times Series

il est important d'avoir des résidus iid
↳ test de DW (=2)

$$E[\hat{\beta}_\pi \mid \varepsilon_{t-1}, \pi_t] = \beta_\pi + \rho \frac{\sum \varepsilon_{t-1}, \pi_t}{\sum \pi_t^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{Cov(\varepsilon_t, \pi_t)}{V(\pi_t)}$$

⇒ Misspecified un bruit "MA" moving average non pris en compte biaise nos estimateurs MCO & ML

Note : en France un bruit blanc est appelé un increment de mouvement brownien.

Un bruit blanc est par définition stationnaire

1) X_t tel que $\forall h$, X_t and X_{t+h} have the same distribution → hard to proof

2) X_t a time series process. Then:

- $E[X_t] = \mu < \infty$
- $V[X_t] = \sigma^2 < \infty$
- $Cov(X_t, X_{t+h}) = f(h) < \infty$

then Wold theorem: second order stationarity can be represent as the infinite sum of past and present shocks

$$X_t = \sum \psi_i \varepsilon_{t-i} + K_t$$

Dans le cadre d'un modèle MA(1)

autocovariance = $x_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \underset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

$$Cov(x_t, x_{t-1}) = cov(\rho \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \rho \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1})$$
$$= \rho \theta^2$$

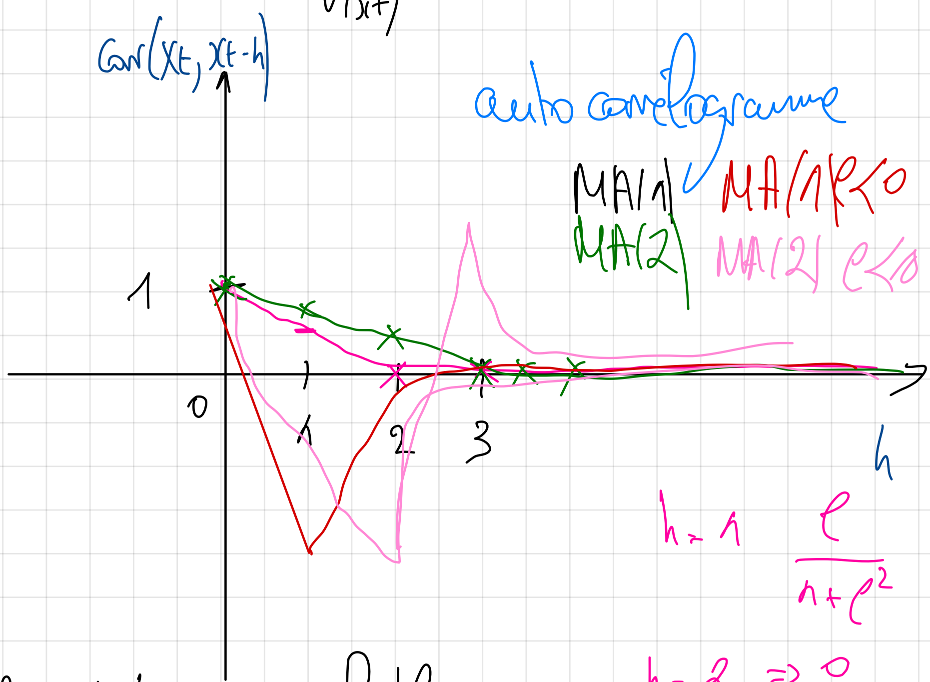
Autocorrélation : $\dfrac{Cov(x_t, x_{t-1})}{V(x_t)} = \dfrac{\cancel{\theta^2} \rho}{\cancel{\theta^2}(1+\rho^2)} = \dfrac{\rho}{(1+\rho^2)}$

$$V(x_t) = \rho^2 V(\varepsilon_{t-1}) + V(\varepsilon_t) = \theta^2(1+\rho^2)$$

autocovariance : $cov(x_t, x_{t-2})$

$$= Cov(\rho \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \rho \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2})$$
$$= \rho^2 Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-3}) + \rho\, cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}) + \rho\, cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-3}) + Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2})$$
$$= 0$$

autocorrelation = $\dfrac{Cov(x_t, x_{t-1})}{V(x_t)} =$



$h = 1 \quad \dfrac{\rho}{1+\rho^2}$

$h = 2 \Rightarrow 0$

$h = 3 \Rightarrow 0$

ils ont tous une faible persistence

$x_t : AR(\rho)$

$AR(1) : x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t \sim iid\ \mathcal{N}(0,1)$

autocovariance : $cov(x_t, x_{t-1}) = cov(\rho x_{t-1} + \varepsilon_t, x_{t-1})$

$= \rho\, cov(x_{t-1}, x_{t-1}) + cov(\varepsilon_t, x_{t-1})$

$= \rho^2 V(x_t) + cov(\underbrace{\varepsilon_t}_{=0}, \rho x_{t-2} + \varepsilon_{t-1})$

