El perfil de cuerdas cósmicas no estándares

José Antonio García Hernández

Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM

Seminario de GTD
27 de abril, 2023

Defectos topológicos

Defecto topológico: singularidad que no puede ser removida sin afectar el campo a largas distancias.

Muy estable.

Los tipos de defectos topológicos que puede presentar un sistema se analizan estudiando la topología de la variedad de vacío $\mathcal{M}$.

Estudiamos sus grupos de homotopía $\pi_n(\mathcal{M})$.

$\pi_n(\mathcal{M})$: cuenta de cuantas maneras un *loop* de n dimensiones no puede contraerse a un punto.

Si $\pi_n(\mathcal{M}) \neq I \Rightarrow$ defectos topológicos.

Si $\pi_n(\mathcal{M}) = \mathbb{Z} \Rightarrow$ carga topológica (*winding number*).

Ejemplos

Ejemplos:

- $\pi_0(\mathcal{M}) \neq I \Rightarrow$ Pared de dominio (domain wall).
- $\pi_1(\mathcal{M}) \neq I \Rightarrow$ Vórtice (2d), cuerdas cósmicas (3d)
- $\pi_2(\mathcal{M}) \neq I \Rightarrow$ Monopolo

Existen varios ejemplos de defectos topológicos en la física de materia condensada.

Pero en la física del universo temprano aun son objetos hipotéticos.

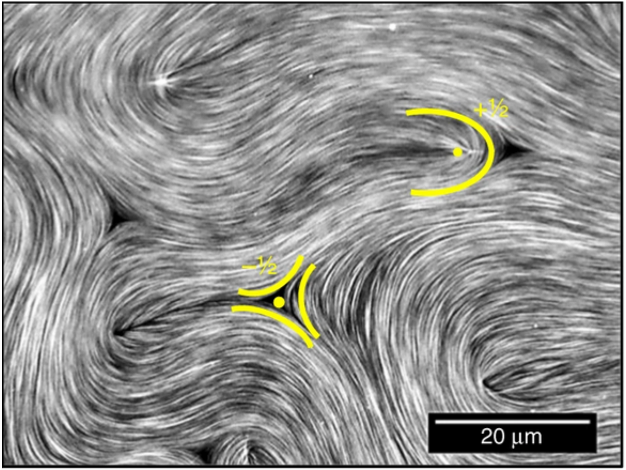


Figure: Vórtices en un nemático.

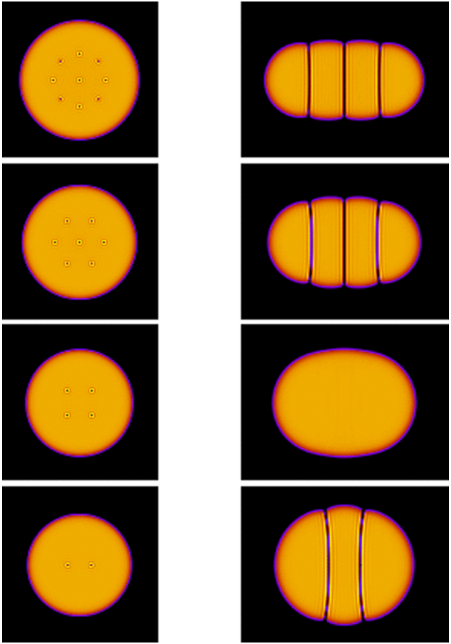


Figure: Vortices cuánticos en gotas de ^{4}He superfluido.

Mecanismo de Kibble

Se asume que hubo transiciones de fase en las ultimas etapas de inflación, en las cuales pudieron haberse creado defectos topológicos.

Cuerdas Cósmicas

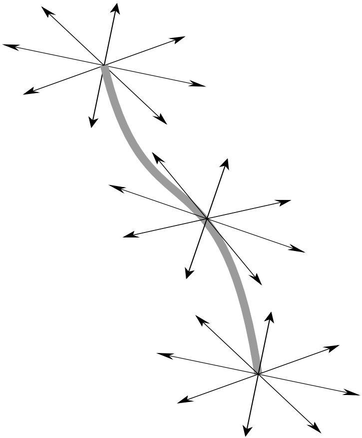


Figure: Vórtices de dos dimensiones uno encima de otro, formando una cuerda en tres dimensiones.

