

CAPITULO 5: INTRODUCCIÓN A LA INTEGRACIÓN²

En los capítulos anteriores se analizó el calculo diferencial, el cual trata sobre la tasa de cambio de las funciones. Diferenciación es el proceso de hallar la derivada $F'(x)$ de una función $F(x)$. Sin embargo, algunas veces en economía se conoce la tasa de cambio de una función $F'(x)$ y lo que se desea es obtener la función $F(x)$ o la función original. Así, el proceso inverso de la diferenciación es denominado *integración* o antiderivación. De esta forma, la función original $F(x)$ es llamada integral o antiderivada de $F'(x)$.

En general, las integrales pueden clasificarse en indefinidas y definidas.

5.1 INTEGRAL INDEFINIDA

Haciendo $f(x) = F'(x)$, la antiderivada de $f(x)$ se expresa matemáticamente como:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (5.1)$$

El lado izquierdo de la expresión (12) se lee: “la integral indefinida de f de x con respecto a x ”. El símbolo \int denota una integral mientras que “ c ” es la constante de integración

5.1.1 Reglas básicas de integración

a) Regla 1. La integral de una constante k es:

$$\int kdx = kx + c \quad (5.2)$$

Ejemplo 5-1. $\int 5dx = 5x + c$

b) Regla 2: La integral de potencia es:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad (n \neq -1) \quad (5.3)$$

Ejemplo 5-2. $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$

² A fin de evitar duplicidades con el curso *Calculo Integral* (donde se estudia con mayor detalle el tema de integración), el presente capítulo solo verá -preliminarmente- los puntos mínimos necesarios para poder resolver las aplicaciones más sencillas de las integrales en la economía, motivo por el cual aquí se hace mayor énfasis en tales aplicaciones en lugar de su teoría o reglas de integración. Por tal motivo, este capítulo recibe el nombre de “Introducción a la Integración”.

c) Regla 3: la integral de una función exponencial es:

$$\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \ln a} + c \quad (5.4)$$

Ejemplo 5-3. $\int 2^{3x} dx = \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + c$

d) Regla 4: La integral de una función exponencial natural es:

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c \quad (5.5)$$

Ejemplo 5-4. $\int 9e^{-3x} dx = 9 \int e^{-3x} dx = \frac{9e^{-3x}}{-3} + c$

e) Regla 4: la integral de una función logarítmica es:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \quad (x > 0) \quad (5.6)$$

Ejemplo 5-5. $\int 3x^{-1} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln x + c$

5.1.2 Condiciones iniciales y condiciones de frontera

En muchos problemas una condición inicial ($y = y_0$ cuando $x = 0$) o una condición de frontera ($y = y_0$ cuando $x = x_0$) es dada para determinar la constante de integración, c . Permitiendo una sola determinación de c . Por ejemplo, si

$$y = \int 2dx = 2x + c$$

substituyendo $y = 11$ cuando $x = 3$,

$$11 = 2(3) + c, \quad c = 5$$

Por lo tanto, $y = 2x + 5$. Note que aun cuando c es especificado, $\int 2dx$ permanece como integral indefinida porque x no esta especificado. Entonces, la integral $2x+5$ puede asumirse como un infinito número de posibles valores.

5.2 INTEGRAL DEFINIDA

El *teorema fundamental del calculo* establece que el valor numérico de una integral definida de una función continua $f(x)$ tras un intervalo desde a - b esta dado por la integral indefinida $F(x)+c$ evaluada al limite más alto de integración (b), menos la

misma integral evaluada al límite más bajo de integración (a). Puesto que “c” es común a ambos, la constante de integración es eliminada en la sustracción

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (5.7)$$

De esta forma, el área bajo de una función desde a hasta b puede ser expresada como una integral definida de f(x) tras un intervalo a hacia b, como se aprecia en el siguiente Gráfico 5-1.

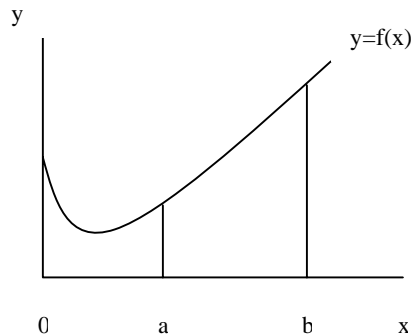


Gráfico 5-1

Esta técnica tiene diversas aplicaciones en la economía puesto que permite obtener áreas de funciones continuas de una forma relativamente sencilla. De esta forma, las integrales definidas permiten obtener valores numéricos mientras que las integrales indefinidas solo permiten obtener funciones.

