PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES

Propiedades características

Siempre que tengan sentido las operaciones indicadas (es decir, que las matrices son de órdenes adecuados para poder realizarlas) se satisface las siguientes propiedades.

PROPIEDAD COMUTATIVA

A + B = B + A

Ejemplo 14

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}=B+A$$

Demostración

Dadas dos matrices A,B $\in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ queremos demostrar que

A + B = B + A

Por un lado, A + B = C donde $C=(c_{ij})$ con $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $\forall i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$

Por otro lado, B + A = D donde $D=(d_{ij})$ con $d_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ $\forall i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$

Pero $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ ya que $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$ con $\mathbb{K}$ un cuerpo

Por lo tanto

$$c_{ij}=d_{ij} \quad \forall i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n \Leftrightarrow C=D$$

PROPIEDADES ASOCIATIVAS DE LA SUMA

(A + B) + C = A + (B + C)

Ejemplo 15

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

(A + B) + C = $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 8 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 13 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 11 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}=A+(B+C)$

DEMOSTRACIÓN

Dadas las matrices A, B, C $\in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ queremos demostrar que

(A + B) + C = A + (B + C)

Por un lado, (A + B) + C = D donde $D=(d_{ij})$ con $d_{ij}=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$ $\forall i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$

Por otro lado, A + (B + C) = E donde $E=(e_{ij})$ con $e_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ $\forall i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$

Pero $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ ya que $a_i, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{K}$ con $\mathbb{K}$ un cuerpo

Por lo tanto

$$d_{ij}=e_{ij} \quad \forall_i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n \Longleftrightarrow D=E$$

ELEMENTO NEUTRO DE LA SUMA O ELEMENTO NULO

A + 0 = 0 + A = A

Ejemplo 16

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A+0=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}=A$$

$$0+A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}=A$$

DEMOSTRACIÓN

Dadas las matrices A, $0 \in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $A=(a_{ij})$ y 0 la matriz nula, queremos demostrar que

A + 0 = A

Sabemos que, A + 0 = B donde $B=(b_{ij})=a_{ij}+0$ $\forall i=1,\dots,m\ j=1,\dots,n$

Pero $a_{ij}+0=a_{ij}$ ya que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ con $\mathbb{K}$ un cuerpo y 0 es el elemento neutro para la suma.

Por lo tanto

A + 0 = A

MATRIZ OPUESTA.

$\forall A\,(a_{ij})_{m\times n}$ existe $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$ tal que

$$A+(-A)=(-A)+A=0$$

EJEMPLO 17

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow -A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -5 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & -4 \\ 4 & -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

COMPROBAR QUE EFECTIVAMENTE SE CUMPLE

$$A+(-A)=(-A)+A=0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -5 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & -4 \\ 4 & -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 2+(-2) & 3+(-3) & -1+1 & 2+(-2) \\ 3+(-3) & 2+(-2) & 5+(-5) & 0+0 \\ -1+1 & 7+(-7) & 0+0 & 4+(-4) \\ -4+4 & 1+(-1) & -3+3 & 7+(-7) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0$$

$$-A+A$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -5 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & -4 \\ 4 & -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2+2 & -3+3 & 1+(-1) & -2+2 \\ -3+3 & -2+2 & -5+5 & 0+0 \\ 1+(-1) & -7+7 & 0+0 & -4+4 \\ 4+(-4) & -1+1 & 3+(-3) & -7+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0$$

DEMOSTRACIÓN

Dadas las matrices A, - A $\in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $A=(a_{ij})$, $-A=(-a_{ij})$ queremos demostrar que

A + (-A) = 0

Sabemos que, A + (-A) = B donde B = (b_{ij}) con $b_{ij}=a_{ij}+(-a_{ij})$ $\forall_i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$

Pero $a_{ij}+(-a_{ij})=0$ ya que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ con $\mathbb{K}$ un cuerpo y $-a_{ij}$ es el elemento opuesto de a_{ij}

Porlo tanto,

A + (-A) = 0