PROPIEDAD ASOCIATIVA DEL PRODUCTO.

(AB) C = A (BC)

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$

Se puede realizar el producto AB, el resultado será una matriz m x p que se podrá multiplicar por C y el producto (AB) C será una matriz m x q.

Análogamente, se puede realizar el producto BC que dará una matriz n x q y se puede realizar el producto A(BC) se dará una matriz m x q.

Entonces, la propiedad se puede expresar como

(AB) C = A (BC)

Ejemplo 18

$$A = \underset{\substack{2\times2\\ i\ j}}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}} \quad B = \underset{\substack{2\times3\\ i\ j}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot2 & 2\cdot0+3\cdot3 & 2\cdot(-1)+3\cdot(5) \\ 5\cdot1+2\cdot2 & 0\cdot5+2\cdot3 & 5\cdot(-1)+2\cdot5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 13 \\ 9 & 11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8\cdot2+9\cdot(-1)+13\cdot(0) & 8\cdot0+9\cdot(-2)+13\cdot3 \\ 9\cdot2+11\cdot(-1)+5\cdot0 & 9\cdot0+11\cdot(-2)+5\cdot(3) \end{pmatrix}$$

$$(AB)\cdot C = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A(B\cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3

Se consideran las matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar $(AB)C = A(BC)$

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0 & 0\cdot1+2\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot0 \\ 3\cdot1+4\cdot0 & 0\cdot3+1\cdot4 & 3\cdot1+0\cdot4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0+1\cdot(-1) & (-1)\cdot1+2\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot1+4\cdot0+3(-1) & (-1)\cdot3+4\cdot1+3\cdot0 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot1 & (-1)\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot(-1) & (-1)\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot0+2\cdot0 & (-1)\cdot1+2\cdot1 \\ 3\cdot0+4\cdot0 & 3\cdot(-1)+4\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO RESPECTO A LA SUMA A(B+C) = AB + AC

Ejemplo 19

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 19 \\ 17 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 13 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -6 & 6 \\ 8 & -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 19 \\ 17 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando como ejemplo las demostraciones anteriores.

$A(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ $\qquad B + C = D \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

$B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ $\qquad AD = E \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$

$C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ $\qquad \left.\begin{matrix} A\cdot B = F \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K}) \\ A\cdot C = G \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K}) \end{matrix}\right\} H = F + G \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$

$E \stackrel{?}{=} H$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ $\qquad B + C = D = (d_{jk})_{n\times p}$ $\quad d_{jk} = b_{jk} + c_{jk}$

$B = (b_{jk})_{n\times p}$ $\qquad AD = E = (e_{ik})_{m\times p}$

$C = (c_{jk})_{n\times p}$ $\qquad e_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot d_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk})$

$AB = F = (f_{ik})_{m\times p}$ $\qquad f_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

$AC = G = (g_{ik})_{m\times p}$ $\qquad g_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}$

$\Big\}$ $H = (h_{ik})_{m\times p}$

$h_{ik} = f_{ik} + g_{ik}$

$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + a_{ij}c_{jk}$

$= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}b_{jk} + a_{ij}c_{jk})$

$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$

ELEMENTO NEUTRO DEL PRODUCTO O ELEMENTO UNIDAD

$$AI_n = A \qquad I_nB = B$$

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

Se puede realizar el producto de AI_n y el resultado será una matriz m x n.

Análogamente, se puede realizar el producto I_nB y el resultado será una matriz n x p.

Además, se puede comprobar que si se verifica que

$$AI_n = A \quad y \quad I_nB = B$$

EJEMPLO 20

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$I_3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

EJERCICIO 5

Considera las matrices con coeficientes R

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que:

$AI_3 = A$ y $I_3B = B$

$$AI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+0\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot1 & 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot1+0\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+0\cdot0+0\cdot(-1) & (-1)\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \\ 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot(-1) & (-1)\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 \\ 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1) & 0\cdot(-1)+0\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando como ejemplo las demostraciones anteriores.

$AI_n = A$ $\quad A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ $\quad I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ $\qquad AI_n = B$

$I_n = (e_{jk})_{n\times n}$ $\qquad b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_{jk}$ $\qquad e_{jk}\begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$

$= a_{ik}e_{kk}$

$= a_{ik}$

I_nB $\quad B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$

OBSERVACIÓN

Nótese que, en particular, para matrices cuadradas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, I_n es el elemento neutro del producto, es decir: $AI_n = I_nA = A$ para toda la matriz cuadrada A de orden n.

EJEMPLO 21

$$AI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = I_2A$$

EJERCICIO 7

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando en cuenta como ejemplo las demostraciones anteriores.

$$AI_n = A \qquad I_nA = A$$

$$A = A$$