EJERCICIOS POLINOMIOS

Pregunta 1

¿Son las siguientes expresiones algebraicas polinomios en $\mathbb{R}[x]$? En caso afirmativo, ¿qué grado tienen?

- $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n$ → grado n
- $1 + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2}$ → No grado (–)
- $1 - x^{-2}$ → no grado (–)
- $\sqrt{x} + 3$
- $x + x^{3/2}$ → no es polinomio en $\mathbb{R}[x]$
- $(x+1)^3$ → grado 3
- $x + x^2 + x^{1000}$ → grado 1000

Pregunta 2

Hallar α y β para que $x^5 - \alpha x + \beta$ sea divisible por $x^2 - 4$

$P(x) = x^5 - \alpha x + \beta$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \sqrt{4}$ $x_1 = 2$ $x_2 = -2$

$P(x_1) = (2)^5 - \alpha(2) + \beta$

$= 32 - 2\alpha + \beta \rightarrow 0 = 32 - 2\alpha + \beta$

$-2\alpha + \beta = -32$

$P(x_2) = (-2)^5 - \alpha(-2) + \beta$

$= -32 + 2\alpha + \beta \rightarrow 0 = -32 + 2\alpha + \beta$

$2\alpha + \beta = 32$

$-2\alpha + \beta = -32$

$2\alpha + \beta = 32$

$\beta = 32 - 2\alpha$

$-2\alpha + (32 - 2\alpha) = -32$

$-2\alpha - 2\alpha = -64$

$-4\alpha = -64$

$\alpha = 16$

$\beta = -32 + 2\alpha$

$= -32 + 2(16)$

$\beta = 0$

$\therefore$ $x^5 - 16x \rightarrow x(x^4 - 16)$

$\rightarrow x\underbrace{(x^2-4)}(x^2+4)$

→ es divisible

Pregunta 3

Hallar α y β para que $x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 3$ sea divisible por $x^2 + x + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2+x+1 & x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 3 \\
\hline
 & x + (-\alpha - 1)
\end{array}
$$

$-x^3 - x^2 - x$

$(-\alpha - 1)x^2 + x(\beta - 1) + 3$

$-((-\alpha - 1)x^2 + (-\alpha - 1)x + (-\alpha - 1))$

$x(\beta - 1) - (-\alpha - 1)x - (-\alpha - 1) + 3$

$x((\beta - 1) - (-\alpha - 1)) + \alpha + 4$

$x(\beta + \alpha) + \alpha + 4$

$\rightarrow x(\beta + \alpha) + (\alpha + 4) = 0$

$\beta + \alpha = 0 \rightarrow \beta = 4$

$\alpha + 4 = 0 \rightarrow \alpha = -4$

Pregunta 4

Encontrar el valor de α para que al dividir $2x^3 - 2x^2 - \alpha x + 4$ entre $x - 2$ dé resto 2

$$
\begin{array}{l|l}
x-2 & 2x^3 - 2x^2 - \alpha x + 4 \\
\hline
 & 2x^2 + 2x
\end{array}
$$

$-2x^3 + 4x^2$

$2x^2 - \alpha x + 4$

$-2x^2 + 4x$

$x(-\alpha + 4) + 4$

$\rightarrow x(-\alpha + 4) + 4 = 2$

$x(-\alpha + 4)^2 - 2$

Aplicamos teorema del resto

$\rightarrow \frac{P(x)}{x - c} \rightarrow$ el resto es $P(c)$

$x - 2 \rightarrow c = 2$

$P(c) \rightarrow$

$P(2) = 2(2)^3 - 2(2)^2 - \alpha(2) + 4$

$P(2) = 12 - 2\alpha$

$12 - 2\alpha = 2 \rightarrow -2\alpha = -10$

$\alpha = \frac{-10}{-2} = 5$

Pregunta 5

Determinar el valor de α para que $2x^3 - 2x^2 - \alpha x + 4$ admita $x = 2$ como una de sus raíces

