

Ejercicios finales con Python

Pregunta 1

¿Son los números enteros,  $\mathbb{Z}$ , un cuerpo? ¿Por qué? Razona la respuesta.

$\mathbb{Z}^{\neq 0}(\cdot, +, \cdot, \cdot^{-1}, \cdot^{-1}, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot^{-1})$  fallamos cumplir el axioma de la existencia del inverso multiplicativo para todos sus elementos no nulos.

Axioma de Inverso Multiplicativo: Para cada elemento no nulo:  $a \in \mathbb{Z}$  en el conjunto, debe de existir otro elemento  $a^{-1} \in \mathbb{Z}$  en el mismo conjunto tal que  $a \cdot a^{-1} = 1$ .

Veamos porqué los enteros no cumplen esta condición como ejemplos:

Considerando el número entero 2.

El inverso multiplicativo de 2 es  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$   
para  $\frac{1}{2}$  es número racional  
 $2 \in \mathbb{Z}$ ; para  $2^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Los únicos números enteros que tienen un inverso multiplicativo dentro de  $\mathbb{Z}$  son 1 y -1.

Pregunta 2

Realiza las siguientes sumas a mano y comprueba la respuesta en R, Python o Octave.

- $a = (2 + 3i) + (3 + 4i)$
- $a = (2 + 3i) + (3 - 4i)$
- $a = (2^2 + 3 + 4i) + (3 - 4i)$

```
a1 = 2 + 3i
a2 = 3 + 4i
print(a1 + a2)
a1 = 2 + 3i
a2 = 3 - 4i
print(a1 + a2)
import sympy as sp
i1 = sp.Symbol('i', imaginary=True)
i2 = sp.Symbol('i', imaginary=True)
```

```
(3+4i)
(3+3i)
3
3 + 2 i
```

Pregunta 3

Realiza las siguientes potencias a mano y comprueba la respuesta en R, Python o Octave.

- $(2+3i)(1+i)$
- $(3+i)(3-i)$
- $(2^2 + 3 + 4i)(3-i)$
- $(2+1)^2$
- $(2+1)(2-i)$

```
a1 = 2 + 3i
i2 = 3 + 4i
print(a1 * a2)
a1 = 2 + 3i
i2 = 3 - 4i
print(a1 * a2)
i1 = sp.Symbol('i', imaginary=True)
i2 = sp.Symbol('i', imaginary=True)
i3 = sp.polyval([1,1,1]) + sp.polyval([3,-1])
print(i3)
```

```
(3+4i)
(3+3i)
3
3 + 2 i
3 + 2 i + 3 + 4 i
3
-3 i + 3
```

Pregunta 4

Calcula el resultado de las siguientes operaciones (verificando primero las operaciones potenciales).

- $(2+3i)(1+i)$
- $(3+i)(3-i)$
- $(2^2 + 3 + 4i)(3-i)$
- $(2+1)^2$
- $(2+1)(2-i)$

```
a1 = 2 + 3i
print(a1*i2)
a2 = 3i
print(a1*a2)
i1 = (2 + 3i) + (3 + 4i)
print(a1*i2)
i2 = (3 + 1i) + (3 - 1i)
print(a1*i2)
a1 = (2 + 3i) * (3 + 4i)
print(a1*i2)
i1 = (3 + 1i) * (3 - 1i)
print(a1*i2)
```

```
3.0000000000000000
3.0
3.0
3.0000000000000000
3.0
```

Pregunta 5

Realiza el grado de las siguientes potencias (verificando primero las operaciones potenciales).

