INTRODUÇÃO À PESQUISA OPERACIONAL

Prof. Lucídio dos Anjos Formiga Cabral
UFPB/CCEN/DE

Julho/96

ÍNDICE

Capítulo 1 INTRODUÇÃO

1.1 OTIMIZAÇÃO

Atualmente o conceito de otimização está bem formulado como um princípio que fundamenta a análise de muitos problemas complexos de alocação ou de tomada de decisão. Isto lhe confere um certo grau de elegância filosófica, que é difícil questionar, e que freqüentemente oferece um grau indispensável de simplicidade operacional. A abordagem de um problema de tomada de decisão complexo, envolvendo a seleção de valores para um número de variáveis interrelacionadas, tem como enfoque um único objetivo projetado para quantificar performance e medir a qualidade da decisão. Este único objetivo é maximizado (ou minimizado, dependendo da formulação) sujeito às restrições que limitam a seleção dos valores possíveis às variáveis de decisão. Se um único aspecto de um problema pode ser isolado e caracterizado adequadamente por um objetivo, podendo por exemplo ser: lucro ou custo em um cenário de negócios; velocidade ou distância em um problema físico; retorno esperado num ambiente de investimento de risco, ou bem-estar social no contexto do planejamento governamental, então uma aplicação de otimização se configura naturalmente adequada.

Assim posto, podemos concluir que a otimização pode prover uma ferramenta de trabalho de grande valia ao processo de análise, planejamento e tomada de decisão.

1.2 PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

O termo programação matemática vem sendo usado para descrever a minimização ou maximização de uma função objetivo de muitas variáveis, sujeita à restrições sobre as variáveis.

No desenvolvimento e aplicação da programação matemática, um caso merece destaque: é aquele no qual todos os custos, requisitos e outras quantidades de interesse são termos estritamente proporcionais aos níveis de atividades, ou somas de tais termos. Em terminologia matemática, o objetivo é uma função linear e as restrições são igualdades ou desigualdades lineares. Tal problema é denominado *problema linear* , e o processo de formulação e resolução deste é chamado *programação linear*. A programação linear é particularmente interessante porque um vasta gama de problemas podem ser modelados como problemas lineares e porque existem métodos rápidos e confiáveis para resolver problemas lineares ainda que possuam milhares de variáveis e restrições. As idéias da programação linear são também importantes para análise e resolução de problemas de programação matemática ainda que não sejam lineares.

Todos os métodos realmente úteis para resolver problemas lineares requerem um computador. Assim a programação linear teve grande avanço na década de 40 quando se tornou claro que computadores estariam disponíveis para computação científica. O primeiro método computacional que obteve sucesso para a programação linear, o algoritmo simplex, foi proposto nesta época e foi sujeito de aperfeiçoamento de implementações eficientes durante a década seguinte. Coincidentemente, o desenvolvimento de computadores deu ânimo a um significado atual muito mais familiar para o termo "programação".

A despeito da larga aplicabilidade da programação linear, a hipótese de linearidade é algumas vezes excessivamente não realística. Se ao invés disso algumas funções suaves não lineares das variáveis são usadas na função objetivo ou nas restrições, o problema é dito ser um *problema não-linear*. Resolver tal problema é difícil, embora na prática não seja impossível. Contudo os valores ótimos de funções não-lineares tem sido objeto de estudo por cerca de dois séculos. Métodos computacionais para resolver problemas não-lineares com muitas variáveis foram desenvolvidos somente em décadas recentes, após o sucesso dos métodos para programação linear. O campo da programação matemática é então conhecida como *otimização em larga escala*, para distingui-la dos tópicos clássicos de otimização em análise matemática.

As hipóteses da programação linear também se perdem quando algumas variáveis devem tomar valores discretos, isto é, valores inteiros. Então o problema está relacionado à *programação inteira* e em geral torna-se muito mais difícil. Todavia, uma combinação de computadores rápidos e métodos mais sofisticados têm tornado possível nos últimos anos tratar problemas inteiros de grandes dimensões.

Como podemos ver a área de otimização possui diversas sub-áreas. Além da programação linear, programação não-linear e programação inteira, podemos destacar ainda as seguintes: programação quadrática, programação dinâmica, programação geométrica, algoritmos de pontos interiores e otimização combinatória. Destas, ressaltamos novamente que a programação linear é, sem sombra de dúvidas, o mecanismo mais natural para formular uma vasta gama de problemas com reduzido esforço.

No presente curso, nos restringiremos ao estudo da programação linear.

1.3 DIMENSÃO DOS PROBLEMAS

É claro que a complexidade de um problema de programação linear cresce com o seu tamanho, medido em termos do número de variáveis de decisão ou do número de restrições. Então podemos esperar que problemas maiores demandem um poder computacional mais elevado. Atualmente, com o advento de novas tecnologias e com os estudos teóricos avançados pode-se resolver eficientemente grandes problemas, que podem atingir o impressionante número de 10 milhões de variáveis.

Hoje é possível estabelecer uma classificação não muito rígida para o tamanho dos problemas: *problemas de pequena escala* têm cerca de 5 ou menos variáveis e restrições; *problemas de média escala* têm de 5 a uma centena de variáveis e *problemas de larga escala* que têm de uma centena a milhares de variáveis e restrições.

1.4 PASSOS NA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA

Na prática, a programação matemática é raramente tão simples quanto executar algum programa em um computador e imprimir a solução ótima. A seqüência completa dos passos envolvidos neste processo pode ser enumerada, de forma aproximada, como a seguir:

i) Formular um modelo - o sistema abstrato de variáveis, objetivos e restrições que representam a forma geral do problema a ser resolvido.
ii) Coletar dados que definam uma ou mais instâncias do problema específico.
iii) Gerar as equações da função objetivo e das restrições do modelo.
iv) Resolver o problema - executar um programa para encontrar os valores ótimos das variáveis.
v) Analisar os resultados.
vi) Redefinir o modelo e dados tantas vezes quanto necessárias e repetir.

Nós veremos com detalhes no próximo capítulo o processo de construção de modelo de programa linear e a partir do capítulo 3 iniciaremos o estudo do método simplex para resolução do modelo.

Capítulo 2 MODELAGEM E SOLUÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

2.1 INTRODUÇÃO

Um modelo é uma representação idealizada (simplificada) de um sistema real. A partir desta definição fica claro que a modelagem é absolutamente dependente da visão particular do sistema real que o projetista do modelo possui. Assim sendo faz sentido afirmarmos que modelar é uma arte.

Daqui por diante chamaremos o problema de programação linear de PPL. Podemos dizer que a resolução de um PPL envolve duas etapas, a primeira delas é a que chamamos de modelagem, a qual será estudada logo a seguir, já a segunda consiste na resolução propriamente dita e que será vista nos capítulos a seguir. Felizmente , muitos problemas atuais recaem ou se aproximam dos muitos exemplos de modelos clássicos apresentadas na literatura.

2.2 EXEMPLOS DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

A seguir estudaremos alguns modelos clássicos apresentados na literatura, de modo a elucidar o processo de elaboração, que se constitui basicamente em desenvolver os seguintes passos:

i) encontrar as variáveis de decisão do modelo
ii) identificar as restrições do modelo
iii) identificar a função objetivo que deve ser maximizada ou minimizada

2.2.1 PROBLEMA DA DIETA

Um nutricionista precisa estabelecer uma dieta contendo, pelo menos , 10 unidades de vitamina A, 30 unidades de vitamina B e 18 unidades de vitamina C. Essas vitaminas estão contidas em quantidades variadas em cinco alimentos que vamos chamar de s_1, s_2, s_3, s_4 e s_5. O quadro seguinte dá o número de unidades das vitaminas A,B e C em cada unidade desses cinco alimentos, bem como o seu custo, em reais, por unidade.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
A	0	1	5	4	3
B	2	1	0	3	2
C	3	1	0	9	0
CUSTO	4	2	1	10	5

Calcular as quantidades dos cinco alimentos que devem ser incluídas na dieta diária, a fim de encontrarmos esses teores de vitamina com o menor custo.

MODELO

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 o número de unidades dos alimentos s_1, s_2, s_3, s_4 e s_5, respectivamente, de uma dieta diária.

O requisito de haver na dieta a ser estabelecida, um mínimo de 10 unidades de vitamina A pode ser expresso da seguinte forma:

$$x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 \geq 10$$

Analogamente, indicamos os outros teores mínimos, respectivamente, da seguinte forma :

$$2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 \geq 30$$
$$3x_1 + x_2 + 9x_4 \geq 18$$

Como não podemos consumir uma quantidade negativa de unidades dos alimentos, temos também:

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;\ x_5 \geq 0.$$

O custo por dia desta dieta, em reais, será expresso pela seguinte função linear:

$$Q(x)= 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 10x_4 + 5x_5$$

Devemos então determinar as quantidades x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 de tal forma que atenda a todas as restrições e minimize o valor da função Q(x), a qual denominamos de função objetivo. Podemos assim chegar a seguinte representação (modelo) do problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Q(x)= 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 10x_4 + 5x_5 \\ \text{s.a:} & \\ & x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 \geq 10 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 \geq 30 \\ & 3x_1 + x_2 + 9x_4 \geq 18 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

2.2.2 ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de quatro de seus produtos, designados por I, II, III e IV. Para fabricar esses quatros produtos, ela utiliza dois tipos de máquinas (M1 e M2) e dois tipos de mão-de-obra (M01 e M02) que têm as seguintes disponibilidades de horas por mês:

Recursos		Tempo Disponível
Máquinas	M1 M2	80 20
Mão-de-obra	M01 M02	120 160

O setor técnico da empresa fornece os seguintes quadros de produtividades, que demonstram o custo em relação ao número de máquinas-hora e homens-hora consumidos para produzir uma unidade de cada produto.

Recursos		Produtos			
		I	II	III	IV
Máquinas	M1	5	4	8	9
	M2	2	6	-	8
Mão-de-obra	M01	2	4	2	8
	M02	7	3	-	7

O setor comercial fornece as seguintes informações acerca do mercado:

Produtos	Potencial de Vendas (unidades/mês)	Lucro Unitário (em reais por unidade)
I	70	10
II	60	8
II	40	9
IV	20	7

É necessário que se determine um plano de produção mensal dos produtos I, II ,III e IV, de tal forma que o lucro proveniente da venda desses produtos seja maximizado. Formular um modelo de programação linear para o problema.

MODELO

Sejam x_1,x_2,x_3 e x_4 as produções mensais dos produtos I, II, III e IV, respectivamente.

A restrição de disponibilidade de tempo para a máquina 1 estabelece, um máximo de 80 horas/mês, e levando em consideração quanto cada unidade de um dos produtos consome para a sua produção podemos expressar isto da seguinte forma:

$$5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 9x_4 \leq 80$$

Analogamente, indicamos a disponibilidade máxima dos outros recursos, da seguinte forma :

$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 \leq 20$
$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leq 120$
$7x_1 + 3x_2 + 7x_4 \leq 160$

Sabendo que a produção de cada produto não deve exceder o seu potencial de venda e que não podemos produzir uma quantidade negativa de cada produto, inserimos as seguintes restrições:

$x_1 \leq 70$; $x_2 \leq 60$; $x_3 \leq 40$; $x_4 \leq 20$.
$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$; $x_4 \geq 0$.

O lucro mensal obtido pela venda dos produtos , em reais, será expresso pela seguinte função linear:

$Q(x)= 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 7x_4$

O modelo completo, fica então assim:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & Q(x)= 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 7x_4 \\
\text{s.a:} & \\
& 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 9x_4 \leq 80 \\
& 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 \leq 20 \\
& 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leq 120 \\
& 7x_1 + 3x_2 + 7x_4 \leq 160 \\
& x_1 \leq 70 \\
& x_2 \leq 60 \\
& x_3 \leq 40 \\
& x_4 \leq 20 \\
& x_1, x_2 , x_3 , x_4 , x_5 \geq 0
\end{array}
$$

2.2.3 PROBLEMA DE TRANSPORTE

Uma empresa brasileira de torrefação de grão de café possui m fábricas. O café é então distribuído toda semana para n armazéns nas principais cidades para varejo, distribuição e exportação. Suponha que o custo unitário de transporte da fábrica i ao armazém j seja de c_{ij} unidades monetárias. Além disso, suponha que a capacidade de produção da fábrica i seja a_i e que a demanda no armazém j seja b_j. Deseja-se determinar as quantidades x_{ij} ,ou seja, quantas unidades devem ser transportadas da fábrica i para o armazém j , i=1,2,...,m , j=1,2,...,n, que minimize o custo total de transporte.

MODELO

Seja x_{ij} a quantidade de café a ser transportada da fábrica i ao armazém j. Ao estudarmos o problema percebemos que não é possível tirarmos de uma fábrica uma quantidade maior que a sua capacidade de produção e que a demanda de cada armazém deve ser satisfeita. Assim detectamos a necessidade uma restrição de produção para cada fábrica e uma restrição de demanda para cada armazém, logo teremos (*m*+*n*) restrições.

O problema de transporte pode então ser formulado como sendo o seguinte PPL:

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad i = 1,2,..,m \qquad \text{Produtividade}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2,..,n \qquad \text{Demanda}$$

$$x_{ij} \ge 0 \;, \quad i = 1,2,\dots,m \qquad j = 12,..,n$$

2.3 FORMA-PADRÃO

Um problema de programação linear é formulado de modo a identificar um conjunto de variáveis não-negativas que minimizem uma função objetivo linear sujeita a um conjunto de restrições lineares. Pode ser definido sob a seguinte forma:

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad i = 1,2,..,m \qquad (1.2)$$

$$x_j \ge 0 \;, \; j = 12,..,n \qquad (1.3)$$

onde c_j, a_{ij} e b_i são dados (números reais) e x_j representa para $j = 1,2,..,n$, as variáveis de decisão. A função linear a ser minimizada em (1.1) é denominada função objetivo. As restrições (1.3) são denominadas de restrições de não negatividade.