Simetría global exacta $\mathrm{U}(1)_{B-L}$

En el modelo estándar la simetría $\mathrm{U}(1)_{B-L}$ es global y exacta. B número bariónico, L número leptónico.

Extraño: una simetría exacta solo es natural cuando es local, i.e una simetría de norma.

Simetría de norma

Promovemos $\mathrm{U}(1)_{B-L}$ global a $\mathrm{U}(1)_{B-L}$ local. La combinamos con $\mathrm{U}(1)_Y$.

Introducimos un nuevo acoplamiento de norma h'. Definimos a la nueva carga como

$$Y' = 2hY + \frac{h'}{2}(B - L).$$

Tomamos como grupo de norma a $\mathrm{U}(1)_{Y'}$.

El campo de norma $\mathcal{A}_\mu$ es introducido para implementar la invarianza de $\mathrm{U}(1)_{Y'}$.

Anomalía de norma

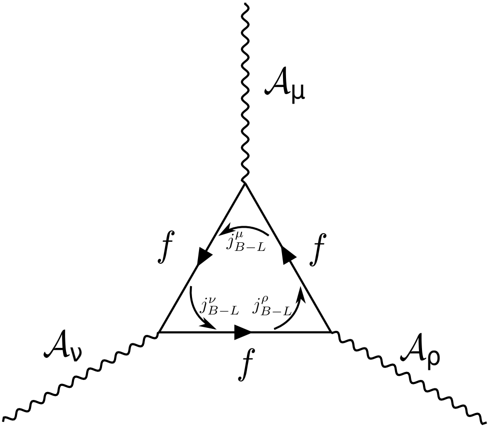


Figure: En cada vértice los quarks de una generación contribuyen con $B = 4$, y los leptones con $L = 3$. $B - L \neq 0$.

Anomalía de norma. Se cura añadiendo un neutrino derecho ν_R ($L = 1$) a cada generación.

Podemos dar masa a los neutrinos con un término masa de Dirac

$$f_\nu \left[\bar{\nu}_R \begin{pmatrix} -\Phi_0 & \Phi_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Phi_0^* \\ \Phi_+^* \end{pmatrix} \nu_R \right],$$

con f_ν un acoplamiento de Yukawa.

Sin promover $\mathrm{U}(1)_{B-L}$ a una simetría de norma podemos dar masa a los neutrinos con un término de masa de Majorana

$$M \bar{\nu}_M \nu_M .$$

Sin embargo, en nuestro escenario, este término está prohibido ya que rompe la simetría $\mathrm{U}(1)_{Y'}$.

Para introducir un término de masa tipo Majorana solo para ν_R, independiente de ν_L, introducimos un nuevo campo de Higgs $\chi \in \mathbb{C}$

$$f_{\nu_R} \nu_R^T \chi \nu_R + \text{c.c.},$$

donde f_{ν_R} es un acoplamiento de Yukawa.

Para preservar la invarianza de norma, el campo χ debe tener una carga $B - L = 2$.

Generamos la masa de Majorana por el mecanismo de Higgs usando el nuevo campo de Higgs $\chi \in \mathbb{C}$.

Llamamos v' al valor esperado del vacío de χ.

χ genera una masa de Majorana para el neutrino derecho $M = f_{\nu_R} v'$.

χ se introduce en el Lagrangiano con

$$V' = \frac{m'^2}{2}\chi^*\chi + \frac{\lambda'}{4}(\chi^*\chi)^2.$$

Es natural incluir un término mixto del tipo

$$\frac{\kappa}{2}\Phi^\dagger\Phi\chi^*\chi.$$

Asumimos $v' \gg v$ y $f_{\nu_R} \simeq O(1)$ que da una masa grande al neutrino derecho.

