Capítulo 2: Modelos Económicos

Operaciones con conjuntos

Ejemplo 1.

Sea $A = \{3,5,7\}\ y\ B = \{2,3,4,8\}$, entonces:

$$AUB = \{2,3,4,5,7,8\}$$

Este ejemplo, de forma incidental ilustra el caso en el que dos conjuntos A y B no son iguales ni disjunto y en el que ninguno es el subconjunto del otro

Ejemplo 2.

De nuevo, con la figura 2.1, se ve que la unión del conjunto de los enteros con el conjunto de las fracciones es el conjunto de todos los números racionales. De manera similar, la unión del conjunto de los números racionales y del conjunto de los números irracionales. De manera similar, la unión del conjunto de los números racionales y del conjunto de los números irracionales produce el número de conjuntos reales

$$Numeros\ Racionales\ U\ Numeros\ Irracionales = Numeros\ Reales$$

Por otro lado, la intersección de dos conjuntos A y B es un nuevo conjunto que contiene a los elementos (y solo esos elementos) que pertenecen tanto a A como a B. El conjunto intersección se simboliza mediante

$$A \cap B\ (A\ interseccion\ B)$$

Ejemplo 3.

De los 2 conjuntos A y B del ejemplo 1, se puede escribir:

$$A \cap B = \{3\}$$

Ejemplo 4.

Si $A = \{-3,6,10\}\ y\ B = \{9,2,7,4\}$ entonces $A \cap B = \emptyset$. El conjunto A y el conjunto B son disjuntos; por lo tanto, su intersección es el conjunto vacío, ningún elemento es común

Ejemplo 5.

Si $U = \{5,6,7,8,9\}\ y\ A = \{5,6\}$, entonces

$$Complemento\ de\ A = A' = \{7,8,9\}$$

Ejemplo 6.

¿Cuál es el complemento de U? Puesto que todo objeto (numero) es consideración se incluye en el conjunto universal, el complemento de U debe ser vacío. Así $U' = \emptyset$

Leyes de Operaciones de Conjuntos

Ejemplo 7.

Compruebe la ley distributiva, dadas $A = \{4,5\}$, $B = \{3,6,7\}\ y\ C = \{2,3\}$. Para comprobar la primera parte de la ley, se determinan por separado las expresiones del lado izquierdo y del lado derecho

$$Izquierdo: A \cup (B \cap C) = \{4,5\}\ \cup\ \{3\} = \{3,4,5\}$$

$$Derecha: (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset$$

De tal manera, que se verifica la ley

Sección de Ejercicios 2.3

1. Escriba la siguiente en notación de conjuntos

   1.1. El conjunto de números reales mayores que 34

   $$J = \{x|x \in R, x > 34\}$$

   1.2. El conjunto de los números reales mayores que 8 pero menores que 65

   $$J = \{x|x \in R, 8 < x < 65\}$$

2. Dados los conjuntos $S_1 = \{2,4,6\}$, $S_2 = \{7,2,6\}, S_3 = \{4,2,6\}\ y\ S_4 = \{2,4\}$¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?