Cada restrição de desigualdade de (1.2) pode ser convertida em uma igualdade pela introdução de uma variável positiva (variável de folga) $x_{n+i} \ge 0$, como a seguir:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \ge 0 \end{cases}$$

Uma restrição de desigualdade poderá também ser substituída por duas desigualdades :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \end{cases}$$

Assim sendo, dado um problema de programação linear (PPL) podemos transformá-lo, adicionando uma variável de folga a cada restrição de desigualdade, de tal forma que obteremos um PPL apenas com restrições de igualdade e não-negatividade. Logo é sempre possível expressarmos um PPL da seguinte forma.

(PPL) : Minimizar $\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2,..,m$$

$$x_j \geq 0 \ , \ j = 12,..,n$$

ou de forma condensada, como:

(PPL) : Minimizar $\quad Z = cx \qquad\qquad (1.4)$

sujeito a:

$$Ax = b \qquad\qquad (1.5)$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad (1.6)$$

onde A é uma dada matriz de ordem m x n, m ≤ n, c é um vetor de custos de dimensão n, b é um vetor de dimensão m e x um vetor de variáveis de n componentes.

Um problema de programação linear colocado na forma [(1.4)-(1.6)] é dito estar na forma-padrão. Se a função objetivo é de maximizar, nós a modificamos para minimizar por multiplicá-la por -1.

A Redução de um PPL à forma-padrão pode ser feita utilizando-se as possíveis transformações abaixo:

i) Se alguma restrição em (1.5) é de desigualdade, isto é,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{ou} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

Adicionamos uma variável de folga $x_{n+i} \geq 0$, tal que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad \text{ou} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i$$

ii) Ocorrência de variáveis livres (variáveis que podem assumir qualquer valor). Seja x_j uma variável livre, podemos neste caso substituir x_j por duas novas variáveis, x'_j e x''_j, de maneira que $x_j = x'_j - x''_j$, sendo $x'_j \geq 0$ e $x''_j \geq 0$.

iii) Ocorrência de $b_i < 0$.

Neste caso simplesmente multiplica-se ambos os lados da restrição *i* por -1.

iv) Variável não positiva.

Havendo uma variável $x_j \leq 0$ basta substituí-la por sua simétrica, isto é, basta fazer $x'_j = -x_j$ e substituir x_j por x'_j em todas as equações do problema.

v) A função objetivo é de maximização.

Neste caso, basta substituir a função objetivo dada pela sua simétrica, passando a minimizar esta última, ou seja, MÁX {Q(x)}= - MIN {- Q(x)}.

No caso de uma função objetivo do tipo

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{MAX}$$

basta fazermos

$$Q'(x) = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{MIN}$$

É claro que

$$Q(x) = -Q'(x).$$

Exemplo 2.1

Reduzir o seguinte modelo à FORMA-PADRÃO.

Max $\quad Q(x)= 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5$

s.a:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 &\geq 5 \\
4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 &\leq 0 \\
-2x_3 + x_4 + 2x_5 &\geq -7 \\
3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 8 \\
x_1, x_2, x_5 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_4 &\ \text{qualquer}
\end{aligned}$$

Multiplicando a terceira restrição por -1 e introduzindo as variáveis de folga nas desigualdades, temos:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & Q(x)= 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 \\
\text{s.a:} & \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 = 5 \\
& 4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + x_7 = 0 \\
& 2x_3 - x_4 - 2x_5 + x_8 = 7 \\
& 3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8 \\
& x_1, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \text{ qualquer}
\end{array}
$$

Fazendo $x_3 = -x'_3$, $x_4 = x'_4 - x''_4$ e $Q(x) = -Q'(x)$, colocamos finalmente o problema na forma-padrão:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & Q'(x)= -2x_1 - x_2 - x'_3 - 3x'_4 + 3x''_4 + x_5 \\
\text{s.a:} & \\
& x_1 + 2x_2 + x'_3 + x'_4 - x''_4 + 3x_5 - x_6 = 5 \\
& 4x_1 - x'_3 - 2x'_4 + 2x''_4 - x_5 + x_7 = 0 \\
& -2x'_3 - x'_4 + x''_4 - 2x_5 + x_8 = 7 \\
& 3x_1 + x_2 - x'_4 + x''_4 + x_5 = 8 \\
& x_1, x_2, x'_3, x'_4, x''_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0
\end{array}
$$

2.4 SOLUÇÃO GRÁFICA

A seguir descreveremos um procedimento geométrico para resolver um problema de programação linear. Embora este método seja somente adequado para problemas muito pequenos, ele possui uma grande visão geométrica do problema de programação linear. Para ser mais específico, consideremos o seguinte problema.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & Z = cx \\
\text{sujeito a:} & \\
& Ax = b \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

Note que a região viável consiste de todos os vetores x satisfazendo $Ax = b$ e $x \geq 0$. Entre todos estes pontos nós desejamos encontrar um ponto que possui o menor valor cx. Observe ainda que pontos que possuam o mesmo valor de função objetivo z satisfazem a equação $z = cx$, isto é, $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. Desde que Z deve ser minimizado, o plano (reta em um espaço bi-dimensional) $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ deve ser movido paralelo a ele mesmo na direção que minimiza mais rapidamente a função objetivo. Esta direção é $-c$, e então o plano é movido na direção $-c$ tanto quanto possível. Este processo é ilustrado na figura 3.1. Observe ainda que quando o ponto ótimo x^* é alcançado, a reta $z^* = c_1x_1 + c_2x_2$, onde $z^* = c_1x_1^* + c_2x_2^*$, não pode mais ser movido na direção $-c=(-c_1,c_2)$ porque isto levaria somente a pontos fora da região viável. Daí concluímos que x^* é a solução ótima. De modo contrário, para um problema de maximização, o plano $z = cx$ deve ser movido tanto quanto possível na direção c.

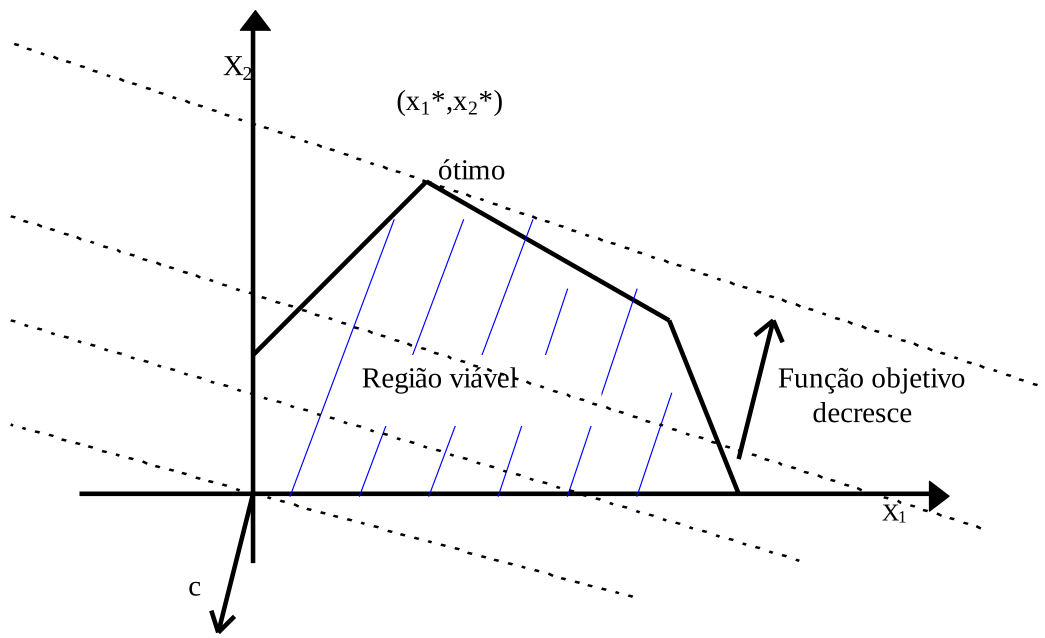


Figura 3.1

O processo descrito acima é conveniente para problemas com duas variáveis e é obviamente impraticável para problemas com mais de três variáveis. É interessante notar que o ponto ótimo x^* na Figura 3.1 é um dos cinco vértices que são chamados de pontos extremos. Nós veremos adiante que se um PPL na sua forma-padrão tem uma solução ótima finita, então ela corresponde a um ponto extremo.

2.5 EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO GRÁFICA DE UM PPL

Exemplo 3.1

Considere o seguinte modelo de um PPL com duas variáveis:

Minimize $Q(x) = 2x_1 + x_2$
s.a:

$$- x_1 + 2x_2 \leq 4 \qquad (R1)$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 15 \qquad (R2)$$
$$2x_1 - 3x_2 \leq 6 \qquad (R3)$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Cada restrição do modelo define uma região no plano, a qual denominamos de semiplano. Devemos inicialmente encontrar o conjunto de pontos que satisfazem todas as restrições do problema, denominado de *conjunto de soluções viáveis*, o qual corresponde à interseção de todos os cinco semiplanos.

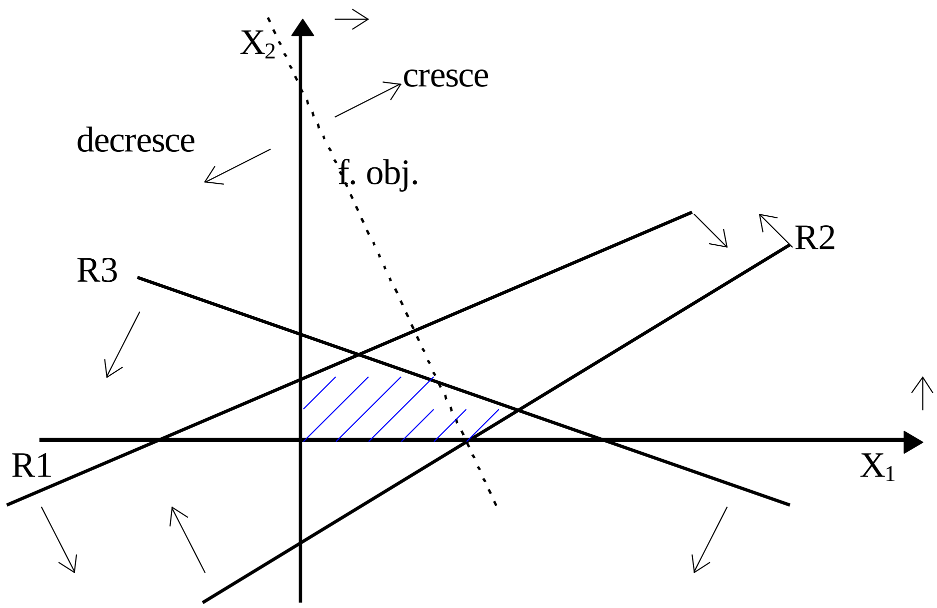


Figura 3.2

Na figura acima, cada restrição determina um semi-espaço explicitado por uma seta. A interseção destes corresponde à área destacada na figura 3.2, denominada de *região viável*. As restrições de não negatividade restringem os pontos a pertencerem ao primeiro quadrante. Como a função objetivo representa uma família de retas paralelas, vamos tomar uma qualquer, por exemplo a que passa pela origem, a qual será representada por uma linha pontilhada. A seguir deslocaremos esta reta, paralelamente a si mesma, na direção de crescimento da função objetivo (f. obj.).

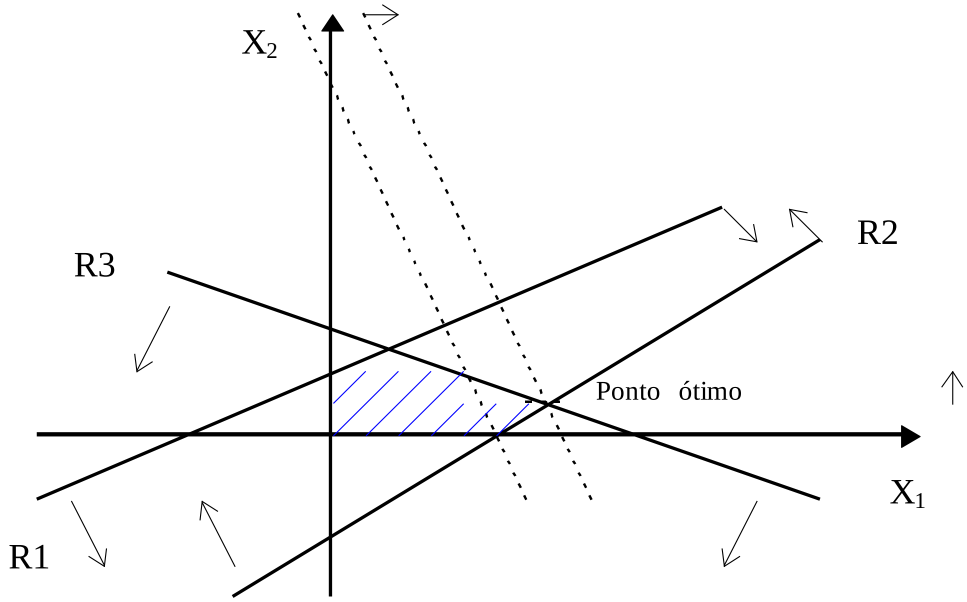


Figura 3.3

Logo, a solução ótima corresponde ao ponto interseção entre as retas R2 e R3 mostrado na figura 3.3, que possui as seguintes coordenadas x_1=75/19 e x_2=12/19, o qual confere um valor máximo à função objetivo de Q(x*)= 2 * (75/19) + 1 * (12/19) = 162/19.

No exemplo anterior constatamos a existência de uma única solução ótima. Outros casos podem ocorrer dependendo da estrutura do problema. Vejamos estas outras possibilidades para um problema de minimização:

i) Múltiplas soluções ótimas

Observe que na Figura 3.4(a) a região viável é limitada. Os dois pontos extremos x_1* e x_2* são ótimos, bem como qualquer um dos pontos sobre o segmento que os une. Na Figura 3.4(b) a região viável é ilimitada, porém a solução ótima é finita. Qualquer ponto sobre o raio com vértice x* na Figura 3.4(b) é ótimo.

