T.P. Nº 2 – MATRICES Y DETERMINANTES

OBJETIVOS: Identificar tipos de matrices.Operar con matrices, realizar la suma y el producto de matrices e identificar su problemática. Mostrar aplicaciones del cálculo matricial. Operar con determinantes. Calcular matriz inversa.

1- Escribir explícitamente las siguientes matrices:

a) $A = [a_{ij}]_{2x3}$

b) $B = [b_{ij}]_{3x4}$

c) $C = [c_{ij}]_{1x5}$ ¿qué nombre recibe esta matriz?

d) $D = [d_{ij}]_{4x1}$ ¿qué nombre recibe esta matriz?

e) $A \in K^{4x4}$ / $\mathbf{a_{ij} = 2}$ si $\mathbf{i = j} \wedge \mathbf{a_{ij} = 0}$ si $\mathbf{i \neq j}$

2- Dadas las matrices A y B y los números **r = 4** y **p = -3** verificar:

a) $r \cdot B = B \cdot r$

b) $(A^T)^T = A$

c) $(A + B)^T = A^T + B^T$

d) $(-1) \cdot A = -A$

e) $(p \cdot A)^T = p \cdot A^T$

f) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 1 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Realizar, si es posible, las operaciones detalladas; en caso que no pueda operar, justificar:

a) $3.A + 2.B$

b) $C^T + A$

c) $B.A$

d) $D.A$

e) $B.C$

f) $C.D$

4- Siendo **N** la matriz nula y A, B, C las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz **C** de tal modo que se verifique:

a) A - B + C = N **b)** A + 2.B = 3.C **c)** 2.A + 3.B –5.C = 5.A

5- La Compañía "Fabrot" produce biromes, lápices y gomas de borrar. Estos artículos se venden en las tiendas A, B y C en las cantidades indicadas en la siguiente tabla:

	A	B	C
Biromes	40	30	20
Lápices	50	30	60
Gomas de borrar	40	40	60

Las ganancias por la venta de un lápiz es de \$0,10, la de una birome \$0,15 y la de una goma de borrar \$0,20. Se pide:

a) Representar la tabla en forma matricial.
b) ¿Qué representa el elemento a_{23}?
c) Calcular la ganancia por la venta de cada uno de los artículos.

6- Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones:
N, L y S.

Produce del **modelo A**: 440 unidades en la terminación N, 220 unidades en la terminación L y 55 unidades en la terminación S.
Produce del **modelo B**: 330 unidades en la terminación N, 110 unidades en la terminación L y 33 unidades en la terminación S.

La terminación N lleva 27 horas de taller y 1.1 hora de administración
La terminación L lleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración
La terminación S lleva 36 horas de taller y 1.4 horas de administración.

a. Representar la información en dos matrices.
b. Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

7- Calcular las siguientes operaciones con matrices booleanas, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$a)\quad A \vee B \qquad\qquad b)\quad A \wedge B$

Recordar: una matriz booleana mxn es aquella matriz cuyos elementos son 0 y 1. Ambas matrices deben ser del mismo tamaño

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & si \ \ a_{ij} = 1 \ \ o \ \ b_{ij} = 1 \\ 0 & si \ \ a_{ij} = 0 \ \ y \ \ b_{ij} = 0 \end{cases} \qquad (A \vee B)$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & si \ \ a_{ij} = 1 \ \ y \ \ b_{ij} = 1 \\ 0 & si \ \ a_{ij} = 0 \ \ o \ \ b_{ij} = 0 \end{cases} \qquad (A \wedge B)$$

8- Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -4 \\ 1 & \frac{-5}{4} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3x+2y & 1 \\ 1 & 3x-2y \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4b & 2a \\ -a & \frac{-b}{2} \end{vmatrix}$$

9- Calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) Aplicando la Regla de Sarrus.

b) Aplicando desarrollo por los elementos de una línea.

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 7 & -5 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} \qquad 3)\ \begin{vmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

10- Calcular el rango de las siguientes matrices, aplicando el Método de Gauss:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

11- Hallar, si es posible, la matriz inversa de cada una de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ -9 & -8 & -4 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{4} \\ 32 & -4 \end{pmatrix}$$

12- Determinar si las matrices A y B son inversas

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Recordar: Si una matriz A tiene una matriz **inversa multiplicativa** o simplemente **una inversa**, A^{-1} entonces, A^{-1} es una matriz para la que $\mathbf{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$