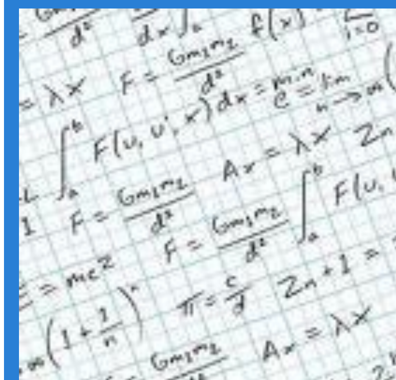
PUCMM

Economía Matemática

Agosto – Diciembre, 2014

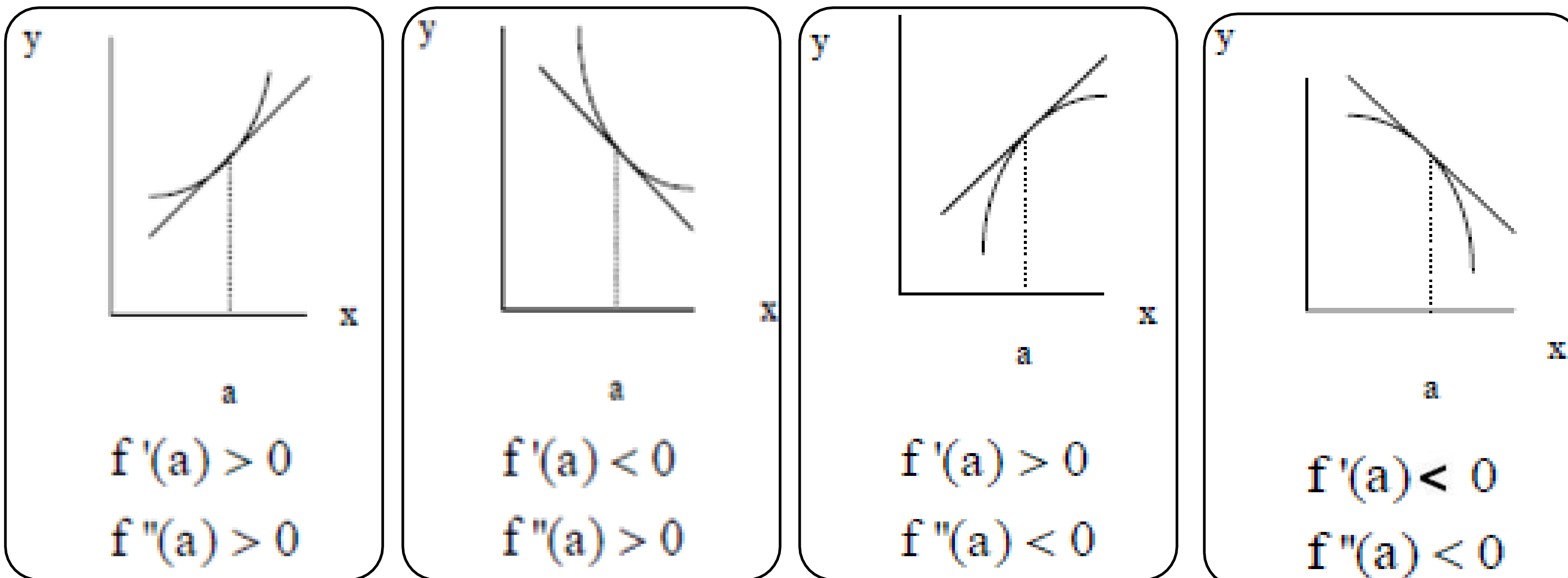


Optimización Restringida

Concavidad y Convexidad

+
Derivación y Optimización

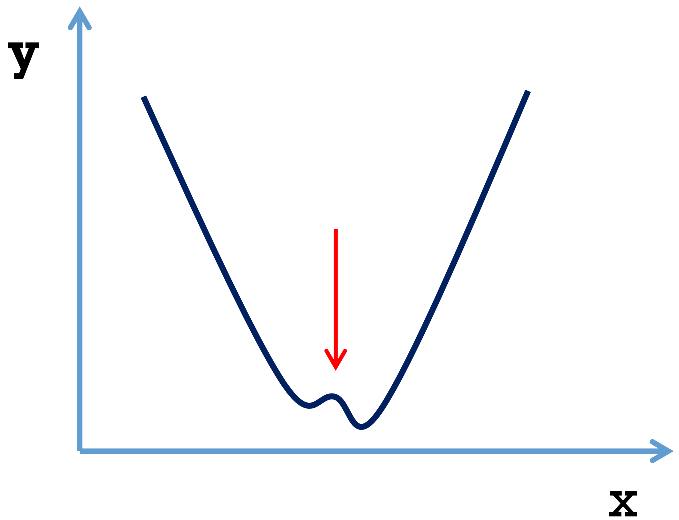
- Convexidad y Concavidad en un punto:



Convexas **Cóncavas**

+ Optimización

- ¿Por qué es importante la concavidad (convexidad) sobre todo el dominio?
- ¿Cómo la garantizamos?