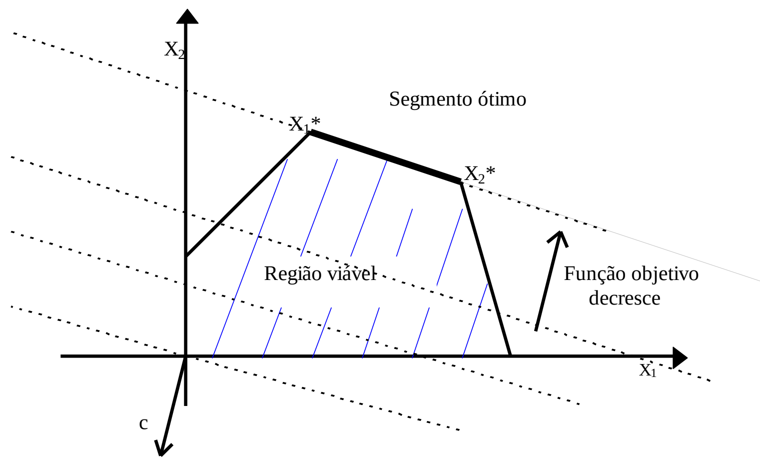


Figura 3.4(a)

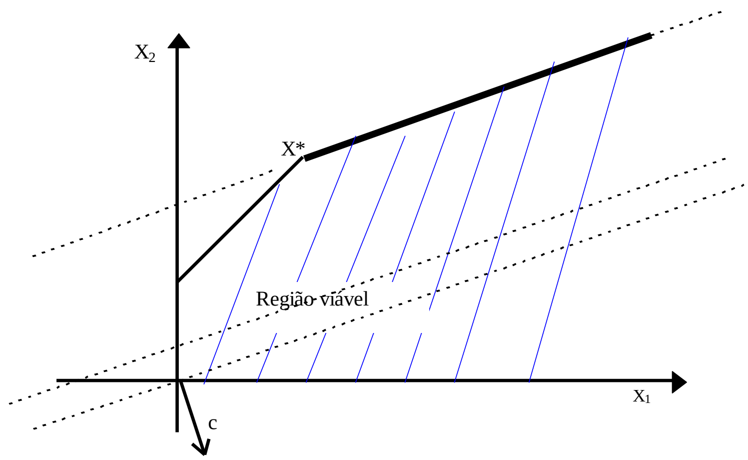


Figura 3.4(b)

ii) Solução ótima no infinito

Este caso é ilustrado na Figura 3.5 onde tanto região viável como valor de solução ótima são ilimitados. Note-se que é possível descrever indefinidamente paralelas da função objetivo movendo-se na direção que a minimiza .

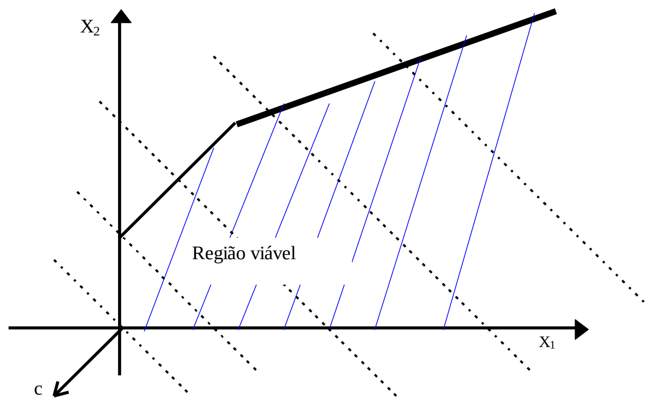


Figura 3.5

iii) Conjunto de soluções viáveis vazio

Ocorre sempre que um sistema de equações for inconsistente, vejamos o exemplo a seguir:

Min $Q(x)=x_1+x_2$

s.a:

$x_1+x_2=5$

$x_1+x_2=-5$

$x_1,x_2\geq 0$

Fica a cargo do leitor comprovar a inexistência de solução viável.

2.6 EXERCÍCIOS

1. Um fazendeiro tem 200 unidades de área de terra, onde planeja cultivar trigo, arroz e milho. A produção esperada é de 1800 kg por unidade de área plantada de trigo, 2100 kg por unidade plantada de arroz e 2900 kg por unidade plantada de milho. Para atender ao consumo interno de sua fazenda, ele deve plantar pelo menos 12 unidades de área de trigo, 16 unidades de área de arroz e 20 unidades de área de milho. Ele tem condições de armazenar no máximo 700.000 kg . Sabendo que o trigo dá um lucro de R$ 1,20 por kg, o arroz R$ 0,70 por kg e o milho R$ 0,28 por kg. Quantas unidades de área de cada produto ele deve plantar para que seu lucro seja o maior possível ? Formular somente o problema.

2. Um empresário tem a opção de investir seu dinheiro em dois planos. O plano A garante que cada unidade monetária investida ganhará R$ 0,70 ao final do ano, ao passo que o plano B garante que cada unidade monetária investida ganhará R$ 2,00 reais ao final de dois anos. No plano B é permitido somente

investimentos para períodos que sejam múltiplos de dois anos. Como se deveria investir R$ 100.000,00 a fim de maximizar o ganho ao final de 3 anos? Formule o problema com um modelo de P.L.

3. Devido ao número inconstante de passageiros, uma companhia de ônibus necessita um número variado de motoristas dependendo do horário considerado. A tabela a seguir especifica a quantidade de motoristas necessários.

HORÄRIO	QUANTIDADE DE MOTORISTAS
1 às 5 horas	15
5 às 9horas	30
9 às 13oras	26
13 às 17 horas	32
17 às 21 horas	30
21 à 1 hora	19

Considerando que cada motorista trabalha 8 horas seguidas e que o serviço pode ser iniciado às 1, 5, 9, 13, 17 ou 21 horas, elaborar um plano de trabalho para os motoristas, de modo que o número destes seja mínimo. Formular somente o problema.

4. Uma fábrica de televisores tem que decidir sobre o plano de produção dos seus dois tipo de televisores, preto-e-branco e colorido. Uma pesquisa de mercado indica que pelo menos 1000 unidades e 4000 unidades de TVs coloridas e preto-e-branco podem ser vendidas por mês. O número máximo de homens-hora disponível é de 50000 por mês. Uma TV colorida requer 20 homens-hora e um preto-e-branco requer 15 homens-hora. Os lucros unitários das TVs coloridas e preto-e-branco são R$60,00 e R$30,00 respectivamente. Deseja-se encontrar o número de unidades a serem produzidas de cada tipo de TV de tal maneira que o lucro seja maximizado. Formule o problema.

5. Você foi incumbido de uma campanha publicitária para um novo produto, com um orçamento de 1 milhão de reais. Você pode usar TV ou revistas para veicular a propaganda. Um minuto de TV custa R$20000,00 e alcança 1,8 milhão de clientes em potencial; uma página de revista custa R$10000,00 e alcança 1 milhão. Você deve contratar pelo menos 10 minutos de TV. Como você gastará seu orçamento para maximizar sua audiência? Formule o problema e o resolva.

(a) No intuito de pegar talentos criativos para criar propaganda; a organização, toma 3 pessoas-semana para criar uma página de revista, e uma pessoa-semana para criar um minuto de TV. Você tem somente 100 pessoas-semana disponível. Adicione esta restrição para o modelo e determine como gastará seu orçamento.

(b) Propaganda por rádio alcança um quarto de milhão de pessoas por minuto, custa R$2000,00 por minuto e requer somente 1 pessoa-dia de tempo. Como fazer esta medida afetar suas soluções?

(c) Quanto muda a solução se você contratar pelo menos 2 páginas de revista? Um máximo de 120 minutos de rádio?

6. Uma fabricante deseja o nível ótimo de produção mensal dos itens A, B e C que maximize o lucro. Os lucros unitários e o nível mínimo de produção semanal desses itens são respectivamente R$2,00 ; R$2,00 e R$4,00 e 100 unidades, 60 unidades e 60 unidades. Produtos A, B e C são processados em três máquinas . AS horas requeridas por item por máquina são mostradas abaixo.

Máquina	Item A	Item B	Item C
1	0	1	2
2	1	1	1
3	2	1	1

O número de horas das máquinas 1, 2 e 3 disponíveis por semana são 240, 400 e 360 respectivamente. Encontre um plano de produção ótimo.

7. Uma empresa produz fogões e fornos. A empresa tem três armazéns e duas lojas de varejo. Um número de 60, 80 e 50 fogões e 80, 50 e 50 fornos estão disponíveis nos três armazéns respectivamente. Uma centena e 90 fogões e 60 e 120 fornos são requeridos nas lojas de varejo respectivamente. Os custos unitários de transporte, os quais se aplicam tanto a fogões como a fornos, dos armazéns para as lojas de varejo são dados a seguir:

Armazém	Loja 1	Loja 2
1	3	5
2	2	3
3	6	3

Formular o problema, como um modelo de programação linear, de tal maneira que o custo total de transporte seja mínimo.

8. Considere o seguinte problema

Maximizar $Q(x)= 2x_1 + 3x_2$

s.a:

$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$4x_1 + 6x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Destaque a região viável.
b) Encontre a(s) solução(ões) ótima(s).

9. Considere o seguinte problema

Maximizar $Q(x)= 3x_1 + x_2$

s.a:

$$
\begin{aligned}
- x_1 + 2x_2 &\le 6 \\
x_2 &\le 4 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

a) Destaque a região viável.
b) Verifique que o problema tem um valor de solução ótima ilimitado.

10. Considere o seguinte problema

Minimizar $Q(x)= x_1 + 2x_2$

s.a:

$$
\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 &= 2 \\
x_1 + x_2 &\ge 1 \\
-5x_1 + 2x_2 &\ge -10 \\
3x_1 + 5x_2 &\le 15 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

a) Destaque a região viável.
b) Encontre a(s) solução(ões) ótima(s).

Capítulo 3 MÉTODO SIMPLEX

3.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Rescreveremos, por opção didática, o seguinte problema

(PPL) : Minimizar $Z = cx$ (1.1)

sujeito a:

$$Ax = b \quad (1.2)$$

$$x \geq 0 \quad (1.3)$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que a matriz A tenha posto igual a *m*, isto é, posto(A)=*m*, então existe ao menos uma submatriz quadrada, não singular, de ordem *m*.

Deste modo podemos particionar A da seguinte maneira, A=(B | N) onde B é uma matriz quadrada *m x m*, a qual denominaremos de BASE. Do mesmo modo, particionaremos as componentes do vetor *x*, ou seja, $x = \begin{pmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{pmatrix}$, onde x_B corresponderá as componentes de *x* relativas às colunas de B, denominadas variáveis básicas (VB), e x_N às componentes de *x* relativas às colunas de N, denominadas variáveis não básicas (VNB). Analogamente, decompomos o vetor *c*, ou seja , $c=(c_B \mid c_N)$. Assim podemos rescrever o PPL como

(PPL) : Minimizar $Z = c_B x_B + c_N x_N$ (1.4)

sujeito a:

$$Bx_B + Nx_N = b \quad (1.5)$$

$$x_B \geq 0,\ x_N \geq 0 \quad (1.6)$$

Colocando x_B em função de x_N em (1.5), obtemos:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \quad (1.7)$$

Façamos x_N=0 e $\bar{x}_B = B^{-1}b$

Definição: $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma solução básica de (1.2). As componentes de $\bar{x}_B$ são denominadas variáveis básicas e as de $\bar{x}_N$ não básicas. Quando $\bar{x}_B$ possuir pelo menos uma componente nula, $\bar{x}$ é dita ser uma <u>solução básica degenerada</u>.

Se $\bar{x}_B \geq 0$ então $\bar{x} \geq 0$, a qual denominamos de <u>solução básica viável</u>.

3.1.1 TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Nesta seção entenderemos o grau de importância das soluções básicas viáveis na resolução de problemas de programação linear.

Consideremos a seguir um PPL em sua forma-padrão

$$
\begin{aligned}
(\text{PPL}) : \text{Minimizar } \; & Z = cx \\
\text{sujeito a:} \; & \\
& Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Uma solução viável para as restrições que alcança o mínimo valor para a função objetivo sujeita à essas restrições é dita ser uma solução viável ótima.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Dado um PPL na sua forma-padrão onde A é uma matriz *m x n* de posto *m* :

i) se existe uma solução viável, existe uma solução básica viável.
ii) se existe uma solução viável ótima, existe uma solução básica viável ótima.

Dem: (ver Luenberger 1984).

O teorema acima resume o fato que se um PPL possui solução ótima, então pelo menos uma delas será uma solução básica viável. Assim a tarefa de resolver um PPL se reduz a enumerar as soluções básicas viáveis. Desde que para um problema tendo n variáveis e m restrições existem, no máximo $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ soluções básicas (correspondentes ao número de maneiras de selecionar m de n colunas), tem-se somente um número finito de possibilidades, logo uma busca sem repetição garante alcançar a melhor solução. Infelizmente, na prática, esse número é quase sempre enorme; o que implica na necessidade de dispormos de um método eficiente de busca. Para tanto dispomos do Método Simplex, desenvolvido por George Dantzig em 1947 e publicado mais tarde em 1949.

3.1.2 OUTROS TEOREMAS

Um Conjunto $C \subseteq R^n$ é convexo se para quaisquer x^1 e $x^2 \in C$, $x=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2$ para $0\leq\lambda\leq 1$ implica em $x \in C$.

O conjunto $X=\{x \in \Re^n \mid Ax=b \ ,x\geq 0\}$ é, por definição, um conjunto poliédrico quando $X \neq \emptyset$.

Teorema 1. O conjunto dos pontos viáveis X é convexo.

Dem:

Dados x^1 e $x^2 \in X$ devemos provar que $x=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2 \in X$, onde $0\leq\lambda\leq 1$.

Temos que $\begin{cases} x^1 \geq 0, Ax^1 = b \\ x^2 \geq 0, Ax^2 = b \end{cases}$

Então

$$Ax = A(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) = \lambda Ax^1 + (1-\lambda)Ax^2 = \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

e

$$\lambda x^1 \geq 0, (1-\lambda)x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \geq 0$$

Logo $x \in X$, o que demonstra que X é convexo.

Definição: Seja X o conjunto dos pontos viáveis de um PPL. O ponto $v \in X$ é um vértice de X se não existir $\lambda \in [0,1]$ tal que $v=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2$,onde x^1 e $x^2 \in X$ possa ser expresso como combinação linear convexa legítima de pontos de X, ou seja, $v\neq x^1$ e $v\neq x^2$.

