

Cálculo de Programas

Trabalho Prático

LEI — 2022/23

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Janeiro de 2023

| | |
|-----------|---------------------------------|
| Grupo nr. | 12 |
| a94913 | José Manuel Antunes de Carvalho |
| a97031 | Miguel Filipe Cidade da Silva |
| a96351 | Luís Alberto Barreiro Araújo |
| a92926 | Marisa Ferreira Soares |

Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em **Haskell** (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abordarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo **A** onde encontrarão as instruções relativas ao software a instalar, etc.

Problema 1

Suponha-se uma sequência numérica semelhante à sequência de Fibonacci tal que cada termo subsequente aos três primeiros corresponde à soma dos três anteriores, sujeitos aos coeficientes a , b e c :

$$\begin{aligned}fabc0 &= 0 \\fabc1 &= 1 \\fabc2 &= 1 \\fabc(n+3) &= a*fabc(n+2) + b*fabc(n+1) + c*fabcn\end{aligned}$$

Assim, por exemplo, $f111$ irá dar como resultado a sequência:

1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, ...

$f123$ irá gerar a sequência:

1, 1, 3, 8, 17, 42, 100, 235, 561, 1331, ...

etc.

A definição de f dada é muito ineficiente, tendo uma degradação do tempo de execução exponencial. Pretende-se otimizar a função dada convertendo-a para um ciclo *for*. Recorrendo à lei de recursividade mútua, calcule *loop* e *initial* em

$$fbl\ a\ b\ c = wrap \cdot for\ (loop\ a\ b\ c)\ initial$$

por forma a f e fbl serem (matematicamente) a mesma função. Para tal, poderá usar a regra prática explicada no anexo B.

Valorização: apresente testes de *performance* que mostrem quão mais rápida é fbl quando comparada com f .

Problema 2

Pretende-se vir a classificar os conteúdos programáticos de todas as UCs lecionadas no *Departamento de Informática* de acordo com o [ACM Computing Classification System](#). A listagem da taxonomia desse sistema está disponível no ficheiro Cp2223data, começando com

```
acm_ccs = ["CCS",
           "    General and reference",
           "        Document types",
           "            Surveys and overviews",
           "            Reference works",
           "            General conference proceedings",
           "            Biographies",
           "            General literature",
           "            Computing standards, RFCs and guidelines",
           "            Cross-computing tools and techniques",
```

(10 primeiros itens) etc., etc.¹

Pretende-se representar a mesma informação sob a forma de uma árvore de expressão, usando para isso a biblioteca [Exp](#) que consta do material pedagógico da disciplina e que vai incluída no zip do projecto, por ser mais conveniente para os alunos.

1. Comece por definir a função de conversão do texto dado em *acm_ccs* (uma lista de *strings*) para uma tal árvore como um anamorfismo de [Exp](#):

$$\begin{aligned} tax &:: [String] \rightarrow Exp\ String\ String \\ tax &= [(gene)]_{Exp} \end{aligned}$$

Ou seja, defina o *gene* do anamorfismo, tendo em conta o seguinte diagrama²:

$$\begin{array}{ccc} Exp\ S\ S & \xleftarrow{\text{in } Exp} & S + S \times (Exp\ S\ S)^* \\ \uparrow tax & & \uparrow id + id \times tax^* \\ S^* & \xrightarrow{\text{out}} S + S \times S^* \xrightarrow{\dots} S + S \times (S^*)^* & \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{gene}}$

Para isso, tome em atenção que cada nível da hierarquia é, em *acm_ccs*, marcado pela indentação de 4 espaços adicionais — como se mostra no fragmento acima.

Na figura 1 mostra-se a representação gráfica da árvore de tipo [Exp](#) que representa o fragmento de *acm_ccs* mostrado acima.

2. De seguida vamos querer todos os caminhos da árvore que é gerada por *tax*, pois a classificação de uma UC pode ser feita a qualquer nível (isto é, caminho descendente da raiz "CCS" até um subnível ou folha).³

¹Informação obtida a partir do site [ACM CCS](#) seleccionando *Flat View*.

² S abrevia *String*.

³Para um exemplo de classificação de UC concreto, pf. ver a secção **Classificação ACM** na página pública de [Cálculo de Programas](#).



Figura 1: Fragmento de *acm_ccs* representado sob a forma de uma árvore do tipo [Exp](#).

Precisamos pois da composição de *tax* com uma função de pós-processamento *post*,

$$\begin{aligned} tudo &:: [String] \rightarrow [[String]] \\ tudo &= post \cdot tax \end{aligned}$$

para obter o efeito que se mostra na tabela 1.

| | | | |
|-----|-----------------------|--------------------------------------|--------------------------------|
| CCS | | | |
| CCS | General and reference | | |
| CCS | General and reference | Document types | |
| CCS | General and reference | Document types | Surveys and overviews |
| CCS | General and reference | Document types | Reference works |
| CCS | General and reference | Document types | General conference proceedings |
| CCS | General and reference | Document types | Biographies |
| CCS | General and reference | Document types | General literature |
| CCS | General and reference | Cross-computing tools and techniques | |

Tabela 1: Taxonomia ACM fechada por prefixos (10 primeiros ítems).

Defina a função *post* :: *Exp String String* \rightarrow $[[String]]$ da forma mais económica que encontrar.

Sugestão: Inspeccione as bibliotecas fornecidas à procura de funções auxiliares que possa re-utilizar para a sua solução ficar mais simples. Não se esqueça que, para o mesmo resultado, nesta disciplina “ganha” quem escrever menos código!

Sugestão: Para efeitos de testes intermédios não use a totalidade de *acm_ccs*, que tem 2114 linhas! Use, por exemplo, *take 10 acm_ccs*, como se mostrou acima.

Problema 3

O [tapete de Sierpinski](#) é uma figura geométrica [fractal](#) em que um quadrado é subdividido recursivamente em sub-quadrados. A construção clássica do tapete de Sierpinski é a seguinte: assumindo um quadrado de lado l , este é subdividido em 9 quadrados iguais de lado $l/3$, removendo-se o quadrado central. Este passo é depois repetido sucessivamente para cada um dos 8 sub-quadrados restantes (Fig. 2).

NB: No exemplo da fig. 2, assumindo a construção clássica já referida, os quadrados estão a branco e o fundo a verde.

A complexidade deste algoritmo, em função do número de quadrados a desenhar, para uma profundidade n , é de 8^n (exponencial). No entanto, se assumirmos que os quadrados a desenhar são os que estão a verde, a complexidade é reduzida para $\sum_{i=0}^{n-1} 8^i$, obtendo um ganho de $\sum_{i=1}^n \frac{100}{8^i} \%$. Por exemplo, para $n = 5$, o ganho é de 14.28%. O objetivo deste problema é a implementação do algoritmo mediante a referida otimização.



Figura 2: Construção do tapete de Sierpinski com profundidade 5.



Figura 3: Tapete de Sierpinski com profundidade 2 e com os quadrados enumerados.

Assim, seja cada quadrado descrito geometricamente pelas coordenadas do seu vértice inferior esquerdo e o comprimento do seu lado:

type *Square* = (*Point*, *Side*)
type *Side* = *Double*
type *Point* = (*Double*, *Double*)

A estrutura recursiva de suporte à construção de tapetes de Sierpinski será uma [Rose Tree](#), na qual cada nível da árvore irá guardar os quadrados de tamanho igual. Por exemplo, a construção da fig. 3 poderá⁴ corresponder à árvore da figura 4.



Figura 4: Possível árvore de suporte para a construção da fig. 3.

Uma vez que o tapete é também um quadrado, o objetivo será, a partir das informações do tapete (coordenadas do vértice inferior esquerdo e comprimento do lado), desenhar o quadrado central, subdividir o tapete nos 8 sub-tapetes restantes, e voltar a desenhar, recursivamente, o quadrado nesses 8 sub-tapetes. Desta forma, cada tapete determina o seu quadrado e os seus 8 sub-tapetes. No exemplo em cima, o tapete que contém o quadrado 1 determina esse próprio quadrado e determina os sub-tapetes que contêm os quadrados 2 a 9.

⁴A ordem dos filhos não é relevante.

Portanto, numa primeira fase, dadas as informações do tapete, é construída a árvore de suporte com todos os quadrados a desenhar, para uma determinada profundidade.

$$squares :: (Square, Int) \rightarrow Rose\ Square$$

NB: No programa, a profundidade começa em 0 e não em 1.