Lagrangiano

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \frac{1}{2}(D^\mu\Phi)^\dagger D_\mu\Phi - \frac{m^2}{2}\Phi^\dagger\Phi - \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi)^2 - \frac{\lambda}{4}v^4 \\
& + \frac{1}{2}(D^\mu\chi)^* D_\mu\chi - \frac{m'^2}{2}\chi^*\chi - \frac{\lambda'}{4}(\chi^*\chi)^2 - \frac{\lambda'}{4}v'^4 \\
& - \frac{\kappa}{2}\Phi^\dagger\Phi\chi^*\chi - \frac{\kappa}{2}v^2v'^2 - \frac{1}{4}\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu},
\end{aligned}
$$

- $\Phi = (\phi_+, \phi_0)^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^2$
- $D_\mu\Phi = (\partial_\mu + ih\mathcal{A}_\mu)\Phi$
- $D_\mu\chi = (\partial_\mu + ih'\mathcal{A}_\mu)\chi$

Los campos transforman de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &\rightarrow e^{ih\alpha(x)}\Phi(x), \\
\chi(x) &\rightarrow e^{ih'\alpha(x)}\chi(x), \\
\mathcal{A}_\mu &\rightarrow \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu\alpha(x),
\end{aligned}$$

donde $\alpha(x)$ es cualquier función diferenciable de x.

Para que el potencial esté acotado por abajo necesitamos que

$$\lambda > 0, \quad \lambda' > 0, \quad \kappa^2 < \lambda\lambda',$$

y para que ocurra un rompimiento espontáneo de simetría

$$m^2 = -\kappa v'^2 - \lambda v^2 < 0, \quad m'^2 = -\kappa v^2 - \lambda' v'^2 < 0.$$

Ecuaciones de movimiento

$$
\begin{aligned}
D^\mu D_\mu \Phi &= -m^2\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)\Phi - \kappa\Phi\chi^*\chi \\
D^\mu D_\mu \chi &= -m'^2\chi - \lambda'(\chi^*\chi)\chi - \kappa\chi\Phi^\dagger\Phi \\
\partial^\lambda \mathcal{F}_{\lambda\nu} &= -\frac{ih}{2}\left[(D_\nu\Phi)^\dagger\Phi - \Phi^\dagger(D_\nu\Phi)\right] \\
&\quad -\frac{ih'}{2}\left[(D_\nu\chi)^*\chi - \chi^*(D_\nu\chi)\right]
\end{aligned}
$$

Ansatz

$\mathcal{M} = \mathrm{U}(1) \Rightarrow \pi_1(\mathrm{U}(1)) = \mathbb{Z} \Rightarrow$ cuerdas cósmicas.

Solo consideramos la componente ϕ_0 del campo de Higgs Φ.

Ansatz cilíndrico y estático

$$\begin{aligned} \phi_0(r,\varphi) &= \phi(r)e^{in\varphi} \\ \chi(r,\varphi) &= \xi(r)e^{in'\varphi} \\ \mathcal{A}(r) &= \frac{a(r)}{r}\hat{\varphi}. \end{aligned}$$

Ecuaciones de movimiento

$$\partial_r^2\phi + \frac{1}{r}\partial_r\phi - \frac{(n+ha)^2}{r^2}\phi - m^2\phi - \lambda\phi^3 - \kappa\phi\xi^2 = 0$$
$$\partial_r^2\xi + \frac{1}{r}\partial_r\xi - \frac{(n'+h'a)^2}{r^2}\xi - m'^2\xi - \lambda'\xi^3 - \kappa\xi\phi^2 = 0$$
$$\partial_r^2 a - \frac{1}{r}\partial_r a - h(n+ha)\phi^2 - h'(n'+h'a)\xi^2 = 0.$$

Condiciones de frontera

$$\phi(0) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty}\phi(r) = v$$
$$\xi(0) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty}\xi(r) = v'$$
$$a(0) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} a(r) = -\frac{n}{h} = -\frac{n'}{h'}.$$

Problema con condiciones a la frontera, soluciones numéricas con el método de Newton amortiguado.