A expressão $x=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2$, onde $0\leq\lambda\leq 1$, representa os pontos do segmento de reta unindo x^1 a x^2. Dizemos que x é uma combinação convexa de x^1 e x^2.

Teorema 2. Seja $X=\{x \in \Re^n \mid Ax=b \ ,x\geq 0\}$ o conjunto dos pontos viáveis de um PPL. Então x é um vértice de X se e somente se, x é uma solução básica viável.

Dem:

Seja A=(B | N), posto(A)=m e N≠0, caso contrário X teria um único ponto que seria o próprio vértice.

Seja ainda x uma solução básica viável de X e suponhamos que x possa ser obtido como combinação linear convexa de outros dois pontos distintos, digamos x^1 e $x^2 \in X$.

Por hipótese, temos $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, onde x_N =0, solução básica viável de X.

Temos então que:

$$Ax = Bx_B + Nx_N = b, \ \ x_B \geq 0 \ \text{ e } \ x_N \geq 0$$

Suponhamos que exista $x=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2 \in X$, onde $0\leq\lambda\leq 1$ com $x\neq x^1$ e $x\neq x^2$.

Temos ainda que $\begin{cases} x^1 \geq 0, Ax^1 = Bx_B^1 + Nx_N^1 = b \\ x^2 \geq 0, Ax^2 = Bx_B^2 + Nx_N^2 = b \end{cases}$

Como N≠0, temos $x_N^1 \neq 0$ e $x_N^2 \neq 0$, caso contrário teríamos $x_N^1 = 0$ implicaria $x_B^1 = x_B$, $x_N^2 = 0$ implicaria $x_B^2 = x_B$, contrariando a hipótese de que $x \neq x^1$ e $x \neq x^2$.

Temos que $x=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2$ implica em

$$x = \lambda x_B^1 + (1-\lambda)x_B^2 \qquad \text{(I)}$$

e

$$0 = \lambda x_N^1 + (1-\lambda)x_N^2 \qquad \text{(II)}$$

Como $x_N^1 \geq 0$ e $x_N^1 \neq 0$, $x_N^2 \geq 0$ e $x_N^2 \neq 0$, λ≥0 e (1-λ)≥0, λ e (1-λ) não podem ser avaliados, então (II) nunca poderá ser verificado. Concluímos então, por absurdo, que uma solução básica viável corresponde a um vértice. ■

Teorema 3. Seja $X=\{x \in \Re^n \mid Ax=b \ ,x \geq 0\}$ o conjunto dos pontos viáveis de um PPL e seja $Z(x)=cx$ a função objetivo que tem um mínimo em X. Então este mínimo será atingido ao menos em um vértice.

Dem:

Basta combinarmos o Teorema 2, que garante a equivalência entre vértice e solução básica viável, e o Teorema Fundamental da Programação Linear. □

3.2 O ALGORITMO SIMPLEX

Pelo processo de resolução gráfica de um PPL pudemos constatar que ao invés de procurar a solução entre um número infinito de pontos pertencentes à região viável, podemos nos restringirmos apenas aos vértices, ou seja, devemos examinar apenas soluções básicas viáveis.

O Método Simplex pode então ser enunciado de forma resumida como um mecanismo cuja finalidade é gerar soluções básicas viáveis cada vez melhores. O método parte de uma solução básica viável inicial, passando a procurar uma nova solução básica melhor e termina quando não se pode encontrar outra melhor . Isto compreende os seguintes passos:

i) Achar uma solução básica viável inicial
ii) Verificar se a solução atual é ótima
 Se for pare;
 senão vá para o passo iii)
iii) Determinar a variável não básica (VNB) que deve entrar na base
iv) Determinar a variável básica (VB) que deve deixar a base
v) Encontrar nova solução básica viável e voltar ao passo ii)

3.2.1 SOLUÇÃO ALGÉBRICA

Resolveremos, algebricamente, o seguinte PPL:

Maximizar $Z=3x_1+5x_2$

s. a:

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad &\le 4 \\
x_2 &\le 6 \\
3x_1+2x_2 &\le 18 \\
x_1\ge 0&;x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

Representação gráfica:

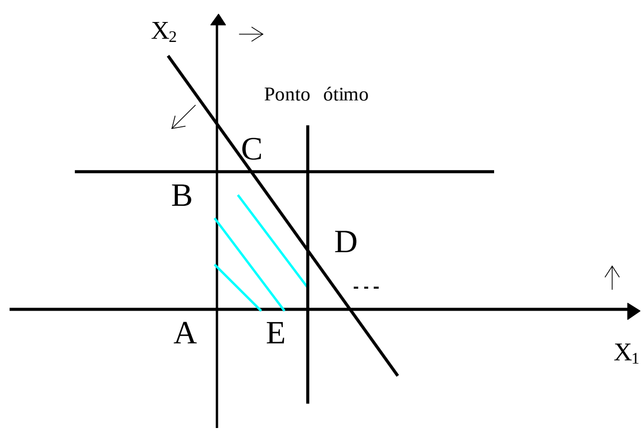


Figura 3.1

Com a introdução das variáveis de folga, x_3 , x_4 e x_5 obtém-se o seguinte sistema :

Maximizar $Z=3x_1+5x_2$

s. a:

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad + x_3 \quad\quad\quad &= 4 \\
x_2 \quad + x_4 \quad\quad &= 6 \qquad\qquad (S1) \\
3x_1+2x_2 \quad\quad + x_5 &= 18 \\
x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Note-se que o sistema acima apresenta uma solução básica viável óbvia, a saber: variáveis não-básicas , $x_1=x_2=0$; e variáveis básicas, $x_3=4$, $x_4=6$ e $x_5=18$. Assim o passo inicial do método simplex já foi executado. Podemos observar que esta solução básica viável corresponde ao vértice A (0,0) da figura 3.1.

O passo ii) do simplex consiste em verificar se a presente solução é ótima. O valor da função objetivo ($Z=3x_1+5x_2$) é zero, pois $x_1=x_2=0$. Qualquer dessas variáveis não básicas que entrar na base, tomará algum valor positivo, aumentando o valor da função objetivo. Conclui-se, então, que ainda não foi alcançada a solução ótima.

No próximo passo, definimos qual variável não básica (x_1 ou x_2) deve entrar na base, para tanto o simplex determina que seja escolhida aquela de maior coeficiente na função objetivo, estando a mesma expressa em termos das variáveis não básicas. Então x_2 deve ser escolhida.

Precisamos a seguir determinar qual variável básica deve deixar a base. Então, inicialmente, deve-se colocar todas as variáveis básicas em função das variáveis não básicas. Assim, de (S1) tem-se:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_4 &= 6 - x_2 \\ x_5 &= 18 - 3x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

Devemos retirar da base aquela variável que se anular mais rapidamente com o incremento da variável x_2 ; neste caso a escolhida é x_4 pois se anula quando x_2 chega a 6, enquanto x_5 ainda permanece positiva. A variável x_3 não é considerada, pois não se altera com o incremento da variável x_2.

A nova base será então formada pelas variáveis x_3,x_2 e x_5. É necessário agora efetuar-se uma mudança de base, portanto o sistema (S1) será transformado. Para isso basta multiplicar a segunda equação por -2 e somá-la à terceira equação. Obtendo-se então:

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & + x_3 & & & = 4 & \\ & x_2 & & + x_4 & & = 6 & \qquad (S2) \\ 3x_1 & & & - 2x_4 & + x_5 & = 6 & \end{array}$$

A segunda solução básica viável encontrada é a seguinte: variáveis não-básicas , x_1=x_4=0; e variáveis básicas, x_3=4, x_2=6 e x_5=6. Podemos observar que esta solução básica viável corresponde ao vértice B (0,6) da figura 3.1. Expressando a função objetivo somente em termos das variáveis não-básicas obtemos $Z=30+3x_1-5x_4$. De onde concluímos que tal solução ainda pode ser melhorada, visto que, se x_1 entrar na base aumentará o valor de Z.

Colocando todas as variáveis básicas em função das variáveis não básicas, a partir de (S2) tem-se:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_2 &= 6 - x_4 \\ x_5 &= 6 - 3x_1 + 2x_4 \end{aligned}$$

Devemos retirar da base aquela variável que se anular mais rapidamente com o incremento da variável x_1 ; neste caso a escolhida é x_5 pois se anula quando x_1 chega a 2, enquanto x_3 ainda permanece positiva. A variável x_2 não é considerada, pois não se altera com o incremento da variável x_1.

A nova base será então formada pelas variáveis x_3,x_2 e x_1. É necessário agora efetuar-se uma mudança de base, portanto o sistema (S2) será transformado. Para isso basta efetuarmos as seguintes operações: i) dividir a terceira equação por 3; ii) multiplicar a terceira equação por -1 e somá-la à primeira equação. Obtendo então:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & & + x_3 & + (2/3)x_4 & - (1/3)\,x_5 & = 2 \\
 & x_2 & & + \quad x_4 & & = 6 \\
x_1 & & & - (2/3)x_4 & + (1/3)\,x_5 & = 2
\end{array}
\qquad (S3)
$$

A terceira solução básica viável encontrada é a seguinte: variáveis não-básicas , x_4=x_5=0; e variáveis básicas, x_3=2, x_2=6 e x_1=2. Podemos observar que esta solução básica viável corresponde ao vértice C (2,6) da figura 3.1. Expressando a função objetivo em termos das variáveis não-básicas obtemos Z=36-3x_4-x_5 . De onde concluímos que tal solução não pode mais ser melhorada, pois se x_4 ou x_5 entrarem na base diminuirão o valor de Z. Logo, podemos afirmar esta última solução encontrada é a solução ótima, ou seja, x^*=(2,6,2,0,0) e Z^*=36. Para diferenciar a solução ótima das demais, convenciona-se representá-la por Z^* , x_1^*,x_2^*,etc.

3.3 MÉTODO SIMPLEX USANDO QUADROS

Seja um PPL formulado da seguinte forma:

Minimizar $\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2,..,m$$

$$x_j \geq 0 \;\; , \; j = 12,..,n$$

Adicionando as variáveis de folga $x_{n+1},\ldots,x_{n+r},\ldots,x_{n+m}$, isto é, reduzindo o problema à forma-padrão, temos:

Minimizar $\quad Z = c_1x_1 + \ldots + c_sx_s + \ldots + c_nx_n$

sujeito a:

$$
\begin{array}{llll}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = b_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n + & x_{n+r} & & = b_r \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n + & & x_{n+m} & = b_m
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0 \;\; , \; j = 1,2,..,n+m$$

Podemos representar as *m* primeiras equações e a função objetivo através do seguinte <u>quadro</u> ou <u>tabela</u>:

	x_1	$\dots x_s$	$\dots x_n$	x_{n+1}	$\dots x_{n+r}$	$\dots x_{n+m}$	b
x_{n+1}	a_{11}	$\dots a_{1s}$	$\dots a_{1n}$	1	… 0	… 0	b_1
.	.	.	.	.	.	.	.
x_{n+r}	a_{r1}	$\dots a_{rs}$	$\dots a_{rn}$	0	… 1	… 0	b_r
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
x_{n+m}	a_{m1}	$\dots a_{ms}$	$\dots a_{mn}$	0	… 0	… 1	b_m
	c_1	$\dots c_s$	$\dots c_n$	0	… 0	… 0	Z

O quadro acima oferece a solução básica inicial: $x_j=0$, $j=1,2,...,n$, variáveis não-básicas e $x_{n+i}=b_i$, $i=1,2,...,m$ variáveis básicas.

Podemos então, enunciar os passos para a aplicação do método simplex usando quadros, a saber:

i) Começar com o quadro na forma canônica

ii) Verificar se a solução atual é ótima

Se $c_j \geq 0$, para todo $j=1,2,...,n$, então a solução é ótima; pare.

Se houver $c_j < 0$, escolha o menor dentre eles, ou seja:

$$c_s = \min_j \{c_j \mid c_j < 0\}$$

e vá para o passo iii) para fazer a variável x_s entrar na base

iii) Para definir a variável que deve sair da base surgem duas possibilidades:

a) $a_{is} \leq 0$ para todo i, $i=1,2,...,m$. Então x_s pode ser aumentado indefinidamente, sem fazer nenhuma variável básica decrescer a zero e o valor de Z tende a infinito. Pare, a solução é ilimitada.

b) $a_{is} > 0$ para algum i. Neste caso calcule o menor dos coeficientes b_i / a_{is} .

Seja r a variável básica tal que:

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{is}}, a_{is} > 0 \right\}$$

A variável a sair da base é a variável básica correpondente à r-ésima equação, enquanto que a_{rs} é denominado de elemento pivô. Vá para o passo iv).

iv) Pivoteamento; redução à forma canônica.

Isto se dá através das seguintes operações

a) dividir a linha pivô r pelo elemento pivô a_{rs}.

b) Anular todos os demais elementos da coluna pivô s.

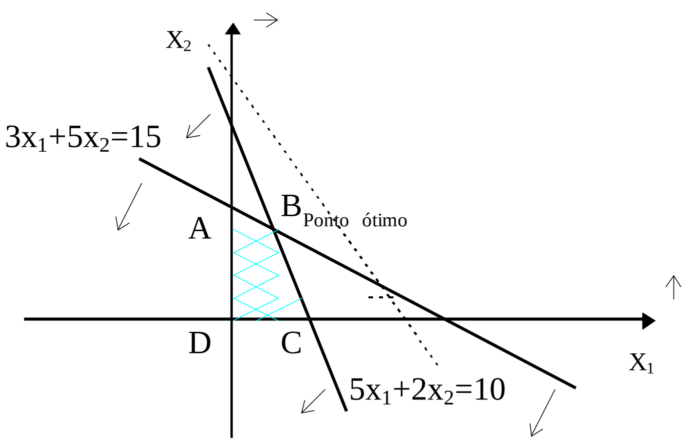
Volte ao passo ii).