Uma vez gerada a árvore com todos os quadrados a desenhar, é necessário extrair os quadrados para uma lista, a qual é processada pela função *drawSq*, disponibilizada no anexo [D](#).

$$rose2List :: Rose\ a \rightarrow [a]$$

Assim, a construção de tapetes de Sierpinski é dada por um hilomorfismo de *Rose Trees*:

$$\begin{aligned} sierpinski &:: (Square, Int) \rightarrow [Square] \\ sierpinski &= \llbracket gr2l, gsq \rrbracket_r \end{aligned}$$

Trabalho a fazer:

1. Definir os genes do hilomorfismo *sierpinski*.
2. Correr

```
sierp4 = drawSq (sierpinski (((0,0),32),3))
constructSierp5 = do drawSq (sierpinski (((0,0),32),0))
  await
  drawSq (sierpinski (((0,0),32),1))
  await
  drawSq (sierpinski (((0,0),32),2))
  await
  drawSq (sierpinski (((0,0),32),3))
  await
  drawSq (sierpinski (((0,0),32),4))
  await
```

3. Definir a função que apresenta a construção do tapete de Sierpinski como é apresentada em *construcaoSierp5*, mas para uma profundidade $n \in \mathbb{N}$ recebida como parâmetro.

$$\begin{aligned} constructSierp &:: Int \rightarrow IO\ [] \\ constructSierp &= present \cdot carpets \end{aligned}$$

Dica: a função *constructSierp* será um hilomorfismo de listas, cujo anamorfismo *carpets* $:: Int \rightarrow [[Square]]$ constrói, recebendo como parâmetro a profundidade n , a lista com todos os tapetes de profundidade $1..n$, e o catamorfismo *present* $:: [[Square]] \rightarrow IO\ []$ percorre a lista desenhando os tapetes e esperando 1 segundo de intervalo.

Problema 4

Este ano ocorrerá a vigésima segunda edição do Campeonato do Mundo de Futebol, organizado pela Federação Internacional de Futebol (FIFA), a decorrer no Qatar e com o jogo inaugural a 20 de Novembro.

Uma casa de apostas pretende calcular, com base numa aproximação dos *rankings*⁵ das seleções, a probabilidade de cada seleção vencer a competição.

Para isso, o diretor da casa de apostas contratou o Departamento de Informática da Universidade do Minho, que atribuiu o projeto à equipa formada pelos alunos e pelos docentes de Cálculo de Programas.

⁵Os *rankings* obtidos [aqui](#) foram escalados e arredondados.

Para resolver este problema de forma simples, ele será abordado por duas fases:

1. versão acadêmica sem probabilidades, em que se sabe à partida, num jogo, quem o vai vencer;
2. versão realista com probabilidades usando o mônade *Dist* (distribuições probabilísticas) que vem descrito no anexo C.

A primeira versão, mais simples, deverá ajudar a construir a segunda.

Descrição do problema

Uma vez garantida a qualificação (já ocorrida), o campeonato consta de duas fases consecutivas no tempo:

1. fase de grupos;
2. fase eliminatória (ou “mata-mata”, como é habitual dizer-se no Brasil).

Para a fase de grupos, é feito um sorteio das 32 seleções (o qual já ocorreu para esta competição) que as coloca em 8 grupos, 4 seleções em cada grupo. Assim, cada grupo é uma lista de seleções.

Os grupos para o campeonato deste ano são:

```
type Team = String
type Group = [Team]
groups :: [Group]
groups = [ ["Qatar", "Ecuador", "Senegal", "Netherlands"],
  ["England", "Iran", "USA", "Wales"],
  ["Argentina", "Saudi Arabia", "Mexico", "Poland"],
  ["France", "Denmark", "Tunisia", "Australia"],
  ["Spain", "Germany", "Japan", "Costa Rica"],
  ["Belgium", "Canada", "Morocco", "Croatia"],
  ["Brazil", "Serbia", "Switzerland", "Cameroon"],
  ["Portugal", "Ghana", "Uruguay", "Korea Republic"] ]
```

Deste modo, *groups !! 0* corresponde ao grupo A, *groups !! 1* ao grupo B, e assim sucessivamente. Nesta fase, cada seleção de cada grupo vai defrontar (uma vez) as outras do seu grupo.

Passam para o “mata-mata” as duas seleções que mais pontuarem em cada grupo, obtendo pontos, por cada jogo da fase grupos, da seguinte forma:

- vitória — 3 pontos;
- empate — 1 ponto;
- derrota — 0 pontos.

Como se disse, a posição final no grupo irá determinar se uma seleção avança para o “mata-mata” e, se avançar, que possíveis jogos terá pela frente, uma vez que a disposição das seleções está desde o início definida para esta última fase, conforme se pode ver na figura 5.

Assim, é necessário calcular os vencedores dos grupos sob uma distribuição probabilística. Uma vez calculadas as distribuições dos vencedores, é necessário colocá-las nas folhas de uma *LTree* de forma a fazer um *match* com a figura 5, entrando assim na fase final da competição, o tão esperado “mata-mata”. Para avançar nesta fase final da competição (i.e. subir na árvore), é preciso ganhar, quem perder é automaticamente eliminado (“mata-mata”). Quando uma seleção vence um jogo, sobe na árvore, quando perde, fica pelo caminho. Isto significa que a seleção vencedora é aquela que vence todos os jogos do “mata-mata”.

Arquitetura proposta

A visão composicional da equipa permitiu-lhe perceber desde logo que o problema podia ser dividido, independentemente da versão, probabilística ou não, em duas partes independentes — a da fase de grupos e a do “mata-mata”. Assim, duas sub-equipas poderiam trabalhar em paralelo, desde que se



Figura 5: O “mata-mata”

garantissem a composicionalidade das partes. Decidiu-se que os alunos desenvolveriam a parte da fase de grupos e os docentes a do “mata-mata”.

Versão não probabilística

O resultado final (não probabilístico) é dado pela seguinte função:

```
winner :: Team
winner = wcup groups
wcup = knockoutStage · groupStage
```

A sub-equipa dos docentes já entregou a sua parte:

```
knockoutStage = ([id, koCriteria])
```

Considere-se agora a proposta do *team leader* da sub-equipa dos alunos para o desenvolvimento da fase de grupos:

Vamos dividir o processo em 3 partes:

- gerar os jogos,
- simular os jogos,
- preparar o “mata-mata” gerando a árvore de jogos dessa fase (fig. 5).

Assim:

```
groupStage :: [Group] → LTree Team
groupStage = initKnockoutStage · simulateGroupStage · genGroupStageMatches
```

Começamos então por definir a função *genGroupStageMatches* que gera os jogos da fase de grupos:

```
genGroupStageMatches :: [Group] → [[Match]]
genGroupStageMatches = map generateMatches
```

onde

```
type Match = (Team, Team)
```

Ora, sabemos que nos foi dada a função

```
gsCriteria :: Match → Maybe Team
```

que, mediante um certo critério, calcula o resultado de um jogo, retornando *Nothing* em caso de empate, ou a equipa vencedora (sob o construtor *Just*). Assim, precisamos de definir a função

```
simulateGroupStage :: [[Match]] → [[Team]]
simulateGroupStage = map (groupWinners gsCriteria)
```

que simula a fase de grupos e dá como resultado a lista dos vencedores, recorrendo à função `groupWinners`:

```
groupWinners criteria = best 2 · consolidate · (>>=matchResult criteria)
```

Aqui está apenas em falta a definição da função `matchResult`.

Por fim, teremos a função `initKnockoutStage` que produzirá a [LTree](#) que a sub-equipa do “mata-mata” precisa, com as devidas posições. Esta será a composição de duas funções:

```
initKnockoutStage = [glT] · arrangement
```

Trabalho a fazer:

1. Definir uma alternativa à função genérica `consolidate` que seja um catamorfismo de listas:

```
consolidate' :: (Eq a, Num b) ⇒ [(a,b)] → [(a,b)]
consolidate' = [cGene]
```

2. Definir a função `matchResult :: (Match → Maybe Team) → Match → [(Team, Int)]` que apura os pontos das equipas de um dado jogo.
3. Definir a função genérica `pairup :: Eq b ⇒ [b] → [(b,b)]` em que `generateMatches` se baseia.
4. Definir o gene `glT`.

Versão probabilística

Nesta versão, mais realista, `gsCriteria :: Match → (Maybe Team)` dá lugar a

```
pgsCriteria :: Match → Dist (Maybe Team)
```

que dá, para cada jogo, a probabilidade de cada equipa vencer ou haver um empate. Por exemplo, há 50% de probabilidades de Portugal empatar com a Inglaterra,

```
pgsCriteria("Portugal", "England")
  Nothing  50.0%
  Just "England"  26.7%
  Just "Portugal"  23.3%
```

etc.

O que é `Dist`? É o mónade que trata de distribuições probabilísticas e que é descrito no anexo [C](#), página [11](#) e seguintes. O que há a fazer? Eis o que diz o vosso *team leader*:

O que há a fazer nesta versão é, antes de mais, avaliar qual é o impacto de `gsCriteria` virar monádica (em `Dist`) na arquitetura geral da versão anterior. Há que reduzir esse impacto ao mínimo, escrevendo-se tão pouco código quanto possível!

Todos lembraram algo que tinham aprendido nas aulas teóricas a respeito da “monadificação” do código: há que reutilizar o código da versão anterior, monadificando-o.

Para distinguir as duas versões decidiu-se afixar o prefixo ‘p’ para identificar uma função que passou a ser monádica.

