Matrices Cuadradas

Nótese que la transposición, en caso de matrices cuadradas, es una operación interna.

Transposición como operación interna. La transpuesta de una matriz cuadrada

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es otra matriz cuadrada $A^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Demostración

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \equiv A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \Rightarrow A^t \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

Por lo tanto, tiene sentido las siguientes definiciones.

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada

Matríz simétrica.
A es simétrica si coincide con su transpuesta. Esto causa la simetría de la matriz respecto a su diagonal.

$$A \text{ simétrica} \Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \; \forall i,j$$

EJEMPLO 32

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula A^t y comprueba $A^t = A$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & -1 \end{pmatrix} = A \Rightarrow A^t = A$$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA

A es antisimétrica si su transpuesta coincide con su opuesta, lo cual exige que la diagonal esté compuesta únicamente por ceros y que los elementos simétricos sean opuestos entre sí.

$$A \text{ antisimétrica} \Leftrightarrow A^t = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \; \forall i,j$$

EJEMPLO 33

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 0 & 7 \\ -4 & -6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & -5 & -6 \\ 3 & 5 & 0 & -7 \\ 4 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t = -1 \cdot A \Rightarrow A^t = -A$$

MATRIZ REGULAR

A es invertible o regular si existe otra matriz cuadrada $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Cuando existe esta matriz A^{-1} es siempre única, con la propiedad mencionada y se llama matriz inverza de A.

Observación.
Nótese que no basta con cumplir solo $AA^{-1} = I_n$ (o solo $A^{-1}A = I_n$).

ya que el producto no es en general conmutativo. Por tanto, la matriz inversa ha de verificar que los resultados de los dos productos son la matriz identidad.

EJEMPLO 34

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz regular cuya inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 21.
Comprobad que efectivamerte $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+1\cdot0+0\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot1+0\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot1 \\ 0\cdot1+0\cdot1+0\cdot(-1) & 0\cdot(-1)+1\cdot1+0\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot0+0\cdot1 \\ 1\cdot0+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot(-1)+0\cdot1+1\cdot1 & 0\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot1+(-1)\cdot1+0\cdot1 & 0\cdot1+(-1)(0)+1\cdot0 \\ 0\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 0\cdot1+1\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 \\ -1\cdot1+1\cdot0+1\cdot1 & -1\cdot1+1\cdot1+0\cdot1 & -1\cdot0+0\cdot1+1\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

MATRIZ SINGULAR

A es singular si no tiene inversa, es decir cuando no es regular

Ejemplo 35

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Es una matriz singular, más adelante, cuando hablemos de determinates, veremos el porqué.

MATRIZ ORTOGONAL.

A es ortogonal si es regular y además si inversa coincide con su transpuesta. Dicho de otra manera

$$A \text{ ortogonal} \Leftrightarrow AA^t = A^tA = I_n$$

EJEMPLO 36

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Es una matriz ortogonal ya que

$$AA^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3$$

EJERCICIO 22 Compropar que $A^tA = I_3$

$$A^tA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2\cdot2+2\cdot2+1\cdot1 & -2\cdot2+2\cdot1+2\cdot1 & 2\cdot1+(-2)\cdot2+2\cdot1 \\ -2\cdot2+2\cdot1+2\cdot1 & -2\cdot(-2)+1\cdot1+2\cdot2 & -2\cdot1+(-2)\cdot1+2\cdot2 \\ 1\cdot2+(-2)\cdot1+2\cdot2 & -2\cdot1+-2\cdot1+2\cdot2 & 1\cdot1+(-2)(-2)+2\cdot2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

PROPOSICION

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces si A y B son invertibles, también lo es su producto y se cumple:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Ejercicio 23. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

omprobar que $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ donde $(AB)^{-1} = -\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 21 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$^{-1}\cdot A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 0\cdot8+(-3)\cdot(-7) & -2\cdot0+(-3)\cdot1 \\ 1\cdot8+(-7)\cdot1 & -2\cdot1+1\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 21 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (AB)^{-1} \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

Demostración

Para probar $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, lo que haremos será ver que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$$

Por un lado, por la propiedad asociativa y como B^{-1} es la inversa de B, tenemos

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1}$$

ya que, recordemos, la matriz identidad I_n actúa como elemento neutro del producto de matrices. Ahora, como A^{-1} es la inversa de A, se tiene que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = AA^{-1} = I_n$$

tal y como queríamos demostrar.