Si $x = 2$ para ser una raíz

$P(2) = 2(2^3) - 2(2)^2 - \alpha(2) + 4$

$= 16 - 8 - 2\alpha + 4$

$P(2) = 12 - 2\alpha \rightarrow 12 - 2\alpha = 0$

$\alpha = 6$

$\rightarrow P(2) = 2(2)^3 - 2(2)^2 - 6(2) + 4$

$P(2) = 16 - 8 - 12 + 4$

$P(2) = 0$

Pregunta 6

Dados los polinomios

$p(x) = x^4 - 6x + 1 \qquad q(x) = 3x^3 - 5x \qquad x^4 - x^2 + 2$

Realizar las siguientes operaciones

- $p(x) + 3q(x) + r(x)$
- $p(x) - [q(x) + 5r(x)]$
- $p(x) + q(x) \cdot r(x)$
- $[4p(x) + q(x)] \cdot r(x)$
- $p(x)/q(x) - r(x)$
- $[p(x)/r(x)] \cdot 2q(x)$

Finalmente, en cada uno de los polinomios resultantes, evaluar en 0, -2 y 2

1. $[x^4 - 6x + 1] + 3[3x^3 - 5x] + [x^4 - x^2 + 2]$

$x^4 - 6x + 1 + 9x^3 - 15x + x^4 - x^2 + 2$

$2x^4 + 9x^3 - x^2 - 21x + 3$

$2(0)^4 + 9(0)^3 - (0)^2 - 21(0) + 3 = 3$

2. $[x^4 - 6x + 1] - [(3x^3 - 5x) + 5(x^4 - x^2 + 2)]$

$[x^4 - 6x + 1] - [3x^3 - 5x + 5x^4 - 5x^2 + 10]$

$x^4 - 6x + 1 - 3x^3 + 5x - 5x^4 + 5x^2 - 10$

$-4x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 9$

$-4(0)^4 - 3(0)^3 + 5(0)^2 - (0) - 9 = -9$

$-4(2)^4 - 3(2)^3 + 5(2)^2 - (2) - 9 =$

$-64 - 23 + 20 - 2 - 9 = -78$

$-4(-2)^4 - 3(-2)^3 + 5(2)^2 - (-2) - 9 =$

$-64 + 24 - 20 + 2 - 9 = -67$

3.- $[x^4 - 6x - 1] + [(3x^3 - 5x) \cdot (x^4 - x^2 + 2)] =$

$[x^4 - 6x - 1] + [3x^7 - 3x^5 + 6x^3 - 5x^5 + 5x^3 - 10x] =$

$[x^4 - 6x - 1] + [3x^7 - 8x^5 + 11x^3 - 10x] =$

$[x^4 - 6x - 1 + 3x^7 - 8x^5 + 11x^3 - 10x] =$

$[3x^7 - 8x^5 + x^4 + 11x^3 - 16x - 1]$

$3(0)^7 - 8(0)^5 + (0)^4 + 11(0)^3 - 16(0) - 1 = -1$

$3(2)^7 - 8(2)^5 + (2)^4 + 11(2)^3 - 16(2) - 1 =$

$384 - 256 + 16 + 88 - 32 - 1 = 167$

4.- $[4[x^4 - 6x + 1] + (3x^3 - 5x)] \cdot [x^4 - x^2 + 2]$

$[4x^4 - 24x + 1 + 3x^3 - 5x] \cdot [x^4 - x^2 + 2]$

$[4x^4 + 3x^3 - 29x + 1][x^4 - x^2 + 2]$

$[4x^8 - 4x^6 + 8x^4 + 3x^7 - 3x^5 + 6x^3 - 29x^5 + 29x^3 - 58x + x^4 - x^2 + 2]$