a. $S_1 = S_3$: ***Verdadero***

b. $S_1 = R$: ***Verdadero***

c. $8 \in S_2$: ***Falso***

d. $3 \notin$: ***Verdadero***

e. $4 \notin S_3$: ***Falso***

f. $S_4 \subset R$: ***Verdadero***

g. $S_1 \supset S_4$: ***Verdadero***

h. $\emptyset \subset S_2$: ***Verdadero***

i. $S_3 \supset \{1,2\}$: ***Verdadero***

3. En relación con los cuatro subconjuntos del problema anterior, determine:

a. $S_1 \cup S_2 = \{2,4,6,7\}$

b. $S_1 \cup S_3 = \{2,4,6\}$

c. $S_2 \cap S_3 = \{2,6\}$

d. $S_2 \cap S_4 = \{2\}$

e. $S_4 \cap S_2 \cap S_1 = \{2\}$

f. $S_3 \cup S_1 \cup S_4 = \{2,4,6\}$

4. Cuáles de los siguientes enunciados son validos

a. $A \cup A = A$: ***Valido***

b. $A \cap A = A$: ***Valido***

c. $A \cup \emptyset = A$: ***Valido***

d. $A \cup U = U$: ***Valido***

e. $A \cap \emptyset = \emptyset$: ***Invalido***

f. $A \cap U = A$: ***Valido***

g. $(A')' = A$: ***Valido***

5. Dados $A = \{4,5,6\}, B = \{3,4,6,7\}\ y\ C = \{2,3,6\}$ compruebe la ley distributiva

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

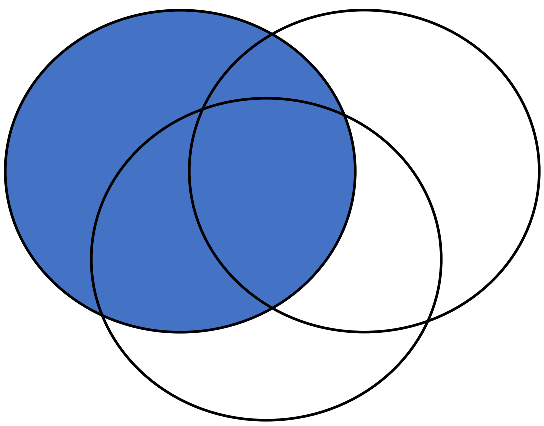
$$\{4,5,6\} \cup (\{3,4,6,7\} \cap \{2,3,6\}) = (\{4,5,6\} \cup \{3,4,6,7\}) \cap (\{4,5,6\} \cup \{2,3,6\})$$

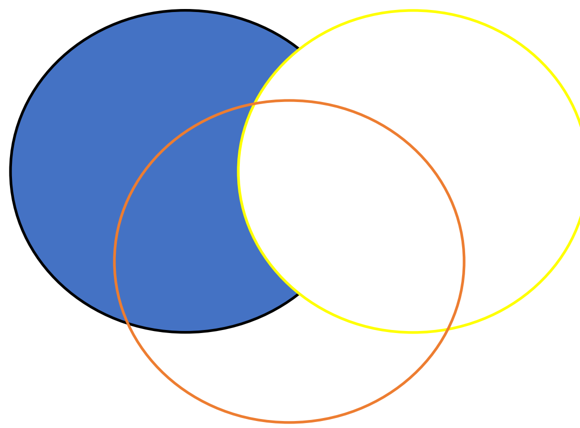
$$\{4,5,6\} \cup (\{3,6\}) = (\{3,4,5,6,7\}) \cap (\{2,3,4,5,6\})$$

$$\{3,4,5,6\} = (\{3,4,5,6\})$$

6. Compruebe la ley distributiva por medio de diagramas de Ven con diferentes colores de sombramiento

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$





7. Enumere los subconjuntos de $\{5,6,7\}$
   7.1. $\{5\}$
   7.2. $\{6\}$
   7.3. $\{7\}$
   7.4. $\{5,6\}$
   7.5. $\{5,7\}$
   7.6. $\{6,7\}$
   7.7. $\{5,6,7\}$
   7.8. $\{\emptyset\}$
8. Enumere los subconjuntos del conjunto $S = \{a, b, c, d\}$ ¿Cuántos subconjuntos hay?

$$Numero\ de\ Subconjuntos: 2^4 = 16$$

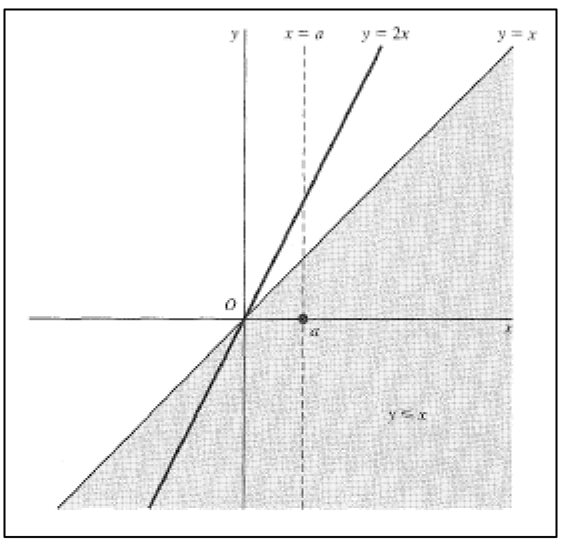
8.1. $\{a\}$
8.2. $\{b\}$
8.3. $\{c\}$
8.4. $\{d\}$
8.5. $\{a,b\}$
8.6. $\{a,c\}$
8.7. $\{a,d\}$
8.8. $\{b,c\}$
8.9. $\{b,d\}$
8.10. $\{c,d\}$
8.11. $\{a,b,c\}$
8.12. $\{b,c,d\}$
8.13. $\{a,c,d\}$
8.14. $\{a,b,d\}$
8.15. $\{a,b,c,d\}$
8.16. $\{\emptyset\}$

