EXCEPCIONES

En genera, no se cumplen las siguinetes propiedades:

PROPIEDAD CONMUTATIVA. La multiplicación de matrices no es conmutativa.

Ejemplo 27

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=BA$$

LEY DE SIMPLIFICACIÓN. No se cumple la ley de simplificación en un producto.

Ejemplo 28

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&5\\3&4\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Satisface AB = AC, pero en cambio $B\neq C$

EJERCICIO 12. Comprueba que efectivamente AB = AC

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}\quad AB=\begin{pmatrix}0\cdot1+3\cdot1 & 0\cdot1+1\cdot4\\ 0\cdot1+2\cdot3 & 0\cdot1+2\cdot4\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\3&4\end{pmatrix}\quad AC=\begin{pmatrix}0\cdot2+1\cdot3 & 0\cdot5+1\cdot4\\ 0\cdot2+2\cdot3 & 0\cdot5+2\cdot4\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix}$$

Queda comprobado que, efectivamente AB = AC, esto demuestra el punto del ejemplo: AB = AC y A no es la matriz nula, no se puede "simplificar" o "cancelar" la matriz A en ambos lados ya que B ∤ C.

DIVISORES DE CERO. Existen divisores de 0, es decir AB = 0 ⇏ A = 0 o B = 0

Ejemplo 29

$$A=\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Pero en cambio

$$AB=0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Tarea: El producto de matrices triangulares es triangular

Vamos a hacer una práctica para demostrar un resultado muy importante del Álgebra Lineal y para ver que has entendido la notación de los ejemplos de teoría hasta el momento.

Ejemplo númerico

Considera las siguientes dos matrices triangulares superiores orden 3x3:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7&8&9\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$C=AB=\begin{pmatrix}1\cdot7+0\cdot2+3\cdot0 & 8\cdot1+2\cdot1+0\cdot3 & 9\cdot1+2\cdot2+3\cdot3\\ 0\cdot7+4\cdot0+5\cdot0 & 0\cdot8+4\cdot1+5\cdot0 & 9\cdot0+4\cdot2+5\cdot3\\ 0\cdot7+0\cdot0+0\cdot6 & 0\cdot8+0\cdot1+6\cdot0 & 0\cdot9+0\cdot2+6\cdot3\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}7&10&22\\0&4&23\\0&0&18\end{pmatrix}$$

Demostrar que el producto C=AB de dos matrices triangulares superiores A y B es también una matriz triangular superior.

Definiciones:

$A=(a_{ij})$ es triangular superior $\Rightarrow a_{ij}=0$ si $i>j$

$B=(b_{ij})$ es triangular superior $\Rightarrow b_{ij}=0$ si $i>j$

El elemento (i,k) del producto $C=AB$ es $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

Demostración: Para que C sea triangular superior, debemos probar que sus elementos por debajo de la diagonal principal son cero, es decir, $c_{ik}=0$ si $i>k$

Consideremos un elemento c_{ik} cualquiera donde i>k. Analicemos los términos $a_{ij}b_{jk}$ dentro de la suma:

$$c_{ik}=a_{i1}+b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\dots+a_{in}b_{nk}$$

Vamos a dividir el análisis del índice j (que va de 1 a n) en dos partes:

1. **Cuando j < i**: Por la definición de matriz triangular superior, como i>j, el elemento a_{ij} **será igual a 0**. Por lo tanto, el término completo $a_{ij}b_{jk}$ será $0\cdot b_{jk}=0$

2.Cuando j ≥ i: Nuestra condición inicial es que **i>k**. Si combinamos ambas desigualdades, tenemos que **j ≥ i > k**, lo que implica que **j>k**.
Por la definición de matriz triangular superior, como j>k, el elemento b_{jk} **será igual a 0**. Por lo tanto, el término completo $a_{ij}b_{jk}$ será $a_{ij}\cdot 0=0$

En ambos casos, para cualquier valor de j de 1 a n, el término $a_{ij}b_{jk}$ es cero. La suma de una serie de ceros es cero.

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}(0)=0$$

Hemos demostrado que si i>k, entonces c_{ik} = 0. Esto es, por definición, una matriz triangular superior. **Queda demostrado que el producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior.**