Ejemplo 5-6. Las integrales definidas de (1) $\int_1^4 10x dx$ y (2) $\int_1^3 (4x^3 + 6x) dx$ serán:

$$(1) \int_1^4 10x dx = 5x^2 \Big|_1^4 = 5(4)^2 - 5(1)^2 = 75$$

$$(2) \int_1^3 (4x^3 + 6x) dx = \left[x^4 + 3x^2 \right]_1^3 = \left[(3)^4 + (3)^2 \right] - \left[(1)^4 + 3(1)^2 \right] = 104$$

5.3 EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR Y EXCEDENTE DEL PRODUCTOR

Una función de demanda $P_1 = f_1(Q)$ como en el Gráfico 5-2a representa los diferentes precios que el consumidor está dispuesto a pagar por diferentes cantidades de un bien. Si el mercado está en equilibrio en un punto como (Q_0, P_0) , entonces los consumidores estarán dispuestos a pagar más de P_0 . El beneficio total para los consumidores está representado por el área sombreada, la cual se denomina *excedente del consumidor*, EC. Esta área equivale a la diferencia entre lo que el consumidor está dispuesto a pagar y lo que realmente paga.

$$EC = \int_0^{Q_0} f_1(Q) dQ - Q_0 P_0 \quad (5.8)$$

Una función de oferta $P_2 = f_2(Q)$ como en el gráfico, representa el precio al cual diferentes cantidades de un bien será ofertado. Si el equilibrio de mercado sucede en (Q_0, P_0) , los productores que ofertan a un precio menor a P_0 se beneficiaran. Este beneficio o ganancia es llamado *excedente del productor*, EP, el cual equivale al área sombreada del Gráfico 5-2b. Esta área equivale a la diferencia entre el precio que el productor vende y precio límite al cual el productor estaría dispuesto a vender su producto.

$$EP = Q_0 P_0 - \int_0^{Q_0} f_2(Q) dQ \quad (5.9)$$

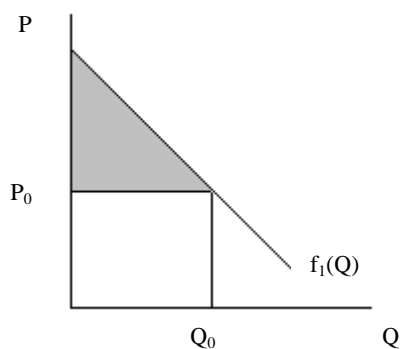


Gráfico 5-2a

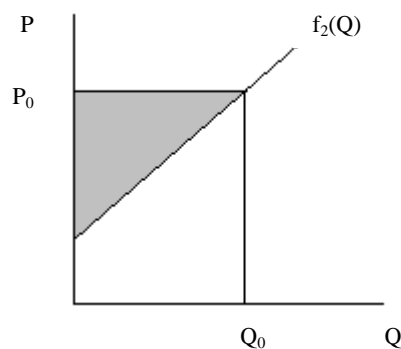


Gráfico 5-2b

Ejemplo 5-7. Dada una función de demanda, $p = 42 - 5q - q^2$, y asumiendo que el precio de equilibrio es 6, obtenga el excedente del consumidor.

Solución. Para encontrar el nivel de producción asociado a $p = 6$:

$$42 - 5q - q^2 = 6, \quad q_0 = 4$$

Ahora, el excedente del consumidor será:

$$\begin{aligned} EC &= \int_0^4 (42 - 5q - q^2) dq - (4)(6) \\ EC &= \left[42q - 2.5q^2 - \frac{1}{3}q^3 \right]_0^4 - 24 \\ EC &= (168 - 40 - 21.3) - 0 - 24 = 82.7 \end{aligned}$$

Ejemplo 5-8. Dada la función de oferta, $p = (q + 3)^2$, encuentre el excedente del productor cuando $p_0 = 81$.

Solución.

$$\begin{aligned} EP &= (81)(6) - \int_0^6 (q + 3)^2 dq \\ EP &= 486 - \left[\frac{1}{3}(q + 3)^3 \right]_0^6 \\ EP &= 252 \end{aligned}$$

5.4 PROBLEMAS RESUELTOS

La integral es ampliamente aplicada en la economía. Quizá su mayor uso es en el campo de la microeconomía, puesto que se utiliza para calcular el excedente del consumidor y el excedente del productor. Sobre todo en la valoración económica de los impactos ambientales

Ejemplo 5-9. La tonelada de un mineral cuesta US\$ 46. Los estudios indican que dentro de x semanas, el precio estará cambiando a una tasa de $0.09 + 0.0006x^2$ US\$/semana. ¿Cuánto costará la tonelada de este mineral dentro de 10 semanas?