A sub-equipa dos docentes fez entretanto a monadificação da sua parte:

```
pwinner :: Dist Team
pwinner = pwcup groups
```


$pwcup = pknockoutStage \bullet pgroupStage$

E entregou ainda a versão probabilística do “mata-mata”:

```
pknockoutStage = mcataLTree' [return,pkoCriteria]
mcataLTree' g = k where
  k (Leaf a) = g1 a
  k (Fork (x,y)) = mmbin g2 (k x,k y)
  g1 = g · i1
  g2 = g · i2
```

A sub-equipa dos alunos também já adiantou trabalho,

$pgroupStage = pinitKnockoutStage \bullet psimulateGroupStage \cdot genGroupStageMatches$

mas faltam ainda *pinitKnockoutStage* e *pgroupWinners*, esta usada em *psimulateGroupStage*, que é dada em anexo.

Trabalho a fazer:

- Definir as funções que ainda não estão implementadas nesta versão.
- **Valorização:** experimentar com outros critérios de “ranking” das equipas.

Importante: (a) código adicional terá que ser colocado no anexo E, obrigatoriamente; (b) todo o código que é dado não pode ser alterado.

Anexos

A Documentação para realizar o trabalho

Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita “[literária](#)” [?], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2223t.pdf` que está a ler é já um exemplo de [programação literária](#): foi gerado a partir do texto fonte `cp2223t.lhs`⁶ que encontrará no [material pedagógico](#) desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2223t.zip` e executando:

```
$ lhs2TeX cp2223t.lhs > cp2223t.tex
$ pdflatex cp2223t
```

em que [lhs2tex](#) é um pré-processador que faz “pretty printing” de código Haskell em [L^AT_EX](#) e que deve desde já instalar utilizando o utilitário [cabal](#) disponível em [haskell.org](#).

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2223t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em [Haskell](#), para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2223t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2223t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo [GHCi](#) para ser executado.

⁶O sufixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

A.1 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 (ou 4) alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em todos os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo E com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com [BibTeX](#)) e o índice remissivo (com [makeindex](#)),

```
$ bibtex cp2223t.aux
$ makeindex cp2223t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou.

No anexo D, disponibiliza-se algum código [Haskell](#) relativo aos problemas apresentados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

A.2 Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:⁷

$$\begin{aligned} id &= \langle f, g \rangle \\ \equiv & \quad \{ \text{universal property} \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\ \equiv & \quad \{ \text{identity} \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\ \square \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* \LaTeX [xymatrix](#), por exemplo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\ \text{\scriptsize $\langle g \rangle$} \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize $id + \langle g \rangle$} \\ B & \xleftarrow{g} & 1 + B \end{array}$$

B Regra prática para a recursividade mútua em \mathbb{N}_0

Nesta disciplina estudou-se como fazer [programação dinâmica](#) por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.⁸

Para o caso de funções sobre os números naturais (\mathbb{N}_0 , com functor $F X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado [Cálculo de Programas](#). Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema:

$$\begin{aligned} fib\ 0 &= 1 \\ fib\ (n+1) &= f\ n \end{aligned}$$

⁷Exemplos tirados de [?].

⁸Lei (3.95) em [?], página 112.

$$f\ 0 = 1$$

$$f\ (n + 1) = fib\ n + f\ n$$

Obter-se-á de imediato

$$fib' = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$\text{loop } (fib, f) = (f, fib + f)$$

$$\text{init} = (1, 1)$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.⁹
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável *n*.
- Em *init* colecionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em \mathbb{N}_0 . Seguindo o método estudado nas aulas¹⁰, de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$f\ 0 = c$$

$$f\ (n + 1) = f\ n + k\ n$$

$$k\ 0 = a + b$$

$$k\ (n + 1) = k\ n + 2\ a$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$\text{loop } (f, k) = (f + k, k + 2 * a)$$

$$\text{init} = (c, a + b)$$

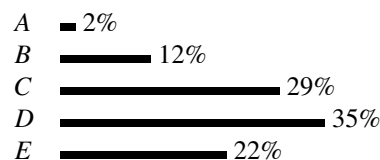
C O mónade das distribuições probabilísticas

Mónades são funtores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca [Probability](#) oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\text{newtype Dist } a = D \{ \text{unD} :: [(a, \text{ProbRep})] \} \quad (1)$$

em que *ProbRep* é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \text{Dist } a$ indica que a probabilidade de *a* é *p*, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de *d* somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

$$d_1 :: \text{Dist Char}$$

$$d_1 = D [('A', 0.02), ('B', 0.12), ('C', 0.29), ('D', 0.35), ('E', 0.22)]$$

que o [GHCi](#) mostrará assim:

⁹Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

¹⁰Secção 3.17 de [?] e tópico [Recursividade mútua](#) nos vídeos de apoio às aulas teóricas.

```
'D' 35.0%
'C' 29.0%
'E' 22.0%
'B' 12.0%
'A' 2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d_2 = \text{uniform}(\text{words "Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
"Uma" 20.0%
"cinco" 20.0%
"de" 20.0%
"frase" 20.0%
"palavras" 20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d_3 = \text{normal} [10..20]$$

etc.¹¹ Dist forma um **mónade** cuja unidade é $\text{return } a = D [(a, 1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g) a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g a, (y, q) \leftarrow f x]$$

em que $g : A \rightarrow \text{Dist } B$ e $f : B \rightarrow \text{Dist } C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica.

D Código fornecido

Problema 1

Alguns testes para se validar a solução encontrada:

```
test a b c = map (fbl a b c) x ≡ map (f a b c) x where x = [1..20]
test1 = test 1 2 3
test2 = test (-2) 1 5
```

Problema 2

Verificação: a árvore de tipo [Exp](#) gerada por

$$\text{acm_tree} = \text{tax acm_ccs}$$

deverá verificar as propriedades seguintes:

- $\text{expDepth acm_tree} \equiv 7$ (profundidade da árvore);
- $\text{length (expOps acm_tree)} \equiv 432$ (número de nós da árvore);
- $\text{length (expLeaves acm_tree)} \equiv 1682$ (número de folhas da árvore).¹²

O resultado final

$$\text{acm_xls} = \text{post acm_tree}$$

não deverá ter tamanho inferior ao total de nodos e folhas da árvore.

¹¹Para mais detalhes ver o código fonte de [Probability](#), que é uma adaptação da biblioteca [PHP](#) ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser saber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].

¹²Quer dizer, o número total de nodos e folhas é 2114, o número de linhas do texto dado.

Problema 3

Função para visualização em SVG:

```
drawSq x = picd' [Svg.scale 0.44 (0,0) (x >>= sq2svg)]
sq2svg (p,l) = (color "#67AB9F" · polyg) [p,p .+ (0,l),p .+ (l,l),p .+ (l,0)]
```

Para efeitos de temporização:

```
await = threadDelay 1000000
```

Problema 4

Rankings:

```
rankings = [
  ("Argentina",4.8),
  ("Australia",4.0),
  ("Belgium",5.0),
  ("Brazil",5.0),
  ("Cameroon",4.0),
  ("Canada",4.0),
  ("Costa Rica",4.1),
  ("Croatia",4.4),
  ("Denmark",4.5),
  ("Ecuador",4.0),
  ("England",4.0),
  ("France",4.8),
  ("Germany",4.5),
  ("Ghana",3.8),
  ("Iran",4.2),
  ("Japan",4.2),
  ("Korea Republic",4.2),
  ("Mexico",4.5),
  ("Morocco",4.2),
  ("Netherlands",4.6),
  ("Poland",4.2),
  ("Portugal",4.6),
  ("Qatar",3.9),
  ("Saudi Arabia",3.9),
  ("Senegal",4.3),
  ("Serbia",4.2),
  ("Spain",4.7),
  ("Switzerland",4.4),
  ("Tunisia",4.1),
  ("USA",4.4),
  ("Uruguay",4.5),
  ("Wales",4.3)]
```

Geração dos jogos da fase de grupos:

```
generateMatches = pairup
```

Preparação da árvore do “mata-mata”:

```
arrangement = (>>swapTeams) · chunksOf 4 where
  swapTeams [[a1,a2],[b1,b2],[c1,c2],[d1,d2]] = [a1,b2,c1,d2,b1,a2,d1,c2]
```

Função proposta para se obter o *ranking* de cada equipa:

$rank\ x = 4 ** (pap\ rankings\ x - 3.8)$

Cr terio para a simulação n o probabilística dos jogos da fase de grupos:

$gsCriteria = s \cdot \langle id \times id, rank \times rank \rangle$ **where**
 $s\ ((s_1, s_2), (r_1, r_2)) = \text{let } d = r_1 - r_2 \text{ in}$
if $d > 0.5$ **then** $Just\ s_1$
else if $d < -0.5$ **then** $Just\ s_2$
else $Nothing$

Cr terio para a simulação n o probabilística dos jogos do mata-mata:

$koCriteria = s \cdot \langle id \times id, rank \times rank \rangle$ **where**
 $s\ ((s_1, s_2), (r_1, r_2)) = \text{let } d = r_1 - r_2 \text{ in}$
if $d \equiv 0$ **then** s_1
else if $d > 0$ **then** s_1 **else** s_2

Cr terio para a simulação probabilística dos jogos da fase de grupos:

$pgsCriteria = s \cdot \langle id \times id, rank \times rank \rangle$ **where**
 $s\ ((s_1, s_2), (r_1, r_2)) =$
if $abs\ (r_1 - r_2) > 0.5$ **then** $fmap\ Just\ (pkoCriteria\ (s_1, s_2))$ **else** $f\ (s_1, s_2)$
 $f = D \cdot ((Nothing, 0.5) :) \cdot map\ (Just \times (/2)) \cdot unD \cdot pkoCriteria$

Cr terio para a simulação probabilística dos jogos do mata-mata:

$pkoCriteria\ (e_1, e_2) = D\ [(e_1, 1 - r_2 / (r_1 + r_2)), (e_2, 1 - r_1 / (r_1 + r_2))]$ **where**
 $r_1 = rank\ e_1$
 $r_2 = rank\ e_2$

Versão probabilística da simula  o da fase de grupos:¹³

$psimulateGroupStage = trim \cdot map\ (pgroupWinners\ pgsCriteria)$
 $trim = top\ 5 \cdot sequence \cdot map\ (filterP \cdot norm)$ **where**
 $filterP\ (D\ x) = D\ [(a, p) \mid (a, p) \leftarrow x, p > 0.0001]$
 $top\ n = vec2Dist \cdot take\ n \cdot reverse \cdot presort\ \pi_2 \cdot unD$
 $vec2Dist\ x = D\ [(a, n / t) \mid (a, n) \leftarrow x]$ **where** $t = sum\ (map\ \pi_2\ x)$

Versão mais eficiente da *pwinner* dada no texto principal, para diminuir o tempo de cada simulação:

$pwinner :: Dist\ Team$
 $pwinner = mbin\ f\ x \gg= pknockoutStage$ **where**
 $f\ (x, y) = initKnockoutStage\ (x ++ y)$
 $x = \langle g \cdot take\ 4, g \cdot drop\ 4 \rangle\ groups$
 $g = psimulateGroupStage \cdot genGroupStageMatches$

Auxiliares:

$best\ n = map\ \pi_1 \cdot take\ n \cdot reverse \cdot presort\ \pi_2$
 $consolidate :: (Num\ d, Eq\ d, Eq\ b) \Rightarrow [(b, d)] \rightarrow [(b, d)]$
 $consolidate = map\ (id \times sum) \cdot collect$
 $collect :: (Eq\ a, Eq\ b) \Rightarrow [(a, b)] \rightarrow [(a, [b])]$
 $collect\ x = nub\ [k \mapsto [d' \mid (k', d') \leftarrow x, k' \equiv k] \mid (k, d) \leftarrow x]$

Função binária monádica *f*:

$mmbin :: Monad\ m \Rightarrow ((a, b) \rightarrow m\ c) \rightarrow (m\ a, m\ b) \rightarrow m\ c$
 $mmbin\ f\ (a, b) = \text{do } \{x \leftarrow a; y \leftarrow b; f\ (x, y)\}$

Monadifica  o de uma função binária *f*:

¹³Faz-se "trimming" das distribu  es para reduzir o tempo de simulação.

$$mbin :: Monad\ m \Rightarrow ((a,b) \rightarrow c) \rightarrow (m\ a, m\ b) \rightarrow m\ c$$

$$mbin = mmbin \cdot (return \cdot)$$

Outras funções que podem ser úteis:

$$(f\ 'is'\ v)\ x = (f\ x) \equiv v$$

$$rcons\ (x,a) = x ++ [a]$$

E Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes.

Problema 1

Após analisar o contexto do problema apresentado, concluímos que se trata de um problema onde iremos recorrer à lei da recursividade mútua. É nos apresentado a seguinte função, derivada da sequência de Fibonacci usando um ciclo-for, tal que cada termo subsequente aos três primeiros corresponde à soma dos três anteriores:

$$f\ a\ b\ c\ 0 = 0$$

$$f\ a\ b\ c\ 1 = 1$$

$$f\ a\ b\ c\ 2 = 1$$

$$f\ a\ b\ c\ (n+3) = a * f\ a\ b\ c\ (n+2) + b * f\ a\ b\ c\ (n+1) + c * f\ a\ b\ c\ n$$

O problema pede então que seja aplicada a seguinte regra:

$$fib\ 0 = 1$$

$$fib\ (n+1) = f\ n$$

$$f\ 0 = 1$$

$$f\ (n+1) = fib\ n + f\ n$$

Onde iremos obter o seguinte:

$$fib' = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$\text{loop } (fib, f) = (f, fib + f)$$

$$\text{init} = (1, 1)$$

Deste modo podemos concluir o seguinte:

- O ciclo loop irá ter tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente exclusivas. Neste caso serão 3 argumentos, pois temos 3 termos iniciais.
- As funções serão respetivamente, g, h e f.
- Em init usam se os resultados dos casos base respetivamente, ((1,1),0).

Como aplicamos a lei da recursiva mutua a este exercicio:

$$\begin{aligned}
& \langle \langle g, h \rangle, f \rangle = \langle \langle j, k \rangle, i \rangle \\
\equiv & \{ \text{universal-cata} \} \\
& \langle \langle g, h \rangle, f \rangle \cdot \mathbf{in} = \langle \langle j, k \rangle, i \rangle \cdot F \langle \langle g, h \rangle, f \rangle \\
\equiv & \{ \text{fusão-x 2x} \} \\
& \langle \langle g \cdot \mathbf{in}, h \cdot \mathbf{in} \rangle, f \cdot \mathbf{in} \rangle = \langle \langle j \cdot F \langle \langle g, h \rangle, f \rangle, k \cdot F \langle \langle g, h \rangle, f \rangle \rangle, i \cdot F \langle \langle g, h \rangle, f \rangle \rangle \\
\equiv & \{ \text{Eq-x} \} \\
& \begin{cases} g \cdot \mathbf{in} = j \cdot F \langle \langle g, h \rangle, f \rangle \\ h \cdot \mathbf{in} = k \cdot F \langle \langle g, h \rangle, f \rangle \\ f \cdot \mathbf{in} = i \cdot F \langle \langle g, h \rangle, f \rangle \end{cases} \\
\equiv & \{ \text{definição de in; functor do naturais} \} \\
& \begin{cases} g \cdot [0, succ] = j \cdot (id + \langle \langle g, h \rangle, f \rangle) \\ h \cdot [0, succ] = k \cdot (id + \langle \langle g, h \rangle, f \rangle) \\ f \cdot [0, succ] = i \cdot (id + \langle \langle g, h \rangle, f \rangle) \end{cases} \\
\equiv & \{ \text{fusão-+; reflexão-+; eq-+; igualdade extencional; def-comp; def-split; def-x} \} \\
& \begin{cases} \begin{cases} g \ 0 = 1 \\ g \ (n+1) = c_1 \ ((g \ n, h \ n), f \ n) \end{cases} \\ \begin{cases} h \ 0 = 1 \\ h \ (n+1) = c_2 \ ((g \ n, h \ n), f \ n) \end{cases} \\ \begin{cases} f \ 0 = 0 \\ f \ (n+1) = c_3 \ ((g \ n, h \ n), f \ n) \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}$$

E é nos apresentado o que devemos resolver:

$$fbl \ a \ b \ c = \text{wrap for loop } a \ b \ c \ \text{initial}$$

As funções f, h e g que levantamos foram as seguintes:

$$\begin{aligned}
& g \ 0 = 1 \\
& g \ (n+1) = c_1 \ ((g \ n, h \ n), f \ n) \\
& h \ 0 = 1 \\
& h \ (n+1) = g \ n \\
& h \ (n+1) = c_2 \ ((g \ n, h \ n), f \ n) \\
& f \ 0 = 0 \\
& f \ (n+1) = h \ n \\
& f \ (n+1) = c_3 \ ((g \ n, h \ n), f \ n)
\end{aligned}$$

Como $h \ (n+1) = g \ n$, $c_2 = (p1.p1)$ e como $f(n+1) = h(n)$, $c_3 = (p2.p1)$.

Destas nossas funções a f é a função principal, sendo que esta pode ser traduzida para a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& f \ 0 = 0 \\
& f \ n = (\pi_2 \cdot \pi_1) \ ((f \ (n+1), f \ n), f \ (n-1))
\end{aligned}$$

Ou seja, em cada instante temos o resultado da função relativamente à etapa anterior, à etapa atual e à etapa seguinte. É desta forma que evitamos calcular novamente as mesmas coisas.