$V(x_t) = \rho^2 V(x_{t-1}) + V(\varepsilon_t)$

$\Leftrightarrow V(x_t) = \dfrac{\rho}{1+\rho^2}$

$cov(x_t, x_{t-2}) = cov(\rho x_{t-1} + \varepsilon_t, x_{t-1})$

$= \rho\, cov(x_{t-1}, x_{t-2}) + \underbrace{cov(\varepsilon_t, x_{t-1})}_{=0}$

$= \rho\, cov(\rho x_{t-2} + \varepsilon_{t-1}, x_{t-2})$

$= \rho\, cov(x_t, x_t) + \underbrace{cov(\varepsilon_{t-1}, x_{t-2})}_{=0}$

$\Leftrightarrow V(x_t) = \dfrac{\theta^2}{1-\rho^2} = \dfrac{\theta^2 \dfrac{\rho^2}{1-\rho^2}}{\cancel{\theta^2/(1-\rho^2)}} = \rho$

$Cov(x_t, x_{t-3}) = Cov(\rho x_{t-1} + \varepsilon_t, x_{t-3})$

$= \rho \, Cov(\rho x_{t-2} + \varepsilon_{t-1}, x_{t-3})$

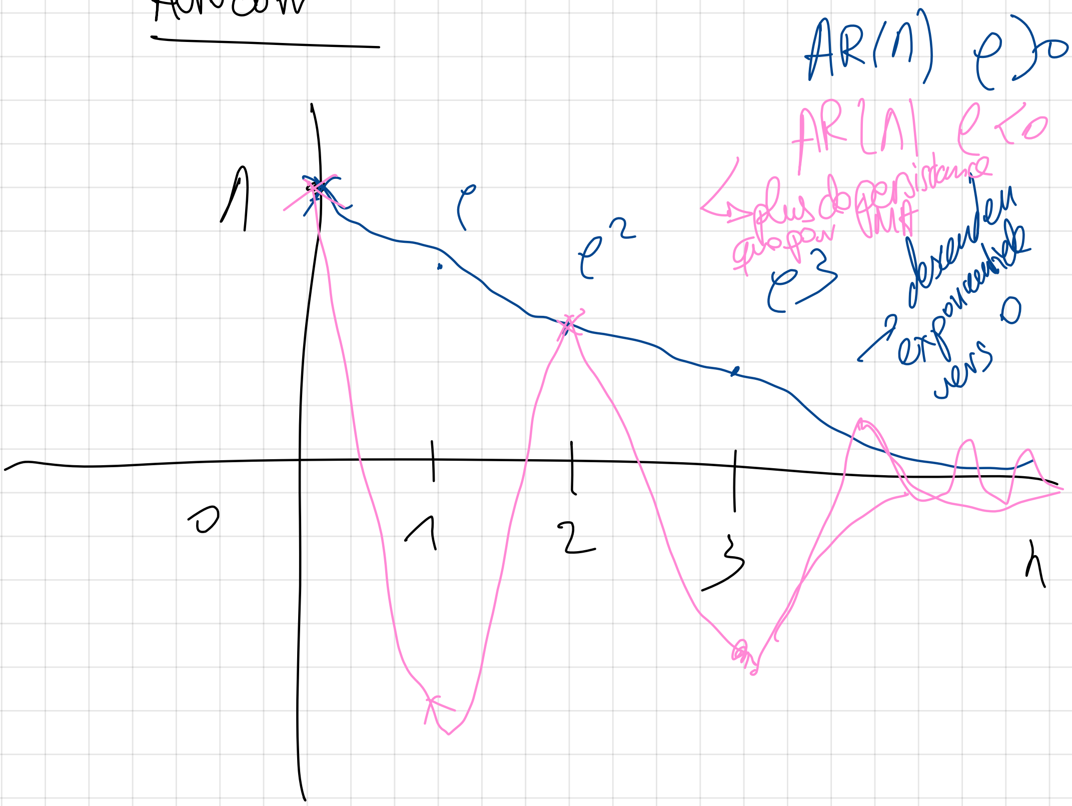
$= \rho^2 \, Cov(\rho x_{t-3} + \varepsilon_{t-2}, x_{t-3})$

$= \rho^3 \, V(x_t)$

$\frac{Cov}{V} = \rho^3 \neq 0 \longrightarrow$ AR persistance > MA

AR(1)

