Resolução da Lista de Modelagem

Pesquisa Operacional I

1º semestre / 2017

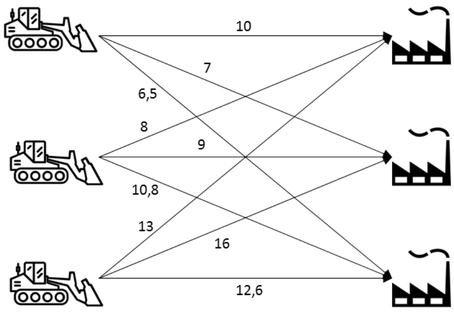
Monitor: Hugo Casado Waismann

Orientador: Eduardo Uchoa Barboza

Revisado por Victória Monteiro (UFPB), Eduardo Luiz (UFPB) e Teobaldo Bulhões (UFPB).

Questão 1

	Custo Fixo	Capacidade Máxima
Mina 1	50000	11500
Mina 2	40000	16500
Mina 3	30000	13000



Requisições de Minério	
12300	Usina 1
15400	Usina 2
13300	Usina 3

1. Dados (já representados no diagrama):
    - Custo Fixo mensal para cada mina;
    - Capacidade Máxima de produção mensal de cada mina;
    - Custo de Transporte entre cada mina e usina;
    - Requisições mensais de minério para cada usina.

2. Variáveis:
    - x_{ij}: quantidade de minério comprada da mina *i* pela usina *j*;
    - y_i: indica se houve compra de minério proveniente da mina *i* (variável binária, tomando o valor *1* se houve compra, e o valor *0* em caso negativo).

3. Formulação:

$$Min \quad 10x_{11} + 8x_{21} + 13x_{31} + 7x_{12} + 9x_{22} + 16x_{32} + 6{,}5x_{13} + 10{,}8x_{23} + 12{,}6x_{33} + 50000y_1 + 40000y_2 + 30000y_3$$

$S.a.$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 12300$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15400$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 13300$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 11500y_1 \quad *$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 16500y_2 \quad *$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 13000y_3 \quad *$$

$$x \geq 0$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$y\ inteiro$

Pelo UFFLP, obtemos os seguintes resultados:

$x_{11} = 0$	$x_{21} = 12300$	$x_{31} = 0$
$x_{12} = 11200$	$x_{22} = 4200$	$x_{32} = 0$
$x_{13} = 300$	$x_{23} = 0$	$x_{33} = 13000$
$y_1 = 1$	$y_2 = 1$	$y_3 = 1$

$$FO = 500350$$

* Essas restrições têm duas funções: a primeira é de proibir que alguma mina que não teve minérios comprados dela possa vendê-los (em outras palavras, se $y_i = 0$, teremos que $x_{i1} = x_{i2} = x_{i3} = 0$ necessariamente, pois todas as variáveis são maiores ou iguais a zero); e a outra é de que uma vez que a mina tenha minérios comprados dela, essa quantidade de compra não seja superior a sua capacidade máxima.

Questão 5

1. Dados:
   - Área total de cada região (em alqueires);
   - Disponibilidade de água em cada região (em m^3);
   - Área máxima por produto (em alqueires);
   - Consumo de água por área de terreno (em m^3/alqueire);
   - Lucro por unidade de área (em $/alqueire).

2. Variáveis:
   - x_{ij}: área plantada com produto i (em alqueires) na região j.

3. Formulação:

$Max \quad 400x_{1A} + 400x_{1B} + 400x_{1C} + 300x_{2A} + 300x_{2B} + 300x_{2C} + 100x_{3A} + 100x_{3B} + 100x_{3C}$

$$S.a.\quad \left.\begin{aligned} x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} &\leq 400 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} &\leq 600 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} &\leq 300 \end{aligned}\right\} \text{área total de cada região}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_{1A} + 2x_{2A} + x_{3A} &\leq 600 \\ 3x_{1B} + 2x_{2B} + x_{3B} &\leq 800 \\ 3x_{1C} + 2x_{2C} + x_{3C} &\leq 375 \end{aligned}\right\} \text{disponibilidade de água em cada região}$$

$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 600$

$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 500$ área máxima por produto

$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 325$

$x \geq 0$

OBS$_1$: Geralmente, quando temos questões sem valores numéricos, escrevemos os índices das variáveis usando apenas números. Isso facilita o uso da notação de somatório (ex.: $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$) e de "para todo" (ex.: $\forall i = 1, \dots, m$). Porém, em questões com valores numéricos, podem-se usar letras ou até palavras como índices (como, nesse caso, os nomes das regiões) para facilitar o entendimento da modelagem.