Optimización

- ¿Por qué es importante la concavidad (convexidad) sobre todo el dominio?
  - Porque garantiza la existencia de máximos (mínimos) globales/absolutos
  - La concavidad (convexidad) estricta garantiza la existencia de máximos (mínimos) globales <u>únicos</u>

Optimización

- ¿Cómo garantizamos concavidad (convexidad) sobre todo el dominio?
  - Si no tenemos información sobre la doble diferenciabilidad de la función, con álgebra
  - Si la función es continua y doblemente diferenciable: Hessiano (semi)definido positivo o negativo en todo el dominio

Optimización Multivariada

- El caso multivariado (n variables):
  - C.S.O. (máx.):
    - Con n:

El signo de d^2z depende de $|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$

Condición	Máximo	Mínimo
Necesaria 1er orden:	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$
Suficiente 2do orden:	$\lvert H_1\rvert < 0,\ \lvert H_2\rvert > 0,$ $\lvert H_3\rvert < 0, \ldots; (-1)^n \lvert H_n\rvert > 0$	$\lvert H_1\rvert,\ \lvert H_2\rvert, \ldots, \lvert H_n\rvert > 0$

Optimización Restringida

Optimización

- ¿Por qué restringir?

$$Max.\ \mathrm{U} = xy + 2x$$

- Una vez restringimos ¿Qué método usar?
- ¿C.P.O.?
- ¿C.S.O.?

Optimización

- Sustitución
- Método de Lagrange
- Hessiano Orlado

+ Optimización

- Sustitución:

$$\begin{aligned} &Max.\ \ \mathrm{U} = xy + 2x \\ &s.a.\quad 4x + 2y = 60 \end{aligned}$$

- Halle $y = f(x)$ en la restricción y sustituya en U
- Problema no restringido. Resuelva

Optimización

- De forma general: $$\begin{aligned} &Max.\ U = U(x, y) \\ &s.a. \quad P_1 x + P_2 y = M \end{aligned}$$
- Halle $y = f(x)$ en la restricción y sustituya en U
- Problema no restringido. Resuelva
- ¿C.P.O.? ¿C.S.O.?

+ Optimización

- De forma general: $$Max.\ U = U(x, y)$$ $$s.a.\quad P_1 x + P_2 y = M$$

- C.P.O.: $$\frac{U_x}{U_y} = \frac{P_1}{P_2}$$

- C.S.O.: $$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{1}{U_y^2}\left(U_y^2 U_{xx} - 2U_x U_y U_{xy} + U_x^2 U_{yy}\right) < 0$$

Optimización

- De forma general: $$Max.\ U = U(x, y)$$ $$s.a.\quad P_1 x + P_2 y = M$$

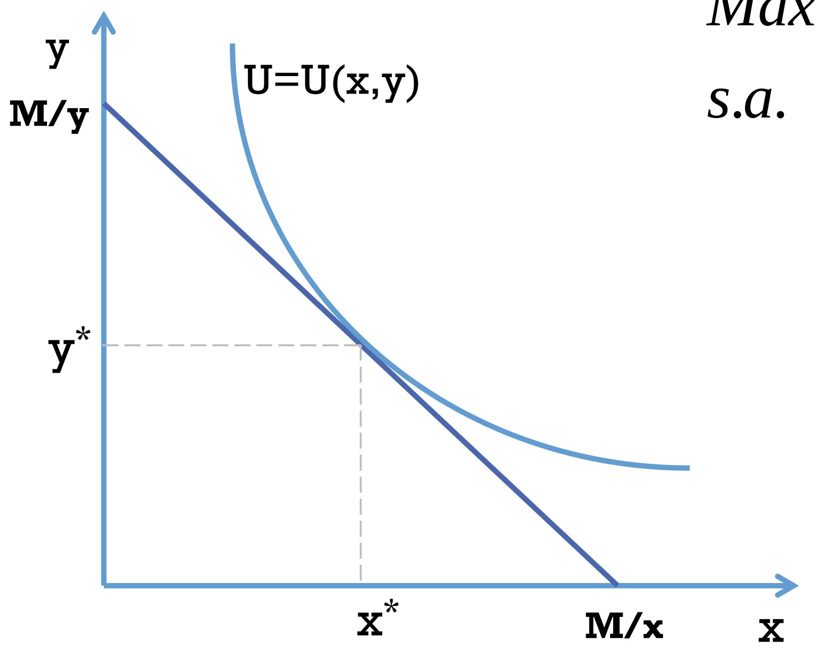
- C.P.O.: $$\frac{U_x}{U_y} = \frac{P_1}{P_2}$$