Autocorr



Stationnarité: AR(1) : $x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t$

Sur quelles conditions le modèle AR(1) est-il stationnaire

$\Rightarrow E[x_t] = \rho E[x_{t-1}] + \boxed{E[\varepsilon_t] = 0}$

$\Leftrightarrow (1-\rho) E[x_t] = 0 \Leftrightarrow E[x_t] = cv$

② $V[x_t] = \rho^2 V(x_{t-1}) + \theta^2$

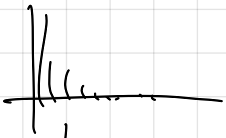
$\iff (1-\rho^2)\, V(x_t) = \theta^2 \iff V(x_t) = \dfrac{\theta^2}{1-\theta^2} < \infty$

un modèle AR(1) n'est stationnaire que si $|\rho| < 1$

Si $\rho > 1 \Rightarrow$ explosif

Si $\rho = 1 \Rightarrow x_t =$ marche aléatoire

Autocorrélation partielle

AR  MA 

décroît lentement — rapidement

AR(1) vs AR(2) → difficilement différenciables à l'autocorrélogramme

AR(1) $x_t = \rho_1 x_{t-1} + 0 + \varepsilon_t$ — oui ⇒ AR(1) / Non ⇒ AR(2) ou plus — $\varepsilon_t \sim iid\ \mathcal{N}(0,1)$

AR(2) $x_t = \rho_1 x_{t-1} + \overset{=0?}{\rho_2} x_{t-2} + \varepsilon_t$ — Si ρ_2 est estimé à 0 → AR(1)

AR(3) $x_t = \rho_1 x_{t-1} + \rho_2 x_{t-2} + \overset{=0?}{\rho_3} x_{t-3} + \varepsilon_t$ — Sinon : au moins un AR2

autocorrélogramme partiel → il ignore les autres ρ

↳ comme l'autocorrélogramme du MA

AR(1) : $x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t$

si $\rho > 0$ → Si $x_{t-1} > 0 \Rightarrow X_t > 0 \Rightarrow$ trend — momentum

si $\rho < 0 \Rightarrow$ Si $X_{t-1} < 0 \Rightarrow x_t > 0 \Rightarrow$ mean reverting — retour à la moyenne estimation des modèles :

$$AR(1) = x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t \sim iid\,\mathcal{N}(0,1)$$

$$\iff \varepsilon_t = x_t - \rho x_{t-1}$$

$$\mathcal{L}(x_t) = \mathcal{L}_\varepsilon(x_{t-1}) \times \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x_t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\theta_\varepsilon}}$$

⋮

$$\mathcal{L}(x_1 \ldots x_n) = \left[\prod_{i=2}^{n} f(x_i \mid x_{i-1})\right] \times f(x_1)$$

$$\max \log \mathcal{L} = \sum_{i=2}^{n} \log f(x_i \mid x_{i-1})$$

$$\max \log \mathcal{L} = -(n-1)\log(\sqrt{2\pi}\,\theta_\varepsilon) - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{x_i - \rho x_{i-1}}{\theta_\varepsilon}\right)^2}$$

← minimisation des moindres carrés
⇓
on connait l'estimateur

→ vraissemblance concentrée

MA_t $\quad x_t = \rho\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ $\qquad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}_{iid}(0, \theta_\varepsilon)$

$$TCU = \underline{\underline{f(x_t)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta_\varepsilon^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_t - \rho\varepsilon_{t-1}}{\theta_\varepsilon}\right)^2\right]$$

⇓

$f(x_t \mid \varepsilon_{t-1})$

pour obtenir $\varepsilon_{t-1} \rightarrow \rho, \theta_\varepsilon$

pour obtenir $\rho, \theta_\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{t-1}$

Le problème :

je peux conditionner $x_t \mid \varepsilon_{t-1}$

MAIS : ε_t reste innobservable

On se donne une valeur pour ρ, θ_ε

$\varepsilon_1 = 0$ ← départ $\qquad$ ρ connu

$x_2 = \rho\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = x_2 - \rho\varepsilon_1 = x_2$

$x_3 = \rho\,\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \Rightarrow \varepsilon_3 = x_3 - \rho\varepsilon_2$

$x_4 =$ ——— $\rightarrow \varepsilon_4 =$ ———

⋮

je peux calculer la série des ε_i associés

$\rho, \theta_\varepsilon \rightarrow \varepsilon_i \Rightarrow f(\quad)$

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=2}^{n} f(x_n | \varepsilon_{i-1})$$

