OPERACIONES CON MATRICES

SUMA DE MATRICES

La suma de dos matrices A y B solo es posible si ambas son del mismo orden m x n, entonces se suman término a término. Es decir dadas $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $B(b_{ij})_{m\times n}$ se define la suma de A y B como la matriz:

$$C=(C_{ij})_{m\times n} \text{ donde } c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\,, \quad \forall i=1,\dots,m \ \forall j=1,\dots,n$$

EJEMPLO 11

Sean

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la suma es

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO POR UN ESCALAR

Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A=(a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se define el producto λA como una nueva matriz de orden m x n dada por:

$$\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})_{m\times n}$$

Ejemplo 12

Dados

$$\lambda = 3 \quad y \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES

Para poder realizar el producto de una matriz A por una matriz B, el número de columnas de A debe de coincidir con el número de filas de B, entonces cada entrada ij de la matriz producto se obtiene multiplicando la fila de i de A por la columna j de B y sumando los números resultantes.

Concretamente, si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, el producto AB es una matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ definida como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = (C_{ij})$$

$$\text{Con } c_{ij} = a_{i1}+b_{1j}+a_{i2}+b_{2j}+\dots+a_{in}+b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Nótese que $A_{m\times n}\cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$

Ejemplo 13

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, epl producto de A x B es una matriz cuadrada de orden 2

$$AB=\begin{pmatrix} -1\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot(-1)+1\cdot 0 & -1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+1\cdot 1 \\ 3\cdot 2+0\cdot(-2)+1\cdot(-1)+0\cdot 0 & 3\cdot 1+(-2)\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Mientras que el producto de B x A es una matriz de orden 4.

$$BA=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+1\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot(-2) & 2\cdot 3+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 0 \\ 0\cdot(-1)+2\cdot 3 & 0\cdot 2+2\cdot(-2) & 0\cdot 3+2\cdot 1 & 0\cdot 1+2\cdot 0 \\ -1\cdot(-1)+3\cdot 3 & -1\cdot 2+3\cdot(-2) & -1\cdot 3+3\cdot 1 & -1\cdot 1+3\cdot 0 \\ 0\cdot(-1)+1\cdot 3 & 0\cdot 2+1\cdot(-2) & 0\cdot 3+1\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 2 \\ 6 & -4 & 2 & 0 \\ 10 & -8 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El producto de una matriz no es comutativo.

TRAZA

Es la suma de los elementos de la diagonal principal.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$tr(A) = a_{11}+a_{22}+\dots a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$