9. En el ejemplo 6 se muestra que ∅ es el complemento de U. Pero puesto que el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto, ∅ debe ser un subconjunto de U. En vista de que el término “complemento de U” indica la idea de no estar en U, mientras que el término “subconjunto de U” indica la idea de estar en U, parece paradójico que ∅ este en ambas cosas ¿Cómo resuelve esta paradoja?

El complemento de U es $U' = \{x | x \notin U\}$. Aquí, la notación de "no en U" se expresa mediante ∉ ,el símbolo que relaciona un elemento (x) con un conjunto (U). Por el contrario, cuando decimos " ∅ es un subconjunto de U", la noción de "en U" se expresa mediante el símbolo ⊂ que relaciona un subconjunto con un conjunto (U). Por lo tanto, tenemos dos contextos diferentes, y no existe ninguna paradoja en absoluto.

2.4 Relaciones & Funciones

<u>Ejemplo 1.</u>



Para mostrar la edad y el peso de cada estudiante en una clase, se pueden formar pares ordenados (a,w), en los que el primer elemento indica la edad (en años) y el segundo elemento indica el peso (en libras). Entonces (19,127) y (127,19) obviamente indican cosas diferentes. Además, el último par ordenado difícilmente se ajusta a algún estudiante en cualquier parte.

<u>Ejemplo 2.</u>

Cuando se habla del conjunto de los competidores de un juego olímpico, el orden en el que se lista no tiene importancia y se tiene con conjunto no ordenado. Pero el conjunto (medallista de oro, medallista de plata, medallista de bronce) es una terna ordenada

Relaciones & Funciones

Ejemplo 3.

El conjunto $\{(x, y)|y = 2x\}$ es un conjunto de pares ordenados que incluye, por ejemplo, (1, 2), (0, 0), (-1, -2). Esto constituye una relación, y su contraparte grafica es el conjunto de puntos que yacen en la recta y=2x.

Ejemplo 4.

El conjunto $\{(x, y)|y \leq x\}$, que consiste en los pares ordenados tales como (1,0), (1, 1) y (1, -4), constituye otra relación, este conjunto de los puntos en el área sombrada que satisface la desigualdad $y \leq x$

Ejemplo 5.

El costo total C de una empresa por día es una función de su producción diaria: $Q{:}\, C = 150 + 7$. La empresa tiene una capacidad límite de 100 unidades de producto por día. ¿Cuáles son el dominio y la imagen de la función de costo? En vista de que Q puede variar entre 0 y 100, el dominio es el conjunto de valores $0 \leq Q \leq 100$; o de manera más formal,

$$Dominio = \{Q|0 \leq Q \leq 100\}$$

En cuanto a la imagen, puesto que la función tiene la forma de una recta, con el valor mínimo en 150 (cuando Q=0) y el valor máximo C en 850 (cuando Q=100), se tiene

$$Imagen = \{C|150 \leq C \leq 850\}$$

No obstante, tenga en cuenta la posibilidad de que los valores extremos de la imagen no ocurran siempre donde se obtienen los valores extremos del dominio

Sección de Ejercicios 2.4

1. Dados $S_1 = \{3,6,9\}, S_2 = \{a, b\}\ y\ S_3 = \{m, n\}$, determine los productos cartesianos
   1.1. $S_1\ x\ S_2 = \{(3, a), (3, b), (6, a), (6, b), (9a), (9, b)\}$
   1.2. $S_2\ x\ S_3 = \{(a, m), (a, n), (b, m), (b, n)\}$
   1.3. $S_3\ x\ S_1 = \{(m, 3), (m, 6), (m, 9), (n, 3), (n, 6), (n, 9)\}$
2. De la información del ejercicio anterior, encuentre el producto cartesiano $S_1\ x\ S_2\ x\ S_3$

$$S_1\ x\ S_2\ x\ S_3 = \{(3, a, m), (3, a, n), (3, b, m), (3, b, n), (6, a, m), (6, a, n), (6, b, m), (6, b, n), (9, a, m), (9, a, n), (9, b, m), (9, b, n)\}$$