Pelo UFFLP, obtemos os seguintes resultados:

$x_{1A} = 0$ $x_{2A} = 300$ $x_{3A} = 0$

$x_{1B} = 133{,}33$ $x_{2B} = 200$ $x_{3B} = 0$

$x_{1C} = 125$ $x_{2C} = 0$ $x_{3C} = 0$

$$FO = 253333{,}33$$

Questão 6

Neste exercício, precisaremos construir uma tabela, a partir das informações disponíveis no enunciado, que indique cada uma das maneiras de cortar a barra de 6 metros e quantas barras menores cada um desses cortes fornecerá:

	Corte 1	**Corte 2**	**Corte 3**	**Corte 4**
Barra de 2m	3	1	1	0
Barra de 3m	0	1	0	2
Barra de 4m	0	0	1	0
Resto (em m)	0	1	0	0

Demanda (em unidades)
50
60
90

Agora, já temos dados suficientes para modelar o problema.

OBS: Não é necessário colocar na tabela cortes em que o resto é maior ou igual ao comprimento da menor barra. Por exemplo, neste exercício, qualquer tipo de corte que produza um resto maior ou igual a 2m poderá ser melhorado fabricando uma barra menor a mais e reduzindo o resto. (Essa observação é válida para quando as barras menores e os cortes não têm custo específico de produção)

1. Dados:
   - Demanda de cada barra menor;
   - Quantidade de cortes possíveis;

- Quantidade da barra menor i produzida no corte j.

2. Variáveis:
   - x_j: quantidade do corte j realizado.

3. Formulação:

$Min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$S.a. \quad 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 50$

$x_2 + 2x_4 \geq 60$

$x_3 \geq 90$

$x\ inteiro$

$x \geq 0$

Pelo UFFLP, obtemos os seguintes resultados:

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2 = 0$ $\qquad$ $x_3 = 90$

$x_4 = 30$ $\qquad$ $FO = 120$

Questão 7

Área\Padrão	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
(2cm x 4cm)	**2**	**1**	**2**	**5**
(4cm x 7cm)	**1**	**1**	**1**	**0**
Resto	**0**	**1**	**0**	**0**

Tipos de tiras	**Demanda**
(2cm x 4cm)	**2000**
(4cm x 7cm)	**1000**

1. Dados:

- Demanda de cada tipo de tira metálica
- Quantas tiras de cada tipo são obtidas em cada padrão de corte

2. Variáveis:

- x_1: número de cortes do padrão 1 a serem feitos.
- x_2: número de cortes do padrão 2 a serem feitos.
- x_3: número de cortes do padrão 3 a serem feitos.
- x_4: número de cortes do padrão 4 a serem feitos.
- y_1: número de chapas adquiridas de tamanho (10cm x 3000cm) - 30000cm²
- y_2: número de chapas adquiridas de tamanho (11cm x 2000cm) - 22000cm²

3. Formulação:

$$Min \quad 30000y_1 + 22000y_2$$

$$s.a \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 \geq 2000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1000$$

$$y_1 = (x_2 + x_4)/750$$

$$y_2 = (x_1 + x_3)/500$$

$$y_1,\ y_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$y_1, y_2 \in Z$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in Z$$

Pelo algoritmo Branch-and-Bound, obtemos os seguintes resultados:

$FO = 44000 \quad x_1 = 1000 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad y_1 = 0$

$$y_2 = 2$$

Questão 9

1. Dados:

   - Organizando os dados em uma tabela, temos:

Inspetor	Tipo 1	Tipo 2
Taxa de Inspeção	25 peças/hora	15 peças/hora
Taxa de Acerto	95%	95%
Salário	R$4,00/hora	R$3,00/hora

Disponibilidade	8	10

Assim podemos deduzir que:

$\Rightarrow \quad Custo\ por\ hora\ do\ Inspetor\ 1 = 4 + (25 \times 0{,}05) \times 2 = 6{,}5$

$\Rightarrow \quad Custo\ por\ hora\ do\ Inspetor\ 2 = 3 + (15 \times 0{,}05) \times 2 = 4{,}5$

2. Variáveis:
   - x_i: número de inspetores do tipo i

3. Formulação:

$Min \quad 52x_1 + 36x_2 \quad *$

$S.a. \quad 200x_1 + 120x_2 \geq 1800 \quad **$

$x_1 \leq 8$

$x_2 \leq 10$

$x\ inteiro$

$x \geq 0$

Pelo UFFLP, obtemos os seguintes resultados:

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 2$$

$$FO = 488$$

$* \ Min \quad 8 \times (6{,}5)x_1 + 8 \times (4{,}5)x_2$

$** \ 8 \times (25)x_1 + 8 \times (15)x_2 \geq 1800$, pois queremos que, ao final do dia (8 horas de jornada), os inspetores tenham inspecionados pelo menos 1800 peças.

