PROPIEDADES ASOCIATIVAS Y DISTRIBUTIVAS DE MATRICES

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO POR ESCALARES RESPECTO DE LA SUMA

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B, \ \lambda \in K$$

EJERCICIO 8

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando como ejemplo las demostraciones anteriores.

$A_{m\times n}$ y $B_{m \times n}$

$$A = [a_{ij}] \quad B = [b_{ij}]$$

$\lambda \in K$

$\lambda(A+B) \qquad A+B = [a_{ij} + b_{ij}]$

$$\lambda(A+B) = \lambda[a_{ij} + b_{ij}]$$

$$\lambda[a_{ij}+b_{ij}] = [\lambda(a_{ij}+b_{ij})]$$

$$[\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}] = [\lambda a_{ij}] + [\lambda b_{ij}]$$

$$[\lambda a_{ij}] = \lambda_A \qquad [\lambda b_{ij}] = \lambda_B$$

$$[\lambda a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = \lambda_A + \lambda_B$$

PROPIEDDES CARACTERÍSTICAS

EJEMPLO 22

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) \quad \lambda = 3 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda A + \lambda B = \begin{pmatrix} 21 & 3 & 15 \\ -3 & -6 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 27 & 6 & 15 \\ -6 & -12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(A+B) = 3\begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 6 & 15 \\ -6 & -12 & 9 \end{pmatrix}$$

ELEMENTO NEUTRO DEL PRODUCTO POR ESCALAR

1A = A

Ejemplo 23

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 6 & 9 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1A = \begin{pmatrix} 1\cdot3 & 1\cdot(-5) & 1\cdot2 & 1\cdot0 & 1\cdot1 \\ 1\cdot7 & 1\cdot4 & 1\cdot1 & 1\cdot(-3) & 1\cdot(-2) \\ 1\cdot6 & 1\cdot9 & 1\cdot(-5) & 1\cdot1 & 1\cdot0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 6 & 9 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

DEMOSTRACIÓN

Por definición

$$1A = (1\cdot a_{ij}) = a_{ij} = A$$

ya que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ y 1 es el elemento neutro del producto

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO POR MATRICES RESPECTO A LA SUMA DE DOS ESCALARES

$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A, \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

EJERCICIO 9

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando en cuenta como ejemplo las demostraciones anteriores.

$A_{m\times n}$ y $A = [a_{ij}] \quad \lambda$ y $\mu \in \mathbb{K}$

$$(\lambda+\mu)A = [(\lambda+\mu)a_{ij}]$$

Usando la propiedad $(x+y)z = xz + yz$

$$\rightarrow [(\lambda+\mu)a_{ij}] = [\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}]$$

$$[\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}] = [\lambda a_{ij}] + [\mu a_{ij}]$$

$$[\lambda a_{ij}] = \lambda[a_{ij}] = \lambda A$$

$$[\mu a_{ij}] = \mu[a_{ij}] = \mu A$$

$$[\lambda a_{ij}] + [\mu a_{ij}] = \lambda_A + \mu A$$

EJEMPLO 24

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 5, \mu = -7$$

$$(\lambda+\mu)A = -2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A + \mu A = 5A + (-7)A$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD ASOCIATIVA DEL PROD

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A), \ \lambda, \mu \in \mathcal{M}$$

EJERCICIO 10

Escribe paso a paso la demostracion de esta propiedad tomando como ejemplo demostraciones anteriores

$A_{m\times n} \quad A = [a_{ij}] \quad \lambda$ y $\mu \in \mathbb{K}$

$$(\lambda\mu)A = [(\lambda\mu)a_{ij}]$$

usa propiedad asociativa de escalares

$(xy)z = x(yz)$

$$[\lambda(\mu a_{ij})] = \lambda[\mu a_{ij}]$$

$$[\mu a_{ij}] = \mu A$$

$$\lambda[\mu a_{ij}] = \lambda(\mu A)$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

EJEMPLO 25

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 5, \mu = -7$$

$$(\lambda\mu)A = -35A = \begin{pmatrix} -35 & 35 \\ 0 & -35 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(\mu A) = 5(-7A) = 5\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -35 & 35 \\ 0 & -35 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD ASOCIATIVA DEL PRODUCTO DE UN ESCALAR POR DOS MATRICES

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B, \ \lambda \in \mathbb{K}$$

EJEMPLO 26

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \lambda = 3$$

$$(\lambda A)B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 27 & 39 \\ 27 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(AB) = 3\cdot\begin{pmatrix} 8 & 9 & 13 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 27 & 39 \\ 27 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 11

Escribe paso a paso la demostración de esta propiedad tomando en cuenta como ejemplo las demostraciones anteriores

$\lambda \in \mathbb{K} \qquad A = [a_{ij}] \quad B = [b_{jk}]$

$A_{m\times n}$

$B_{n\times p}$

calculamos el producto de matrices

$C = AB \qquad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_{jk}$

$$AB = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right]$$

$$\lambda(AB) = \lambda\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right] = \left[\lambda\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right]$$

$$\lambda(AB) = \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda(a_{ij}b_{jk})\right]$$

$$D = \lambda_A \qquad D = \lambda[a_{ij}] = [\lambda a_{ij}]$$

$$d_{ij} = \lambda a_{ij}$$

$$(\lambda A)B = \left[\sum_{j=1}^{n} d_{ij}b_{jk}\right] \quad d_{ij} = \lambda a_{ij}$$

$$(\lambda A)B = \left[\sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij})b_{jk}\right]$$

$$\lambda(AB) \rightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda(a_{ij}b_{jk})$$

$$(\lambda A)B \rightarrow \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij})b_{jk}$$

λ, a_{ij}, b_{jk} son escalares

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y \rightarrow \lambda(a_{ij}b_{jk}) = (\lambda a_{ij})b_{jk}$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B$$