CONEXIDAD EN GRAFOS Y DIGRAFOS

GRAFOS

Un grafo es CONEXO cuando, $\forall\ v_i, v_j \quad con\ i \neq j$ existe una cadena que los une

Componente Conexa: un subgrafo es una componente conexa cuando todo par de vértices del mismo está unido por una cadena

Matriz de Conexión

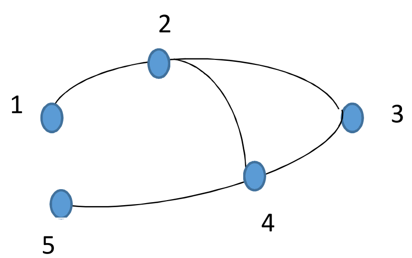
$$C = \begin{cases} c_{ij} = 1 & \text{si i=j o existe una cadena de } v_i \text{ a } v_j \\ c_{ij} = 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Una vez obtenida la matriz de conexión puede suceder

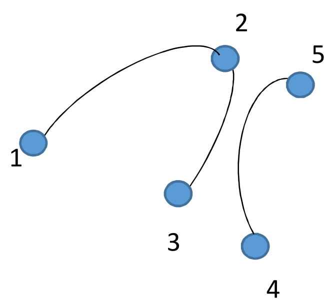
- La matriz está formada solamente por **unos, entonces el grafo es conexo**.
- La matriz está formada por **unos y ceros, entonces el grafo No es conexo**.

Para determinar las componentes conexas, se reordenan las filas y/o columnas para encontrar los bloques de unos. Cada bloque corresponde a una componente conexa.

Ejemplos:



$$C(G_1) = \begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{cases} \qquad \text{G}_1 \text{ es Conexo}$$



$$C(G_2) = \begin{cases} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{cases}$$

G_2 No es Conexo, tiene 2 componentes conexas

DIGRAFOS

Un digrafo es CONEXO cuando todo par de vértices distintos está unido por un camino, por lo menos en un sentido

Un digrafo es fuertemente conexo cuando todo par de vértices distintos está unido por un camino en ambos sentidos.

Matriz de Conexión

$$C = \begin{cases} c_{ij} = 1 & \text{si i=j o existe un camino de } v_i \text{ a } v_j \\ c_{ij} = 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Una vez obtenida la matriz de conexión puede ocurrir lo siguiente:

1.- La matriz está formada solamente por unos entonces, el grafo es **fuertemente conexo**

2.- La matriz está formada por unos y ceros entonces, el grafo **No es fuertemente conexo**. En este caso, continuamos analizando.

a.- Se halla la matriz traspuesta de la matriz de conexión (C^T)

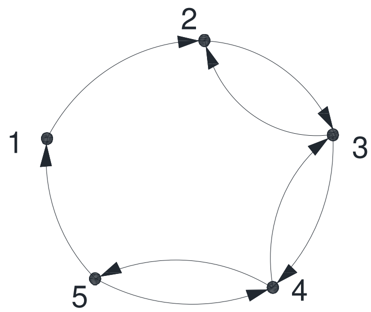
b.- Se realiza la suma booleana entre la matriz traspuesta y la matriz de conexión:

b.1.- Si la matriz está formada solamente por unos, entonces el grafo es **Conexo**

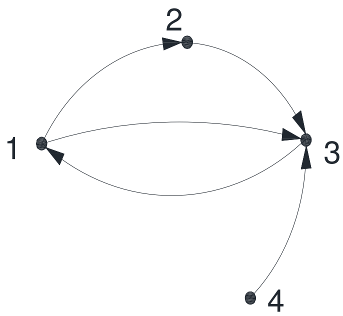
b.2.- Si la matriz está formada por unos y ceros, se buscan las componentes conexas (reordenando filas y/o columnas de la matriz hasta obtener bloques cuadrados de unos)

c.- Luego se realiza el producto booleano entre la matriz traspuesta y la matriz de conexión, en este caso se buscan las componentes fuertemente conexas.

Ejemplos**:**



$$C\left(\overrightarrow{G_1}\right) = \begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{cases} \quad \overrightarrow{G_1} \text{ es Fuertemente Conexo}$$



$$C\left(\overrightarrow{G_2}\right)=\left\{\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{matrix}\right.$$

$\overrightarrow{G_2}$ No es Fuertemente Conexo

Hacemos la matriz Traspuesta: $$C^T\left(\overrightarrow{G_2}\right)=\left\{\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right.$$

Luego hacemos la suma booleana:

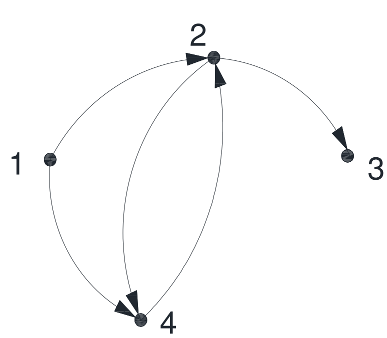
$$C\overset{v}{+}C^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$\vec{G}_2$ es un digrafo conexo

Por último, hacemos el producto booleano (la multiplicación se realiza elemento a elemento (como en la suma)):

$$C\overset{\wedge}{.}C^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\vec{G}_2$ tiene dos componentes fuertemente conexas



$$C\left(\overrightarrow{G_3}\right)=\left\{\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{matrix}\right.$$

$\overrightarrow{G_3}$ No es Fuertemente Conexo

Hacemos la matriz Traspuesta: $C^T\left(\overrightarrow{G_3}\right)=\left\{\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{matrix}\right.$

Hacemos la suma Booleana: $C \overset{v}{+} C^T=\left\{\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{matrix}\right.$ $\vec{G}_3$ es un digrafo conexo

Hacemos el producto booleano (vemos que no quedan bloques cuadrados de unos):

$$C \overset{\wedge}{.} C^T=\left\{\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{matrix}\right. \quad \text{reordenamos filas y/o columnas}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{permutamos 3ra y 4ta columnas}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{permutamos 3ra y 4ta filas}$$

$\vec{G}_3$ tiene 3 componentes fuertemente conexas