3. En general ¿Se cumple que $S_1 \, x \, S_2 = S_2 \, x \, S_1$? ¿En qué condiciones estos dos productos cartesianos son iguales?

$$S_1 \, x \, S_2 = \{(3,a),(3,b),(6,a),(6,b),(9,a),(9,b)\}$$

$$S_2 \, x \, S_1 = \{(a,3),(a,6),(a,9),(b,3),(b,6),(b,9)\}$$

No se cumple las condiciones puesto el orden de los pares forma ordenados con respecto a eso, la única manera en la cual el producto escalar sea iguales en ambos productos es que ambos puntos tengan los mismos elementos y en el mismo orden

4. ¿Alguna de las siguientes representaciones, dibujadas en un plano coordenado rectangular, representa una función?

   4.1. Un circulo: **No es una Función**

   4.2. Un triángulo: **No es una Función**

   4.3. Un rectángulo: **No es una función**

   4.4. Una recta con pendiente descendiente: **Es una Función**

5. Si el dominio de la función $y = 5 + 3x$ es el conjunto $\{x|1 \leq x \leq 9\}$, determine la imagen de la función y expréselo en un conjunto:

$$Valor\ Minimo: y = 5 + 3 * 1 = 8$$

$$Valor\ Maximo: y = 5 + 3 * 9 = 32$$

Por ende, la imagen de la función es:

$$Imagen = \{y|8 \leq y \leq 32\}$$

6. Para la función $y = -x^2$, si el dominio es el conjunto de los números reales no negativos, ¿Cuál es la imagen?

$$Imagen = \{y \mid -\infty \leq y \leq 0\}$$

7. En la teoría de la empresa, los economistas consideran el costo total C como una función del nivel de producción Q: C = f(Q).

   7.1. De acuerdo con la definición de una función, ¿Se debe relacionar cada cifra de costo con un nivel de producción único?

No, dependerá en cierta medida de la estructura de la función de costos, dado el grado de esta se pondrían encontrar varios puntos que opten a un mismo nivel de producción

   7.2. ¿Cada nivel de producción debe determinar una cifra de costo única?

En absoluto, un punto que indique un cierto nivel de producción “Q” responderá solamente a un nivel de costos “C” dada la función que se esté planteando o que determina los costos en función del nivel de producción

8. Si un nivel de producción Q_1 se puede producir a un costo $C_1 + \$1, o\ C_1 + \$2, etc.$ Así, ser posible (por ser menos eficaz) producir Q no solo determina el costo total C. SI así fueran escribir $C = f(Q)$ violaría la definición de una función. ¿Cómo, a pesar de este razonamiento, justificaría el uso de la función $C = f(Q)$

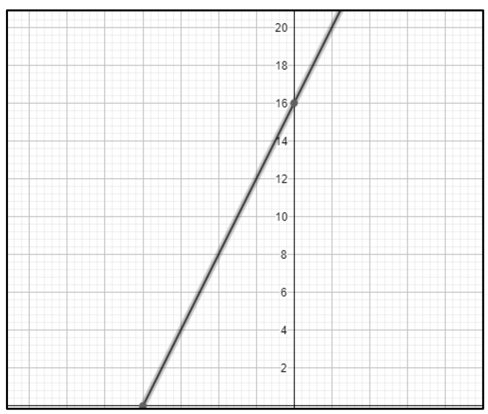
Para cada nivel de producción, deberíamos descartar todas las cifras de costos ineficientes y tomar las cifras de costo más bajas como el costo total para ese nivel de producción. Esto establecería la unicidad requerida por la definición de una función.