Las soluciones están definidas de manera única al definir v, v', λ, λ', h, h', n y n'.

Escogimos $v' \gg v$.

$v = 246$ GeV se usa para convertir a todas las variables adimensionales a unidades físicas.

Mostramos el radio r del perfil en unidades de

$$v_{\text{dim'less}}\ 0.0008\ \text{fm}.$$

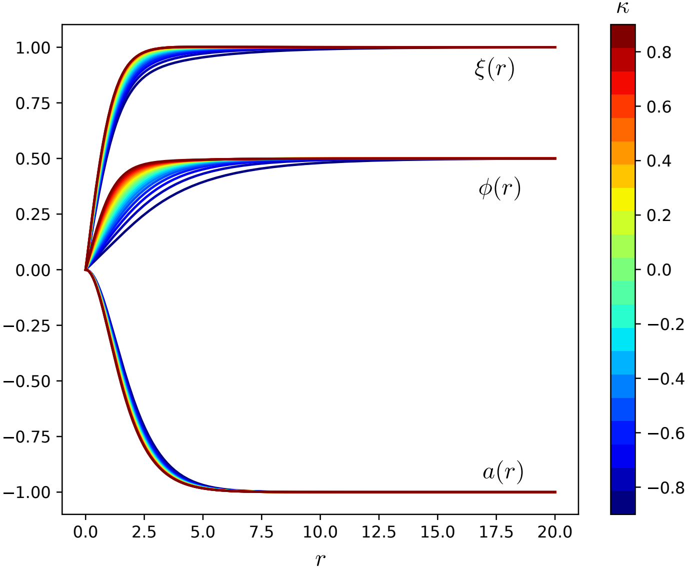


Figure: $v = 0.5,\ v' = 1,\ n = n' = h = h' = \lambda = \lambda' = 1.$

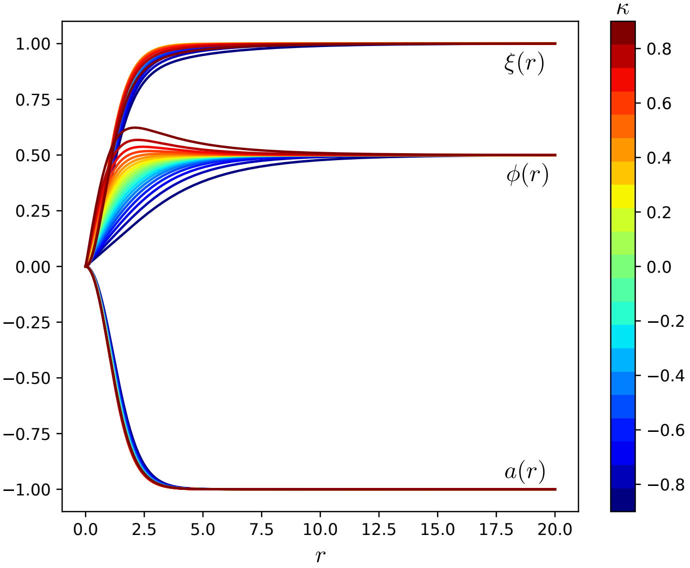


Figure: $v = 0.5,\ v' = 1,\ n = 1,\ n' = 2,\ h = 1,\ h' = 2,$
$\lambda = \lambda' = 1.$

