# Ejercicios de Inducción

**Pregunta 1**

Demostrar por inducción que si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, entonces

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

Si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$
$\to (1+x)^n > 1 + nx$

Se conoce como la desigualdad de Bernoulli:

1.- Caso base $n = 2$

$(1+x)^2 > 1 + 2x \to x^2 + 2x + 1 > 1 + 2x$

$x^2 > 0$

Dado que cualquier $(n)^2$ es positivo mayor que 0 la desigualdad es cierta

Paso 3. Paso inductivo para $n = k+1$

$(1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x$

$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k$

$(1+x)(1+x)^k > 1 + (k+1)x$

H. I. $k \to (1+x)^k > 1 + kx$

$x > 0$

El termino positivo $(x+1)$ multiplica ambos lados de la desigualdad

$(1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x)$

$1 + (k+1)x + kx^2$

$\to (x+1)^{k+1} > 1 + (k+1)x + kx^2$

$\to (1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x$ $\to$ $(1+x)^{k+1}$ es mayor que $1 + (k+1)x + kx^2$

Observamos $kx^2$

- $k \geq 2$ $k$ es positivo
- $x > 0$ por lo que $x^2$ es positivo

$kx^2 > 0$

Si $1 + (k+1)x + (kx^2)$
$\to 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x$

$(1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x + kx^2$ y $1 + (k+1)x + kx^2 > 1(k+1)x$

por lo que

$(1+k)^{k+1} > 1 + (k+1)x$

**Pregunta 4**

Determinar si la suma de 3 enteros positivos consecutivos es siempre divisible por 6

$P(n) \to n + (n+1) + (n+2) = 6k$ $n \in \mathbb{N}$ $n = 1$, $k \in \mathbb{N}$

$S(n) = 3n + 3 = 3(n+1)$

1 Caso base $n = 1$

$S(1) = 3(1+1) = 6$ $6 = 6k$
$k = 1$ $P(1)$ verdadero

2.- Hipótesis de inducción

Cierta para un entero $k$ positivo

$S(k) = 3(k+1) = 6k$

$\to S(k+1) = (k+1) + (k+2) + (k+3)$
$= 3k + 6 = 3k + 3 + 3$

$\to S(k+1) = 3k + 3 + 3$
$S(k) = 3k + 3$

$\to S(k+1) = S(k) + 3$ $S(k)$ es divisible por 6
$S(k) = 6m$

$\to S(k+1) = 6m + 3$

y $6m + 3$ no es divisible por 6 su % es 3 (modulo)