2.5: Tipos de Función

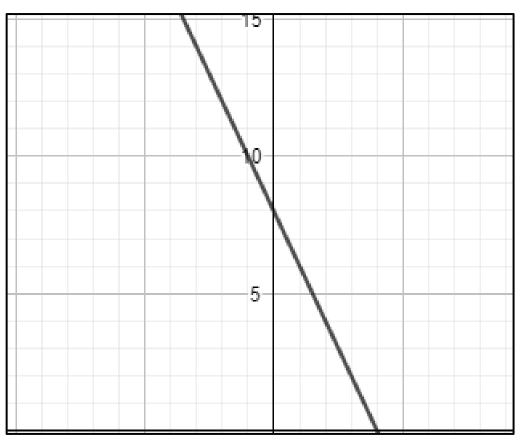
Sección de Ejercicio 2.5:

1. Grafique las funciones (En cada caso considere que el dominio consiste solo en números reales no negativos)

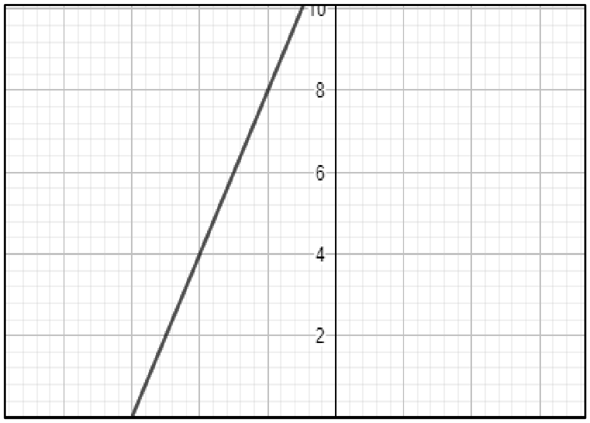
1.1. $y = 16 + 2x$



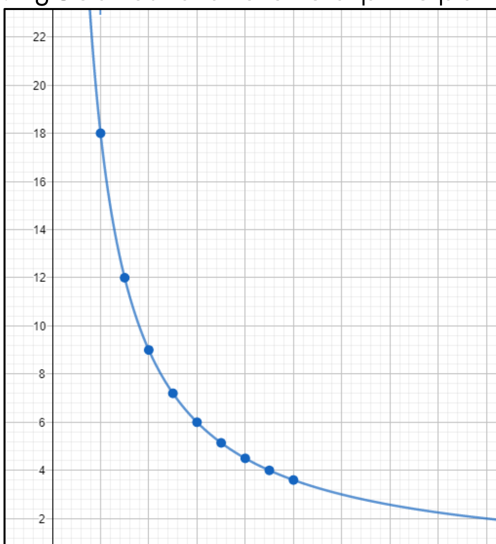
1.2. $y = 8 - 2x$



1.3. $y = 2x + 12$

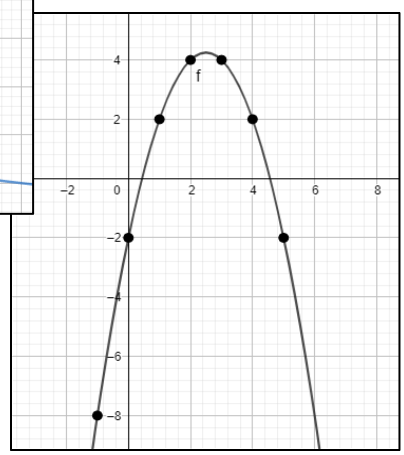


2. ¿Cuál es la diferencia principal entre a y b en el problema 1? ¿Cómo se refleja esta diferencia en las gráficas?



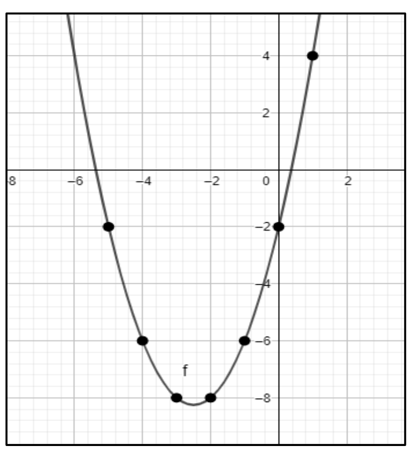
La diferencia radica en el signo de la pendiente, dado que a mostraba una pendiente positiva y la segunda mostraba una pendiente negativa, es decir, la dirección de la recta cambia

3. Grafique las funciones con el conjunto de valores de $-5<x<5$ que constituye el dominio. ¿Qué signo se relaciona con la colina? Proporcione una explicación intuitiva para esto



3.1. $y = -x^2 + 5x - 2$

3.2 $x^2 + 5x - 2$



Un coeficiente negativo para los términos x está asociado con una colina. A medida que el valor de x aumenta o se reduce constantemente, el término -x ejercerá una influencia más dominante al determinar el valor de y. Siendo negativo, este término sirve para bajar los valores de y como los dos extremos de la curva

4. Grafique la función $y = \frac{36}{x}$, suponiendo que x y y pueden tomar valores positivos

solamente. A continuación, supongo que ambas variables pueden tomar valores negativos también; ¿Cómo se debe modificar la gráfica para reflejar este cambio?

