POLINOMIOS

Dado un polinomio p(x) $\in \mathbb{K}[x]$, podemos asociar a p(x) a una aplicación o función $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definida de la siguiente manera: a cada elemento de $\alpha \in \mathbb{K}$ le hacemos corresponder $p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n$. Esta función es conocida como función evaluadora y el proceso de sustituir la variable x por cualquier elemento α del cuerpo se lo conoce como EVALUAR UN POLINOMIO en α.

En caso en que $\mathbb{K}$ sea un cuerpo infinito, podemos identificar un polinomio con una función asociada.

RAÍZ DE UN POLINOMIO. Sean p(x) $\in \mathbb{K}[x]$ y $a \in \mathbb{K}$, diremos que α de raíz de p(x) si $p(\alpha) = 0$.

PROPOSICIÓN.

$$a \in \mathbb{K} \text{ es raíz de } p(x) \Leftrightarrow p(x) = (x-a)q(x) \text{ con } q(x) \in \mathbb{K}[x].$$

De aqui deducimos que si un polinomio de $\mathbb{K}[x]$ de grado mayor que 1 tiene una raíz (en $\mathbb{K}$) entonces no es irreducible. El recíproco no es cierto.

DEMOSTRACIÓN.

Primero probaremos la implicación hacia la izquierda, $p(x) = (x-a)q(x)$ con $q(x) \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow a \in \mathbb{K}$ es raiz de $p(x)$

Evaluando p(x) en α tenemos que:

$$p(a) = (a-a)q(a) = 0$$

lo que, por definición, implica que α es raiz de p(x)

Ahora nos queda demostrar la implicación a la derecha $a \in \mathbb{K}$ es raíz de

p(x) => p(x) = (x - α)q(x) con q(x) $\in \mathbb{K}[x]$

Si dividimos p(x) entre x - α, obtenemos que

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x)$$

Ahora, por hipótesis tenemos que

$$p(a) = (a-a)q(a) + r(a) = 0 + r(a) = 0$$

Con lo cual $r(\alpha) = 0$

Ahora bien, el grado de r(x) debe ser estrictamente meno al del divisor, $x - \alpha$, que es 1. Por lo tanto, r(x) es un polinomio constante. Además, como $r(\alpha) = 0$, tenemos que

$$r(x) \equiv 0$$

Así pues, acabamos de demostrar que p(x) = (x - α)q(x)