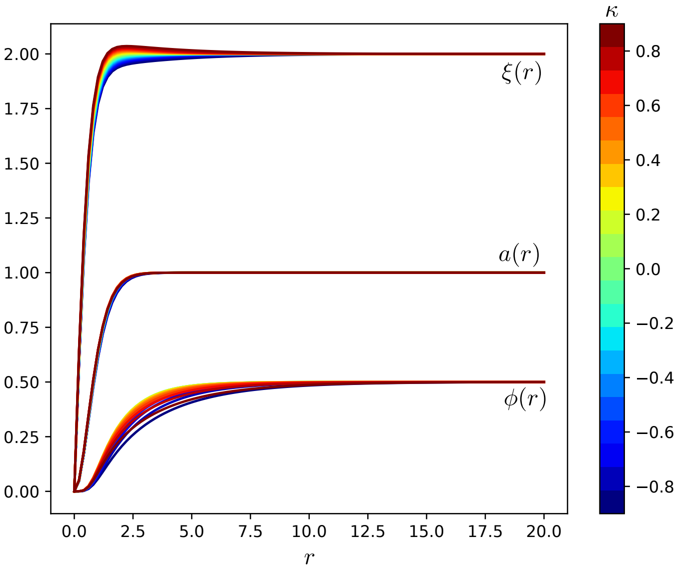


Figure: $v = 0.5$, $v' = 2$, $n = -5$, $n' = -1$, $h = 5$, $h' = 1$, $\lambda = \lambda' = 1$. This is an example from the SO(10) model.

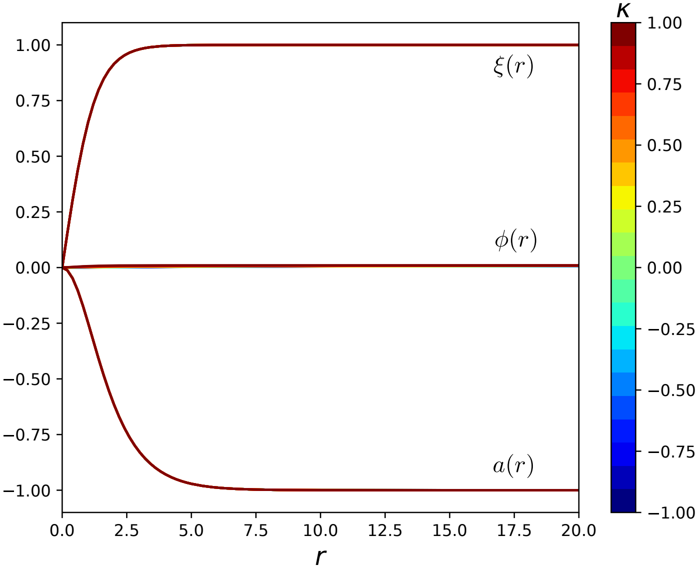


Figure: $n = h = n' = h' = \lambda = \lambda' = 1,\ v = 0.01,\ v' = 1.$

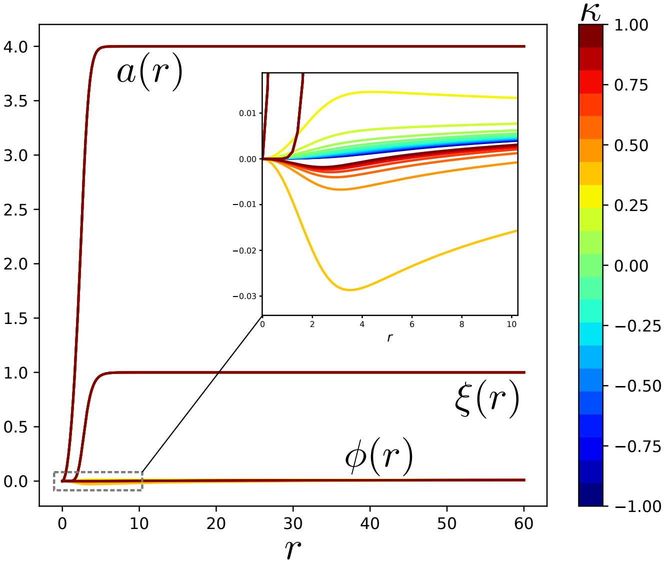


Figure: $n = -2,\ h = 0.5,\ n' = 10,\ h' = -2.5,\ \lambda = 1,\ \lambda' = 1,\ v = 0.01,\ v' = 1.$