Casos base:

- $f(0) = 0$
- $f(1) = (p2.p1) \ ((g \ 0, h \ 0), f \ 0) = (p2.p1) \ ((1,1), 0) = 1$

$$\bullet f(2) = (p2.p1) ((g\ 1, h\ 1), f\ 1) = (p2.p1) ((?,g\ 0), h\ 0) = (p2.p1) ((?,1),1) = 1$$

Agora falta-nos apenas definir c1.

Partindo da definição da função, conseguimos reparar que ela utiliza o resultado das 3 etapas anteriores. Ora bem nós de certa forma já temos isso, como demonstrado no seguinte esquema:

$$\begin{aligned} g(n+1) &= c1((g\ n, h\ n), f\ n) \\ \equiv &\quad \{ \text{substituindo } n+1 \text{ por } n+3 \} \\ g(n+3) &= c1((g(n+2), h(n+2)), f(n+2)) \\ \equiv &\quad \{ \text{substituindo } f \text{ e } h \text{ por } g \} \\ g(n+3) &= c1((g(n+2), g(n+1)), g(n)) \end{aligned}$$

Ou seja c1, acaba por ser uma simples função visto que nós já temos esses tais resultados. Para isso basta aplicar as operações aritméticas aos resultados já obtidos.

Partindo do princípio que queremos manter os resultados de $(g(n+2), g(n+1))$, para ambos os elementos aplicamos umas funções de translação dentro do par $((-, -), -)$ para a direita. Essas funções de translação são c2 e c3 respetivamente. O resultado de $g(n)$ é apenas utilizado para o calculo de $g(n+3)$ e posteriormente é deixado "fora".

Como a, b e c são parâmetros da função, a definição de c1 é:

$$add \cdot (add \times id) \cdot (((a*) \times (b*)) \times (c*))$$

Sendo assim o nosso sistema de equações ficou:

$$\left\{ \begin{array}{l} g\ 0 = 1 \\ g(n+1) = (add \cdot (add \times id) \cdot (((a*) \times (b*)) \times (c*)))((g\ n, h\ n), f\ n) \\ h\ 0 = 1 \\ h(n+1) = (\pi_1 \cdot \pi_1)((g\ n, h\ n), f\ n) \\ f\ 0 = 1 \\ f(n+1) = (\pi_2 \cdot \pi_1)((g\ n, h\ n), f\ n) \end{array} \right.$$

Primeiramente vamos multiplicar a, b e c pelo respetivo resultado, e depois posteriormente só são aplicadas adições dos resultados das tais multiplicações.

Com isto, concluímos que a variável "initial", que vai ser definida por $((1,1),0)$, porque são os valores dos resultados iniciais dos coeficientes da sequência numérica, definidos no enunciado, que correspondem às funções também definidas inicialmente $((g,h),f)$.

$$initial = ((1,1),0)$$

De seguida definimos a função "wrap", que tem como funcionalidade ir buscar o segundo par de **for (loop a b c) initial**:

$$wrap = \pi_2$$

Por fim deduzimos a função "loop" simplesmente juntando c1, c2 e c3 numa única operação:

$$loop\ a\ b\ c = \langle \langle add \cdot (add \times id) \cdot (((a*) \times (b*)) \times (c*)), \pi_1 \cdot \pi_1 \rangle, \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle$$

$$f\ a\ b\ c = \langle \langle add \cdot (add \times id) \cdot (((a*) \times (b*)) \times (c*)), \pi_1 \cdot \pi_1 \rangle, \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle$$

Definição do loop, point-free (chegamos à conclusão que é igual a f):

$$loop\ a\ b\ c = \langle \langle add \cdot (add \times id) \cdot (((a*) \times (b*)) \times (c*)), \pi_1 \cdot \pi_1 \rangle, \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle$$

Valorização

```
testa a b c = map (fbl a b c) x where x = [1..20]
testb a b c = map (f a b c) x where x = [1..20]
test11a = testa 1 2 3
test11b = testb 1 2 3
test22a = testa (-2) 1 5
test22b = testb (-2) 1 5

*Main>:set +s
*Main>test11a
[1,1,3,8,17,42,100,235,561,1331,3158,7503,17812,42292,100425,238445,566171,1344336,3192013,7579198]
(0.07 secs, 472,216 bytes)
*Main>test11b
[1,1,3,8,17,42,100,235,561,1331,3158,7503,17812,42292,100425,238445,566171,1344336,3192013,7579198]
(0.29 secs, 152,214,104 bytes)
*Main>test22a
[1,1,-1,8,-12,27,-26,19,71,-253,672,-1242,1891,-1664,-991,9773,-28857,62532,-105056,128359]
(0.07 secs, 466,936 bytes)
*Main>test22b
[1,1,-1,8,-12,27,-26,19,71,-253,672,-1242,1891,-1664,-991,9773,-28857,62532,-105056,128359]
(0.28 secs, 152,580,536 bytes)
```

Assim é possível verificar que a função **fbl** é 4 vezes mais eficiente que a **f**, em termos de tempo e (+-)300 vezes mais eficiente em termos de memória usada.

Problema 2

Gene de *tax*:

A função *out* pode-se retirar do diagrama apresentado no enunciado. Basicamente se a lista tiver apenas um elemento, injetamo-lo à esquerda. Se a lista tiver uma cabeça e uma cauda, injetamos à direita o par (cabeça,[cauda]).

```
outP2 :: [a] → a + (a, [a])
outP2 [x] = i1 x
outP2 (h:t) = i2 (h,t)
```

A função *contaEspaces* é apenas uma função auxiliar que conta o numero de espaços iniciais de uma String, que será aplicada à função que trata as diretorias e subdiretorias.

```
contaEspaces :: String → ℤ
contaEspaces "" = 0
contaEspaces (' ':t) = 1 + contaEspaces t
contaEspaces _ = 0
```

Função auxiliar que apenas adiciona um elemento ao final de uma determinada matriz.

```
addLast :: (String, ℤ) → [[(String, ℤ)]] → [[(String, ℤ)]]
addLast t l = (take (length l - 1) l) ++ [last (l) ++ [t]]
```

A função *a seguir* recebe uma matriz de tuplos, que correspondem às diretorias e os respectivos número de espaços e um tuplo a ser inserido nessa mesma matriz. Ou seja a função vai determinar onde é inserido esse tuplo na matriz. Caso o número de espaços da cabeça do última lista da matriz for menor que o numero de espaços do elemento a inserir, então quer dizer que o tuplo (s,n) é subdiretoria desse elemento e adicionamos ao fim da lista com a função *addLast* acima descrita.

```
funAux :: [[(String, ℤ)]] → (String, ℤ) → [[(String, ℤ)]]
funAux [] x = [[x]]
```

```

funAux l (s,n) |  $\pi_2$  (head (last (l))) < n = addLast (s,n) l
| otherwise = l ++ [(s,n)]

```

A seguir está um exemplo para melhor compreensão

Se passarmos a matriz como argumento

```

[
  [
    ("General and References",0),("Document Types",4),
    ("Surveys and overviews",8),("Reference works",8)
  ]
]

```

e o par

```

("General conference proceedings",8)

```

o resultado final será:

```

[
  [
    ("General and References",0),("Document Types",4),
    ("Surveys and overviews",8),("Reference works",8),
    ("General conference proceedings",8)
  ]
]

```

Outro exemplo:

A matriz fornecida é:

```

[
  [
    ("Document Types",0),("Surveys and overviews",4),
    ("Reference works",4),("General conference proceedings",4)
  ]
]

```

e o par é:

```

("Cross-computing tools and techniques",0)

```

Resultado:

```

[
  [
    ("Document Types",0),("Surveys and overviews",4),
    ("Reference works",4),("General conference proceedings",4)
  ],
  [
    ("Cross-computing tools and techniques",0)
  ]
]

```

Os resultados dos seguintes testes estão corretos.

```

teste21 = expDepth acm_tree  $\equiv$  7
teste22 = length (expOps acm_tree)  $\equiv$  432
teste23 = length (expLeaves acm_tree)  $\equiv$  1682

```

A função *fun* pega numa lista de strings e passa para uma matriz de Strings de acordo com as subdiretorias, isto é, cada lista de strings corresponde a uma diretoria. Uma diretoria é definida de acordo com o número de espaços e para isso primeiro contamos o número de espaços de 4 em 4 para criar as respectivas listas de strings. No fim apagamos os espaços que delimitavam as subdiretorias com a função *drop*.

```
fun :: [String] → [[String]]
fun = map (map (λ(s,n) → drop 4 s)) · foldl funAux [] · map (λs → (s, contaEspacos s))
```

O gene é facilmente retirado do diagrama apresentado no enunciado.

$$\begin{array}{ccc} S^* & \xrightarrow{\text{out}} & S + S \times S^* \\ & \searrow \text{gene} & \downarrow \text{id} + (\text{id} \times \text{fun}) \\ & & S + S \times (S^*)^* \end{array}$$

$$\text{gene} = (\text{id} + (\text{id} \times \text{fun})) \cdot \text{outP2}$$

Função de pós-processamento:

```
auxPost :: (String, [[[String]]]) → [[String]]
auxPost (s, lis) = [s] : (((map (λl → s:l)) · concat) lis)
```

