Cálculo de la matriz inversa

Con las matrices escalonadas y las operaciones elementales, no solo se puede calcular el rango de una matriz sino también resultan útiles en el cálculo de matrices inversas como veremos a continución.

El primer aporte que puede hacer es caracterización de las matrices invertibles a través de su rango y de su matriz escalonada reducida.

TEOREMA.

Sea A una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces son equivalentes:

- A es invertible
- rg(A) = n
- La matriz escalonada reducida por filas (por columnas) equivalente a A es la matriz identidad I_n

Teorema de caracterización

Además, la tercera equivalencia aporta un método para calcular la amtriz inversa de una matriz invertible $A \in M_n(\mathbb{K})$: Este consite en escribir la matriz identidad I_n a la derecha de la matriz (escrito de forma abreviada $(A|I_n)$) y atravéz de transformaciones elementales por filas (o por columnas), calcular la matriz escalonada reducica que será de la forma $(I_n|B)$. La matriz B resultante es precisamente la matriz inversa de A, es decir $A^{-1} = B$.

Ejercicio 29

Sea A la matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Razona si A es invertible y, si lo es calcula su inversa.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim_{f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim_{f_2/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim_{f_3-3f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right) \quad rn(A)=3$$

$$\sim_{f_3 \cdot -\frac{2}{7}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

$$\sim_{\substack{f_1+f_3 \\ f_2-\frac{3}{2}f_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

$$\sim_{f_1-3f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{11}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 6 & -11 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_3$$

APLICACIONES DE LAS MATRICES

- Álgebra lineal y geometría
- Modelos lineales de ingeniería y economía
- Ecuaciones en diferencias
- Tratamiento de imágenes y diseño asistido por ordenador
- Matrices booleanas, grafos y relaciones
- Matrices estocásticas y estadísticas.
- Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos.

QUIZ

1. ¿Una matriz de orden 2x3 puede tener inversa?
   - No porque no es una matriz cuadrada

2. Una matriz diagonal es aquella que
   - Tiene todas las entradas nulas excepto las de la diagonal principal

3.El producto de matrices es conmutativo
- Para algunos casos particulares, entre ellos el de las matrices diagonales.

4.Hay en total
3 operaciones elementales de matrices :
1. Multiplicar una fila por un número diferente de 0
2. Sumar una fila (o un multiplo de una fila) a otra
3. Cambiar de lugar dos filas (permutar)

5.Una matriz puede estar definida sobre los números naturales
- No porque los numeros naturales no son un cuerpo.