MATRICES:
DETERMINANTES
MATRIZ INVERSA

VALOR DE UN DETERMINANTE

Determinante de segundo orden: al producto de la diagonal principal se le resta el producto de la diagonal secundaria

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Determinante de tercer orden: se suman los productos de la diagonal principal y sus paralelas, y se le resta el producto de la diagonal secundaria y sus paralelas

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO DE UN ELEMENTO

Dada $A = \left[a_{ij}\right]_{nxn}$ el menor complementario del elemento a_{ij} de la matriz, es el determinante de la misma de orden (n-1), que se obtiene suprimiendo la fila i y la columna j. Lo designamos M_{ij}.

Ej: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Adjunto del elemento a_{ij}, es su menor complementario con su propio signo o con signo contrario, según que la suma i+j sea par o impar, y se designa A_{ij} (i y j determinan la posición indicada por la fila y columna que ocupan en la matriz)

$$\Rightarrow \boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad siendo \begin{cases} A_{ij} = M_{ij} \quad si \quad i+j \; es \; par \\ A_{ij} = -M_{ij} \quad si \quad i+j \; es \; impar \end{cases}}$$

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$= a_{11}\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}$$

MATRIZ ADJUNTA:

Dada una matriz A, cuadrada y regular, se llama matriz adjunta de A, que la denotaremos Adj A, a la que se obtiene reemplazando cada elemento de la traspuesta de A, por su adjunto.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \ \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \qquad adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ \cdots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} \ \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

También se puede hallar la adjunta de una matriz determinando primero el adjunto de cada elemento y luego trasponiendo

$$\Rightarrow adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \ \cdots & A_{2n} \\ A_{n1} & A_{n2} \ \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^{T}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedad de la matriz adjunta

El producto de una matriz por su adjunta, da por resultado una matriz escalar, donde el escalar tiene el valor del determinante de esa matriz.

$$A.\,adj\ A = E\ donde\ E = \left[a_{ij}\right]\ siendo\ \begin{cases} a_{ij} = 0 & si\ i \neq j \\ a_{ij} = |A| & si\ i = j \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & A_{11} & A_{21} & \ldots\ldots & A_{n1} \\
 & & & & A_{12} & A_{22} & \ldots\ldots & A_{n2} \\
 & & & & A_{1n} & A_{2n} & \ldots\ldots & A_{nn} \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} & |A| & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} & 0 & |A| & \ldots\ldots\ldots & 0 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} & 0 & 0 & & |A|
\end{array}$$

De este resultado podemos extraer IAI obteniendo la matriz identidad

Considerando la matriz A y su adjunta

A.adj A = $$\begin{pmatrix} |A| & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & |A| & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| . \boldsymbol{I} \quad \textbf{\textit{matriz identidad}}$$

de donde **A . adj A= IAI. I** si la matriz A, es tal que IAI ≠ 0 tenemos

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{A \ . \ Adj \ A}}{|\boldsymbol{A}|}$$

Matriz inversa

La matriz $A \in K^{nxn}$ es inversible, regular o no singular, si y solo si existe una matriz que llamaremos A^{-1} de la misma clase, tal que su producto por A, a izquierda y a derecha, es la identidad.

$$A \in K^{nxn} \text{ es inversible} \Leftrightarrow \exists\ A^{-1} \in K^{nxn} / A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

Teorema de la existencia de la matriz inversa

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A admita matriz inversa es que A sea regular $\Rightarrow$ IAI $\neq$ 0

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Propiedades:

1.- Si $A \in K^{nxn}$ **tiene inversa esta es única.**

2.- Si dos matrices son inversibles, entonces la inversa del producto, es igual al producto de las inversas en orden permutado

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1} \qquad \forall\ A.B \in\ K^{nxn}\ \wedge |A| \neq 0 \quad \wedge \quad |B| \neq 0$$

3. Cumple la propiedad involutiva:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

Determinación de la matriz inversa

Consideremos las igualdades $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{A.Adj\ A}{|A|} = I \\ \\ A.A^{-1} = I \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \dfrac{A.Adj.\ A}{|A|} = A.A^{-1}$

entonces $$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D (A) = $|A|$ = 3 + 0 - 2 + 0 + 0 + 2 = 3

D (A) $\neq$ 0 $\rightarrow$ A es inversible.

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ Adj $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\dfrac{\text{Adj A}}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

Verificación:

			1	1/3	-2/3
			0	1/3	-2/3
			-1	-1/3	5/3
1	-1	0	1	0	0
2	3	2	0	1	0
1	0	1	0	0	1