Convexidad

- C.S.O.: $$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{1}{U_y^2}\boxed{\left(U_y^2 U_{xx} - 2U_x U_y U_{xy} + U_x^2 U_{yy}\right)} < 0$$

Optimización

- Gráficamente:



$$Max.\ U = U(x, y)$$
$$s.a.\quad P_1 x + P_2 y = M$$

Optimización

- Ejemplos:

- $$Max.\ U = U(x, y) = xy$$
  $$s.a.\quad 10x + 5y = 100$$

- $$Min.\ \mathrm{C} = 20L + 5K$$
  $$s.a.\quad 4 = Q = K^{0.25}L^{0.25}$$

+ Optimización

- Ejercicios:

- $Max.\ Z = -\ln(x+y); \qquad s.a. \quad xy = 1$
- $Min.\ Z = x + y^2; \qquad s.a. \quad 1 = x + y$
- $Min.\ Z = 3x^2 + y^2 - 2xy; \qquad s.a. \quad 6 = x + y$
- $Max.\ U = x + 2xy; \qquad s.a. \quad 100 = 2x + 4y$

Optimización

- Sustitución
- <u>Método de Lagrange</u>
- Hessiano Orlado

Optimización

- Método de Lagrange
  - Incorporar la restricción en la función objetivo de forma tal de que las C.P.O. garanticen que la restricción se satisface
  - <u>Multiplicador de Lagrange</u>

+ Optimización

Método de Lagrange

- Haga el lado derecho de la restricción sea 0
- Construya el Lagrangiano:

$$L(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda(M - P_1 x - P_2 y)$$

- λ (el multiplicador de Lagrange) es una variable de elección...

Optimización

- Método de Lagrange
  - … C.P.O.:

$$
\begin{aligned}
L_x &= 0 && \Rightarrow && U_x - \lambda P_1 = 0 \\
L_y &= 0 && \Rightarrow && U_y - \lambda P_2 = 0 \\
L_\lambda &= 0 && \Rightarrow && M - P_1 x - P_2 y = 0
\end{aligned}
$$

Optimización

- Método de Lagrange
  - ¿Qué es λ? $\lambda^* = \frac{dU^*}{dM}$
  - ¿Cómo? Sin perder generalidad, podemos decir que:

$$x^* = x^*(P_1, P_2, M)$$

$$y^* = y^*(P_1, P_2, M)$$

$$\lambda^* = \lambda^*(P_1, P_2, M)$$

+ Optimización

Método de Lagrange

- Y por tanto:

$$U^* = U^*(x^*(P_1, P_2, M), y^*(P_1, P_2, M)) = U^*(P_1, P_2, M)$$

$$\Rightarrow \frac{dU^*}{dM} = U_x \frac{\partial x^*}{\partial M} + U_y \frac{\partial y^*}{\partial M}$$

Función objetivo indirecta

- De la C.P.O.: $U_x = \lambda^* P_1$ y $U_y = \lambda^* P_2$ lo que implica:

$$\frac{dU^*}{dM} = \lambda^* P_1 \frac{\partial x^*}{\partial M} + \lambda^* P_2 \frac{\partial y^*}{\partial M} = \lambda^* \left(P_1 \frac{\partial x^*}{\partial M} + P_2 \frac{\partial y^*}{\partial M} \right)$$

+ Optimización

Método de Lagrange

- Por último, derivando parcialmente la tercera C.P.O. con respecto a M:

$$M - P_1 x^* - P_2 y^* = 0 \Rightarrow P_1 \frac{\partial x^*}{\partial M} + P_2 \frac{\partial y^*}{\partial M} = 1 \Rightarrow \frac{dU^*}{dM} = \lambda^*$$

- El multiplicador de Lagrange es <u>siempre</u> la derivada de la F.O.I. respecto a la restricción

+ Optimización

- ¿Qué sigue?
  - n variables y restricciones
  - Condiciones de 2do Orden
  - Aplicaciones
  - Restricciones de desigualdad

Optimización

- El caso de n variables
  - Suponga:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$s.a.\ \ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$$

  - El Lagrangiano sería:

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda\left[c - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]$$

  - ¿C.P.O.?