Si se le dan negativos como dominio en la función, aparecerá en el cuadrante III una curva que es la imagen especular de la del cuadrante I

5. Condense las expresiones siguientes:

   5.1. $x^4 * x^{15} = x^{19}$

   5.2. $x^a * x^b * x^c = x^{a+b+c}$

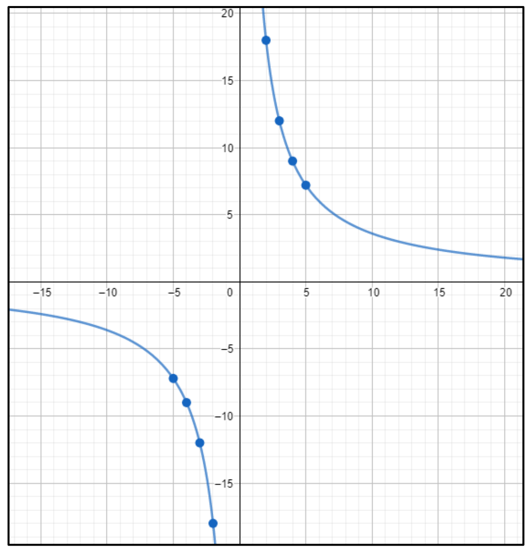
   5.3. $x^3 * y^3 * z^3 = (xyz)^3$

6. Determine

   6.1. $\frac{x^3}{x^{-3}} = x^6$

   6.2. $\frac{x^{1/2} * x^{1/3}}{x^{2/3}} = x^{1/6}$

7. Demuestre que $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$. Especifique las reglas aplicadas en cada paso.



Utilizando las reglas VI: $(x^m)^n = x^{m*n}$ y la regla V: $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

Escribimos:

$$x^{m/n} = (x^m)^{1/n} = (\sqrt[n]{x})^m$$

Pero con las reglas, también tenemos que:

$$x^{m/n} = (x^{1/n})^m = (\sqrt[n]{x})^m$$

8. Pruebe la regla VI y la regla VII

   8.1.

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m * x^m * x^m * \ldots * x^m}_{\text{N veces}} = x^{m*n}$$

   8.2.

$$x^m * y^m = x * x * \ldots * x * \underbrace{y * y * y * \ldots * y}_{\text{m veces}} = \underbrace{(xy) * (xy) * \ldots * (xy)}_{\text{m veces}} = (xy)^m$$

Capítulo 3: Análisis del equilibrio en economía

Sección 3.2

Ejercicio 1:

Dado el modelo de mercado

$Q_d = Q_s$

$Q_d = 21 - 3P$

$Q_s = -4 + 8P$

Obtenga $P^*\ y\ Q^*$ por (a) eliminación de variables y (b) por medio de las fórmulas (3.4) y (3.5) (Use fracciones en vez de decimales).

(a) Utilizando la primera ecuación del sistema, que representa la condición de equilibrio, se deduce que:

$$21 - 3P = -4 + 8P$$

$$11P^* = 25 \quad \Rightarrow \boldsymbol{P^*} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{11}}$$

Sustituyendo el P^* en las funciones de demanda u oferta.

$$Q^* = 21 - 3\left(\frac{25}{11}\right)$$

$$\boldsymbol{Q^*} = \frac{\mathbf{156}}{\mathbf{11}}$$

(b) Siendo $a = 21, b = 3, c = 4\ y\ d = 8$.

$$P^* = \frac{21 + 4}{3 + 8} = \frac{25}{11} \qquad Q^* = \frac{(21)(8) - (3)(4)}{3 + 8} = \frac{156}{11}$$

Ejercicio 2:

Sean las funciones de la oferta y la demanda como sigue:

$$(o)Q_d = 51 — 3P \qquad (b)Q_d = 30 - 2P$$

$$Q_s = 6P - 10 \qquad Q_s = —6 + 5P$$

determine P^* y Q^* mediante eliminación de variables.