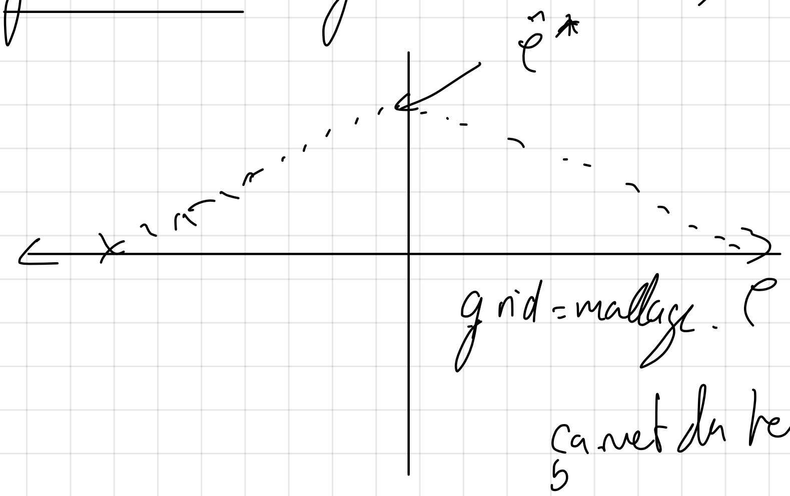
$$\log f(x_2 \dots x_n | \rho, \sigma_\varepsilon) = \sum \log f(x_i | \varepsilon_{i-1}, \rho \sigma_\varepsilon)$$

$$= -(n-1) \ln(\sqrt{2\pi}\,\sigma_\varepsilon) - \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{x_i - \rho\varepsilon_{t-1}}{\sigma_\varepsilon}\right)^2$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \rho} \Rightarrow \text{optimisation numérique}$$

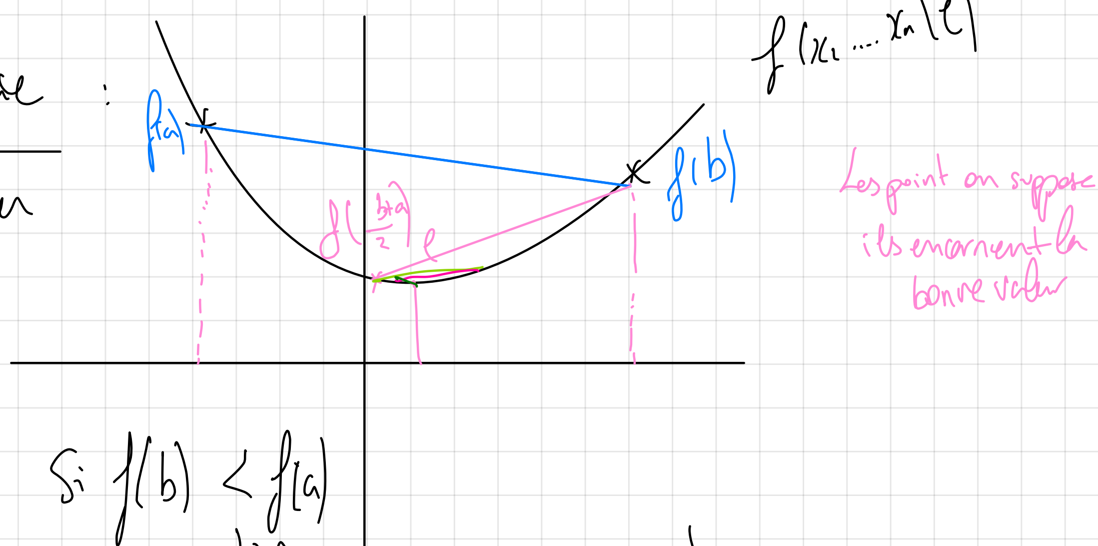
Choose p, q with AIC - BIC and HQ

gridsearch : $f(x_2 \dots x_n | \rho)$



ça met du temps à calculer

Dichotomie : minimisation



Si $f(b) < f(a)$

$a \to \frac{b+a}{2}$

Si $f(b) > f(a) \Rightarrow b \to \frac{b+a'}{2}$

On se rapproche

* Projet max 30 Mars -> PDF sinon pas noté issue d'un notebook $\boxed{\text{↳ plus exigent}}$

-> pas copier mais c'est bien de chercher sur wikipedia

↳ doc excel proxies de volatility et rendement journaliers au carré

modèle AR: bon ordre -> dire si bien estimation mesure

estimations 15/16/20
montrer qu'on a compris 20/20

On a 3 series le AR HAR etc
On a 3 mesures de risque qu'il faut homogénéiser
+ AR et HAR pour filtrer les séries

VAR -> un choc dans une série a un impact dans une autre série.

Previously

1) Rappel d'estimation
2) AR~~MA~~ -> AR le + important
3) stationnarité & AR multivarié

2) AR

:

1) spécification
2) identification / ACF PACF
estimation
3) Application en finance
a) Efficience Marché EHM
b) Volatilité
c) taux

-> comme efficience des marché, pas de significat des modèle AR
$\hookrightarrow r_t = \hat{\varphi}_0 + \underbrace{\hat{\varphi}_1}_{\text{si } 0 \text{ pas de gain d'argent pas de dépendence temporelle}} r_{t-1} + \theta \varepsilon_t$

Volatilité

$$\hat{V}(r_t) = \frac{1}{n} \sum (r_t - r_i)^2$$ estimateur des moments

quel N ? tous les rendements passés ont la même contribution
1, 2 → redditoire, on en veut pas