Questão 11

1. Dados:
   - Número máximo de quartos que podem ser construídos;
   - Número mínimo de leitos;
   - Porcentagem máxima e mínima de quartos com um leito que devem ser construídos;
   - Gastos percentual com mão-de-obra dos pacientes dos quartos com 2 ou 3 leitos;
   - Relação de arrecadação com base na capacidade de pessoas no quarto.

2. Variáveis:
    - x_i: número de quartos com i leitos.

OBS[1]: A formulação vai depender do enunciado de cada item. <u>É interessante observar que as restrições se repetirão para todos os itens. O que irá diferenciá-los serão as funções-objetivo.</u>

a)

3. Formulação:

$$\begin{aligned}
&Min \quad && x_1 + 1{,}6x_2 + 2{,}4x_3 \quad * \\
&S.a. && x_1 + x_2 + x_3 \leq 70 \\
& && x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 120 \\
& && 0{,}85x_1 - 0{,}15\, x_2 - 0{,}15\, x_3 \geq 0 \quad ** \\
& && 0{,}7x_1 - 0{,}3\, x_2 - 0{,}3\, x_3 \leq 0 \quad ** \\
& && x \; inteiro \\
& && x \geq 0
\end{aligned}$$

Pelo UFFLP, obtemos os seguintes resultados:

$$x_1 = 7$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 37$$
$$FO = 97{,}4$$

$*$ Considerando que nos quartos com dois e três leitos cada paciente exige 80% menos de mão-de-obra em relação aos pacientes de quartos com um leito, podemos inferir que os coeficientes das variáveis serão compostos pelo produto entre a porcentagem de mão-de-obra gasta (na forma decimal) e a quantidade de leitos no quarto.

$$Min \quad (1 \times 1)x_1 + (0{,}8 \times 2)x_2 + (0{,}8 \times 3)x_3$$

$**$ As duas últimas restrições seguem o seguinte raciocínio:

$$x_1 \geq 0{,}15(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$x_1 \leq 0{,}30(x_1 + x_2 + x_3)$$

Passando todas as variáveis para o lado esquerdo da inequação, encontraremos as expressões finais.

b)

3. Formulação (as restrições são as mesmas da letra *a*):

$Max \quad x_1 + x_2 + x_3$ *

Pelo UFFLP, obtemos os seguintes resultados:

$$x_1 = 21$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 49$$

$$FO = 70$$

* Considerando que a arrecadação do hospital por pessoa é inversamente proporcional ao número de leitos do quarto, podemos inferir que os coeficientes das variáveis serão compostos pelo produto entre a quantidade de pessoas no quarto e o inverso do número de leitos no quarto.

$$Max \quad (1 \times 1)x_1 + (2 \times \frac{1}{2})x_2 + (3 \times \frac{1}{3})x_3$$

c)

3. Formulação (as restrições são as mesmas da letra *a*):

$Max \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3$

Pelo UFFLP, obtemos os seguintes resultados:

$$x_1 = 11$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 59$$

$$FO = 188$$

d)

3. Formulação (as restrições são as mesmas da letra *a*):

$Min \quad 10x_1 + 14x_2 + 17x_3$

Pelo UFFLP, obtemos os seguintes resultados:

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 37$$

$$FO = 713$$

Questão 13

1. Dados:

- Organizando os dados em uma tabela, temos:

Horário Escalas	1P	1E	2P	2E	3P	3E	4P	4E	5P	5E	6P	6E	7P	7E	8P	8E	Demanda
24-3	P	E												E	P	E	30
3-6	P	E	P	E												E	20
6-9		E	P	E	P	E											40
9-12				E	P	E	P	E									50
12-15						E	P	E	P	E							60
15-18								E	P	E	P	E					50
18-21										E	P	E	P	E			40
21-24												E	P	E	P	E	40

"P": plantão do enfermeiro da escala correspondente;
"E": plantão do enfermeiro que fará hora-extra.

Assim, temos:

⇒ Número total de escalas possíveis;

⇒ Demanda por enfermeiros na escala i;

- Custo por hora de cada enfermeiro $= \frac{1}{6}$;
- Custo por hora dos enfermeiros cumprindo hora-extra $= \frac{1}{6} \times (1 + 0{,}5) = 0{,}25$;
- Custo total do enfermeiro em hora-extra (3 horas de plantão) $= 3 \times 0{,}25 = 0{,}75$;

⇒ Custo total (9 horas de trabalho) dos enfermeiros que cumprem hora-extra $= 1 + 0{,}75 = 1{,}75$.

