Definitividad de las matrices

Propiedad de una matriz que ayuda a describir si es invertible o no. Lo que importa es si su definitividad es positiva o negativa.

1) Forma cuadratica

Expresión lineal

$ax + by + cz$

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$

$v \quad x$

Expresión Cuadrática

$ax^2 + 2bxy + cy^2 \rightarrow v^T A v$ Forma cuadrática

Para descomponer esta ecuación cuadrática lo haremos en 1 matriz y 2 vectores

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$[x \; y] \begin{bmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{bmatrix} =$

$x(ax + by) + y(bx + cy) =$

$ax^2 + bxy + bxy + cy^2$

$ax^2 + 2bxy + cy^2$

$v^T A v$

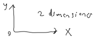
$v^T A v$

Lo que nos importa de la definitividad es que si la forma cuadratica, nos va aproducir un escalar positivo o uno negativo.

$$w^T A w = \underset{\text{escalar}}{\alpha} \quad + \quad -$$

La clave esta, enconsiderar que una matriz de eigenvectores de rango completo alcanza todo R^M por ende, todo vector en R^M puede ser expresado como una combinacion de los eigenvectores.

si es de rango 2 va alcanzar todo el espacio de 2 dimensiones



$A v = \lambda v$ — $\lambda \rightarrow$ eigenvalores, $v \rightarrow$ eigenvectores

Forma cuadrática $\rightarrow$ $v^T A v = \lambda v^T v$

$v^T A v = \lambda \|v\|^2$ Magnitud al cuadrado

$\|v\|^2$ ∴ No puede ser negativo

el eigenvalor determina el signo positivo o negativo

Verificar la definitividad es positiva o negativa sería verificar si $+\lambda$ ó $-\lambda$

Par 1

$v_1^T A v_1 = \lambda_1 \|v_1\|^2$

combinación lineal eigenvectores

Par 2

$v_2^T A v_2 = \lambda_2 \|v_2\|^2$

Combinación lineal eigenvalores

$$\underbrace{(v_1 + v_2)^T}_{} A \underbrace{(v_1 + v_2)}_{} = \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{S} \|(v_1 + v_2)\|^2$$

$v_1 + v_2 = u$

$$u^T A u = S \|u\|^2$$

Si todos los eigenvalores (λ) son positivos: la forma cuadrática $v^T A v$ siempre será positiva para cualquier vector.

Si todos los eigenvalores (λ) son positivo o cero: La forma cuadrática $v^T A v$ será no negative y será igual a cero cuando $\lambda = 0$.

Si todos los eigenvalores (λ) son negativos o cero: La forma cuadrática resultante será cero o negativa

Si todos los eigenvalores (λ) son negativos: La forma cuadrática será negativa para todos los vectores.

Definitividad:

Propiedad de una matriz cuadrada que se define apartir de los signos de sus eigenvalores. Ayuda a demas a determinar si es invertible o no invertible.


DEFINITIVIDAD

Categoría	Forma Cuadrática	Eigenvalores	Invertible
Definido Positivo	Positivo	+	Sí
Semidefinido Positivo	No Negativo	+ y 0	No
Indefinido	Positivo y Negativo	+ y 0	Depende
Semidefinido Negativo	No Positivo	- y 0	No
Definido Negativo	Negativo	-	Sí

Requisitos para A^{-1}

- Matriz Cuadrada
- Matriz de rango Completo

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La eigendescomposicion identifica pares de eigenvalores y eigenvectores.