MATRICES DIAGONALES Y TRIANGULAES

PROPOSICIÓN

Sean A,B dos mactrices cuadradas de orden n.

- Si A,B son matrices diagonales, entonces A y B conmutan y la matriz producto AB = BA también es diagonal.
- Si A,B son matrices triangulares superiores(inferiores) entonces el producto AB es también una matriz triangular superior(inferior).

Ejercicio 13. Dadas A y B comprobar que AB y BA son matrices diagonales

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&30&0&0\\0&0&-9&0\\0&0&0&18\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&30&0&0\\0&0&-9&0\\0&0&0&18\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 14. Dadas A y B comprobar que AB y BA son matrices triangulares superiores

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&4&3\\0&-5&-2&1\\0&0&-3&7\\0&0&0&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2&1&-1&2\\0&6&0&3\\0&0&3&-5\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1&4&3\\0&-5&-2&1\\0&0&-3&7\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&-1&2\\0&6&0&3\\0&0&3&-5\\0&0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-5&11&-27\\0&-30&-6&-7\\0&0&-9&1\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-2&1&-1&2\\0&6&0&3\\0&0&3&-5\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&4&3\\0&-5&-2&1\\0&0&-3&7\\0&0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-3&-7&-8\\0&-30&-12&12\\0&0&-9&11\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$$

MATRIZ TRANSPUESTA

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ.

Sea $A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se denomina transpuesta de la matriz A y se denota como A^t a la matriz $A^t=(a_{ij})_{n\times m}\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ Es decir la matriz obtenida a partir de A intercambiando filas por columnas.

Ejemplo 30

La matriz transpuesta de A $=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&-1\end{pmatrix}$ es $A^t=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\3&-1\end{pmatrix}$

$$(A^t)^t=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&-1\end{pmatrix}=A$$

Demostración

$$A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ A(a_{ij})\Rightarrow A^t\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$$

$$A^t=(a_{ji})\Rightarrow(A^t)^t\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}),\ (A^t)^t=a_{ij}=A$$

PROPIEDADES MATRIZ TRANSPUESTA

TRANSPUESTA DE UNA SUMA.

Si A y B son matrices del mismo orden m x n, entonces $(A+B)^t=A^t+B^t$. Es decir, la transpuesta de una suma de matrices es la matriz obtenida por la suma de sus respectivas transpuestas. Ademas, el resultado se puede generalizar a r sumandos y se tiene que si Ai son todas del mismo orden, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{r}A_i\right)^t=\sum_{i=1}^{r}A_i^t$$

Ejercicio 15. Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad

$$(A+B)^t=A^t+B^t$$

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\Rightarrow A^t=(a_{ij})_{n\times m}$$

$$B=(b_{ij})_{m\times n}\Rightarrow B^t=(b_{ij})_{n\times m}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

$$(A+B)^t=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{21}+b_{21}&\cdots&a_{m1}+b_{m1}\\a_{12}+b_{12}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{m2}+b_{m2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}+b_{1n}&a_{2n}+b_{2n}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$$

$$A^t=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$$

$$A^t+B^t=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{21}+b_{21}&\cdots&a_{m1}+b_{m1}\\a_{12}+b_{12}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{m2}+b_{m2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}+b_{1n}&a_{2n}+b_{2n}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$$

EJERCICIO 16. Comprobar que dadas A, B, C

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\\-1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\3&6\\3&-2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2&4\\0&5\\7&2\end{pmatrix}$$

$$(A+B+C)^t=A^t+B^t+C^t$$

$$\begin{pmatrix}2+1+(-2)&3+0+4\\3+3+0&2+6+5\\-1+3+7&0+(-2)+2\end{pmatrix}=A+B+C$$

$$A+B+C=\begin{pmatrix}1&7\\6&13\\9&0\end{pmatrix}\Rightarrow(A+B+C)^t=\begin{pmatrix}1&6&9\\7&13&0\end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}2&3&-1\\3&2&0\end{pmatrix}\quad B^t=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&6&-2\end{pmatrix}\quad C^t=\begin{pmatrix}-2&0&7\\4&5&2\end{pmatrix}$$

$$A^t+B^t+C^t=\begin{pmatrix}2+1+(-2)&3+3+0&-1+3+7\\3+0+4&2+6+5&0+(-2)+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6&9\\7&13&0\end{pmatrix}$$

TRANSPUESTA DE UN PRODUCTO

Si $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, entonces la transpuesta del producto de A por B es el producto de las transpuestas pero con orden cambiado, es decir:

$$(AB)^t=B^tA^t\in\mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$$

EJERCICIO 17 Probar que

$$(AB)^t=B^tA^t$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1)&1\cdot(-1)+0\cdot1+1\cdot0\\0\cdot1+1\cdot0+0\cdot(-1)&0\cdot(-1)+1\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}\quad(AB)^t=\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad B^t=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$B^tA^t=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot1&0\cdot1+0\cdot1+(-1)\cdot0\\-1\cdot1+0\cdot1+0\cdot1&0\cdot(-1)+1\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}$$

$$B^tA^t=\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 18. Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad

$$\text{Sea } A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}\quad\text{y}\quad B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}.$$

El elemento (i,j) de $(AB)^t$ se define como el elemento (j,i) de AB :

$$((AB)^t)_{ij}=(AB)_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}.$$

Por otro lado, el elemento (i,j) de B^tA^t es :

$$(B^tA^t)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(B^t)_{ik}(A^t)_{kj}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}.$$

Dado que la multiplicación escalar es conmutativa, $a_{jk}b_{ki}=b_{ki}a_{jk}$.

$$\text{Por lo tanto, }\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}.$$

$$\Longrightarrow((AB)^t)_{ij}=(B^tA^t)_{ij}$$

$$\therefore\quad(AB)^t=B^tA^t.$$