A função *post* gera a matriz a partir da ExpTree gerada pela função *tax*

$$\text{post} = \llbracket [\text{singl} \cdot \text{singl}, \text{auxPost}] \rrbracket_{\text{Exp}}$$

$$\begin{array}{ccc} (S^*)^* & \xleftarrow{\text{gene}} & S + S \times (S^*)^* \\ \uparrow \text{post} & & \uparrow \text{id} + \text{id} \times \text{post} \\ \text{ExpSS} & \xrightarrow{\text{outExp}} & S + S \times (S^*) \end{array}$$

Problema 3

Para resolver o problema 3, temos de tal como mencionado no enunciado, definir os genes do hilomorfismo *sierpinski*, ou seja definir *gr2l* e *gsq* e correr a função *sierp4* depois, temos de definir as funções *present* e *carpets* de modo a podermos desenhar tapetes de Sierpinski de profundidade *n*. Assim, de modo a alcançar a solução pretendida, codificamos as seguintes funções:

Primeiro começamos por definir a função *squares* como um anamorfismo de RoseTrees com gene *gsq*, esta função cria a árvore de suporte com todos os quadrados a desenhar, para uma dada profundidade.

$$\text{squares} = \llbracket \text{gsq} \rrbracket_R$$

De modo a termos a lista dos nove quadrados gerados a partir de um quadrado inicial quando se faz uma iteração no tapete de Sierpinski, tal como se pode ver nas figuras 2 e 3, em que um desses quadrados coincide com o quadrado a gerar no meio e os outros oito quadrados são colocados em torno do quadrado central, definimos a função *geraquadrados*. Esta função é bastante simples, pois apenas cria uma lista de quadrados, em que os quadrados gerados têm coordenadas diferentes do que o quadrado original, adicionando ou removendo um terço do *Side* do *Square*, passado como parâmetro. E alterando o valor do comprimento do lado do quadrado para um terço do valor original.

```
geraquadrados :: Square → [Square]
geraquadrados ((x,y),c) = [
```

```

((x+a,y+a),a),
((x,y+2*a),a),
((x+a,y+2*a),a),
((x+2*a,y+2*a),a),
((x,y+a),a),
((x+2*a,y+a),a),
((x,y),a),
((x+a,y),a),
((x+2*a,y),a)]
where
  a = c / 3

```

O gene *gsq*, tem como função gerar os quadrados a desenhar a partir de um quadrado original e uma dada profundidade.

Na forma como o definimos, utilizamos funções auxiliares, e para as explicarmos temos de observar o tipo dos argumentos com que trabalhamos. A primeira função que definimos foi, *paux*, esta função pega na segunda componente do tuplo passado como argumento (*Square*,*Int*), ou seja, no inteiro que representa o valor da profundidade e reduz esse valor uma unidade.

A função auxiliar *l*, também é bastante simples, simplesmente aplica a função *geraquadrados* para o quadrado passado no tuplo (*Square*,*Int*). Ou seja, *l* é a lista de nove quadrados gerados a partir do quadrado do argumento numa profundidade.

Assim, de modo a apresentar o tipo desejado no resultado, (*Square*,[(*Square*,*Int*)]), basta-nos pegar no primeiro quadrado gerado pela função *geraquadrados* que corresponde ao quadrado central, obtido através de *qc* e aplicar a *geraquadrados* para cada um dos quadrados gerados, decremento sempre a profundidade via *paux* e juntar num tuplo, ficando então com o resultado (quadrado inicial, lista de quadrados gerados a cada profundidade).

O aplicar da função que gera os quadrados a todos os quadrados gerados é garantido graças ao *map* que definimos, enquanto que a aplicação recursiva consoante o valor de *paux* é garantida por *qv*.

```

gsq :: (Square, Int) → (Square, [(Square, Int)])
gsq t = (qc, map (λs → (s, paux)) qv)
where
  paux = (π2 t) - 1
  l = geraquadrados (π1 t)
  qc = head l
  qv | paux ≠ -1 = tail l
     | otherwise = []

```

O esquema do anamorfismo *squares* é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{RoseTree Square} & \xrightleftharpoons[\text{in}]{\text{out}} & \text{Square} \times \text{RoseTree Square}^* \\
 \uparrow \text{squares} & & \uparrow \text{id} \times \text{squares}^* \\
 \text{Square} \times \text{Int} & \xrightarrow{\text{gsq}} & \text{Square} \times (\text{Square} \times \text{Int})^*
 \end{array} \tag{2}$$

Podemos definir a função *rose2 list* através do catamorfismo de *RoseTrees* que tem como gene *gr2l*, esta função transforma uma *RoseTree* numa lista e será usada para extrair os quadrados da árvore auxiliar.

O gene *gr2l* é bastante simples e fizemo-lo de forma *point-free*. O que esta função faz é colocar à cabeça da lista a raiz da árvore e concatenar esse elemento à concatenação de todos os elementos das subárvores. o que se obtém aplicando *cons* ao produto de *id* e *concat*.

```

rose2List = (⟦gr2l⟧)R
gr2l = cons · (id × concat)

```

O esquema do catamorfismo *rose2List* tem o seguinte aspeto:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Square}^* & \xleftarrow{\text{gr2l}} & \text{Square} \times (\text{Square}^*)^* \\
 \uparrow \text{rose2List} & \text{out} & \uparrow \text{id} \times \text{rose2List}^* \\
 \text{RoseTree Square} & \xrightarrow[\cong]{\quad} & \text{Square} \times \text{RoseTree Square}^* \\
 & \text{in} &
 \end{array} \tag{3}$$

Logo, através dos esquemas já construídos, conseguimos elaborar o esquema do hilomorfismo *sierpinski* da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Square}^* & \xleftarrow{\text{gr2l}} & \text{Square} \times (\text{Square}^*)^* \\
 \uparrow \text{rose2List} & \text{out} & \uparrow \text{id} \times \text{rose2List}^* \\
 \text{RoseTree Square} & \xrightarrow[\cong]{\quad} & \text{Square} \times \text{RoseTree Square}^* \\
 \uparrow \text{squares} & \text{in} & \uparrow \text{id} \times \text{squares}^* \\
 \text{Square} \times \text{Int} & \xrightarrow{\text{gsq}} & \text{Square} \times (\text{Square} \times \text{Int})^*
 \end{array} \tag{4}$$

Por fim, como a função *constructSierp* é um hilomorfismo de listas, é necessário definir o anamorfismo *carpets* e o catamorfismo *present* com os tipos presentes na dica do enunciado. A função *carpets* constrói a lista de todos os tapetes gerados até à profundidade passada como argumento. enquanto que a função *present* percorre a lista de quadrados gerados por *carpets*, desenhando-os esperando um segundo de intervalo.

Para conseguirmos trabalhar com a função *carpets* foi necessário criarmos um quadrado de exemplo, que serve como ponto de partida para a criação da lista dos tapetes de Sierpinski. Esse quadrado chama-se *squareExemplo* e caso desejamos criar tapetes a partir de outro ponto de partida, basta alterar o quadrado definido.

No caso da função *carpets*, a lista de quadrados gerados obtem-se aplicando o hilomorfismo *sierpinski*, *n* vezes, uma vez para cada profundidade, o que se consegue através da lista com elementos de 0 até *n*.

A função *present* simplesmente aplica a função *drawSq* para todos os elementos da lista gerada por *carpets*, esperando depois 1 segundo graças à função *await*.

Primeira abordagem, sem anamorfismos e catamorfismos:

```

carpets :: Int → [[Square]]
carpets n = map (λs → (sierpinski (squareExemplo, s))) [0..n]
present :: [[Square]] → IO [()]
present = sequence · map (λl → do { (drawSq l); await; })

```

Segunda abordagem, com anamorfismos e catamorfismos:

```

outC :: Int → () + (Int, Int)
outC (-1) = i1 ()
outC n = i2 (n, n - 1)
carpets :: Int → [[Square]]
carpets = [(id + (sierpinski (squareExemplo) × id)) · outC]
squareExemplo = ((0.0, 0.0), 32.0)
present :: [[Square]] → IO [()]
present = sequence · ([nil, cons · (dr × id)])
where
  dr l = do { (drawSq l); await; }

```

O esquema básico do anamorfismo *carpets* é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc}
 (Square^*)^* & \xrightleftharpoons[\text{in}]{\text{out}} & 1 + ((Square^*) \times (Square^*))^* \\
 \uparrow \text{carpets} & & \uparrow \text{id} + \text{id} \times \text{carpets} \\
 Int & \xrightarrow{\text{outC}} 1 + (Int \times Int) \xrightarrow{\text{id} + ((\text{curry}(\text{sierpinski})(\text{squareExemplo})) \times \text{id})} & 1 + Square^* \times Int
 \end{array} \quad (5)$$