Solution : poids devant les r

=> risque = variance => estimation (mesure) (inobservable)

2 Solutions

1) AR sur les rendements au carré

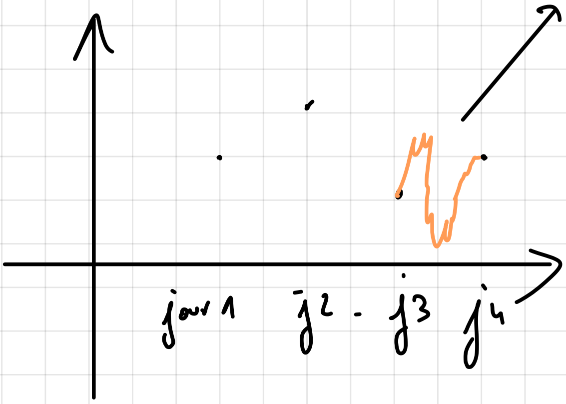
$$r_t^2 = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1}^2 + \dots + \phi_p r_{t-p}^2 + \theta \varepsilon_t$$

poids, n

$\varepsilon_t \sim$ BB gaussien

$E[r_t^2] = V[r_t^2]$ si $\mu = 0$

2) Données intraday



découpage de la journée entre 5 et 15 min par ex

$$\hat{V}[r_t] = \sum_{i=N}^{0} r_{t-\delta_i}^2$$

petit pas de temps égal à δ

PQ somme et pas moyenne ?

<u>RQ :</u> • on somme variance journalière

si on divise on aurait la variance à 5 min

$$\boxed{\hat{V}[r_t] = \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\text{à 5 min}} \sum_{N=i}^{0} r_{t-\delta_i}^2}$$

la variance annuelle

$$V_{annuelle} = 252 \times V_{journalière}$$

volatilité : $\sqrt{V_{annuelle}} = \sqrt{252} \times \sqrt{V_{journalière}}$

On modélise pas la volatilité mais la variance car elle a un lien naturel avec le carré des rendements et la volatilité avec la valeur absolue.

<u>HAR</u> $\Rightarrow \hat{V}[r_t] = f\left(\sum_{i=N}^{0} r_{t-i\delta}^2\right)$

Modèle GARCH

↳ $r_t = \sigma_t \varepsilon_t$

AR + une fonction r_{t-1}^2

Si bcp de volatilité il faut décomposer le bruit

Corsi : lissage de l'estimation de la volatilité

Comme si trois trader day, week, mensuel

day → le moins spéculateur

week → le plus important

mensuel → milieu

Une des difficultés des modèles des variances lors de l'estimation

↳ la variance doit rester positive

solution : log ? par corsi je crois

Engel le prend pas en compte

ça dépend de β dans

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \ldots + \beta \sigma^2$$

Construire des mesures de volatilité

achat séries de données → hyper cher

↳ noké pour avoir le intraday

estimateur de Parkinson et Garman Klass pour mener l'un à l'autre
day to intraday

open Low High and Close

OLHC

on relie les points max et min intraday avec open and close

Parkin

$$\sigma^2_{HL} = \frac{1}{4 \log 2} \left[\log\left(\frac{H_t}{L_t}\right) \right]^2$$

Garman Klass → similaire ⊕ complexe

$$\sigma^2_{HL,t} = \frac{\alpha}{f}\left[\log\frac{O_t}{C_{t-1}}\right]^2 + \frac{1-\alpha}{1-f}\,\frac{1}{4\log 2}\left[\log\frac{H_t}{L_t}\right]^2$$

↓

temps entre open and close

Parkinson mesure très volatile donc il faut découpe le BB de l'info.

Black and Scholes (BS)

$$\frac{dS_t}{S_t} = \underbrace{r_f}_{BB}\, dt + \sigma \underbrace{dW_t}_{drift}^{\mathbb{P}}$$ sous $\mathbb{P}$ → dynamique historique times series

pas sous $\mathbb{P}$

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_f\, dt + \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}}$$ $\mathbb{Q}$

↳ la volatilité σ ne change pas sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$

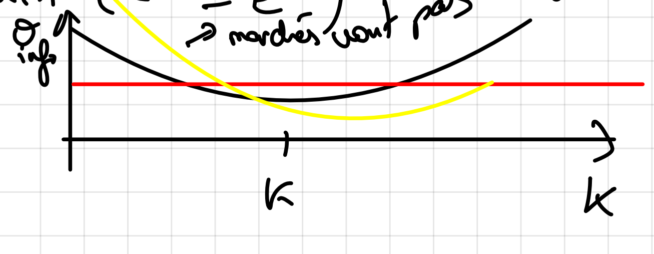
le seul changement c'est le taux sans risque

$$C(K, S, T-t, r, \sigma) = S\,\mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

→ C^{π} min $(C^{M} - C^{BS})^2$

→ marchés vont pas

Smile de vol



en fait, $\sigma^{\mathbb{P}} \neq \sigma^{\mathbb{Q}}$ on change la volatility

risk neutral volatility

similaire à avoir plein d'infos intraday

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\frac{dF_t}{F_t}\right)^2\right] \to \text{somme des différences de rendements au carré}$$

somme en continue → calcul de variance si rendements proches de 0

$r_t \sim 0$

Variance risque neutre

⟶ Pas de volatility (personne le fait !)

volatilité moyenne les pointillés centraux

volatilité BS → 20%

≠ variance risque neutre = 20%

quel échelle de temps ?

toujours annuelle

volatilité annualisé de l'ordre de 20% !

