Polinomios

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo cualquiera

Polinomio de una variable. Objeto de la forma $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ donde $a_i \in \mathbb{K} \quad \forall i = 0, \dots, n$

Polinomios iguales. Dos polinomios iguales si tienen el mismo grado y los mismos coeficientes. Es decir, dados $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$, p y q son iguales si, y solo si, n = m y

$a_i = b_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n \qquad \forall_i \to$ significa para todo i

Grados de un polinomio. Si $a_n \neq 0$ y $a_j = 0 \quad \forall j = n+1, n+2, \dots$ se dice que el grado del polinomio es n.

Ejemplo 3

- $p(x) = x^2 + 5x + 1$ es un polinomio de segundo grado (grado 2)
- $q(x) = x^4 - 5$ es un polinomio de grado 4

Polinomio 0 p(x) = 0 . Es decir, $a_i = 0 \quad \forall_i = 0, \dots, n$

Polinomio constante. Polinomio de grado 0

$p(x) = 5$ es un polinomio constante

CONJUNTO DE POLINOMIOS DE UNA VARIABLE.

Indicaremos por $\mathbb{K}[x]$ el conjunto de polinomios en una determinada variable x y con coeficientes en $\mathbb{K}$. Sobre $\mathbb{K}[x]$ se puede considerar la adición y la multiplicación definidas a partir de las operaciones de $\mathbb{K}$ de la siguiente manera:

- p(x) + q(x) es el polinomio que tiene por coeficientes la suma (en $\mathbb{K}$) de los coeficientes de p(x) y q(x). Más claramente, si $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$, entonces p(x) + q(x) $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots$

- p(x)q(x) es el polinomio $c_0 + c_1 (x) + \dots + c_{nm} x^{n+m}$ donde $c_j = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + \dots + a_j b_0$ $j = 0, 1, \dots, n+m$

Ejemplo 5:

Sean p(x) = x + 1 y q(x) = x - 1. Entonces:

- Su suma es p(x) + q(x) = (x + 1) + (x - 1) = x + x + 1 - 1 = 2x

- Su producto es p(x) * q(x) = $(x+1) \cdot (x-1) = x \cdot x - x + x - 1 = x^2 - 1$

Con estas operaciones el conjunto $\mathbb{K}[x]$ presenta una serie de propiedades importante que nos permiten decir que es un cuerpo. La condición de cuerpo que nos falla aquí es únicamente no existe inverso para todo elemento de $\mathbb{K}[x]$. De hecho, los únicos elementos que tienen inverso son los polinomios constantes y diferentes de 0. Un polinomio no tiene inverso, el inverso de un polinomio es una fracción otra cosa pero no un inverso como tal la definición.

DIVISIÓN DE POLINOMIOS.

Dado un polinomio p(x) $\in \mathbb{K}[x]$, la divisón de p(x) entre otro polinomio s(x) $\in \mathbb{K}[x]$ de grado menor o igual al de p(x), consite en hallar 2 polinomios q(x), r(x) $\in \mathbb{K}[x]$ tales que

p(x) = s(x) q(x) + r(x)

donde el grado de r(x) es siempre menor que el del divisor s(x).

POLINOMIOS IRREDUCIBLE.
Si el polinomio con coeficietes en un cuerpo, no es constante y no se puede descomponer en un producto de otros polinomios sin que esta desconposición sea trivial. (trivial que uno de los polinomios en la descomposición sea el polinomio constante 1).

Ejemplo

p(x) = $1 + x^2 \in \mathbb{R}[x]$ es irreducible ya que no se puede escribir de forma r(x)s(x) $\in \mathbb{R}[x]$, $r(x), s(x) \neq p(x)$ y $r(x), s(x) \neq 1$

En cambio, q(x) = $1 - x^2$ no es irreducible, ya que q(x) = (1 - x) (1 + x)