<u>EXEMPLO 3.1</u>

Seja o problema de programação linear dado pelo modelo:

$$\text{Maximizar } Z=5x_1+3x_2$$
s. a:
$$3x_1+5x_2 \leq 15$$
$$5x_1+2x_2 \leq 10$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Representação gráfica:



Colocando o modelo na forma-padrão, temos:

$$\text{Minimizar } Z'=-5x_1-3x_2$$
s. a:
$$3x_1+5x_2+x_3 = 15$$
$$5x_1+2x_2+x_4 = 10$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$

Montando o quadro inicial obtém-se:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	3	5	1	0	15
x_4	5	2	0	1	10
	-5	-3	0	0	Z'

Q.1

A solução básica inicial dada pelo quadro acima nos dá: $x_1=x_2=0$ (VNB) e $x_3=15, x_4=10$ (VB); a qual corresponde ao vértice D(0,0). Observando a terceira linha de Q.1 temos que a <u>função objetivo apresenta coeficientes negativos</u>, logo esta solução não é ótima. A variável não básica que deve entrar na base é aquela que apresenta o <u>menor coeficiente negativo</u> na terceira linha, ou seja, a variável x_1. Para definir a variável que deixa a base, temos:

$$x_1 = min\left\{\frac{15}{3}, \frac{10}{5}\right\} = 2$$

Deste modo, o pivô será 5 e a variável x_1 assumindo o valor 2 anulará x_4, que se torna não-básica. Para encontrar esta nova solução básica viável deve-se reduzir o PPL à forma-padrão, através das operações de pivoteamento aplicadas a Q.1, a saber:

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{cases}$$

Obtemos, então o novo quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
x_3	0	$19/5$	1	$-3/5$	9	Q.2
x_1	1	$2/5$	0	$1/5$	2	
	0	-1	0	1	$Z' + 10$	

Cuja solução básica viável é $x_2 = x_4 = 0$ (VNB) e $x_3 = 9$, $x_1 = 2$ (VB), correspondendo ao vértice C(2,0). Observando a terceira linha de Q.2 percebemos que esta solução não é ótima, pois a variável x_2 apresenta coeficiente negativo na linha da função objetivo, devendo então entrar na base. Para definir a variável que deixa a base, temos:

$$x_2 = min\left\{\frac{9}{19/5}, \frac{2}{2/5}\right\} = 45/19$$

Deste modo, o pivô será $19/5$ e a variável x_2 assumindo o valor $45/19$ anulará x_3, que se torna não-básica. Obtemos o próximo quadro fazendo as operações de pivoteamento aplicadas a Q.2, a saber:

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow 5/19\, L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{5} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

Obtendo, então o quadro Q.3:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
x_2	0	1	$5/19$	$-3/19$	$45/19$	Q.3
x_1	1	0	$-2/19$	$5/19$	$20/19$	
	0	0	$5/19$	$16/19$	$Z' + 235/19$	

Este apresenta a solução ótima $x_3=x_4=0$ (VNB) e $x_1=20/19$, $x_2=45/19$ (VB), corresponde ao vértice B(20/19, 45/19), pois não há coeficientes negativos na linha da função objetivo. Logo $x^* = (20/19, 45/19, 0, 0)$ e $Z^* = - Z' = 235/19$.

CASOS ESPECIAIS

i) Problemas de maximização
Transforma-se o problema num problema de minimização multiplicando a sua função objetivo por -1 (vide Exemplo.3.1).

ii) Empate na entrada
Quando houver empate na escolha da variável que entra na base, deve-se tomar a decisão arbitrariamente. A escolha apenas implicará num percurso por um número maior ou menor de soluções básicas viáveis até se chegar a solução ótima.

iii) Empate na saída
Quando houver empate na escolha da variável que deve deixar a base, deve-se tomar a decisão também arbitrariamente. Neste caso teremos como conseqüência a ocorrência de solução básica degenerada. Vejamos o exemplo a seguir:

Maximizar $Z=5x_1+2x_2$

s. a:

$$\begin{aligned} x_1 \quad &\leq 3 \\ x_2 &\leq 4 \\ 4x_1+3x_2 &\leq 12 \\ x_1\geq 0;&x_2\geq 0 \end{aligned}$$

Adicionando as variáveis de folga , montamos seguinte quadro inicial:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	1	0	1	0	0	3
x_4	0	1	0	1	0	4
x_5	4	3	0	0	1	12
	-5	-2	0	0	0	Z'

Q.1

A solução básica inicial não é ótima, então fazendo-se x_1 entrar na base, pois possui o coeficiente mais negativo na função objetivo e escolhendo-se arbitrariamente x_3 com sendo a variável que deve deixar a base, uma vez que temos um empate entre x_3 e x_5, mostrado a seguir:

$$x_1 = min\left\{\frac{3}{1}, \frac{12}{4}\right\} = 3$$

Efetuando o pivoteamento chegamos ao quadro Q.2:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	1	0	0	3
x_4	0	1	0	1	0	4
x_5	0	3	- 4	0	1	0
	0	-2	5	0	0	$Z'+15$

Q.2

Podemos observar em Q.2 que a variável básica x_5 se tornou nula, em decorrência de ter havido empate na saída na iteração anterior, o que configura uma solução básica degenerada. Observando a terceira linha de Q.2 percebemos que esta solução não é ótima, portanto a variável x_2 por apresentar coeficiente negativo na linha da função objetivo, deve entrar na base. Para definir a variável que deixa a base, temos:

$$x_2 = min\left\{\frac{4}{1}, \frac{0}{3}\right\} = 0$$

Deste modo, a variável x_5 se torna não-básica. Obtemos o próximo quadro fazendo as operações de pivoteamento aplicadas a Q.2:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	1	0	0	3
x_4	0	0	$4/3$	1	$-1/3$	4
x_2	0	1	$-4/3$	0	$1/3$	0
	0	0	$7/3$	0	$2/3$	$Z'+15$

Q.3

A solução obtida em Q.3, x^* =(3,0,0,4,0) com Z^*=15 é ótima e é dita ser uma solução ótima degenerada, pois uma das variáveis básicas, no caso x_2 tem valor nulo.

iv) Soluções múltiplas

Eventualmente, um modelo de programação linear pode apresentar mais de uma solução ótima. Quando isto ocorrer, o método simplex é capaz de acusá-lo. Vejamos o exemplo a seguir:

Maximizar $Z=x_1+2x_2$

s. a:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leq 3 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\ x_1 \geq 0; x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Colocando as variáveis de folga, os seguintes quadros podem ser obtidos:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b

x_3	1	0	1	0	0	3	Q.1
x_4	0	1	0	1	0	4	
x_5	1	2	0	0	1	9	
	-1	-2	0	0	0	Z'	

A solução básica inicial não é ótima, então fazendo-se x_2 entrar na ase, pois possui o coeficiente mais negativo na função objetivo e escolhendo-se x_4 com a variável que deve deixar a base, uma vez que temos:

$$x_2 = min\left\{\frac{4}{1}, \frac{9}{2}\right\} = 4$$

Efetuando o pivoteamento chegamos ao quadro Q.2:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	1	0	1	0	0	3	Q.2
x_2	0	1	0	1	0	4	
x_5	1	0	0	- 2	1	1	
	-1	0	0	2	0	$Z'+8$	

Observando a terceira linha de Q.2 percebemos que esta solução não é ótima, portanto a variável x_1 que apresenta coeficiente negativo na linha da função objetivo, deve entrar na base. Para definir a variável que deixa a base, temos:

$$x_1 = min\left\{\frac{3}{1}, \frac{1}{1}\right\} = 1$$

Deste modo, a variável x_5 se tornará não-básica. Obtemos o próximo quadro fazendo as operações de pivoteamento aplicadas a Q.2:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	0	1	2	-1	2	Q.3
x_2	0	1	0	1	0	4	
x_1	1	0	0	- 2	1	1	
	0	0	0	0	1	$Z'+9$	

Note-se que a solução obtida acima, ou seja, x^* =(1,4,2,0,0) com Z^*=9 é ótima, porém o coeficiente da variável x_4 na função objetivo é nulo. Assim sendo, a variável x_4 pode entrar na base, tomando qualquer valor que a função objetivo permanecerá com seu valor ótimo Z^*=9 inalterado. Então fazendo-se x_4 entrar na base, obtém-se:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b

x_4	0	0	½	1	-½	1	Q.4
x_2	0	1	-½	0	½	3	
x_1	1	0	1	0	0	3	
	0	0	0	0	1	$Z'+9$	

Constata-se então que tanto o vértice x_1=1 e x_2=4 como o vértice x_1=3 e x_2=3 são soluções ótimas para o problema. Como qualquer ponto pertencente ao segmento de reta que une estes dois é também solução ótima, mas não solução básica, dizemos que o tal problema possui múltiplas ou infinitas soluções.

3.4 OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO INICIAL

O passo inicial do simplex consiste em encontrar uma solução básica viável inicial, como já vimos, no item anterior, para tanto basta tomarmos como variáveis básicas às variáveis de folga. No entanto, isto só será possível quando o PPL for constituído de desigualdades do tipo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \text{onde} \quad b_i \ge 0$$

Se tivermos, no entanto, restrições do tipo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \text{ onde } \quad b_i \ge 0$$

não é possível encontrarmos uma solução básica viável inicial de modo trivial. Usaremos o exemplo a seguir para ilustrar esta dificuldade.

Maximizar $Z=5x_1+2x_2$

s. a:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\le 3 \\ x_2 &\le 4 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 9 \\ x_1\ge 0;&x_2\ge 0 \end{aligned}$$

Colocando as variáveis de folga, obtém-se:

Minimizar $Z'=-5x_1-2x_2$

s. a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 \quad\quad &= 3 \\ x_2 + x_4 \quad &= 4 \\ x_1+2x_2 - x_5 &= 9 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

O sistema acima apresenta a seguinte solução básica, a saber: variáveis não-básicas $x_1=x_2=0$; e variáveis básicas, $x_3=3$, $x_4=4$ e $x_5=-9$. Como x_5 tem valor negativo, esta solução não é viável. Então para se colocar o problema na forma canônica, pode-se acrescentar uma variável artificial x_6 na terceira restrição. Essa variável x_6 tomará o lugar de x_5 na base inicial, obtendo-se então:

$$\begin{aligned}
x_1 \quad + x_3 \qquad\qquad &= 3 \\
x_2 \quad + x_4 \qquad &= 4 \\
x_1+2x_2 \qquad - x_5 + x_6 &= 9 \\
x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 \geq 0 &
\end{aligned}$$

que dá a seguinte solução básica viável inicial: variáveis não-básicas $x_1=x_2=x_5=0$; e variáveis básicas, $x_3=3$, $x_4=4$ e $x_6=9$.

3.5 MÉTODO SIMPLEX DAS DUAS FASES

Suponhamos inicialmente que tenham sido efetuadas transformações no PPL, de modo que tenhamos $b_i \geq 0$, para todas as restrições. Para cada igualdade i introduziremos uma variável artificial positiva x_i^a. Também em cada desigualdade do tipo $\geq$ colocaremos, além da variável de folga, uma variável artificial positiva acompanhada de sinal positivo, isto é:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i^a = b_i \\ x_i^a \geq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} + x_i^a = b_i \\ x_{n+i} \geq 0, x_i^a \geq 0 \end{cases}$$

A fase I do método consiste em abandonar a função objetivo original e colocar no sistema uma função objetivo artificial, formada por $Z^a(x) = \sum_i x_i^a \rightarrow MIN$. Como $x_i^a \geq 0 \;\; \forall i$, o menor valor possível será obtido para $x_i^a = 0 \;\; \forall i$.

Terminando a Fase I, abandonamos $Z^a(x)$, passando a trabalhar com a função objetivo dada no problema original.

<u>EXEMPLO 3.2</u>

Aplicar o método simplex ao seguinte PPL

Maximizar $Z=6x_1 - x_2$

s. a:

$$4x_1 + x_2 \leq 21$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 13$$
$$x_1 - x_2 = -1$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Colocando as variáveis de folga e as variáveis artificiais, obtém-se:

Minimizar $Z' = -6x_1 + x_2$

s. a:

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 21$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_1^a = 13$$
$$-x_1 + x_2 + x_2^a = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^a, x_2^a \geq 0$$

Temos então o seguinte quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	b
x_3	4	1	1	0	0	0	21
x_1^a	2	3	0	-1	1	0	13
x_2^a	-1	1	0	0	0	1	1
	-6	1	0	0	0	0	Z'

O sistema acima apresenta a seguinte solução básica, a saber: variáveis não-básicas, $x_1=x_2=x_4=0$; e variáveis básicas, $x_3=21$, $x_1^a=13$ e $x_2^a=1$. Substituindo os valores encontrados para x_1 e x_2 nas restrições do problema original, verificamos que algumas restrições são violadas. Iremos introduzir a função objetivo artificial, que representa a soma das inviabilidades, a qual deve ser minimizada. Logo podemos montar o seguinte quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	b
x_3	4	1	1	0	0	0	21
x_1^a	2	3	0	-1	1	0	13
x_2^a	-1	1	0	0	0	1	1
	0	0	0	0	1	1	Z^a
	-6	1	0	0	0	0	Z'

Q.1

Como x_1^a e x_2^a estão na base, devemos anular os seus coeficientes na função objetivo artificial. Para tanto, efetuamos a seguinte operação com linhas, $L_4 \leftarrow L_4 - (L_2 + L_3)$ que resulta no quadro a seguir:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	b
x_3	4	1	1	0	0	0	21
x_1^a	2	3	0	-1	1	0	13
x_2^a	-1	1	0	0	0	1	1
	-1	-4	0	1	0	0	Z^a-14
	-6	1	0	0	0	0	Z'

Q.2

Note-se que na linha da função objetivo artificial temos coeficientes negativos, sendo o de x_2 o menor deles, logo deve entrar na base, e uma vez que o $x_2^a = min\left\{\frac{21}{1}, \frac{13}{3}, \frac{1}{1}\right\} = 1$, então x_2^a deixará a base. Obtendo-se assim, o quadro aseguir:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	b
x_3	5	0	1	0	0	-1	20
x_1^a	5	0	0	-1	1	-3	10
x_2	-1	1	0	0	0	1	1
	-5	0	0	1	0	4	Z^a-10
	-5	0	0	0	0	-1	Z'-1

Q.3

Ainda há coeficiente negativo na linha da função objetivo artificial, logo x_1 deve entrar na base. Temos ainda que $x_1^a = min\left\{\frac{20}{5}, \frac{10}{5}\right\} = 2$, logo x_1^a deve deixar a base. Pivoteando obtém-se:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	b
x_3	0	0	1	1	-1	2	10
x_1	1	0	0	-1/5	1/5	-3/5	2
x_2	0	1	0	-1/5	1/5	2/5	3
	0	0	0	0	1	1	Z^a
	0	0	0	-1	1	-4	Z'+9

Q.4

Observando a linha da função objetivo artificial em Q.4 percebemos que esta solução é ótima, portanto chegamos ao final da Fase I. Deve-se eliminar a linha referente a função objetivo artificial e as colunas referentes às variáveis artificiais, pois estas são não básicas, obtendo-se:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	0	0	1	1	10
x_1	1	0	0	- 1/5	2
x_2	0	1	0	- 1/5	3
	0	0	0	- 1	Z'+9

Q.5

Observando a linha da função objetivo em Q.5, temos que a atual solução não é ótima, logo a variável x_4 deve entrar na base e como existe um único $a_{ij} > 0$ na coluna de x_4, isto é, o elemento 1 na primeira linha, assim sendo x_3 deve deixar a base. Pivoteando chegamos a Q.6.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_4	0	0	1	1	10
x_1	1	0	$1/5$	0	4
x_2	0	1	$1/5$	0	5
	0	0	1	0	$Z'+19$

Q.6

Note-se que a solução obtida acima, ou seja, x^* =(4,5,0,10) com Z^*=19 é ótima, pois não há mais como melhorar o valor da função objetivo.

