Soluciones: Álgebra Lineal - Producto de matrices triangulares

Pregunta 1

Los elementos estrictamente inferiores de una matriz son aquellos que se encuentran por debajo de la diagonal principal. En una matriz $A = (a_{ij})$, estos son los elementos para los cuales el índice de la fila es mayor que el índice de la columna, es decir, $i > j$.

Pregunta 2

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{K})$, los elementos dados se clasifican de la siguiente manera:

- **En la diagonal principal ($i = j$):** a_{11}, a_{44}
- **Por encima de la diagonal principal ($i < j$):** a_{23}, a_{15}
- **Por debajo de la diagonal principal ($i > j$):** a_{21}, a_{32}, a_{53}

Pregunta 3

Las relaciones correctas para una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son:

- $A_{i,j}$ con $i < j \to$ está por encima de la diagonal principal
- $A_{i,j}$ con $i = j \to$ está en la diagonal principal
- $A_{i,j}$ con $i > j \to$ está por debajo de la diagonal principal

Completando las definiciones:

- A_{ij} está en la diagonal $\Leftrightarrow i = j$
- A_{ij} está por encima de la diagonal principal $\Leftrightarrow i < j$
- $A_{i,j}$ está por debajo de la diagonal $\Leftrightarrow i > j$

Pregunta 4

La definición formal de los conjuntos de matrices triangulares inferiores y superiores es la siguiente:

- **Matrices Triangulares Inferiores ($L_n(\mathbb{K})$):** El conjunto de matrices donde todas las entradas por encima de la diagonal principal son cero.

$$L_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \forall i, j \in \{1, ..., n\}, \text{ si } i < j, \text{ entonces } A_{ij} = 0\}$$

- **Matrices Triangulares Superiores ($U_n(\mathbb{K})$):** El conjunto de matrices donde todas las entradas por debajo de la diagonal principal son cero.

$$U_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \forall i, j \in \{1, ..., n\}, \text{ si } i > j, \text{ entonces } A_{ij} = 0\}$$

Pregunta 5

La relación entre las matrices triangulares superiores e inferiores a través de la transposición es: Una matriz A es triangular superior si y solo si su transpuesta, A^t, es triangular inferior. Por lo tanto, podemos afirmar que:

$$A \in U_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A^t \in L_n(\mathbb{K})$$

Pregunta 6

Dadas las matrices $A, B \in U_3(\mathbb{K})$. El producto AB, tras quitar los sumandos nulos, es:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ 0 & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Pregunta 7

Basado en el resultado anterior:

- Las entradas por debajo de la diagonal principal son **cero**.
- La matriz AB $\in U_3(\mathbb{K})$ (es una matriz triangular superior).
- El elemento (i, i)-ésimo de la diagonal principal es $a_{ii}b_{ii}$.

Pregunta 8

Cálculo de las entradas del producto AB para A, B $\in U_8(\mathbb{K})$.

- **Entradas por debajo de la diagonal principal:** Todas son 0. Por ejemplo, $AB_{75} = 0$, $AB_{61} = 0$.

- **Entradas de la diagonal principal:** El producto de las entradas correspondientes. Por ejemplo, $AB_{77} = a_{77}b_{77}$ y $AB_{11} = a_{11}b_{11}$.
- **Entradas por encima de la diagonal principal:**
  - $AB_{78} = \sum_{k=7}^{8} a_{7k}b_{k8} = a_{77}b_{78} + a_{78}b_{88}$
  - $AB_{15} = \sum_{k=1}^{5} a_{1k}b_{k5} = a_{11}b_{15} + a_{12}b_{25} + a_{13}b_{35} + a_{14}b_{45} + a_{15}b_{55}$
  - $AB_{36} = \sum_{k=3}^{6} a_{3k}b_{k6} = a_{33}b_{36} + a_{34}b_{46} + a_{35}b_{56} + a_{36}b_{66}$

Preguntа 9

Generalización de la fórmula del producto de matrices.

- Si A, $B \in \mathcal{M}_8(\mathbb{K})$, entonces:

$$AB_{85} = \sum_{k=1}^{8} a_{8k}b_{k5}$$

- La fórmula general para AB_{ij} donde A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es:

$$AB_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Pregunta 10

Ejercicios de partición de una suma.

- **Completar particiones:**
  - $\sum_{k=1}^{20} s_k = \sum_{k=1}^{7} s_k + \sum_{k=8}^{20} s_k$
  - $\sum_{k=1}^{29} s_k = \sum_{k=1}^{8} s_k + \sum_{k=9}^{20} s_k + \sum_{k=21}^{29} s_k$
- **Calcular resultados:**
  - $\sum_{k=1}^{17} s_k = (10 \cdot 2) + (7 \cdot 3) = 41$
  - $\sum_{k=1}^{25} s_k = (12 \cdot 7) + (7 \cdot 9) + (6 \cdot 5) = 177$
- **Simplificar sumas:**
  - $\sum_{k=1}^{31} s_k$ donde $s_k = 0$ en los extremos, se simplifica a $\sum_{k=10}^{24} s_k$.
  - $\sum_{k=1}^{27} s_k$ donde $s_k = 0$ en varios intervalos, se simplifica a $\sum_{k=8}^{11} s_k + \sum_{k=20}^{23} s_k$.

