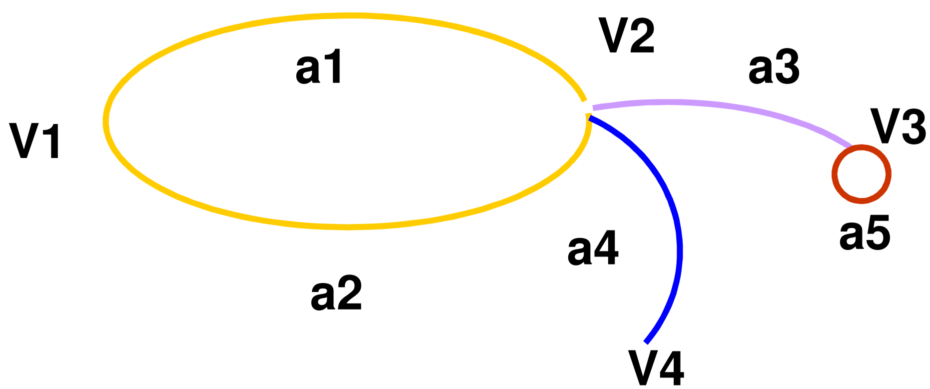
¿Qué es un grafo?

- Lo que realmente constituye el **concepto de configuración geométrica es un conjunto de "relaciones", de "conexiones" o de "enlaces" entre ciertos pares de regiones**: los puentes en el primer ejemplo, la relación de contigüidad en el segundo, los conductores de electricidad, de agua y de gas en el tercero.

- **Definición:** *llamaremos **GRAFO** a la terna, donde **V** y **A** son conjuntos finitos y una aplicación que, a cada elemento de **A** asocia un par de elementos de **V.** Los elementos de **V** se llaman **vértices de G,** los elementos de **A** son **las aristas de G**, y es **la aplicación de incidencia** que asocia a cada arista sus extremos o vértices.*

La aplicación de incidencia asigna a cada elemento de **A,** un par de elementos de **V.**



;

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$$

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\} \quad \varphi(\mathbf{a}_1) = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \quad \varphi(\mathbf{a}_5) = \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3\}$$

Conceptos elementales

- Se designará por ***grafo dirigido o digrafo***, al grafo en el cual la aplicación de incidencia asigna, a cada elemento de **A**, un **par ordenado** de elementos de **V**. En el grafo orientado **los arcos son flechas** y tienen **vértice inicial** y **vértice final.** El término “grafo” a secas, sin prefijo ni calificativo, significará la estructura de grafo no dirigido.

En un **grafo *G***, un **vértice** y una **arista** son ***incidentes*** si el primero es extremo de la segunda. El ***grado o valencia*** de un vértice es el número de aristas incidentes en él. Si todos los vértices de un grafo tienen el grado ***k*** se dirá que dicho grafo ***G* es *k-regular.***

Se dice que ***dos vértices*** de un grafo **son *adyacentes*** si son extremos de una misma arista. Análogamente, se dirá que ***dos aristas*** de un grafo son ***adyacentes*** si tienen un vértice en común. Estas ***relaciones de incidencia*** y ***adyacencia*** pueden describirse por medio de matrices.

- Si $V=\{v_1, v_2, \ldots., v_n\}$ y $A=\{a_1, a_2, \ldots., a_n\}$, la matriz de incidencia de *G* es rectangular y consta de ***n*** filas y ***k*** columnas, y en la intersección de la fila *i-ésima* con la columna *j-ésima* se coloca:

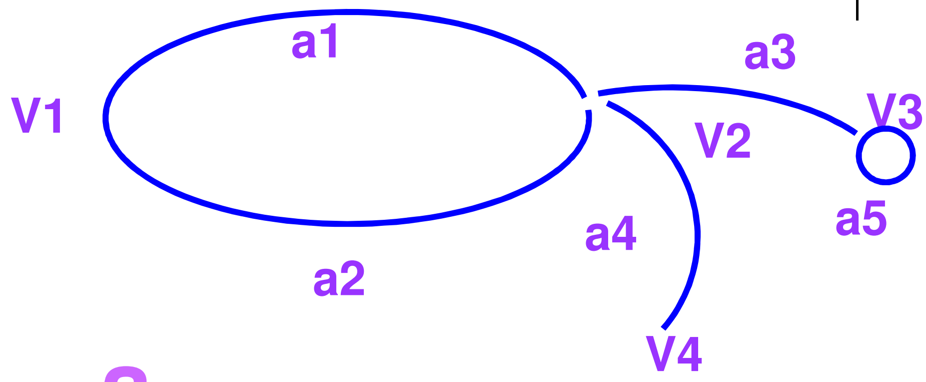
1 si , vi es el origen del arco aj

–1 si , si vi es el extremo del arco aj

0 si, aj no incide en vi

2 si vi es el origen y extremo de aj

Matriz de Incidencia



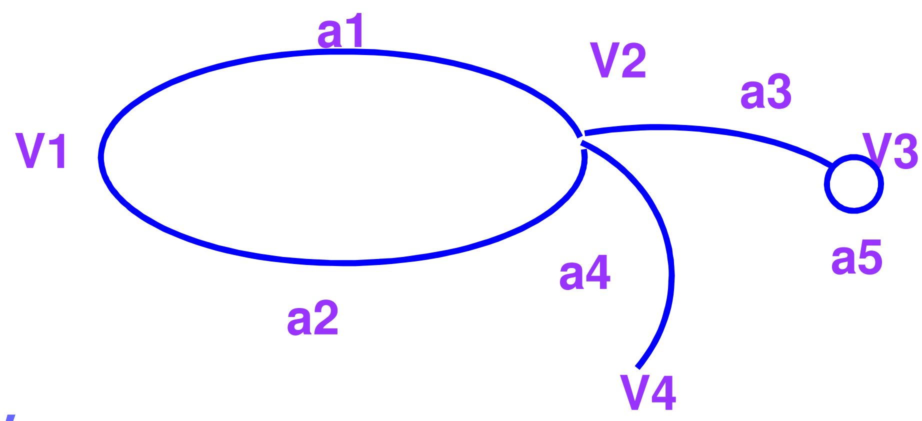
$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\
\hline
v_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
v_2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
v_3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
v_4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}
$$

Matriz de Adyacencia

La matriz de adyacencia es una matriz cuadrada, en filas y columnas se colocan los vértices y en la intersección de la fila *i-ésima* con la columna *j-ésima* se coloca:

$$\begin{cases} 1 \ \textit{si} \ \text{existe el arco que va desde el vértice } v_i \text{ al vértice } v_j \\ 0 \ \textit{si} \ \text{No existe el arco que va desde el vértice } v_i \text{ al vértice } v_j \end{cases}$$

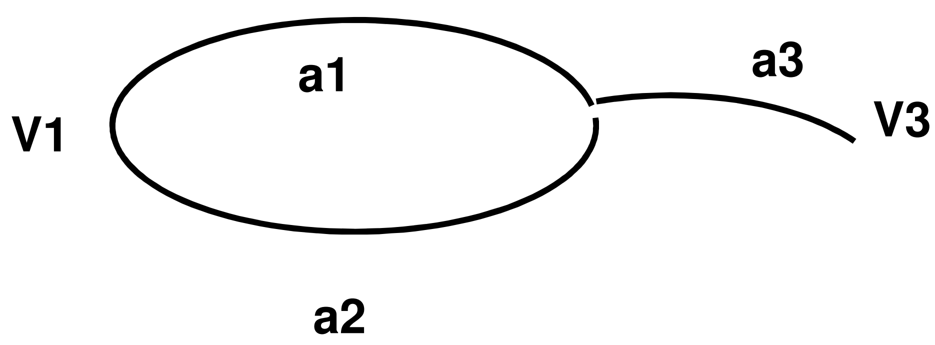
Matriz de adyacencia



	v1	v2	v3	v4
v1	0	1	0	0
v2	1	0	1	1
v3	0	0	1	0
v4	0	0	0	0

En algunos casos resultará necesario estudiar una parte de un grafo dado y desentenderse del resto. En ese caso se omitirán los vértices y arcos que no importen para concentrarse en el grafo restante. Este grafo reducido se denominará subgrafo del grafo original.

El grafo $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{V}'; \boldsymbol{A}'; \phi')$ es un ***subgrafo*** de $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{A}; \phi)$, si se verifican las siguientes condiciones: (i) $\boldsymbol{V}' \subset \boldsymbol{V}$; (ii) $\boldsymbol{A}' \subset \boldsymbol{A}$; (iii) ϕ' es restricción de ϕ a $\boldsymbol{A}'$. Un ejemplo de esto es el subgrafo restante respecto de un vértice **v**, obtenido del grafo original omitiendo el vértice **v** y todas los arcos que en él inciden.