CASOS ESPECIAIS

A Fase I termina ao atingirmos o menor valor possível para $Z^a(x)$. Suponhamos que este mínimo seja atingido para a solução x^*. Vejamos o que pode acontecer com $Z^a(x^*)$, bem como as variáveis artificiais.

a) $Z^a(x^*) = \sum_i x_i^{a*} > 0$

Isto significa que o problema original não possui solução.

b) $Z^a(x^*) = \sum_i x_i^{a*} = 0$

Logo, $x_i^{a*}=0$, para todo i. Encontramos então uma solução básica viável para o problema.

b.1) Todas as variáveis artificiais são VNB.

Como as variáveis artificiais não têm significado, podemos neste caso simplesmente eliminá-las, bem como a função artificial. Passamos à Fase II do método, trabalhando com a funcão objetivo dada por $Z(x)$.

b.2) Existe variável artificial que é VB.

Primeiramente eliminamos todas as variáveis artificiais que são VNB, inclusive os respectivos coeficientes em $Z(x)$ e $Z^a(x)$.Permanece, portanto, somente as variáveis artificiais que sejam VB.

A seguir, efetua-se uma mudança de base tornado alguma variável não básica que tenha coeficiente não nulo na linha relativa a variável artificial, na nova VB e elimina-se a variável artificial da base.

EXEMPLO 3.3

Aplicar o método simplex ao seguinte PPL

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar } Z = x_1 + x_2\\
&\text{s. a:}\\
&\quad x_1 + 4x_2 \geq 4\\
&\quad 3x_1 + x_2 = 1\\
&\quad x_1 \geq 0; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Colocando as variáveis de folga e as variáveis artificiais, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar } Z' = -x_1 - x_2\\
&\text{s. a:}\\
&\quad x_1 + 4x_2 - x_3 + x_1^a = 4\\
&\quad 3x_1 + x_2 + x_2^a = 1\\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_1^a, x_2^a \geq 0
\end{aligned}
$$

Temos então o seguinte quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	b
x_1^a	1	4	-1	1	0	4
x_2^a	3	1	0	0	1	1
	0	0	0	1	1	Z^a
	-1	-1	0	0	0	Z'

Q.1

Como x_1^a e x_2^a estão na base, devemos anular os seus coeficientes na função objetivo artificial. Para tanto, efetuamos a seguinte operação com linhas, $L_3 \leftarrow L_3 - (L_1 + L_2)$ que resulta no quadro a seguir:

VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	b
x_1^a	1	4	-1	1	0	4
x_2^a	3	1	0	0	1	1
	-4	-5	0	0	0	Z^a-5
	-1	-1	0	0	0	Z'

Q.2

Note-se que na linha da função objetivo artificial temos coeficientes negativos, sendo o de x_2 o menor deles, logo deve entrar na base, e uma vez que o $min\left\{\frac{4}{4}, \frac{1}{1}\right\}$, mostra um empate no critério de saída escolheremos arbitrariamente x_2^a para deixar a base. Obtendo-se assim, o quadro a seguir:

VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	b
x_1^a	-11	0	-1	1	-4	0
x_2	3	1	0	0	1	1
	11	0	1	0	5	Z^a
	2	0	0	0	1	$Z'+1$

Q.3

Atingimos o fim da Fase I. Como $Z^*(x)$=0, podemos então eliminar a variável artificial que é VNB, bem como a linha correspondente a função objetivo artificial..

VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	b
x_1^a	-11	0	-1	1	0
x_2	3	1	0	0	1
	2	0	0	0	$Z'+1$

Q.4

Como x_1^a é VB, não podemos eliminá-la imediatamente, então efetuando-se uma mudança de base, tem-se:

VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	b
x_3	11	0	1	-1	0
x_2	3	1	0	0	1
	2	0	0	0	$Z'+1$

Q.5

Agora temos a variável artificial x_1^a sendo VNB, logo podemos eliminá-la, ou seja:

VB	x_1	x_2	x_3	b
x_3	11	0	1	0
x_2	3	1	0	1
	2	0	0	$Z'+1$

Q.6

O quadro acima apresenta a seguinte solução ótima $Z^*(x)=1$ e $x^*=(0,1,0)$, finalizando então a Fase II do método.

3.6 EXERCÍCIOS

1. Considere o sistema abaixo, formado por duas equações e cinco variáveis.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 5 \\
x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 &= 8 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

a) Reduza o sistema a forma canônica com (x_1,x_2) como variáveis básicas.

Qual a solução básica? Ela é viável? Porque?

2. Aplique o Método Simplex aos seguintes PPLs.

a) MIN $Q(x)= - x_1 + 2x_2 - x_3$

suj. a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 6$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

b) MAX $Q(x)= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

suj. a:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

c) MIN $Q(x)= -3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4$

suj. a:

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \leq 8$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 10$$
$$x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 \leq 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

d) MAX $Q(x)= 4x_1 + 2x_2 + 2x_3$

suj. a:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4$$
$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 30$$
$$x_1, x_3 \geq 0;\ x_2 \text{ livre}$$

3. Resolver os seguintes PPLs usando o Método das duas fases

a) MIN $Q(x)= -3x_1 - 2x_2 + 5x_3$

suj. a:

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7$$
$$-6x_1 + 20x_2 - 35x_3 = 17$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

b) MIN $Q(x)= -x_1 - 3x_2 -6x_3 - 3x_4$
suj. a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad\quad &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 8 \\ 8x_1 + 4x_2 \quad + x_4 &= 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

c) MIN $Q(x)= -x_1 + 2x_2 - 3x_3$
suj. a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Mostre que o PPL abaixo é inviável (não possui solução).

MIN $Q(x)= x_1 + x_2$
suj. a:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - x_3 \quad &= 2 \\ -x_1 + x_2 \quad - x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Capítulo 4 DUALIDADE

4.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

A cada modelo de programação linear corresponde um outro modelo, denominado dual. Suponha que o problema primal linear seja dado na forma canônica:

(P) Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2,..,m$$

$$x_j \geq 0 \ , \ j = 12,..,n$$

Então o dual do problema linear é definido por:

(D) Minimizar $D = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1,2,..,n$$

$$y_i \geq 0 \ , \ i = 12,..,m$$

Usando notação matricial:

(P) Max $Z = cx$

s.a:

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

(D) Min $D = yb$

s.a:

$$yA \geq c$$
$$y \geq 0$$

Note que existe exatamente uma variável dual para cada restrição do primal e exatamente uma restrição do dual para cada variável primal.

EXEMPLO 4.1

Considere o seguinte PPL e seu dual.

$$
(P)\quad \begin{aligned} &\text{Maximizar } Z=10x_1+7x_2+15x_3\\ &\text{s. a:}\\ &\qquad 5x_1+4x_2+x_3 \le 80\\ &\qquad 2x_1+3x_2+5x_3 \le 30\\ &\qquad x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{aligned}
$$

$$
(D)\quad \begin{aligned} &\text{Minimizar } D=80y_1+30y_2\\ &\text{s. a:}\\ &\qquad 5y_1+2y_2 \ge 10\\ &\qquad 4y_1+3y_2 \ge 7\\ &\qquad y_1+5y_2 \ge 15\\ &\qquad y_1,y_2 \ge 0 \end{aligned}
$$

Para construirmos o problema dual de qualquer problema primal usamos as relações existentes entre os mesmos, as quais podem resumidas no seguinte quadro:

Quadro de relações entre os problemas primal e dual

	Problema de Minimização		**Problema de Maximização**	
VARIÁVEIS	≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\le$	RESTRIÇÕES
	≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\ge$	
	livre	$\Leftrightarrow$	$=$	
RESTRIÇÕES	$\ge$	$\Leftrightarrow$	≥ 0	VARIÁVEIS
	$\le$	$\Leftrightarrow$	≤ 0	
	$=$	$\Leftrightarrow$	livre	

Ë possível ainda verificar que o dual do problema dual é o problema primal; deixamos isto a cargo do leitor.

4.2 RELAÇÕES PRIMAIS-DUAIS

Veremos a seguir, que há importantes relações entre os problemas primal e dual.

A Relação entre os valores das funções objetivos

Seja x_0 e y_0 soluções viáveis quaisquer para os problemas primal e dual respectivamente. Então $Ax_0 \leq b$, $x_0 \geq 0$, $y_0A \geq c$, $y_0 \geq 0$. Multiplicando $Ax_0 \leq b$ à esquerda por $y_0 \geq 0$ e $y_0A \geq c$ à direita por $x_0 \geq 0$, obtemos

$$y_0b \;\geq\; y_0Ax_0 \;\geq\; cx_0$$

Este resultado é conhecido como propriedade da dualidade fraca. Ele nos mostra que o valor da função objetivo para qualquer solução viável para o problema de minimização é sempre maior ou igual ao valor da função objetivo para qualquer solução viável para o problema de maximização.

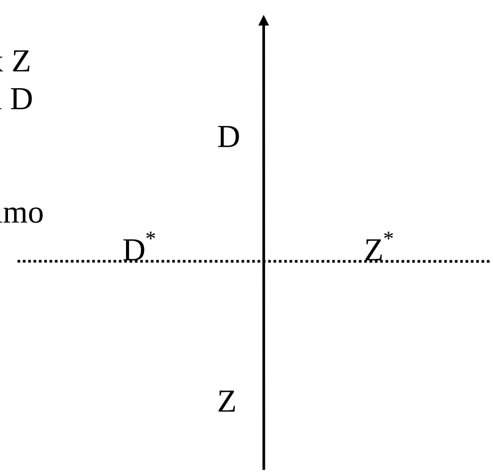
Corolário 4.1

Se x_0 e y_0 soluções viáveis para os problemas primal e dual, tais que $cx_0 = y_0b$, então x_0 e y_0 são soluções ótimas para seus respectivos problemas.

Interpretação gráfica do par primal-dual

$Z^* = \text{Max } Z$
$D^* = \text{Min } D$

No ponto ótimo
$Z^* = D^*$



Corolário 4.2

Se um problema tem valor ótimo ilimitado, então o outro problema não possui solução viável.

Este corolário indica que solução ilimitada em um problema implica inviabilidade no outro problema. Esta propriedade não é necessariamente simétrica, pois pode acontecer de um problema não possuir solução viável e o outro (seu dual) também não possuir solução viável.

EXEMPLO 4.2

Considere os seguintes problemas primal e dual

(P) Maximizar $Z = x_1 + x_2$	(D) Minimizar $D = -y_1 - y_2$
s. a:	s. a:
$x_1 - x_2 \le -1$	$y_1 - y_2 \ge 1$
$-x_1 + x_2 \le -1$	$-y_1 + y_2 \ge 1$
$x_1, x_2 \ge 0$	$y_1, y_2 \ge 0$

Fica a cargo do leitor comprovar graficamente que ambos os problemas (P) e (D) não possuem solução viável.

Lema 4.1

Se um problema possui uma solução ótima, então ambos os problemas possuem soluções ótimas e os dois valores de função objetivo são iguais.

Condensando então os corolários e lema vistos anteriormente, obtemos o seguinte teorema:

TEOREMA FUNDAMENTAL DA DUALIDADE

Com relação aos problemas de programação linear dual e primal, exatamente uma das seguintes cláusulas é verdadeira.

1. Ambos possuem soluções ótimas x^* e y^* com $cx^* = y^*b$.
2. Um problema tem valor de função objetivo ilimitado, neste caso o outro problema deve ser inviável.
3. Ambos os problemas são inviáveis.

Teorema da Complementaridade das Folgas

Sejam x^* e y^* soluções viáveis quaisquer para os problemas primal e dual na forma canônica. Então elas são respectivamente ótimas se e somente se

$$(y^* a_j - c_j) x_j^* = 0 \qquad j = 1, .., n$$

e

$$y_i^* (b_i - a^i x^*) = 0 \qquad i = 1, .., m$$

Este é um teorema muito importante relacionando os problemas primal e dual. Ele obviamente indica que pelo menos um dos termos em cada expressão deve ser nulo. Em particular

$$
\begin{aligned}
&x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad y^* a_j = c_j \\
&y^* a_j > c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \\
&y_i^* > 0 \quad \Rightarrow \quad a^i x^* = b_i \\
&a^i x^* < b_i \quad \Rightarrow y_i^* = 0
\end{aligned}
$$

Assim na otimalidade, se uma variável em um problema é positiva, então a correspondente restrição no outro problema é justa, ou seja possui variável de folga nula. Se uma retrição em um problema não é justa, então a variável correspondente no outro problema deve ser zero.

