Rango de una matriz

Dada la unicidad de la matriz escalonada reducida, se puede definir conceptos sobre una matriz A mediante su matriz escalonada reducida por filas (por columnas) equivalente

Rango. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se denomina rango de A y se denota como rg(A), al número de filas no nulas que tienen su única matriz escalonada (o su escalonada reducida) por filas equivalentes.

Ejemplo 38
La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene rango 3

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El rango de A coincidirá con el número de columas no nulas de su única matriz escalonada reducida por columas equivalentes.

En realidad, el número de filas (columnas) no nulas es siempre el mismo en cualquier matriz equivalente por filas (por columnas) a la dada. Por tanto, para calcular el rango de una matriz A bastará con encotrar una matriz B escalonada por filas (columnas) equivalentes a A y contar el número de filas(columnas) no nulas en B.

Ejercicio 28

Calcula el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim_{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{F_3+2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \\ 0 & 4 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{F_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3/2 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{F_3-4F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3/2 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 37 \end{pmatrix} \quad rg(A) = 3$$

Calcula el rango de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim_{F_1/3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{F_3/2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim_{F_1-F_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} F_2-2F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Rg(B) = 3$$