Pregunta 11

Demostración de que las entradas por debajo de la diagonal del producto AB son nulas, para A, $B \in U_{15}(\mathbb{R})$. El método consiste en particionar la suma y ver que todos los sumandos son cero porque $a_{ik} = 0$ si $i > k$ o $b_{kj} = 0$ si $k > j$.

- $AB_{93} = \sum_{k=1}^{15} a_{9k}b_{k3} = \sum_{k=1}^{8} 0 \cdot b_{k3} + \sum_{k=9}^{15} a_{9k} \cdot 0 = 0$
- $AB_{31} = \sum_{k=1}^{15} a_{3k}b_{k1} = \sum_{k=1}^{2} 0 \cdot b_{k1} + \sum_{k=3}^{15} a_{3k} \cdot 0 = 0$
- $AB_{15,3} = \sum_{k=1}^{15} a_{15,k}b_{k3} = \sum_{k=1}^{14} 0 \cdot b_{k3} + a_{15,15} \cdot 0 = 0$

Pregunta 12

Cálculo de las entradas diagonales del producto AB para A, $B \in U_{15}(\mathbb{R})$.

- $AB_{55} = \sum_{k=1}^{4} a_{5k}b_{k5} + a_{55}b_{55} + \sum_{k=6}^{15} a_{5k}b_{k5} = 0 + a_{55}b_{55} + 0 = a_{55}b_{55}$
- $AB_{10,10} = 0 + a_{10,10}b_{10,10} + 0 = a_{10,10}b_{10,10}$
- $AB_{15,15} = 0 + a_{15,15}b_{15,15} = a_{15,15}b_{15,15}$

Pregunta 13

Cálculo de las entradas por encima de la diagonal del producto AB para A, $B \in U_{15}(\mathbb{R})$.

- $AB_{1,5} = \sum_{k=1}^{5} a_{1k}b_{k5} = a_{11}b_{15} + a_{12}b_{25} + a_{13}b_{35} + a_{14}b_{45} + a_{15}b_{55}$
- $AB_{10,13} = \sum_{k=10}^{13} a_{10,k}b_{k,13} = a_{10,10}b_{10,13} + a_{10,11}b_{11,13} + a_{10,12}b_{12,13} + a_{10,13}b_{13,13}$
- $AB_{6,9} = \sum_{k=6}^{9} a_{6k}b_{k9} = a_{66}b_{69} + a_{67}b_{79} + a_{68}b_{89} + a_{69}b_{99}$

Pregunta 14

Demostración del caso general y fórmulas

Fórmula para las entradas diagonales AB_{ii} ($A, B \in U_n(\mathbb{K})$):

$$AB_{ii} = a_{ii}b_{ii}$$

Fórmula para las entradas no triviales AB_{ij} con $i \leq j$ ($A, B \in U_n(\mathbb{K})$):

$$AB_{ij} = \sum_{k=i}^{j} a_{ik}b_{kj}$$

Enunciado y demostración para matrices triangulares inferiores:

- **Teorema:** El producto de dos matrices triangulares inferiores es una matriz triangular inferior.
- **Demostración:** Sean A, $B \in L_n(\mathbb{K})$. Su transpuesta, A^t y B^t, son triangulares superiores ($U_n(\mathbb{K})$). El producto B^tA^t es triangular superior. Como $(AB)^t = B^tA^t$, entonces $(AB)^t$ es triangular superior, lo que implica que AB es triangular inferior.
- **Fórmulas para matrices triangulares inferiores**:
  - **Entradas diagonales ($i = j$):** $AB_{ii} = a_{ii}b_{ii}$
  - **Entradas no triviales ($i > j$):** $AB_{ij} = \sum_{k=j}^{i} a_{ik}b_{kj}$

Enunciado y demostración para matrices diagonales:

- **Teorema:** El producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

- **Demostración:** Una matriz diagonal es a la vez triangular superior e inferior. Como el producto de matrices triangulares (superiores o inferiores) conserva la triangularidad, el producto AB de dos matrices diagonales A y B será tanto triangular superior como inferior, lo que por definición significa que es una matriz diagonal.
- **Fórmula de las entradas:** Sea $C = AB$. La entrada $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Como a_{ik} y b_{kj} son solo no nulos cuando $i = k$ y $k = j$ respectivamente, el producto C_{ij} solo es no nulo cuando $i = k = j$.
    - **Entradas diagonales:** $C_{ii} = a_{ii}b_{ii}$
    - **Entradas no diagonales ($i \neq j$):** $C_{ij} = 0$