2. Variáveis:

- x_i: número de enfermeiros na escala i que não farão hora-extra;
- e_i: número de enfermeiros da escala i que farão hora-extra;

3. Formulação:

$$Min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 1{,}75e_1 + 1{,}75e_2 + 1{,}75e_3 + 1{,}75e_4 + 1{,}75e_5 + 1{,}75e_6 + 1{,}75e_7 + 1{,}75e_8$$

$S.a.$ $x_1 + x_8 + e_1 + e_7 + e_8 \geq 30$

$x_1 + x_2 + e_1 + e_2 + e_8 \geq 20$

$x_2 + x_3 + e_1 + e_2 + e_3 \geq 40$

$x_3 + x_4 + e_2 + e_3 + e_4 \geq 50$

$x_4 + x_5 + e_3 + e_4 + e_5 \geq 60$

$x_5 + x_6 + e_4 + e_5 + e_6 \geq 50$

$x_6 + x_7 + e_5 + e_6 + e_7 \geq 40$

$x_7 + x_8 + e_6 + e_7 + e_8 \geq 40$

$-0{,}4x_1 - 0{,}4x_8 - 0{,}4e_1 + 0{,}6e_7 - 0{,}4e_8 \leq 0$ *

$-0{,}4x_1 - 0{,}4x_2 - 0{,}4e_1 - 0{,}4e_2 + 0{,}6e_8 \leq 0$ *

$-0{,}4x_2 - 0{,}4x_3 + 0{,}6e_1 - 0{,}4e_2 - 0{,}4e_3 \leq 0$ *

$-0{,}4x_3 - 0{,}4x_4 + 0{,}6e_2 - 0{,}4e_3 - 0{,}4e_4 \leq 0$ *

$-0{,}4x_4 - 0{,}4x_5 + 0{,}6e_3 - 0{,}4e_4 - 0{,}4e_5 \leq 0$ *

$-0{,}4x_5 - 0{,}4x_6 + 0{,}6e_4 - 0{,}4e_5 - 0{,}4e_6 \leq 0$ *

$-0{,}4x_6 - 0{,}4x_7 + 0{,}6e_5 - 0{,}4e_6 - 0{,}4e_7 \leq 0$ *

$-0{,}4x_7 - 0{,}4x_8 + 0{,}6e_6 - 0{,}4e_7 - 0{,}4e_8 \leq 0$ *

x, e $inteiros$

$x, e \geq 0$

Pelo UFFLP, obtemos os seguintes resultados:

$x_1 = 20$	$e_1 = 0$
$x_2 = 0$	$e_2 = 0$
$x_3 = 30$	$e_3 = 10$
$x_4 = 10$	$e_4 = 0$
$x_5 = 40$	$e_5 = 0$
$x_6 = 10$	$e_6 = 0$
$x_7 = 30$	$e_7 = 0$
$x_8 = 10$	$e_8 = 0$

$$FO = 167{,}5$$

$*$ Essas restrições representam o máximo de enfermeiros que podem estar cumprindo hora-extra em determinado período. Para ilustrar o raciocínio, tomemos o período de 6-9 como exemplo. Nele, somente os enfermeiros da escala e_1 estarão fazendo hora-extra. Portanto:

$$e_1 \leq 0{,}4(e_1 + x_2 + e_2 + x_3 + e_3)$$

Passando todas as variáveis para o lado esquerdo da inequação, encontraremos as expressões finais.

Questão 14

1. Dados:
   - Número de mochilas: m;
   - Capacidade (em peso) de cada mochila i: b_i;
   - Número de objetos: n;
   - Retorno de cada objeto j: p_j;
   - Peso de cada objeto j (em unidades): w_j.

2. Variáveis:
   - x_{ij}: indica se o objeto j vai ser alocado na mochila i (variável binária, tomando o valor *1* se o objeto vai ser alocado, e o valor *0* em caso negativo).

3. Formulação:

$$Max \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_j x_{ij}$$

$$S.a. \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq b_i \qquad \forall i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

$0 \leq x \leq 1$

$x\ inteiro$

Questão 17

1. Dados:
    - Número de possíveis localidades: m;
    - Número de clientes a serem atendidos: n;
    - Custo fixo de produção da fábrica i: f_i;
    - Capacidade de produção da fábrica i: p_i;
    - Custo de transporte da fábrica i para o cliente j (por unidade): c_{ij};
    - Demanda do cliente j: d_j.

2. Variáveis:
    - x_{ij}: quantidade de produção que a fábrica i fornece ao cliente j;
    - y_i: indica se a fábrica i será instalada (variável binária, tomando o valor *1* se a fábrica for instalada, e o valor *0* em caso negativo).

3. Formulação:

$$Min \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i$$

$$S.a. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq p_i y_i \qquad \forall i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

$x \geq 0$

$y \; inteiro$

$0 \leq y \leq 1$