Parkinson : variance journalières

≠ annualisé ≠ mesure risque

volatilité moyenne entre 15% et 20%

↳ 80% ou plus pas sur

$\sqrt{\text{Variance}} \times \sqrt{250} \times 100$ → pour pourcentage = volatilité

Si volatilité 100% rendements + ou − 200%

[−100% ; +100%]

↳ on peut tout perdre

Pourquoi récupère la Hessienne ?

estimation des params par Max de Vraissamblance

test Student pour la significativité donc estimation

hessienne on prend la diag
inversé et la racine pour avoir le
std et voir la significativité

Variance journalière très petite
donc log var est négative

From Data to Signals.

- Stationarity Tests - VAR models

Quelle est l'hypothèse nulle de DF-ADF?

Dans les modèles VAR, il faut retenir les fcts de réponses impulsionnels

Modèle VAR: Économetrie de modèles non stationnaires.

Partie python dans le 1er script python

En quoi la marche aléatoire "viole" l'hyp de stat°nnarité?

Stationnarité au 2nd degré : esperance, variance et covariance finie en fct° du tps.

On utilise le modèle Wald.

Revenons au concept de Marche aléatoire :

$$\underbrace{p_t}_{\text{Marche actuelle}} = \overbrace{p_{t-1}}^{\text{Marche précéd}} + \underbrace{\sigma \varepsilon_t}_{\text{incrément}} \Longrightarrow E[p_t] = E[p_{t-1}] + \sigma E[\varepsilon_t]$$

→ La meilleure prévis° qu'on puisse donner à p_t c'est son passé.

⇒ NON-STATIONNAIRE

Une façon de comprendre la non stationnarité de la marche aléatoire c'est le modèle AR

$p_t = \delta p_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$ avec ε BB gaussien

$\delta \longrightarrow 1$

$\hookrightarrow \delta = 1$; Processus intégré d'ordre 1

Déf : Processus intégré d'ordre 1 :

$X \in I(1)$ ssi : 1) X_t non stationnaire

2) $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ est stationnaire

MA (marche aléatoire) est appréciée car on peut faire passer un modèle AR $\rightsquigarrow$ MA

$\hookrightarrow$ Idée sous jacente de Dickey-Fuller

Intuit° de DF :

$x_t = \rho_0 + \rho_1 x_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$

ε_t BBG

Une façon de tester la non stationnarité revient à faire un "test de student" pour $\rho_1 = 1$

$$\begin{cases} H_0 : \text{Non stationnarité} \rightarrow \rho_1 = 1 \\ H_1 : \text{Stationnaire sinon} \end{cases}$$

Si je dégénère une Moving Average vers la chose la + stat° et proche, c'est un AR(1)

Moving Average → Non stationnaire + Non explosif ?

Marche aléatoire :

1) Non stationnaire

2) Non explosive : $E\left[p_t \mid p_{t-1}\right] = p_{t-1}$

$$E\left[p_{t+1} \mid p_{t-1}\right] = p_{t-1}$$

$$E\left[p_{t+\ell} \mid p_{t-1}\right] = p_{t-1}$$

Dans DF, on teste si le modèle a une tendance et/ou constante

1) $p_t = \hat{\delta} p_{t-1} + \mu + \boxed{\lambda_t} + \sigma \varepsilon_t$

2) $p_t = \hat{\delta} p_{t-1} + \mu + \sigma \varepsilon_t$

$p_t = \hat{\delta} p_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$

Remarque : 1) Si p_t est stationnaire alors $\sqrt{n}\left(\delta - \delta_0\right) \sim N(0, \Sigma)$

2) Si p_t non stationnaire, alors on connait pas la distribut° de $\hat{\delta}$.

$\Rightarrow$ Test DF / ADF : $\begin{cases} H_0 : \delta = 1 \\ H_1 : \delta \neq 1 \quad \delta < 1 \\ \hat{\delta} \sim ? \text{ " tabulé "} \end{cases}$

Remarque : $\begin{cases} p_t = \delta p_{t-1} + \sigma \varepsilon_t \\ \varepsilon_t \text{ BBG} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{Si } \delta < 1 \Rightarrow \text{stationnaire} \\ \text{Si } \delta = 1 \Rightarrow \text{marche aléatoire} \\ \text{Si } \delta > 1 \Rightarrow \text{explosif} \end{cases}$ → On modélise rien d'explosif.