- Un ***lazo*** es una arista tal que sus dos extremos coinciden. Se trata de una arista que parte de un vértice y vuelve al mismo vértice. En el cálculo del grado de un vértice, los lazos deben contarse doble.
- Un grafo es ***sencillo*** si carece de lazos y de aristas paralelas o múltiples U
- Una ***cadena*** es una sucesión alternada de vértices y aristas, tal que cumple las

siguientes condiciones:

- (i) Las aristas son todas distintas.
- (ii) Cada arista incide en el vértice precedente y en el siguiente.
- Una ***cadena simple*** es una cadena que pasa por una ***serie de aristas*** una sola vez.
- Una ***cadena elemental*** es una cadena que pasa por una *serie de vértices* una sola vez.

- Un ***ciclo*** es una cadena cuyo vértice final coincide con el inicial.
- Un ***ciclo simple*** es un ciclo en el que no se repite ningún vértice, con excepción del inicial, que es también el final.(Pasa una sola vez por cada arista).
- La ***longitud*** de una cadena (o de un ciclo) es el número de aristas que la componen.
- Un lazo y un par de aristas paralelas son ejemplos de ciclos simples de longitud 1 y 2, respectivamente.
- Una ***cadena euleriana*** es una cadena que pasa una sola vez por cada una de las aristas del grafo.
- Una ***cadena hamiltoniana*** es una cadena que además de ser simple, pasa exactamente una sola vez por todos los vértices del grafo.
- Un ***ciclo euleriano*** es un ciclo que contiene todas las aristas del grafo en consideración. El problema del paseo por los puentes puede formularse preguntado si el grafo en cuestión admite un ciclo euleriano.
- Un ***ciclo hamiltoniano*** es un ciclo simple (no repite vértices) que recorre todos los vértices del grafo.

GRAFOS DIRIGIDOS

Llamaremos ***digrafo (o grafo dirigido)*** a una terna **D** = (**V;A;**δ), donde *V* y *A* son conjuntos finitos y δ es una aplicación que asocia a cada elemento de *A* un elemento de **V**× **V**, es decir un *par ordenado* de elementos de *V*.

Los elementos de *V* se llamarán *vértices de D*, los elementos de *A* serán los *arcos de D* y δ será la *aplicación de incidencia dirigida en D,* que asocia a cada arco sus extremos. Entonces se dice que **1 v** es el vértice inicial de **a** y que **2v** es su vértice final.

- Un ***camino*** en el digrafo **D** = (**V;A;**δ) es una sucesión alternada de vértices y

arcos de **D** tal que:

- a) comienza y termina con vértices;
- b) los arcos no aparecen repetidos;
- c) cada arco parte del vértice que lo precede y llega al vértice que lo sucede.

Se dice que un camino es ***simple*** si todos los vértices son distintos. Por analogía con el caso no dirigido, se dirá que un camino une el primer vértice de la sucesión con el último. Más precisamente se dirá que un camino parte del primer vértice y llega al último vértice. Este concepto de camino es en *digrafos*, el correspondiente a la noción de ***cadena en grafos,*** con el obvio agregado de requerir que las orientaciones de los arcos sean concordantes. Cuando se trabaja en un digrafo geométrico, el término “camino” es perfectamente claro y no hay dudas sobre su concepto.

Un camino cerrado se llamará ***circuito***, es decir, uno en el que coinciden el primer vértice y el último.

Un ***circuito simple*** será el circuito en el que la única repetición de vértices es la del primero con el último.

Por ***longitud*** de un camino o circuito se entiende el número de arcos que lo componen.

La lista que aparece en el siguiente cuadro resume la comparación de términos
para grafo dirigido y no dirigido:

Grafos	Digrafos
Vértices	Vértices
Aristas	Arcos
Incidencia	Incidencia dirigida
Lazo	Rizo
Aristas Paralelas	Arcos estrictamente paralelos
	Arcos Paralelos y Opuestos
Grado o valencia	Grado Positivo
	Grado Negativo
	Grado Total (sin signo)
	Grado neto
Cadena	Camino
Ciclo	Circuíto
Grafo Conexo	Digrafo conexo
	Digrafo Fuertemente Conexo