+ Optimización

- El caso de n variables
  - ¿C.P.O.?

$$L_\lambda = c - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$L_1 = f_1 - \lambda g_1 = 0$$

$$L_2 = f_2 - \lambda g_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$L_n = f_n - \lambda g_n = 0$$

Optimización

- El caso de n restricciones
  - Suponga:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$s.a.\ \ g^j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c^j$$

  - El Lagrangiano sería:

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum \lambda^j \left[c^j - g^j(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]$$

  - ¿C.P.O.?

Optimización

- El caso de n restricciones
  - ¿C.P.O.?

$$L_1 = f_1 - \sum \lambda^j g_1^j = 0 \qquad L_{\lambda^1} = c^1 - g^1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$L_2 = f_2 - \sum \lambda^j g_2^j = 0 \qquad L_{\lambda^2} = c^2 - g^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$L_n = f_n - \sum \lambda^j g_n^j = 0 \qquad L_{\lambda^j} = c^j - g^j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

A-C: 12.2.1 y 12.2.3

Optimización

Condición de 2do orden

- Para el caso bivariado $Max.\ U = U(x,y);\ s.a.\ \underbrace{P_1 x + P_2 y}_{g(x,y)} = M$

$$L(x,y,\lambda) = U(x,y) + \lambda\left[M - g(x,y)\right]$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{1}{U_y^2}\left(U_y^2 U_{xx} - 2U_x U_y U_{xy} + U_x^2 U_{yy}\right) < 0$$ **C.S.O. (máx):**

- Que puede ser escrito como:

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & -L_{\lambda x} & -L_{\lambda y} \\ -L_{\lambda x} & L_{xx} & L_{xy} \\ -L_{\lambda y} & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} =^{*} \begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 \\ P_1 & U_{xx} & U_{xy} \\ P_2 & U_{yx} & U_{yy} \end{vmatrix} > 0$$ ¡Pruébelo!

Optimización

- Ejercicios:
  - $Max.\ Z = -\ln(x+y); \qquad s.a. \quad xy = 1$
  - $Min.\ \mathrm{C} = 15L + 5K; \qquad s.a. \quad L^{0.75}K^{0.25} = Q_0 = 100$
  - $Max.\ U = x + 2xy; \qquad s.a. \quad 100 = 2x + 4y$
  - $Min.\ Z = 3x^2 + y^2 - 2xy; \qquad s.a. \quad 6 = x + y$

Optimización

- Modelo de elección inter-temporal
- Suponga un individuo con función de utilidad dada por $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$, donde x_1 es consumo en el periodo 1 y x_2 en el segundo periodo. En 1 tiene un presupuesto B y r es la tasa de interés a la cual puede prestar o ahorrar.
  - Escriba la restricción inter-temporal del individuo de forma que x_1 y el valor presente de x_2 sumen B
  - Construya el Lagrangiano correspondiente
  - Halle las C.P.O. y los valores estacionarios
  - Use las C.S.O. para verificar que es un máximo
  - Interprete el significado del multiplicador de Lagrange

Optimización

- Modelo de elección trabajo-ocio
- Un individuo puede dedicar tiempo a trabajar por un salario w o descansar. Debe decidir qué cantidad de tiempo asigna a cada actividad. Suponga un día de 24 horas, salario w = \$5/hora y función de utilidad $U = 10MR^2$, donde M es el dinero ganado trabajando y R es el tiempo de Ocio
  - ¿Qué restricción enfrenta este individuo?
  - Halle las C.P.O. y los valores estacionarios
  - Usando las C.S.O. verifique que corresponde a un máximo
  - Interprete el significado del multiplicador de Lagrange

+ Optimización

- Maximización de Utilidad: Estática comparativa

$$Max.\ U = U(x, y); \quad s.a. \quad P_1 x + P_2 y = M$$

  - P_1, P_2 y M son exógenos y por tanto:

$$x^* = x^*(P_1, P_2, M); \quad y^* = y^*(P_1, P_2, M); \quad \lambda^* = \lambda^*(P_1, P_2, M)$$