E o esquema básico do catamorfismo *present* é:

$$\begin{array}{ccc}
 IO[()] & & \\
 \uparrow \text{sequence} & & \\
 [IO()] & \xleftarrow{(\text{nil}) + (\text{cons} \cdot (\text{dr} \times \text{id}))} & 1 + Square^* \times [IO()] \\
 \uparrow \text{present} & & \uparrow \text{id} + \text{id} \times \text{present} \\
 (Square^*)^* & \xrightleftharpoons[\text{in}]{\text{out}} & 1 + ((Square^*) \times (Square^*))^*
 \end{array} \quad (6)$$

E assim o hilomorfismo *constructSierp* tem o seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccc}
 IO[()] & & \\
 \uparrow \text{sequence} & & \\
 [IO()] & \xleftarrow{(\text{nil}) + (\text{cons} \cdot (\text{dr} \times \text{id}))} & 1 + Square^* \times [IO()] \\
 \uparrow \text{present} & & \uparrow \text{id} + \text{id} \times \text{present} \\
 (Square^*)^* & \xrightleftharpoons[\text{in}]{\text{out}} & 1 + ((Square^*) \times (Square^*))^* \\
 \uparrow \text{carpets} & & \uparrow \text{id} + \text{id} \times \text{carpets} \\
 Int & \xrightarrow{\text{outC}} 1 + (Int \times Int) \xrightarrow{\text{id} + ((\text{curry}(\text{sierpinski})(\text{squareExemplo})) \times \text{id})} & 1 + Square^* \times Int
 \end{array} \quad (7)$$

Problema 4

Versão não probabilística

Este exercício quatro podemos dizer que é um exercício que engloba todos os objetivos da disciplina, desde o uso de catamorfismos, anamorfismos, hilomorfismos, monads, reutilização de código e nos casos em que é possível, definir funções polimórficas e point-free.

Começando pelo início. Foi nos pedido que definíssemos o gene de *consolidate'* e chegamos à seguinte solução:

```

cgene :: (Num b, Eq a) => () + ((a,b), [(a,b)]) -> [(a,b)]
cgene = [nil, funCgene]

```

A função auxiliar *funCgene* é definida da seguinte maneira:

```

funCgene :: (Eq a, Num b) => ((a,b), [(a,b)]) -> [(a,b)]
funCgene arg = case lu of
  Nothing -> cons arg
  Just n -> (cons · ((id × (+n)) × (filter (λtuplo -> (π1 tuplo) ≠ esq)))) arg
where
  lu = ((List.lookup) · (π1 × id)) arg
  esq = (π1 · π1) arg

```

Esta função `funCgene` vai primeiramente verificar se uma determinada "chave" exista numa lista de tuplos e se sim, qual era o valor associado. Para isso tivemos recurso à função `lookup` definida no modulo `List.hs`. Esta função `lookup` recebe a chave e a lista sem ser sub a forma de par. Devido a isso usamos a função `uncurry`. Após esta fase temos 2 hipóteses, ou a chave foi encontrada e temos `Just` e o valor associado, ou não foi encontrada e temos `Nothing`.

Se tivermos `Nothing` o que esta função faz é invocar a função `cons` definida em `Cp.hs` e vai simplesmente adicionar o elemento à esquerda do par dado como argumento à cabeça da lista que está à direita do par dado como argumento.

Caso o valor tenha sido encontrado, então vamos aplicar primeiramente uma função à esquerda e uma função à direita no par recebido como argumento.

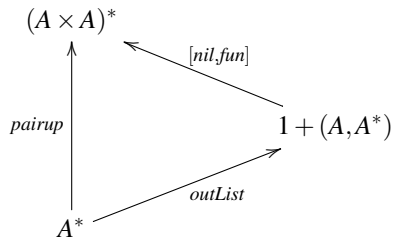
A função aplicado ao par do lado esquerdo, simplesmente aumento um certo valor ao número que está à direita desse par. Essa quantia será valor encontrado pela função `lookup`. Como nós não queremos ter chaves repetidas, a função do lado direito irá evitar isso mesmo. Para isso invoca a função `filter` já definida no `prelude`, de forma a eliminar o elemento com a tal chave encontrado pela função `lookup`.

Após estas duas operações é invocada a função `cons` definida no modulo `Cp.hs` que irá fazer a mesma operação que no caso da função `Lookup` retornar `Nothing`.

Partindo para a função `pairup`, esta ficou definida da seguinte forma:

```
pairup = ([nil,fun] · outList)
where
  fun = conc · ⟨fun2, pairup · π2⟩
  fun2 (x,y) = map (λe → (x,e)) y
```

A nossa função `pairup` pode ser representada da seguinte forma:



A função auxiliar `fun`, simplesmente invoca a chamada recursiva da função `pairup` à cauda da lista e invoca a função `fun2`. Por final, faz a concatenação dos dois resultados.

Nesta função `fun`, não utilizamos a catamorfismo devido a que `fun2` precisa da cauda original recebida como argumento.

O diagrama da nossa função auxiliar `fun`, é o seguinte:

$$(A, A^*) \xrightarrow{\langle \text{fun2}, \text{pairup} \cdot \pi_2 \rangle} (A^*, A^*) \xrightarrow{\text{conc}} (A \times A)^*$$

A nossa função `fun2` é muito similar à função `zip`. A função `zip` associa elementos de 2 listas, originando uma lista com tuplos das respetivas associações. A nossa função `fun2` simplesmente um elemento a cada um dos elementos de uma lista, originando na mesma tuplos.

Passando para a função `matchResult`, numa primeira abordagem definimos a `matchResult` da seguinte forma:

```
matchResult f p = [(e1, pontos1), (e2, pontos2)]
where
  e1 = π1 p
```



```

 $e_2 = \pi_2 p$ 
 $result = f p$ 
 $pontos1 = getpontuacao (e_1, result)$ 
 $pontos2 = getpontuacao (e_2, result)$ 

```

Esta função é bastante simples, mas não trabalha como uma função de point free. Após resolvermos todos os exercícios do projeto, propoemo-nos em adaptar certas funções para point free. A match result foi uma delas. Sendo assim a nossa função matchResult ficou definida da seguinte forma:

$$matchResult f = getPointsMatch \cdot \langle id, f \rangle$$

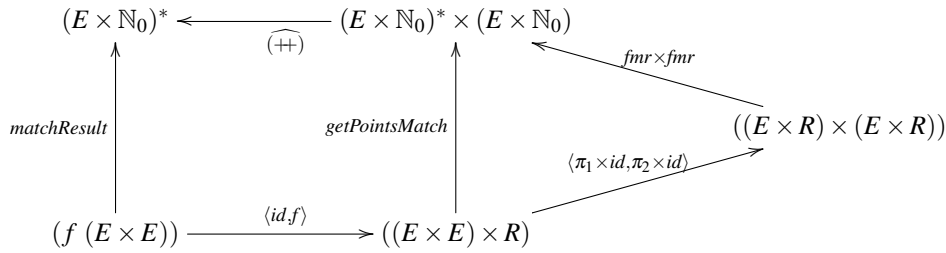
As funções auxiliares a matchResult são:

```

getpontuacao :: (Team, Maybe Team) → ℤ
getpontuacao (e, r) = case r of
  Nothing → 1
  Just t → if t ≡ e then 3
             else 0
getPointsMatch :: (Match, Maybe Team) → [(Team, ℤ)]
getPointsMatch = conc · (fmr × fmr) · (π1 × id, π2 × id)
where
  fmr = singl · ⟨π1, getpontuacao⟩

```

Um diagrama a demonstrar como é que a função matchResult e a getPointsMatch funcionam em conjunto:



A função fmr é representada da seguinte forma:

$$(E \times R) \xrightarrow{\langle \pi_1, getpontuacao \rangle} (E \times \mathbb{N}_0) \xrightarrow{singl} (E, Nat)^*$$

Passaremos a explicar cada passo esta nossa função matchResult. Primeiramente a nossa função pega na função recebida como argumento e aplica à partida em questão. De forma a não perder quais as equipas que jogaram, é originado o par (Partida, Resultado) ou ((Equipa 1, Equipa 2), Resultado).

A etapa seguinte é tentar organizar este tuplo em (equipa, resultado). Para isto utilizamos mais uma vez a função split cujas funções fornecedoras, transformam par ((Equipa 1, Equipa 2), Resultado) em ((Equipa 1, Resultado), (Equipa 2, Resultado)). Quisemos organizar assim para tornar mais fácil a utilização da nossa função getpontuacao. Após isto invocamos a função fmr que transforma o último par em ([(Equipa 1, Pontuação 1)], [(Equipa 2, Pontuação 1)]), utilizando a função getpontuacao como auxiliar. Após esta fase basta apenas adaptar o tipo deste resultado para o pretendido que é [(Equipa 1, Pontuação 1), (Equipa 2, Pontuação 1)]. Para isso basta invocar a função conc definida no modulo Cp.hs.