(a) Dado que $Q_d = Q_s$ cuando el mercado está en equilibrio

$$51 - 3P = 6P - 10$$

$$9P^* = 61 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{P^* = \frac{61}{9}}$$

Sustituyendo el P^* en las funciones de demanda u oferta.

$$Q^* = 51 - 3\left(\frac{61}{9}\right)$$

$$\boldsymbol{Q^* = \frac{92}{3}}$$

Por tanto, $(P^*, Q^*) = \left(\frac{61}{9}, \frac{92}{3}\right)$

(b) Dado que $Q_d = Q_s$ cuando el mercado está en equilibrio

$$30 - 2P = 5P - 6$$

$$7P^* = 36 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{P^* = \frac{36}{7}}$$

Sustituyendo el P^* en las funciones de demanda u oferta.

$$Q^* = 5\left(\frac{36}{7}\right) - 6$$

$$\boldsymbol{Q^* = \frac{138}{7}}$$

Por tanto, $(P^*, Q^*) = \left(\frac{36}{7}, \frac{138}{7}\right)$

Ejercicio 3.

Si (b+d)=0 en el modelo de mercado lineal, ¿se puede encontrar una solución de equilibrio al usar (3.4) y (3.5)?¿Por qué?

No se podrá calcular soluciones para este modelo debido a que la división entre 0 no está definida

Ejercicio 4.

Si (b+d)=0 en el modelo de mercado lineal, ¿Qué se puede concluir en relación con las posiciones de las curvas de demanda y equilibrio en la figura 3.1?¿Que concluye entonces con respecto a la solución de equilibrio?

Debido a que serán infinitas las pendientes y serán paralelas, por tanto, no existirá una intersección por ende no hay equilibrio

Sección 3.3

Ejemplo 1.

La expresión $x^3 - x^2 - 4\text{x} + 4$ se puede escribir como el producto de tres factores $(x-1)$, $(x+2)\ y\ (x-2)$. Así, la ecuación cúbica

$$x^3 - x^2 - 4\text{x} + 4 = 0$$

Se puede escribir después de factorizar como

$$(x-1)(x+2)(x-2) = 0$$

A fin de que el producto del lado izquierdo sea cero, al menos uno de los tres términos del producto debe ser cero. Al igualar a cero cada término, se obtiene

$x - 1 = 0,$ o bien, $x + 2 = 0$ o bien, $x - 2 = 0$

Estas tres ecuaciones suministrarán las tres raíces de la ecuación cúbica, a saber,

$x_1^* = 1$ $x_2^* = -2$ $x_3^* = 2$

Ejemplo 2:

¿Tiene la ecuación cuártica?

$$2\,x^4 + 5x^3 - 11\,x^2 - 20x + 12 = 0$$

raíces racionales? Con $a_0 = 12$, los únicos valores posibles para el numerador r en *r/s* son el conjunto de divisores $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12\}$. Y, con $a_n = 2$, los únicos valores posibles para s son el conjunto de divisores $\{1, -1, 2, -2\}$. Tomando a su vez cada elemento del conjunto *r,* y dividiéndolo entre cada elemento del conjunto s, respectivamente, se encuentra que *r/ s* sólo puede tomar los valores

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 4, -4, 6, -6, 12, -12$$

Entre estos candidatos para las raíces, muchos no satisfacen la ecuación dada. Por ejemplo, al fijar x = 1 en la ecuación cuártica se obtiene el resultado absurdo - 12 = 0. De hecho, puesto que se está resolviendo una ecuación cuártica, se puede esperar que a lo sumo cuatro de los valores *r / s* listados califiquen como raíces. Los cuatro candidatos exitosos resultan ser $\frac{1}{2}, 2, -2$ y -3 . Según el principio de factorización, la ecuación cuártica dada se puede escribir en forma equivalente como

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)(x + 2)(x + 3) = 0$$

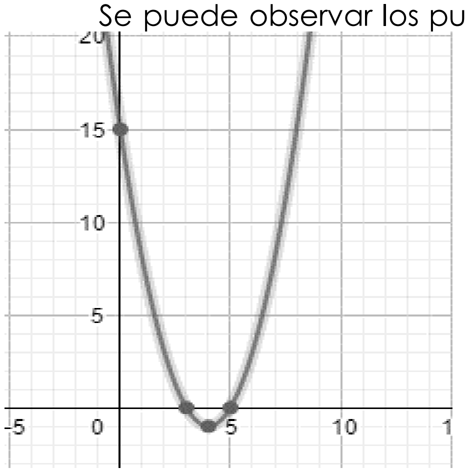
donde el primer factor también se puede escribir como $(2x - 1)$.