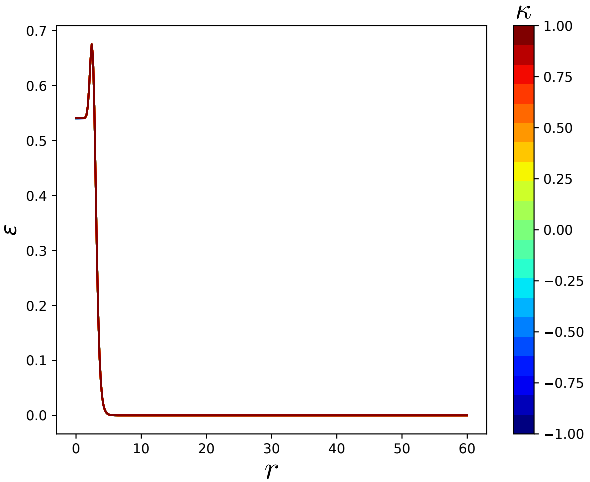


Figure: Densidad de energía, $v = 0.01$, $v' = 1$, $n = -2$, $n' = 10$, $h = 0.5$, $h' = -2.5$, $\lambda = \lambda' = 1$. En unidades de 4.79×10^{19} GeV/fm^3.

Al integrar la densidad de energía encontramos que la tensión de las cuerdas estan en el orden de

$$\mu \sim 10^{10}\ \mathrm{GeV}^2.$$

Busqueda de cuerdas cósmicas

Introducimos la variable adimensional

$$G\mu,$$

donde μ es la tensión de la cuerda y $G = \frac{1}{(1.2\times 10^{19}\ \text{GeV})^2}$ es la constante de Newton.

Mide, por ejemplo, el acoplamiento gravitacional de la cuerda.

Mediciones del power spectrum del CMB

Justo después del *Big Bang* el universo estaba permeado de un plasma de bariones, leptones y fotones.

Cuando el universo tenia $\sim 300,000$ años, los primeros atomos fueron formados.

Dado que los átomos son neutros, los fotones se desacoplaron de la materia. Un proceso llamado *recombinación*.

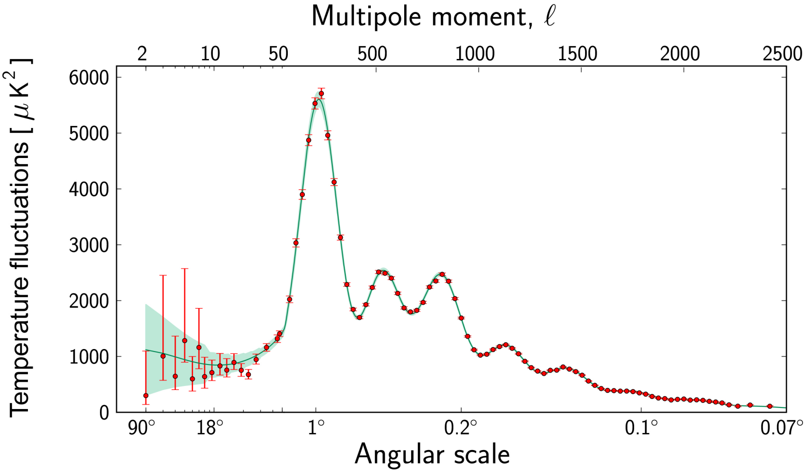
Esta radiación es llamada CMB.

Si las cuerdas cósmicas existen, tendrían una huella distintiva en el *power spectrum* del CMB.

La radiación que pasa cercana a una cuerda cósmica causaría que las discontinuidades en la desviación de la temperatura del CMB sea del orden

$$\frac{\Delta T}{T} = 8\pi G\mu\beta,$$

donde β es la velocidad transeversal de la cuerda, T es la temperatura promedio y ΔT es la fluctuacion de la temperatura.