- $(2+3i)(1+i)$
- $(3+i)(3-i)$
- $(2^2 + 3 + 4i)(3-i)$
- $(2+1)^2$
- $(2+1)(2-i)$

```
import sympy as sp

a = sp.Symbol('a')
p = sp.poly(a**2 + 3, x, domain='ZZ')
print(a.degree())
```

```
2
Poly(a**2 + 3, x, domain='ZZ')
3
```

```
p1 = sp.poly(a**2 + 3, x = 1)
print(p1)
print(a.degree()) # 2, 1, 0, 0, 0, ...

2
Poly(a**2 + 3, x = 1, x, domain='ZZ')
3
```

```
p1 = sp.poly(a**2 + 3, x = 1)
p2 = sp.poly(a - 1)
p3 = p1 * p2 # 2, 0, 0, 0, 0, 0, ...
print(p3)
print(p3.degree())
```

```
2
Poly(a**2 + 3, x, domain='ZZ')
3
```

```
p1 = sp.poly(a = 1)
p2 = sp.poly(a = 3)
p3 = p1 * p2
print(p3)
print(p3.degree())
```

```
2
Poly(a**2 + 3, x, domain='ZZ')
3
```

Pregunta 6

¿Son iguales las siguientes polinomios?

- $(2+1)^2 + 3 + 1$
- $(2+1)^2 + 3 + 2 + 1$
- $(2+1)^2 + 3 + 1$
- $(2+1)^2 + 3 + 2 + 1$
- $(2+1)(2-1) + 3 + 1$
- $(2+1)^2 + 3 + 1$

```
import sympy as sp

a = sp.Symbol('a')
p = sp.poly((2 + 1)**2)
print(p)
p2 = sp.poly((2**2 + 1))
print(p2)
print(p == p2)
```

```
2
Poly(a**2 + 3, x = 1, x, domain='ZZ')
Poly(a**2 + 3, x, domain='ZZ')
True
```

```
p1 = sp.poly((2 + 1)**2)
p2 = sp.poly((2**2 + 1))
print(p1)
print(p2)
print(p1 == p2)
```

```
2
Poly(a**2 + 3, x = 1, x, domain='ZZ')
Poly(a**2 + 3, x, domain='ZZ')
True
```

```
p1 = sp.poly((2 + 1)**2)
p2 = sp.poly((2**2 + (2**2 + 1)*(2 + 1)))
print(p1)
print(p2)
print(p1 == p2)
```

```
2
Poly(a**2 + 3, x = 1, x, domain='ZZ')
Poly(a**2 + 3, x, domain='ZZ')
True
```

```
p1 = sp.poly((2 + 1)**2)
p2 = sp.poly((2**2 + 2**2 + 1))
print(p1)
print(p2)
print(p1 == p2)
```

```
2
Poly(a**2 + 3, x, domain='ZZ')
Poly(a**2 + 3, x, domain='ZZ')
True
```

Pregunta 7

Encuentra los ceros de las siguientes polinomios.

- $2x + 3$
- $x^2 + 2x + 3$
- $(x^2 + 2x + 1)(x - 1)$
- $(2+1)^2$
- $(2+1)(2-1)$

```
import sympy as sp

# Definir la variable simbólica
x = sp.Symbol('x')
p1 = sp.poly(2*x + 3)
r1 = sp.solve(p1, x)
print(r1)
```

```
-1.5
[-1.5]
```

```
x = sp.Symbol('x')
r1 = sp.solve(p1, x)
print(r1)

[2.0000000000000000, 3.0000000000000000, 2.0000000000000000, 3.0000000000000000, 2.0000000000000000, 3.0000000000000000, 2.0000000000000000, 3.0000000000000000, 2.0000000000000000, 3.0000000000000000]
```

```
p1 = sp.poly((x**2 + 2 + 1) * (x-1))
r1 = sp.solve(p1, x)
print(r1)
```

```
[-1.5, -1/3 - sqrt(3)*1/3, -1/3 + sqrt(3)*1/3]
```

```
p1 = sp.poly((x + 1)**2)
r1 = sp.solve(p1, x)
print(r1)
```

```
[-1]
```

```
p1 = sp.poly((x + 1)*(x-1))
r1 = sp.solve(p1, x)
print(r1)
```

```
[-1, 1]
```