  - Por otro lado, de las C.P.O.

$$\left.\begin{aligned} M - P_1 x^* - P_2 y^* &= 0 \\ U_x(x^*, y^*) - \lambda^* P_1 &= 0 \\ U_y(x^*, y^*) - \lambda^* P_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

1. Halle el diferencial total de cada identidad
2. Suponga un cambio en el presupuesto ($dP_1 = dP_2 = 0$)
3. Divida todo por dM
4. Escriba matricialmente y resuelva para ($\partial x^*/ \partial M$) y ($\partial y^*/ \partial M$)

Optimización

- Maximización de Utilidad: Estática comparativa

$$M - P_1 x^* - P_2 y^* = 0 \qquad\qquad -P_1 dx^* - P_2 dy^* = x^* dP_1 + y^* dP_2 - dM$$

$$U_x(x^*, y^*) - \lambda^* P_1 = 0 \Rightarrow \; -P_1 d\lambda^* + U_{xx} dx^* + U_{xy} dy^* = \lambda^* dP_1$$

$$U_y(x^*, y^*) - \lambda^* P_2 = 0 \qquad -P_2 d\lambda^* + U_{yx} dx^* + U_{yy} dy^* = \lambda^* dP_2$$

Dividiendo por dM y expresando matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 0 & -P_1 & -P_2 \\ -P_1 & U_{xx} & U_{xy} \\ -P_2 & U_{yx} & U_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial\lambda^* / \partial M \\ \partial x^* / \partial M \\ \partial y^* / \partial M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Optimización

- Maximización de Utilidad: Estática comparativa

Resolviendo para (∂x*/ ∂M) y (∂y*/ ∂M)

$$\frac{\partial x^*}{\partial M} = \frac{1}{|\overline{H}|}\begin{vmatrix} 0 & -1 & -P_2 \\ -P_1 & 0 & U_{xy} \\ -P_2 & 0 & U_{yy} \end{vmatrix} = \frac{1}{|\overline{H}|}\begin{vmatrix} -P_1 & U_{xy} \\ -P_2 & U_{yy} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial M} = \frac{1}{|\overline{H}|}\begin{vmatrix} 0 & -P_1 & -1 \\ -P_1 & U_{xx} & 0 \\ -P_2 & U_{yx} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{|\overline{H}|}\begin{vmatrix} -P_1 & U_{xx} \\ -P_2 & U_{yx} \end{vmatrix}$$

¿Signos?

Optimización

- Minimización de Costos
  - Suponga:

$$\begin{aligned} &Min. \quad C = aP_a + bP_b \\ &s.a. \quad Q(a,b) = Q_0 \end{aligned}$$

  - El Lagrangiano sería:

$$L = aP_a + bP_b + \mu(Q_0 - Q(a,b))$$

  - ¿C.P.O.?

Optimización

- Minimización de Costos
  - ¿C.P.O.?

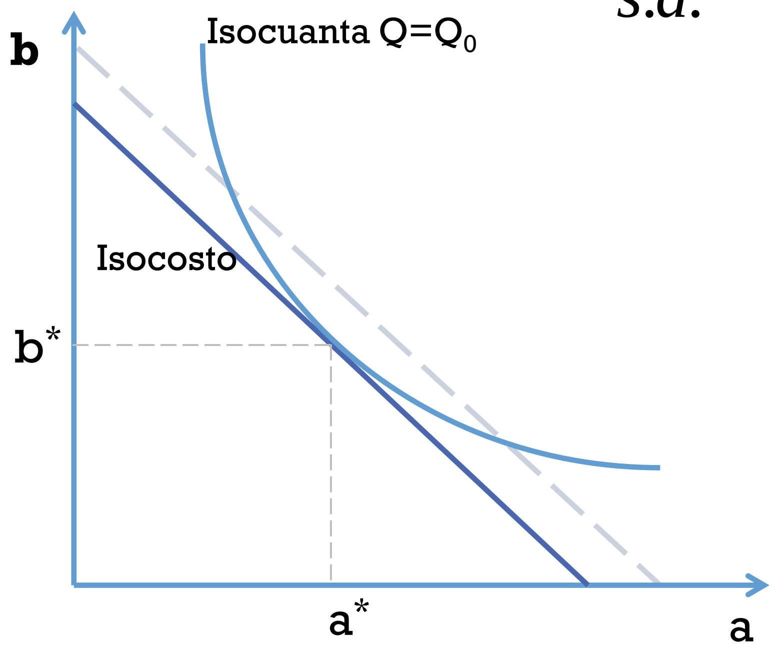
$$L_{\mu} = Q_0 - Q(a,b) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} L_a &= P_a - \mu Q_a = 0 \\ L_b &= P_b - \mu Q_b = 0 \end{aligned}\right\} \frac{P_a}{Q_a} = \frac{P_b}{Q_b} = \mu = \frac{P_a}{P_b} = \frac{Q_a}{Q_b}$$