Multipole moment, ℓ
2
10
50
500
1000
1500
2000
2500
Temperature fluctuations [μK^2]
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
90°
18°
1°
0.2°
0.1°
0.07°
Angular scale

De acuerdo a las mediciones del CMB obtenidas por PLANCK, la constricción para la tensión de la cuerda es

$$G\mu \lesssim 1.49 \times 10^{-7}.$$

Lentes gravitacionales

Tensor energía momento de una cuerda cósmica estática

$$T^{\mu\nu} = \mu\delta(x)\delta(y)\,\mathrm{diag}(1, 0, 0, -1).$$

Lejos de la cuerda el elemento de línea es

$$ds^2 = dt^2 - dr'^2 - r'^2 d\varphi'^2 - dz^2,$$

donde

$$(1-8G\mu\log(r/r_0))r^2 = (1-8G\mu)r^2,\ \varphi' = (1-4G\mu)\varphi.$$

Aquí $r \in [0, \infty]$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$ y r_0 es una constante.

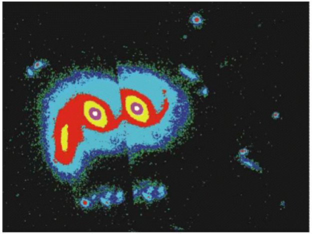
Esto implica una deficit angular

$$\Delta\varphi = \varphi_{\mathsf{max}} - \varphi'_{\mathsf{max}} = 2\pi - 2\pi(1 - 4G\mu) = 8\pi G\mu.$$

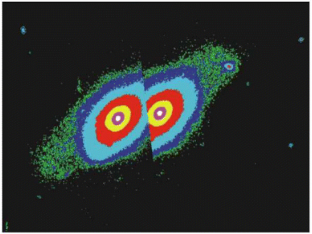
Un objeto detrás de una cuerda cósmica produce dos objetos similares separados por el ángulo

$$\alpha = \frac{l_1}{l_2}\Delta\varphi \sin\theta,$$

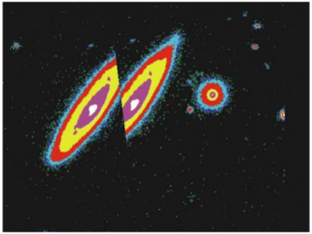
asumiendo $G\mu \ll 1$, donde l_1 es la distancia entre la cuerda y el observador, l_2 es la distancia entre la cuerda y el objeto y θ es el ángulo que hace la cuerda con un plano perpendicular entre el observador y el objeto.



a)



b)



c)

Ondas gravitacionales

Una de las formas más realistas de detectar cuerdas cósmicas es por su emisión de ondas gravitacionales.

De acuerdo a la Relatividad General, un *loop* oscilante de cuerda cósmica emite radiación gravitacional con una potencia

$$P = \gamma G\mu^2.$$

Estos *loops* tienen una emisión característica de radiación gravitacional producidas por *kinks* y *cúspides*.

Los kinks son discontinuidades en $\dot{x}^{\mu}$.

Las cúspides son regiones puntiagudas del loop.

Las cúspides producen señales de ondas gravitacionales en la dirección del pico.

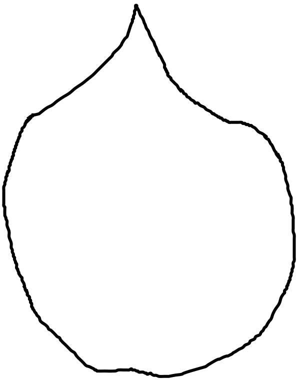


Figure: A loop with a cusp. Near the cusp the speeds of the right and left modes are the speed of light.

La colaboración LIGO/VIRGO han puesto constricciones a la tension de las cuerdas.

Refiriendose a radiación por loops, la constricción de la tensión es

$$G\mu \lesssim 4 \times 10^{-15}.$$

Conclusiones

En esta extensión del MS hemos introducido

- Un nuevo acoplamiento de norma h'
- Un neutrino derecho ν_R
- Un nuevo campo de Higgs $\chi \in \mathbb{C}$

A larga distancia no afecta a la física conocida.

No observado pero en principio detectable.

La tensión de las cuerdas es del orden de 10^{10} GeV.

Obtuvimos soluciones tipo *overshoot* y *coaxiales*.

Es un escenario posible sin contradicciones a la física del modelo estándar.

Detección difícil, pero no estan descartas con las observaciones actuales.

Un argumento válido en su favor es la explicación del porqué la invarianza $B - L$ es una simetría exacta.