Solución:

$$\text{Como } \frac{dP}{dx} = 0.09 + 0.0006x^2 \Rightarrow \int_0^{10} (0.09 + 0.0006x^2) dx$$

El precio dentro de 10 semanas será:

$$P = 46 + \left[0.09x + \frac{0.0002x^3}{3} \right]_0^{10} = 46 + 1.1 = 47.1$$

Ejemplo 5-10. Obtenga la cantidad producida de maximiza la utilidad y las correspondiente utilidad total (asumiendo competencia perfecta) si $IMg = 24 - 6q - q^2$ y $CMg = 4 - 2q - q^2$, siendo IMg el ingreso marginal y CMg , el costo marginal.

Solución. Asumiendo competencia perfecta, las curvas de ingreso marginal y costo marginal se interceptan y determinan el precio y la cantidad demandada. Entonces,

$$\begin{aligned} 24 - 6q - q^2 &= 4 - 2q - q^2 \\ q &= 5 \end{aligned}$$

Como $UMg = IMg - CMg$ (UMg : utilidad marginal) entonces,

$$UMg = 20 - 4q$$

El dato es la utilidad marginal ($UMg = \frac{dU}{dq}$) y se desea obtener es la utilidad total (U).

Entonces, es necesario “integrar” la primera función para (UMg) obtener la segunda función (U) o función original.

$$\begin{aligned} U &= \int_0^5 (20 - 4q) dq \\ U &= \left[20q - 2q^2 \right]_0^5 = 50 \end{aligned}$$

Se ha evaluado desde 5 a 0 puesto que $q = 5$ es el valor que maximiza la utilidad, es decir, el punto máximo.

Ejemplo 5-11. Dada la función de demanda $p_d = 25 - q^2$ y la función de oferta $p_s = 2q + 1$ y asumiendo competencia perfecta, encuentre el a) excedente del consumidor y b) excedente del productor.

Solución. En competencia perfecta, demanda = oferta:

$$2q + 1 = 25 - q^2$$

de donde $q_0 = 4$, lo que implica $p_0 = 9$

a) Excedente del consumidor:

$$\begin{aligned} EC &= \int_0^4 (25 - q^2) dq - (9)(4) \\ EC &= \left[25q - \frac{1}{3}q^3 \right]_0^4 - 36 \\ EC &= \left[25(4) - \frac{1}{3}(4)^3 \right] - 0 - 36 = 42.67 \end{aligned}$$

b) Excedente del productor

$$\begin{aligned} EP &= (9)(4) - \int_0^4 (2q + 1) dq \\ EP &= 36 - \left[q^2 + q \right]_0^4 = 16 \end{aligned}$$

Ejemplo 5-12. La tasa de inversión neta esta dada por $I(t) = 140t^{3/4}$, y el stock inicial de capital en $t = 0$ es 150. Determine la función de capital K .

Solución. La función K será:

$$\begin{aligned} K &= \int 140t^{3/4} dt = 140 \int t^{3/4} dt \\ K &= 140 \left(\frac{4}{7} t^{7/4} \right) + c = 80t^{7/4} + c \end{aligned}$$

pero $c = K_0 = 150$ entonces,

$$K = 80t^{7/4} + 150$$

5.5 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La cantidad vendida y el correspondiente precio, en situación de monopolio se determina por la función de demanda $p = \frac{1}{4}(10 - q)^2$ y el costo total es $c = \frac{q^3}{4} + 5q$. Determinar el excedente del consumidor. Rpta: 26/3
2. Cuando la maquina tiene x años, la tasa a la cual está cambiando su valor es de $220(x - 10)$ soles por año. ¿En que cantidad se deprecia la maquina al cumplir dos años y cual es su precio de reventa en un tiempo si su costo fue de S/- 12000. Rpta: S/. 3960.
3. Dado $dC/dY = 0.6 + \frac{0.1}{\sqrt[3]{Y}}$ y $C = 45$ cuando $Y = 0$, obtenga la función de consumo, C. Rpta: $C = 0.6Y + 0.15Y^{2/3} + 45$
4. La propensión marginal al ahorro esta dada por $dS/dY = 0.5 - 0.2Y^{-1/2}$. Existe desahorro de 3.5 cuando el ingreso es 25, es decir, $S = -3.5$ cuando $Y = 25$. Obtenga la función de ahorro. Rpta: $S = 0.5Y - 0.4Y^{1/2} - 14$.
5. El costo marginal esta dado por $CM = dCT/dQ = 25 + 30Q - 9Q^2$. El costo fijo es 55. Encuentre (a) el costo total, (b) el costo medio y (c) la función costo variable.
Rpta. (a) $25Q + 15Q^2 - 3Q^3 + 55$,
(b) $25 + 15Q - 3Q^2 + 55/Q$,
(c) $25Q + 15Q^2 - 3Q^3$.