Suponha que tenhamos $x_{n+1} = b_i - a^i x \geq 0,\ \ i = 1,..,m$ como as m variáveis de folga do problema primal e $y_{m+j} = ya_j - c_j \geq 0,\ \ j = 1,..,n$ como as n variáveis de folga do problema dual. Então nós podemos rescrever as condições de complementaridade das folgas da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&x_j^* y_{m+j}^* = 0 \qquad j = 1,..,n \\
&y_i^* x_{n+i}^* = 0 \qquad i = 1,..,m
\end{aligned}
$$

Isto relaciona as variáveis em problema às variáveis de folga do outro problema. Em particular, x_j e y_{m+j} para j=1,...,n e do mesmo modo, x_{n+i} e y_i para i=1,...,m são conhecidas como pares de variáveis complementares.

4.3 MÉTODO DUAL-SIMPLEX

Considere o seguinte problema de programação linear

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar} \quad Z = cx \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad Ax = b \\
&\qquad x \geq 0
\end{aligned}
$$

Em certos problemas é difícil encontrar uma solução básica inicial que seja viável (ou seja, todos os $b_i \geq 0$) para um problema linear sem adicionar variáveis artificiais. Nesses mesmos problemas é freqüentemente possível encontrar uma base inicial, a qual não é necessariamente viável, mas é dual viável (ou seja, todo c_j-$z_j \geq 0$ para um problema de minimização). Em tais casos é comum desenvolver uma variante do Método Simplex que produzirá uma série de quadros simplex que manterão a viablidade dual e complementaridade das folgas, buscando a viabilidade primal.

	x_1	...	x_k	...	x_n	x_{n+1}	... x_{n+r}	... x_{n+m}	b
x_{n+1}	a_{11}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	1	... 0	... 0	b_1
.	.	.	.	.		.	.		.
x_{n+r}	a_{r1}	...	a_{rk}	...	a_{rn}	0	... 1	... 0	b_r
.	.	.	.	.		.	.		.
.	.	.	.	.		.	.		.
x_{n+m}	a_{m1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}	0	... 0	... 1	b_m
	c_1 - z_1		...c_k - z_k		...c_n - z_n	0	... 0	... 0	Z

Considere o quadro acima representando uma solução básica. Suponha que o quadro seja dual viável (ou seja, todo c_j-$z_j \geq 0$ para um problema de minimização). Se o quadro é também primal viável (ou seja, todos os $b_i \geq 0$), então nós alcançamos a solução ótima. Caso contrário considere algum b_r<0. Selecionando a linha r como a linha pivô e alguma coluna k tal que $a_{rk} < 0$ como a coluna pivô, nós podemos encontrar um novo vetor do lado direito das restrições b_r'. Através de uma série de tais pivoteamentos tornaremos todos os $b_i \geq 0$ enquanto se mantém a otimalidade primal. A questão que perman ece é como selecionar a coluna pivô tal que se mantenha a viabilidade dual após o pivoteamento. A coluna pivô k é determinada por :

$$\frac{c_k - z_k}{a_{rk}} = \underset{j}{maximo}\left\{ \frac{c_j - z_j}{a_{rj}} \quad \text{para} \quad a_{rj} < 0 \right\}$$

Descreveremos agora um procedimento que parte de uma solução básica dual viável para uma solução básica dual viável melhorada. Para completar a análise, devemos considerar o caso quando $a_{rj} \geq 0$ para todo j e então nenhuma coluna pode ser eleita como coluna pivô. Neste caso diremos que o problema primal não possui solução viável.

Algoritmo Dual Simplex

Passo i) Encontre uma base B do primal tal que c_j-z_j = c_j-$c_B B^{-1} a_j \geq 0$ para todo j. No caso da base trivial (composta inicialmente apenas pelas variáveis de folga) temos c_B=0, logo z_j=0 para todo j e basta que $c_j \geq 0$ para todo j.

Passo ii) Teste de viabilidade primal

Se todos os todos os $b_i \geq 0$, i=1,...,m, pare; a solução corrente é ótima. Caso contrário vá para o passo iii).

Passo iii) Seleção da variável que deixa a base

Escolha a linha pivô r tal que

$$b_r = \underset{i}{minimo}\left\{ b_i \quad \text{para} \quad b_i < 0 \right\}$$

Passo iv) Seleção da variável que entra na base

Se $a_{rk} \geq 0$ para todo j, pare; o dual é ilimitado e o primal é inviável. Caso contrário selecione a coluna pivô por

$$\frac{c_k - z_k}{a_{rk}} = \underset{j}{maximo}\left\{ \frac{c_j - z_j}{a_{rj}} \quad \text{para } a_{rj} < 0 \right\}$$

Passo v) Efetue pivoteamento em a_{rk} e volte ao passo ii).

Exemplo 4.3

Considere o seguinte problema

Minimizar $Z= 2x_1+3x_2 + 4x_3$

s. a:

$$x_1+2x_2+ x_3 \geq 3$$
$$2x_1 - x_2 +3x_3 \geq 4$$
$$x_1,x_2,x_3 \geq 0$$

Uma solução básica inicial que é dual viável pode ser obtida por utilizar as variáveis de folga x_4 e x_5 . Isto resulta do fato que o vetor de custos é não negativo. Aplicando o método dual simplex, obtemos a seguinte seqüência de quadros.

Q.1

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	-2	1	-3	0	1	-4
	2	3	4	0	0	Z

Q.2

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	0	$-5/2$	$1/2$	1	$-1/2$	-1
x_1	1	$-1/2$	$3/2$	0	$-1/2$	2
	0	4	1	0	1	Z+4

Q.3

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	$-1/5$	$-2/5$	$1/5$	$2/5$
x_1	1	0	$7/5$	$-1/5$	$-2/5$	$11/5$
	0	0	$9/5$	$8/5$	$1/5$	Z+ $28/5$

Desde que todos os b_i são não negativos e c_j-$z_j \geq 0$ para todo j, as soluções ótimas primal e dual estão disponíveis. Em particular,

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (11/5\,,\,2/5\,,0,0,0)$$
$$(y_1^*, y_2^*) = (8/5\,,\,1/5\,)$$

Note que y_1^* e y_2^* são respectivamente as entradas positivas c_j-z_j sob as variáveis de folga x_4 e x_5.

4.4 INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DO DUAL

Para uma análise econômica mais precisa se faz necessário particularizar o problema, assim sendo veremos a seguir uma e não a interpretação econômica do problema dual.

Seja o seguinte PPL

Maximizar $\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,2,..,m$$
$$x_j \ge 0 \;\; , \; j = 12,..,n$$

E o seu dual definido por:

Minimizar $\quad D = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad j = 1,2,..,n$$
$$y_i \ge 0 \;\; , \; i = 12,..,m$$

Suponhamos que x^* e y^* sejam soluções ótimas dos problemas primal e dual, respectivamente. Então pelo teorema básico da dualidade, temos que:

$$Z(x^*) = D(y^*) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Se a quantidade do recurso i for alterada de b_i para $\hat{b}_i = b_i + \Delta b_i$, a variação de Z^* é dada por:

$$\Delta Z = (\Delta b_i) y_i^*$$

Então y_i^* é taxa de variação do valor ótimo $Z(x^*)$ da função objetivo para a variação de uma unidade na disponibilidade do recurso *i*. Este é o sobre-preço, "shadow price", valor incremental, ou seja, o preço extra que que se está disposto a pagar por uma unidade adicional do recurso *i*.

De modo a precisar um pouco mais a interpretação, imaginemos que o problema primal seja de alocação de recursos, onde temos *m* recursos disponíveis nas quantidades $b_1,......,b_m$ com os quais pretendemos fabricar *n* produtos, nas quantidades $x_1,.....,x_n$ a serem determinadas. Cada unidade de um produto *j* consome a_{ij} unidades do recurso *i* trazendo um retorno de c_j unidades monetárias. Queremos determinar a quantidade a ser fabricada de cada produto, de modo a maximizar o retorno. Então a luz dessa interpretação, diríamos que y_i^* é o preço que estamos dispostos a pagar para aumentar de uma unidade a quantidade disponível da matéria-prima *i*, ou melhor ainda, é o que para nós vale o incremento de uma unidade da matéria-prima *i*.

4.5 EXERCÍCIOS

1. Considere o seguinte problema.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & Z = 2x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ \text{s. a:} & \\ & x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2 \\ & -2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

a) Formule o problema dual.
b) Resolva o dual graficamente.
c) Utilize a informação sobre o dual e o teorema da dualidade para resolver o problema primal.

2. Formule o dual do seguinte problema.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & Z = -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{suj. a:} & \\ & -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ & 2x_1 + x_3 \leq 4 \\ & 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1 \leq 0;\ x_2, x_3 \geq 0;\ x_4 \text{ livre} \end{array}$$

3. Considere o seguinte problema.

$$\text{Maximizar } Z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3$$
s. a:
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

a) Formule o problema dual.
b) Resolva o dual pelo método simplex. Em cada iteração identifique as variáveis duais e mostre quais restrições do dual são violadas.
c) Em cada iteração identifique as variáveis duais básicas e não básicas.
d) Mostre que em cada iteração do método simplex, a função objetivo dual é "piorada"
e) Verifique que ao final, soluções viáveis para ambos os problemas estão disponíveis, com valores iguais de função objetivo e respeitando a complementaridade das folgas.

4. Resolva o seguinte problema pelo método dual simplex.

$$\text{Maximizar } Z = -4x_1 - 6x_2 - 18x_3$$
suj. a:
$$2x_1 + 3x_3 \geq 3$$
$$3x_2 + 2x_3 \geq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

5. Resolva o seguinte problema pelo método dual simplex.

$$\text{Minimizar } Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4$$
suj. a:
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

6. Uma fábrica produz dois tipos de sorvetes: picolé e copinho. Cada tonelada de picolé e copinho necessita para sua fabricação, respectivamente, 1 e 3 homens/hora. A capacidade mensal de mão-de-obra da fábrica é de 160 homens/hora. Além das limitações da fábrica quanto à mão-de-obra disponível, existe um problema de falta de espaço para armazenamento. Sabemos que só existem 170 m^3 disponíveis, que a tonelada de picolé e copinho ocupa, respectivamente, 2m^3 , 1m^3 , que o estoque inicial é nulo e que a produção é estocada durante um mês para só depois ser vendida. Cada tonelada de picolé e copinho traz um lucro de, respectivamente, 40 e 30 unidades monetárias.

a) Modelar o problema acima e determinar o plano de produção que maximiza o lucro, para tanto utilize o software LINDO. Denomine o problema dado de primal.
b) Formular o dual do problema acima, resolvê-lo usando o software LINDO e então comparar a solução obtida y^* com os duais prices dados pelo LINDO na resolução do problema no item a).
c) Interpretar economicamente o problema dual, bem como as variáveis duais y_i^* . Aumentar de uma unidade a quantidade de recursos disponíveis e resolver o novo problema usando o LINDO. Comprovar, assim, a interpretação econômica das variáveis duais.
d) Supor que uma obra na fábrica aumentou o espaço de armazenamento de $170m^3$ para $600m^3$. Determine a nova solução ótima do problema.
e) Supor o espaço de armazenamento igual a $170m^3$ e imaginar que uma restrição de mercado limite superiormente a produção de picolé em 50 toneladas. Determinar a nova solução ótima.

7. Três produtos são fabricados sendo submetidos a três tipos de operação. O tempo consumido em minutos em cada operação, por unidade de produto, a quantidade total de tempo, em minutos, disponível por dia para cada operação, bem como o lucro líquido em reais, por unidade do produto, são dados pela tabela a seguir.

OPERAÇÃO	MINUTOS POR UNIDADE			TEMPO DISPONÍVEL (MINUTOS POR DIA)
	PROD. 1	PROD. 2	PROD. 3	
1	1	2	1	430
2	3	0	2	460
3	1	4	0	420
LUCRO (R$ / UNID.)	3	2	5	

a) Modelar o problema acima e determinar a produção diária de cada produto que maximiza o lucro, sabendo que toda a produção será vendida, para tanto utilize o software LINDO. Denomine o problema dado de primal.
b) Supor que desejamos aumentar a capacidade de produção da fábrica e que o custo de expansão de cada um dos três setores de fabricação, responsáveis pelas três operações, é o mesmo. Qual dos setores é prioritário com respeito ao plano de expansão? Por quê? Analisar, para cada setor, a importância ou não da expansão.
c) Supor que os produtos tenham de ser submetidos a uma quarta operação. A capacidade máxima disponível para a quarta operação é de 600 minutos/dia. Sabemos que se fosse fabricado somente um tipo de produto, poderíamos produzir no quarto setor no máximo 100 unidades do produto 1 ou 200

unidades do produto 2 ou 600 unidades do produto 3. Determinar a nova solução ótima.

d) Formular o dual e resolvê-lo pelo LINDO.
e) Interpretar economicamente o problema dual, bem como as variáveis duais y_i^*. Aumentar de uma unidade a quantidade de recursos disponíveis e resolver o novo problema usando o LINDO. Comprovar, assim, a interpretação econômica das variáveis duais.

Capítulo 5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

5.1 INTRODUÇÃO

Em muitas aplicações práticas alguns dados do problema não são conhecidos exatamente e então são estimados tão bem quanto possível. Assim é importante ser capaz de encontrar a nova solução ótima do problema com outras estimativas de alguns dados que se tornem disponíveis, isto com o custo de apenas alguns passos a mais. Além disso, o modelo original pode ser modificado pela inclusão de uma nova variável ou restrição, pelo aumento na disponibilidade de um determinado recurso, pela exclusão de variáveis ou de restrições. Desta forma, ao se encontrar a solução ótima de um problema de programação linear, devemos analisar de que forma esta se comporta em relação às variações que podem ocorrer no modelo. Esses e outros tópicos relacionados constituem o que denominamos de análise de sensibilidade.

Considere o seguinte problema de programação linear

Minimizar $Z = cx$
s.a:
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Suponha que o método simplex tenha produzido uma base ótima **B**. A seguir veremos como fazer uso das condições de otimalidade (relações primais-duais) no sentido de encontrar a nova solução ótima, se algum dado do problema é modificado, sem ter que resolver o problema desde o início. Em particular, as seguintes variações no problema serão consideradas:

Modificação no vetor de custos **c**
Modificação no vetor do lado direito **b**
Modificação na matriz de restrições **A**
Adição de novas variáveis
Adição de uma nova restrição

5.2 MODIFICAÇÃO NO VETOR DE CUSTOS **c**

Dada uma solução básica viável ótima, suponha que o coeficiente de custo de uma (ou mais) variáveis é alterado de c_k para c_k' . O efeito desta mudança sobre o quadro ótimo ocorrerá na linha da função objetivo; ou seja, a viabilidade dual pode ser perdida. Vejamos os seguintes casos:

Caso 1: x_k é não básica.

