Matrices escalonadas

Vamos a introducir ahora un tipo especial de matrices triangulares superiores (inferiores), las llamadas matrices escalonada por filas (por columnas).

Matriz Escalonada por Filas. Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es escalonada por filas cuando se cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

- El primer elemento no nulo de cada fila, denominado pivote, está a la derecha del pivote de la fila superior.
- Las filas nulas están en la parte inferior de la matriz.

Ejemplo 37
Estas matrices son escalonadas por filas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz Escalonada Reducida. Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es escalonada reducida por filas si es escalonada y además cumple los siguientes requisitos:

- Los pivotes son todos 1's.
- Todos los elementos que están en la misma columna del pivote son nulos.

Ejemplo 38

Estas matrices son escalonadas reducidas por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 25

Dar definiciones equivalentes para las matrices escalonadas por columnas y matrices escalonadas reducidas por columnas.

Poner edos ejemplos de cada tipo de matriz.

Matriz Escalonada por Columnas. Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es escalonada por columnas cuando se cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

- El primer elemento no nulo de cada columna, denominado pivote , esta a la derecha del pivote de la fila superior.
- Las columnas nulas están en la parte superior de la matriz.

Matriz Escalonada Reducida. Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es escalonada reducida por columnas si es escalonada y ademá cumple los siguientes requisitos:

- Los pivotes son todos 1´s.
- Todos los elementos que están en la misma fila del pivote son nulos.

Ejemplo Matrices escalonadas por columnas

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

Ejemplos de matrices escalonadas reducidas por columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones elementales por filas. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Las siguientes operaciones se llaman operaciuones elementales por filas de la matriz A:

- Multiplicar una fila por un $\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0.$
- Intercambiar filas.
- Sumar un múltiplo de una fila a otra.

De manera análoga se puede definir las operaciones elementales por columnas.

Matrices equivalentes por filas. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ por filas (por columnas) si una de ellas se puede obtener a partir de la otra mediante un número finito de operaciones elementales por filas (columnas).

Teorema

- Toda matriz es equivalente por filas (columnas) a una matriz escalonada por filas (columnas).
- Toda matriz es equivalente por filas (columnas) a una única matriz escalonada reducida por filas (columnas).

La demostración la haremos de manera constructiva. Es decir, hallamos un algoritmo (Método de Gauss) para encontrar la matriz escalonada en este caso.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, entonces procedemos de la siguiente manera.

1. Si $a_{11} \neq 0$, se divide la primera fila a_{11} y se obtiene una matriz equivalente en la que a_{11} = 1. Entonces este nuevo a_{11} será el primer pivote. Ahora, se resta a cada fila i la primera fila multiplicada por a_{i1}. Así, la primera resta de elementos de la primera columna será 0 y se pasa al punto 4.
2. Si $a_{11} = 0$, se busca el primer i tal que $a_{i1} \neq 0$. Entonces, se intercambia la primera fila y la i obteniendo una matriz equialente con un nuevo $a_{11} \neq 0$. A partir de aquí, volvemos al punto 1 y repetimos el proceso.
3. Si $a_{i1} = 0$ para todo i = 1, ..., m entonces, dejamos esta primera columna en ceros y aplicamos el algoritmo del paso 1 a la matriz resultante de eliminar la primera columna.
4. Se repite el proceso a la matriz obtenida de eliminar la primera fila y ala primera columna de nuestra matriz.

Nótese que con el método de la demostración se obtiene la única matriz escalonada equivalente por filas cuyos pivotes son todos unos.

Para obtener la matriz escalonada reducida, si hay algún elemento a_{ij} distinto de cero por encima de algún determinado pivote, se resta a la fila de este elemento (la fila i), la fila del pivote multiplicado por a_{ij}.

Se repite el paso anterior tantas veces como sea necesario y se llega así a la matriz escalonada reducida equivalente.

Ejercicio 27

Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular su matriz escalonada y su escalonada reducida por filas

Solución

$$A \sim_{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim_{f_3 + 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \\ 0 & 4 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{\frac{1}{2}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 4 & 5 & 13 \end{pmatrix} \sim_{f_3 - 4f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 11 & 37 \end{pmatrix}$$

Una matriz escalonada equivalente es A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 11 & 37 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la matriz escalonada reducida, debemos seguir operaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 11 & 37 \end{pmatrix} \sim_{\frac{1}{11}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{11} \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_2 + \frac{3}{2}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{11} \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_1 - 3f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{56}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{11} \end{pmatrix} \sim_{f_1 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -91/22 \\ 0 & 1 & 0 & -21/22 \\ 0 & 0 & 1 & 37/11 \end{pmatrix}$$

Con lo cual, la matriz reducida equivalente a A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -91/22 \\ 0 & 1 & 0 & -21/22 \\ 0 & 0 & 1 & 37/11 \end{pmatrix}$$

Ejercico 27

Considerar la matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 5}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz escalonada y escalonada reducida por filas.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim_{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_3 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_2 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$ Esta es la matriz escalonada

$$\sim_{f_2/3,\ f_3/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -8/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_2 + \frac{8}{3}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 40/9 & 5/9 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_1 - 4f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -23/3 & 10/3 \\ 0 & 1 & 0 & 40/9 & 3/9 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ESCALONADA POR FILAS REDUCIDA