(1R1) \wedge (1R1) \Rightarrow 1R1$
$(2R2) \wedge (2R3) \Rightarrow 2R3$
$(3R3) \wedge (3R3) \Rightarrow 3R3$

$R_2 = \{(1;2); (2;3); (1;3); (3;1)\}$ es No Transitiva

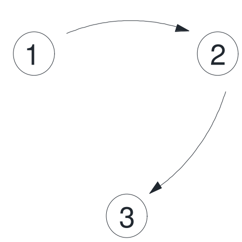
$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$(1R2) \wedge (2R3) \Rightarrow 2R3$
$(3R1) \wedge (1R2) \Rightarrow 3 \not{R}\, 2$
$(2R3) \wedge (3R1) \Rightarrow 2 \not{R}\, 1$

$R_3 = \{(1;2); (2;3)\}$ es Atransitiva

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$(1R2) \wedge (2R3) \Rightarrow 1 \not{R}\, 3$

Fuentes: Prof. Norma E. de Campias - Relaciones-Matrices-Grafos — Publicación Didáctica
Smith y otros – Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica – Capítulo 3

Relaciones de Equivalencia y Orden:

R es de **equivalencia** si cuenta con las propiedades: Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

R es de **Orden Amplio** si cuenta con las propiedades: Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva.

R es de **Orden Estricto** si cuenta con las propiedades: Arreflexiva, Asimétrica y Transitiva

Operaciones con Relaciones:

1.- Sean los conjuntos A y B y las relaciones $R_1 \subseteq AxB$ y $R_2 \subseteq AxB$

1.a) **Relación complementaria**: $\overline{R_1} = \{(a;b) \in AxB \,/\, (a;b) \notin R_1\}$

1.b) **Relación inversa**: $R_1^{-1} = \{(b;a) \in BxA \,/\, (a;b) \in R_1\}$

Ejemplo: $A = \{2;4;6;8\}$; $B = \{b;c;d\}$

$R_1 = AxB = \{(2;b);(6;b);(8;d)\}$

$R_1^{-1} = BxA = \{(b;2);(b;6);(d;8)\}$

Dominio de $R_1 = \{2;6;8\}$; Imagen de $R_1 = \{b;d\}$

Dominio de $R_1^{-1} = \{b;d\}$; Imagen de $R_1^{-1} = \{2;6;8\}$

1.c) **Unión de Relaciones** e igual a la Suma booleana de matrices o grafos

$$R_1 \cup R_2 = \{(a;b) \in AxB \,/\, (a;b) \in R_1 \vee (a;b) \in R_2\}$$

1.d) **Intersección de Relaciones**

$$R_1 \cap R_2 = \{(a;b) \in AxB \,/\, (a;b) \in R_1 \wedge (a;b) \in R_2\}$$

2.- Composición de relaciones:

Sean los conjuntos A, B y C y las relaciones $R_1 \subseteq AxB$ y $R_2 \subseteq BxC$, definimos la composición de funciones de la siguiente manera:

$$R_2 \circ R_1 = \{(a;c) \in AxC \,/\, \exists\, b \in B \wedge (a;b) \in R_1 \wedge (b;c) \in R_2\}$$

Es igual a Producto booleano de Matrices o grafos.

Las mismas operaciones son válidas para relaciones definidas en un conjunto.

Fuentes: Prof. Norma E. de Campias - Relaciones-Matrices-Grafos — Publicación Didáctica
Smith y otros – Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica – Capítulo 3