On part d'un processus stationnaire
L'estimat° de la valeur de δ, on le fait par les MCO
↳ Pas d'hypothèses sous-jacentes.

$$\hat{\delta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} p_{t-1} p_t}{\sum_{t=1}^{T} p_{t-1}^2}$$

Pour regarder la distribut°, on commence par regarder l'écart entre le paramètre et sa valeur.

$$\Rightarrow \hat{\delta}_1 - \delta_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} p_{t-1} \left(\delta_1 p_{t-1} + \varepsilon_t \right)}{\sum_{t=1}^{T} p_{t-1}^2}$$

$$= \rho_1 \cancel{\frac{\sum p_{t-1}^2}{\sum p_{t-1}^2}} + \frac{\sum p_{t-1} \varepsilon_t}{\sum p_{t-1}^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\delta}_1 - \delta_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} p_t \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} p_{t-1}^2}$$

⇒ $\hat{\delta}_1$ est un estimateur super cohérent de δ_1

Dickey Fuller tabulent leur lois assuming normal distribut°

↳ ADF est un modèle où les ε_t sont persistants.

$\Rightarrow$ DF : ε_t BBG

ADF : y_t + BBG.

KPSS : On a un drift stochastique dans une série temp qui est une marche aléatoire aussi longtemps que la volatilité d'ε = 0.

<u>Modèle de Vasicek</u> → Modèle de retour vers la moyenne.

Valeur de long terme de r_t

$$dr_t = K(\theta - r_t)\,dt + \sigma\,dw_t$$

force de rappel

$$\Longleftrightarrow r_{t+1} - r_t = K\theta - K r_t + \sigma\varepsilon_t$$

(discrétisat° d'Euler)

avec ε_t BBG

$$\Longleftrightarrow r_{t+1} = K\theta + (1-K)\,r_t + \sigma\varepsilon_t$$

$$\Longleftrightarrow r_{t+1} = \rho_0 + \rho_1 r_t + \sigma\varepsilon_t$$

gère la persistance des chocs du modèles

↳ C'est un modèle AR(1) stationnaire → On suppose que les taux d'intérêts sont stationnaires

↳ Ce modèle supporte assez mal la not° de stationnarité :(

<u>Les modèles VAR :</u>

AR $\quad x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \sigma\varepsilon_t$

<u>VAR</u> : Vectorial Auto Regressive

$$\underset{m_{1,1}}{x_t} \qquad \underset{m_{n,1}}{X_t} = \underset{m_{n,1}}{\Phi_0} + \underset{m_{n,n}}{\Phi_1}\,\underset{m_{n,1}}{X_{t-1}} + \underset{m_{n,n}}{\sqrt{\Sigma}}\,\underset{m_{n,1}}{\varepsilon_t}$$

n est le nombre de variables à modéliser conjointement

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_t^{(1)} \\ x_t^{(2)} \\ \vdots \\ x_t^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0^{(1)} \\ \phi_0^{(2)} \\ \vdots \\ \phi_0^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1^{(1)} & \cdots & \phi^{1,n} \\ \vdots & \text{n'est pas symétrique} & \vdots \\ \phi_1^{n,1} & \cdots & \phi_1^{n,n} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} a^{11} & & a^{ji} \\ & \ddots & \\ a^{ij} & & a^{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_t^{(1)} \\ | \\ \varepsilon_t^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = PP^{+} \Rightarrow \sqrt{\Sigma} = P$$

↳ Ce n'est pas la racine des élém^t de Σ.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^{(1,1)} & \sigma^{1,n} \\ \sigma^{n,1} & \sigma^{n,n} \end{pmatrix}$$

Dans le cas 2×2 :

$$\begin{pmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0^1 \\ \phi_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1^{11} & \phi_1^{12} \\ \phi_1^{21} & \phi_1^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1}^1 \\ x_{t-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_t^1 \\ \varepsilon_t^2 \end{pmatrix}$$

$$x_t^{(1)} = \underbrace{\phi_0^{(1)} + \phi_1^{11} x_{t-1}^1}_{AR(1)} + \underbrace{\phi_1^{12} x_{t-1}^2}_{\text{multivarié}} + \underbrace{a\varepsilon_t^1 + b\varepsilon_t^2}_{\sigma_t\, \eta_t}$$

$$x_t^{(2)} = \phi^2 + \phi_1^{21} x_{t-1}^2 + \underbrace{\phi_1^{(2,2)} x_{t-1}^1}_{\text{pas instantané}} + \underbrace{c\varepsilon_t^{(1)} + d\varepsilon_t^{(2)}}_{\text{« choc » / « innovation »}}$$

avec $\varepsilon_t^{(1)}$ et $\varepsilon_t^{(2)}$ sont des BBG non corrélés

<u>Remarque</u> : • Si $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_n & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ le choc de $x_t^{(1)}$ et de $x_t^{(2)}$ sont décorrelés.