Neste caso c_B não é afetada e então $z_j = c_B B^{-1} a_j$ não é alterada para qualquer j. Deste modo c_k-z_k é trocado por c_k'-z_k. Note que c_k-$z_k \geq 0$ uma vez que a solução básica atual é a solução ótima do problema original. Se c_k' - z_k=(c_k - z_k) + (c_k' - c_k) é negativo, então x_k deve ser introduzida dentro da base e o método simplex continua a partir de então. Caso contrário a solução já obtida continua sendo ótima com relação ao novo problema.

Caso 2: x_k é básica, digamos, $x_k \equiv x_{B_t}$.

Deste modo o vetor c_{B_t} é trocado por c'_{B_t}. Tomando o novo valor de z_j como sendo z'_j. Então $c_j - z'_j$ é calculado da seguinte forma:

$$c_j - z'_j = c_j - c'_B B^{-1} a_j = (c_j - c_B B^{-1} a_j) + (0,0,\ldots,c_{B_t} - c'_{B_t},0,\ldots,0) y_j$$
$$= (c_j - z_j) + (c_{B_t} - c'_{B_t},0,\ldots,0) y_{tj} \qquad \text{para todo } j$$

Em particular para $j=k$, c_k-$z_k=0$, e y_{tk}=1, e então c_k - z_k' = c_k - c_k'. Como esperado, c_k' - z_k' ainda é igual a zero. Além disso a linha da função objetivo pode ser atualizada por subtrair a variação do custo de x_{B_t} vezes a linha t corrente do quadro final à linha da função objetivo original. Então c_k - z_k' é atualizado para c_k'- z_k'=0. De fato $c'_B B^{-1} b = c'_B B^{-1} b - (c_{B_t} - c'_{B_t})$ será obtido no processo.

Exemplo 5.1

Considere o seguinte problema.

Minimizar Z= - $2x_1$+ x_2 - x_3
s. a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$
$$- x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

O quadro ótimo é dado a seguir

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10
	0	3	1	2	0	*Z+12*

Suponha que c_2=1 é trocado por - 3. Desde que x_2 é não básica, então c_2' - z_2=(c_2-z_2)+(c_2'-c_2)= 3 - 4 = -1, e todos os outros c_j-z_j não são afetados. Com isso, x_2 entra na base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	1	1	1	0	6
← x_5	0	3	1	1	1	10
	0	-1	1	2	0	*Z+12*

Os quadros subsequentes não são mostrados. A seguir suponha que c_1=-2 seja trocado por zero. Desde que x_1 é básica, então a nova linha de custo (função objetivo), exceto c_1-z_1, é obtida por multiplicar a linha de x_1 pela variação em c_1 [ou seja, 0 - (-2)= 2] e adicionar a linha de custo original. O novo c_1-z_1 permanece zero. Note que o novo c_3-z_3 é agora negativo e então x_3 deve entrar na base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
← x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10
	0	1	-1	0	0	*Z*

Os quadros subsequentes não são mostrados.

5.3 MODIFICAÇÃO NO VETOR DO LADO DIREITO

Se o vetor do lado direito **b** é trocado por **b**', então $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ será trocado por $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}'$. Ao se modificar o vetor **b** por **b**', a otimalidade primal é mantida e basta verificar se as variáveis básicas permanecem não negativas e calcular seus valores ótimos. Se $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}' \geq \mathbf{0}$, então a mesma base permanece ótima e os valores das variáveis básicas são $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}'$ e a função objetivo vale $\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}'$. Caso contrário o método dual simplex é usado para encontrar a nova solução por restaurar a viabilidade primal.

Exemplo 5.2

Suponha que o lado direito do Exemplo 5.1 seja trocado por $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Note que $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e então $B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Então $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}' \geq \mathbf{0}$, logo a nova solução ótima é x_1=3, x_5=7, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

5.4 MODIFICAÇÃO NA MATRIZ DE RESTRIÇÕES

Discutiremos a seguir o efeito de mudanças em algumas entradas da matriz de restrições **A** . Dois casos, a saber, mudanças envolvendo colunas não básicas e mudanças envolvendo colunas básicas serão estudados.

Caso 1. Mudanças em Vetores de Atividade para Colunas Não Básicas

Suponha que a coluna não básica a_j seja modificada para a_j'. Então a nova coluna atualizada é $\mathbf{B^{-1}a_j'}$ e $c_j - z_j' = c_j - c_B B^{-1} a_j'$. Se $c_j - z_j' \geq 0$, então a antiga solução é ótima; caso contrário o método simplex é continuado , após a coluna j do quadro ser atualizada pela introdução da variável não básica x_j na base.

Caso 2. Mudanças em Vetores de Atividade para Colunas Básicas

Suponha que a coluna básica a_j seja modificada para a_j'. Agora é possível que o corrente conjunto de vetores básicos não forme mais uma base após a mudança. Ainda que isto não ocorra, uma mudança no vetor de atividades para uma única coluna básica irá mudar $\mathbf{B^{-1}}$ e portanto as entradas em cada coluna.

Esta mudança é tratada em dois passos. Primeiro, assuma que a uma nova atividade x_j' está sendo adicionada ao problema com coluna a_j' e coeficiente na função objetivo c_j. Segundo, elimine a velha variável x_j do problema. O primeiro passo é executar o cálculo de $y_j' = B^{-1}a_j'$ e $c_j - z_j' = c_j - c_B B^{-1} a_j'$, onde **B** é a matriz base corrente. Isto dá a coluna atualizada para x_j' . Se o elemento y_{ij}' na linha básica para x_j e a coluna de x_j' não é zero, então x_j' pode ser trocado por x_j na base e a coluna da velha variável pode ser eliminada do problema. Este pivoteamento pode destruir tanto a viabilidade primal como a viabilidade dual, mas nós podemos restaurar viabilidade primal e dual usando variáveis artificiais se necessário e reotimizando.

Exemplo 5.3

Suponha que no exemplo 5.1, a_2 seja alterada de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Então

$$y_2' = B^{-1}a_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - c_B B^{-1} a_2' = 1 - (-2,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = 5$$

Assim sendo, o corrente quadro ótimo permanece ótimo com a coluna x_2 trocada por $(2,7,5)^t$.

Suponhamos agora que a coluna a_1 seja alterada de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Então

$$y_1' = B^{-1}a_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - c_B B^{-1} a_1' = -2 - (-2,0)\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 4$$

Neste caso, o coeficiente na linha de x_1 em y_1' não é zero (caso contrário, é melhor resolver novamente o problema, uma vez que não teríamos mais uma base) e então adicionamos a coluna $(3, 9, 4)^t$ de x_1', ficando o pivô na coluna x_1' e a na linha x_1, e prosseguindo-se com a variável x_1 eliminada.

VB	x_1' ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	b
← x_1	3	1	1	1	0	6
x_5	9	3	1	1	1	10
	4	3	1	2	0	$Z+12$

Os quadros subsequentes não são mostrados.

5.5 INTRODUÇÃO DE NOVAS VARIÁVEIS

Suponha que uma variável x_{n+1} com coeficiente de custo c_{n+1} e coluna a_{n+1} seja considerada. Sem resolver o problema, nós podemos facilmente determinar se x_{n+1} vai compor a solução ótima. Inicialmente calculamos $c_{n+1} - z_{n+1}$. Se $c_{n+1} - z_{n+1} \geq 0$ (para um problema de minimização) então $x_{n+1}^* = 0$ e a solução corrente é ótima. Por outro lado, se $c_{n+1} - z_{n+1} \leq 0$, então x_{n+1} deve ser introduzida na base e o método simplex continua a procura pela nova solução ótima.

Exemplo 5.4

Considere o Exemplo 5.1. Nós desejamos encontrar a nova solução ótima se uma nova variável $x_6 \geq 0$ com $c_6 = 1$ e $a_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ é introduzida. Primeiro calcularemos $c_6 - z_6$.

$$c_6 - z_6 = c_6 - c_B a_6$$

$$= 1 - (-2,0)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$y_6 = B^{-1}a_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deste modo x_6 deve ser introduzida na base no lugar de x_5, obtendo-se o seguinte quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6 ↓	b
x_1	1	1	1	1	0	-1	6
← x_5	0	3	1	1	1	1	10
	0	3	1	2	0	1	$Z+12$

Os quadros subsequentes não são mostrados

5.6 ADICIONANDO UMA NOVA RESTRIÇÃO

Suponha que uma nova restrição é adicionada ao problema, então deve ocorrer uma redução do espaço viável. Para a função objetivo pode haver uma piora, ou na melhor hipótese, ficar inalterada. O procedimento, portanto, consiste em verificar se a atual solução ótima satisfaz a nova restrição. Se satisfizer, então ela será ótima para o conjunto ampliado de restrições. Caso contrário, há que se acrescentar mais uma linha ao quadro ótimo do simplex, com sua correspondente variável básica, e prosseguir com o simplex, ou o dual simplex.

Exemplo 5.5

Considere o Exemplo 5.1 com adição da restrição $-x_1 + 2x_3 \geq 2$. Obviamente o ponto ótimo $(x_1,x_2,x_3) = (6,0,0)$ não satisfaz estas restrições. A restrição $-x_1 + 2x_3 \geq 2$ é rescrita como $x_1 - 2x_3 + x_6 = -2$, onde x_6 é uma variável de folga não negativa. Esta linha é adicionada ao quadro ótimo simplex do exemplo 5.1 para obter-se o seguinte quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	1	1	1	0	0	6
x_5	0	3	1	1	1	0	10
x_6	1	0	-2	0	0	1	-2
	0	3	1	2	0	1	$Z+12$

Multiplicando a linha 1 por -1 e adicionando-a para a linha 3 restauramos x_1 como variável básica. O método dual simplex pode então ser aplicado para quadro resultante abaixo.

VB	x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	1	1	1	0	0	6
x_5	0	3	1	1	1	0	10
← x_6	0	-1	-3	-1	0	1	-8
	0	3	1	2	0	1	$Z+12$

Os quadros subsequentes não são mostrados

5.7 EXERCÍCIOS

1. Considere o problema de programação linear

Maximizar $Z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$

s. a:

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20$$
$$12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

bem como o seu quadro simplex ótimo

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	-1	1	3	1	0	20
x_5	16	0	-2	-4	1	10
	0	0	-2	-5	0	$Z-100$

Resolva então as seguintes questões:

a) Qual a nova solução ótima se alterarmos o vetor b de $(20,90)^t$ para $(10,100)^t$?
b) Qual a nova solução ótima se alterarmos o custo (c_3) da variável x_3 de 13 para 8 ?
c) Qual a nova solução ótima os coeficientes de x_2 nas restrições de $(1,4)^t$ para $(2,5)^t$?
d) Qual a nova solução ótima se introduzirmos no PPL original uma nova variável x_6 com coeficientes $a_6=(3,5)^t$ e $c_6=10$?
e) Qual a nova solução ótima se introduzirmos uma nova restrição no PPL original: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$?

2. Um fazendeiro dispõe de 100 hectares de terra e um total de mão-de-obra anual disponível correspondente a 10.000 homens/hora. O fazendeiro tem a opção de plantar trigo, soja ou milho. O gasto anual de mão-de-obra por hectare para cada uma destas culturas é respectivamente h_1,h_2 e h_3 homens/hora. O lucro por hectare para trigo, soja e milho é respectivamente 10, 8 e 1 unidades monetárias. O filho do fazendeiro, Pedro, que estuda P. O., montou então o seguinte modelo, que visa maximizar o lucro da fazenda:

Maximizar $Z= 10x_1+ 8x_2 + x_3$

s. a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$$
$$h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 \leq 10000$$
$$x_1,x_2,x_3 \geq 0$$

onde x_1 , x_2 e x_3 representam a quantidade de terra por hectare a ser plantada respectivamente com trigo, soja e milho. Em seguida, Pedro pediu ao pai para especificar os valores de h_1,h_2 e h_3 , e com o auxílio do Simplex determinou a solução ótima através do seguinte quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	1	1	1	0	100
x_5	0	-2	-2	-5	1	9500
	0	2	9	10	0	$Z+100$

Visando prevenir-se contra possível mudanças na fazenda, estude os seguintes casos (os casos não podem ocorrer simultaneamente):

a) Uma indústria se instala nas proximidades da fazenda e absorve toda a mão-de-obra da região. O fazendeiro fica restrito ao caseiro, que não pode dispor de mais de 300 horas por ano. O plano de produção da fazenda seria alterado ? Como ? Caracterize a nova solução
b) Por uma questão de segurança (mudança de preços do trigo), o fazendeiro decide plantar no máximo 50 hectares de trigo. Qual seria a nova solução ótima ?
c) Determine o valor das variáveis do dual para as três soluções obtidas (a dada no enunciado e mais as obtidas em a) e b). Interprete o significado dessas variáveis para as três soluções caracterizando as alterações sofridas.

BIBLIOGRAFIA

Bazaraa, M. S.; Jarvis, J. J.; Sherali, H. D.; Linear Programming and Networks Flows, Jonh Wiley & Sons, Inc., Second Edition, 1990.

Bregalda, P. F.;Oliveira, A. A. F.; Bornstein, C. T.; Introdução à Programação Linear, Rio de Janeiro, Campus,1988.

Eiselt, H. A. et alli.;Continuos Optimization Models, New York : De Gruyter (1987).

Garfinkel, R.S.; Nemhauser, G. L.; Integer Programming, Wiley & Sons, New York (1972).

Lasdon, Leon S.; Optimization Theory for Large Systems, The MacMillan Company, New York (1970).

Leopoldino, Eduardo; Introdução à Pesquisa Operacional, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

Luenberger, D. G.; Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

Puccini, Abelardo L.; Pizzolato, Nélio D.; Programação Linear, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1987.