Optimización

- Gráficamente:

$$Min.\quad C = aP_a + bP_b$$
$$s.a.\quad Q(a,b) = Q_0$$



+ Optimización

- Minimización de Costos

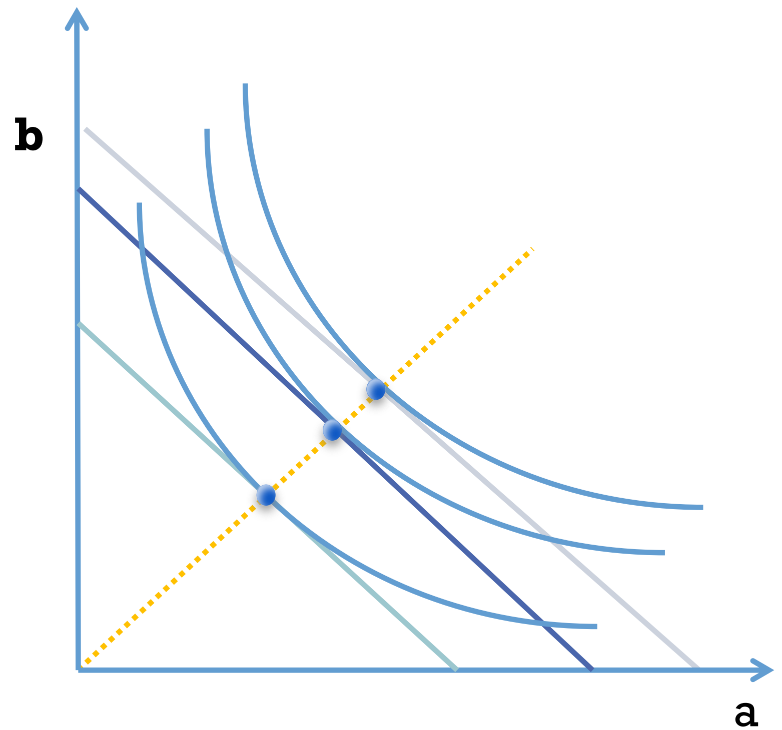
- Condición de 2do orden

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & Q_a & Q_b \\ Q_a & -\mu Q_{aa} & -\mu Q_{ab} \\ Q_b & -\mu Q_{ba} & -\mu Q_{bb} \end{vmatrix} = \mu\left(Q_{aa}Q_b^2 - 2Q_{ab}Q_aQ_b + Q_{bb}Q_a^2\right) < 0$$

Optimización

Minimización de Costos

- Senda de expansión:
  - Asumiendo un ratio fijo de los precios de los insumos ¿cuál es la combinación b^*/a^* que minimiza los costos para Q_0 cada vez mayores?



Optimización

- Minimización de Costos
- Senda de expansión:
  - Suponga $Q = Aa^{\alpha}b^{\beta}$, halle b*/a*:

+ Optimización

Minimización de Costos

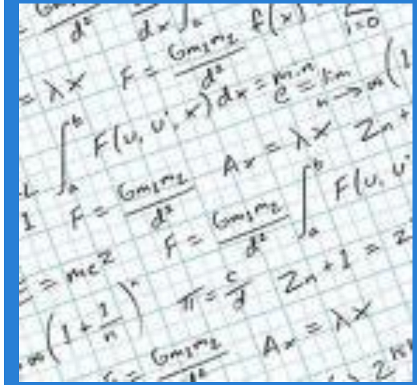
- Senda de expansión:
  - Suponga $Q = Aa^{\alpha}b^{\beta}$, halle b*/a*:

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{Q_a}{Q_b} = \frac{A\alpha a^{\alpha-1}b^{\beta}}{A\beta a^{\alpha}b^{\beta-1}} = \frac{\alpha b}{\beta a}$$

$$\Rightarrow \frac{b^*}{a^*} = \frac{\beta P_a}{\alpha P_b} = const.$$

PUCMM

Economía Matemática



Agosto – Diciembre, 2014

Optimización