• Si $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$ les valeurs ● sont superieurs aux valeurs ●

$\Rightarrow$ Le choc dominant de x_t^1 c'est ε_t^1

x_t^2 ε_t^2

On passe maintenant au VAR(p), dans le cas où on a n séries de données

$$X_t = \Phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \underset{n,n}{\Phi_{1,i}} \cdot \underset{n,1}{X_{t-i}} + \underset{n,n}{\sqrt{\Sigma}} \underset{n,1}{\varepsilon_t}$$

intercept : n

autoregressive . $n \cdot n \cdot p$

covariance : $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$

$\rightarrow n \left[pn + 1 + \frac{n-1}{2} \right]$ paramètres à estimer

Exemple : 2 lags et 2 séries $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} n = \text{séries} \\ p = \text{lags} \end{array}\right\}$ 11 paramètres à estimer

Estimation des lags :

Parenthèse

VAR servent dans 2 cas:

1) IRF . Le choc d'une série se répand de façon séqu dans les autres séries.
   ↳ Banque centrale
2) Macro-finance : $P_t = E^Q(\text{Cashflow}_T)$
   ↳ Forme de VAR

1) $VAR(p) \longrightarrow ML / MCO$

$$X_t = \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + \sqrt{\Sigma} \, \varepsilon_t$$

La modélisation d'un modèle VAR est un système de retour à la moyenne

$\Rightarrow$ Tjr modéliser les séries que stationnaire

Sélect° de l'ordre :
↳ Avec les critères d'information.

⇒ On doit regarder AIC BIC HQ.

Impulse Response Functions :

↳ Étude de l'impact d'un choc d'une variable sur un set d'autres variables

On veut mesurer l'impact d'un choc sur la série X_t^1 sur la série X_t^2

Pour y arriver, on a besoin de 2 choses :

1) Stationnarité pour travailler avec ces chocs

2) Identifier ces chocs.

① $X_t^1 = f(\varepsilon_{t-1}^1, \varepsilon_{t-2}^1 \dots)$

X_t^1 comme une fct° de chocs passés

↳ Si X_t stationnaire, on peut appliquer le th. de Wold :

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i \sqrt{\Sigma}\, \varepsilon_{t-i}$$

X_t est 1 somme de chocs passés

$$E[X_{t+h} | X_t] = f(X_t, \Sigma \varepsilon_t)$$

$$X_t = \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + \sqrt{\delta}\, \varepsilon_t$$

$E(X_{t+h})$ et ε_t

② $x_t^1 = \Phi_0^1 + AR + \Phi_1^{12} x_t^2 + a\varepsilon_t^1 + b\varepsilon_t^2$

$x_t^2 = \underline{\qquad\qquad\qquad} + c\varepsilon_t^1 + c\varepsilon_t^2$

$\varepsilon_t^1 < \begin{matrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{matrix}$

⇒ On veut créer des chocs orthogonaux, décorrélés les uns des autres.

On veut pas ça, des chocs simultanés

Pour y arriver, on utilise une décomposit° de Cholesky.

Si Σ est une matrice symétrique, définie $\oplus$ alors il existe une matrice P tel que :

$$PP^T = \Sigma$$ avec P une matrice triangulaire inférieure.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & & \\ p_{12} & p_{22} & \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \\ \vdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma) \quad , \quad PP^T = \Sigma$$

$$u_t = P^{-1} \varepsilon_t$$. on va définir de nouvelles innovations.

3 caractéristiques :

1) $\varepsilon \sim N(0, \Sigma) \Rightarrow u_t \sim N(0, I)$

2) $E[u_t] = E[P^{-1} \varepsilon_t] = P^{-1} E[\varepsilon_t] = 0$

3) $V[u_t] = E[u_t u_t'] = E[P^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t^T P^{-1'}]$

$= P^{-1} E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] P^{-1T}$

$= P^{-1} P P' P^{-1'} = I$

$$X_t = \Phi_0 + \Delta_1 \varepsilon_{t-1} + \Delta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$
$$= \Phi_0 + \Delta_1 P u_{t-1} + \Delta_2 P u_{t-2} + \Delta_3 P u_{t-3} + \dots$$

<u>définition</u> : une "impulsion response function" est une fonction qui associe :

$$h \longmapsto \frac{\partial X_{t+h}}{\partial u_t}$$

<u>Projet</u> :

On a des volatilités mais on doit mobiliser des variances → stationnaires

1 jour sur l'autre

1 mois sur l'autres

impact de mesure de volatilité risque neutre ou historiques.