$= 4x^8 - 26x^7 - 4x^6 - 3x^5 + 9x^4 + 35x^3 - x^2 - 58x + 2 =$

$4(0)^8 - 26(0)^7 - 4(0)^6 - 3(0)^5 + 9(0)^4 + 35(0)^3 - (0)^2 - 58(0) + 2 = 2$

$4(2)^8 - 26(2)^7 - 4(2)^6 - 3(2)^5 + 9(2)^4 + 35(2)^3 - (2)^2 - 58(2) + 2 =$

$1024 - 3328 - 256 - 96 + 144 + 280 - 4 - 116 + 2 = -2350$

5.- $\frac{x^4 - 6x + 1}{3x^3 - 5x} - \frac{[x^4 - x^2 + 2]}{1} =$

$\frac{x^4 - 6x + 1 - ([x^4 - x^2 + 2) \cdot (3x^3 - 5x)]}{3x^3 - 6x} =$

$\frac{x^4 - 6x + 1 - (3x^7 - 5x^5 - 3x^5 + 5x^3 + 6x^3 - 10x)}{3x^3 - 6x} =$

$\frac{x^4 - 6x + 1 - 3x^7 + 5x^5 + 3x^5 - 5x^3 - 6x^3 + 10x}{3x^3 - 6x} =$

$\frac{-3x^7 + 8x^5 - 11x^3 + 4x + x^4 + 1}{3x^3 - 6x}$

Indeterminado para 0

$\frac{-3(2)^7 + 8(2)^5 + (2)^4 - 11(2)^3 + 4(2) + 1}{3(2)^3 - 6(2)}$

$\frac{-384 + 256 + 16 - 88 + 8 + 1}{24 - 12} = \frac{-191}{12}$

6.- $\frac{x^4 - 6x + 1}{x^4 - x^2 + 2} \cdot 2(3x^3 - 5x)$

$\frac{(x^4 - 6x + 1) \cdot (6x^3 - 10x)}{x^4 - x^2 + 2}$

$\frac{6x^7 - 10x^5 - 36x^4 + 60x^2 + 6x^3 - 10x}{x^4 - x^2 + 2}$

$\frac{6(0)^7 - 10(0)^5 - 36(0)^4 + 60(0)^2 + 6(0)^3 - 10(0)}{(0)^4 - (0)^2 + 2} = 0$

$\frac{6(2)^7 - 10(2)^5 - 36(2)^4 + 60(2)^2 + 6(2)^3 - 10(2)}{(2)^4 - (2)^2 + 2} =$

$\frac{768 - 320 - 576 + 240 + 48 - 20}{16 - 4 + 2} = \frac{140}{14} = 10$

Pregunta 7

Divide

- $x^7 - x^5 + x^2 - 3$ entre $x^4 + x^3 + x^2 + x$
- $x^8 + x^7 - 3x^6 + x^5 + 2x^4 + -3x^3 + x^2 - x - 10$ entre $x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$
- $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ entre $x + 1$

Finalmente, en cada uno de los polinomios resultantes, evaluar en 1, 2 y 3

1.
$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + x^3 + x^2 + x & x^7 - x^5 + x^2 - 3 \\
\hline
 & x^3 - x^2 - x + 2
\end{array}
$$

$-x^7 - x^6 - x^5 - x^2$

$0 - x^6 - 2x^5 - 3$

$x^6 + x^5 + x^4 + x^3$

$-x^5 + x^4 + x^3 - 3$

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2$

$2x^4 + 2x^3 + x^2 - 3$

$-2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x$

$-x^2 - 2x - 3$

2.
$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 & x^8 + x^7 - 3x^6 + x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 10 \\
\hline
 & x^4 - 2x^2 + 2x + 1
\end{array}
$$

$-x^8 - x^7 + x^6 - x^5 - x^4$

$-2x^6 + x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 10$

$2x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2$

$2x^5 + 3x^4 - 6x^3 - x^2 - x - 10$

$-2x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x$

$x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 3x - 10$

$-x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$

$-5x^3 - 2x^2 - 4x - 11$

3.- $\frac{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x + 1}$

$x - c$ $\quad c = -1$ usando división sintética

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & & -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7
\end{array}
$$

$Q(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$