Passando para a função glt, o diagrama da nossa função glt é o seguinte:

$$A^* \xrightarrow{glt} A + (A^* \times A^*) \quad (8)$$

A nossa função `glt`, quando recebe uma lista com apenas um único elemento, injeta esse mesmo elemento à esquerda numa alternativa. Caso contrário, invoca a função `splitAt` do `prelude` do Haskell. Esta função necessita de um índice para separar a lista. Este índice neste exercício será sempre o meio da lista. Esta função, utiliza a função `outP2` definida no exercício 2, pois esta função já organiza a lista da forma como nós pretendemos.

A definição `point-free` que chegamos da função `glt` é a seguinte:

```
glt = (id + (splitAt · ⟨metade · length, id⟩ · cons)) · outP2
  where
    metade n = n ÷ 2
```

Versão probabilística

A primeira abordagem que tivemos foi encontrar o tipo da função `pinitKnockoutStage`.

Relativamente ao tipo do resultado, basta pegar no tipo de `initKnockoutStage` e adicionar a parte das probabilidades, isto é, `Dist (LTree Team)`.

O problema encontra-se agora no tipo de entrada.

Nós reparamos que a função vai ser invocada na seguinte função:

```
pgroupStage = pinitKnockoutStage • psimulateGroupStage · genGroupStageMatches
```

Ora bem, nós já sabemos que o tipo da função definida pela equipa docente `psimulateGroupStage` é: `psimulateGroupStage :: [[Match]] -> Dist [[Team]]`.

Então desenvolvemos o seguinte:

```
pinitKnockoutStage • psimulateGroupStage · genGroupStageMatches
≡ { Associatividade 69 }
pinitKnockoutStage • (psimulateGroupStage · genGroupStageMatches)
≡ { Composição monádica 86 }
do { b ← (psimulateGroupStage · genGroupStageMatches); pinitKnockoutStage b }
```

Ou seja, `pinitKnockoutStage` recebe uma lista de listas de equipas (`[[Team]]`).

Implementamos a função `pinitKnockoutStage` da seguinte forma:

```
pinitKnockoutStage :: [[Team]] -> Dist (LTree Team)
pinitKnockoutStage = ([createDist, tupleDist]) · initKnockoutStage
  where
    createDist t = D [(Leaf t, 1)]
    tupleDist = (joinWith Fork)
```

Esta função primeiramente invoca a função `initKnockoutStage` definida já na versão não probabilística.

Após isto nós obtemos uma `LTree` já com as partidas formadas, bastando apenas iniciar as probabilidades.

Para isto usamos a `catalTree` definida no `module LTree.hs`.

Este catamorfismo para as folhas, cria a distribuição com probabilidade igual a 100%. Como as folhas representam apenas uma equipa, a probabilidade de elas mesmas "vencerem" é 100%, daí atribuímos essa probabilidade.

Para os nodos `Fork`, é aplicada a função `tupleDist`. Esta função irá criar um `Fork`, pois a `catalTree` "destroi" a `LTree` e é necessário contruí-la outra vez. Depois disso, como as subárvores são distribuição

de LTree, precisamos de utilizar a função joinWith definida em Probability.hs de forma a criar as combinações das distribuições, para criar uma LTree de probabilidades.

Um esquema a demonstrar como esta função funciona:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Dist}(\text{LTreeTeam}) & \xleftarrow{[\text{createDist}, \text{tupleDist}]} & \text{Team} + (\text{Dist}(\text{LTreeTeam}) \times \text{Dist}(\text{LTreeTeam})) \\
 \uparrow \text{[[createDist, tupleDist]]} & & \uparrow \text{id + pgroupWinners} \times \text{pgroupWinners} \\
 \text{LTreeTeam} & \xrightarrow{\text{out LTree}} & \text{Team} + (\text{LTreeTeam} \times \text{LTreeTeam}) \\
 \uparrow \text{initKnockoutStage} & & \\
 (\text{Team}^*)^* & &
 \end{array} \quad (9)$$

Partindo para a função pgroupWinners, esta nossa função ficou definida da seguinte forma:

```

pgroupWinners :: (Match → Dist (Maybe Team)) → [Match] → Dist [Team]
pgroupWinners f = pmatchResult · ⟨sequence · map (λm → (f m)), id⟩

```

Esta função primeiramente gera as probabilidade do resultado de todas as partidas e de seguida invoca a função pmatchResult.

A função pmatchResult está implementada assim:

```

getPoints :: ([Match], [Maybe Team]) → [(Team, ℤ)]
getPoints = ([nil, conc · (getPointsMatch × id)]) ·  $\widehat{\text{zip}}$ 
pmatchResult :: (Dist [Maybe Team], [Match]) → Dist [Team]
pmatchResult (resultados, partidas) = mapD (best 2 · consolidate · getPoints · ⟨partidas, id⟩) resultados

```

A função pmatchResult usa como função auxiliar getPoints.

Esta função getPoints é praticamente igual à função getPointsMatch pois a ideia para ambas é a mesma. A getPointsMatch foi definida na parte não probabilística. A principal diferença entre estas duas funções está nos argumentos, em que getPointsMatch recebe um tuplo (Match, Maybe Team) e getPoints recebe ([Match],[Maybe Team]).

A função pmatchResult simplesmente aplica uma sequência de funções às probabilidades geradas na função pgroupWinners. Primeiramente é gerado o tuplo ([Match],[Maybe Team]) para usarmos a função getPoints. Depois invocamos a função já definida previamente pela equipa docente, a consolidate, de forma a obtermos as pontuações finais de cada equipa no final do grupo. Depois invocamos a best, que também foi definida pela equipa docente. A best vai buscar a n melhores equipas em cada grupo, neste caso, as 2 melhores. Para aplicar estas funções às probabilidades, utilizamos a função mapD que tal como um map, aplica uma certa função ao seu conteúdo, só que em vez de ser para lista, é para a distribuição.

Valorização

A pedido da equipa docente vamos testar as funções pwinner e winner para rankings diferentes.

Sendo assim manipulamos os rankings para a seguinte forma:

```

rankings = [
  ("Argentina", 4.4),
  ("Australia", 4.0),
  ("Belgium", 4.2),
  ("Brazil", 4.7),
  ("Cameroon", 4.0),
  ("Canada", 4.0),
  ("Costa Rica", 4.1),
  ("Croatia", 4.7),

```

```
( "Denmark", 4.3),
( "Ecuador", 4.0),
( "England", 3.8),
( "France", 5.0),
( "Germany", 5.0),
( "Ghana", 3.9),
( "Iran", 4.0),
( "Japan", 4.1),
( "Korea Republic", 3.9),
( "Mexico", 4.5),
( "Morocco", 4.2),
( "Netherlands", 4.8),
( "Poland", 4.2),
( "Portugal", 5.5),
( "Qatar", 3.9),
( "Saudi Arabia", 3.9),
( "Senegal", 4.3),
( "Serbia", 3.8),
( "Spain", 4.0),
( "Switzerland", 4.4),
( "Tunisia", 4.1),
( "USA", 4.4),
( "Uruguay", 4.5),
( "Wales", 4.3)]
```

O resultado da execução de winner foi:

```
*Main > winner
"Portugal"
```

O resultado da execução de pwinner foi:

```
*Main > pwinner
"Portugal" 33.7 %
  "France" 14.7 %
  "Germany" 14.0 %
"Netherlands" 8.8 %
  "Croatia" 5.6 %
  "Mexico" 3.8 %
  "Brazil" 3.8 %
  "Uruguay" 2.8 %
  "USA" 2.7 %
  "Senegal" 2.0 %
"Switzerland" 1.8 %
  "Argentina" 1.6 %
    "Wales" 1.6 %
    "Denmark" 1.2 %
    "Morocco" 0.7 %
    "Tunisia" 0.3 %
    "Poland" 0.3 %
    "Spain" 0.2 %
    "Japan" 0.1 %
"Costa Rica" 0.1 %
    "Canada" 0.1 %
```

Tendo em conta o nosso ranking, os resultados apresentados são os esperados.

Índice

- LaTeX, 10
 - bibtex, 10
 - lhs2TeX, 10
 - makeindex, 10
- Cálculo de Programas, 1, 3, 10, 11
 - Material Pedagógico, 9
 - Exp.hs, 2, 3, 13
 - LTree.hs, 6–8
 - Rose.hs, 4
- Combinador “pointfree”
 - either*, 7, 9
- Fractal, 3
 - Tapete de Sierpinski, 3
- Função
 - π_1 , 10, 11, 15
 - π_2 , 10, 15
 - for*, 2, 11
 - length*, 13
 - map*, 7, 8, 13–15
- Functor, 5, 8, 9, 11, 12, 15, 16
- Haskell, 1, 10
 - Biblioteca
 - PFP, 12
 - Probability, 12
 - interpretador
 - GHCi, 10, 12
 - Literate Haskell, 9
- Números naturais (\mathbb{N}), 11
- Programação
 - dinâmica, 11
 - literária, 9
- SVG (Scalable Vector Graphics), 13
- U.Minho
 - Departamento de Informática, 1, 2