Ejercicio 1

Determine en forma gráfica los ceros de las siguientes funciones:

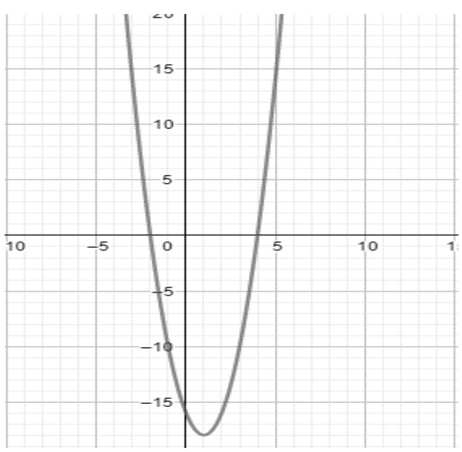
a) $f(x) = x^2 - 8\mathrm{x} + 15$

Se puede observar los puntos de intersección de la gráfica a saber (3,0) y (5,0).



Los cuales satisface f(x)=0 y por lo tanto, que los valores soluciones son: $x_1^* = 5$ y $x_2^* = 3$.

b) $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$



Se puede observar los puntos de intersección de la gráfica a saber (4,0) y (-2,0). Los cuales

satisface f(x)=0 y por lo tanto, que los valores soluciones son: $x_1^* = 4$ y $x_2^* = 3$

Ejercicio 2.

Resuelva el problema 1 mediante la fórmula cuadrática.

$$x_1^*, x_2^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 8\mathrm{x} + 15}$$

a: 1 b: -8 c:15

Sustituyendo a, b y c en la formula cuadrática obtenemos:

$$x_1^*, x_2^* = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(15)}}{2(1)}$$

$$x_1^*, x_2^* = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$\therefore$ *los valores soluciones son*:

$x_1^* = 5$ $x_2^* = 3$

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 4x - 16}$$

a: 2

b: -4

c:-16

Sustituyendo a, b y c en la formula cuadrática obtenemos:

$$x_1^*, x_2^* = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-16)}}{2(2)}$$

$$x_1^*, x_2^* = \frac{4 \pm \sqrt{144}}{4}$$

$\therefore$ *los valores soluciones son*:

$x_1^* = 4$ $x_2^* = -2$

Ejercicio 3.

Encuentre una ecuación cúbica con raíces 6, -1 y 3.

A partir de las raíces podemos:

$$(x - 6)(x + 1)(x - 3) = 0$$

Desarrollando el producto tenemos:

$$x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 6x^2 - 18x - 6x + 18 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 9\mathrm{x} + 18 = 0$$

Obtenga una ecuación cuartica con raíces 1, 2, 3 y 5.

A partir de las raíces podemos:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)=0$$

Desarrollando el producto tenemos:

$$x^4-5x^3-3x^3-2x^3-x^3+15x^2+6x^2+10x^2+5x^2+3x^2+2x^2-30x-15x-10x-6x+30=0$$

$$x^4-11x^3+41x^2-61x+30=0$$

Ejercicio 4

Para cada una de las siguientes ecuaciones polinomiales, determine si x=1 es una raíz

$$x^3-2x^2+3x-2=0$$

Usando el tercer teorema obtenemos que la suma de los coeficientes debe de ser 0

Por tanto: $1-2+3-2=0$

Entonces se concluye que x=1 es una raíz

a) $2x^3-\frac{1}{2}x^2+x-2=0$

Usando el tercer teorema:$2-\frac{1}{2}+1-2\neq 0$

Por tanto, x=1 no es una raíz

b) $3x^4-x^2+2x-4=0$

Usando el tercer teorema:$3-1+2-4=0$

X=1 si es una raíz

Ejercicio 5

Halle las raíces racionales, si existen, de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3-4x^2+x+6=0$

Ocupando división sintética, se obtiene que x+1=0 es una raíz

Por tanto,

$$(x+1)(x^2-5x+6)$$

$$(x+1)(x-3)(x-2)=0$$

Entonces las raíces son:

$$x_1=-1, x_2=3, x_3=2$$

b) $8x^3 + 6x^2 - 3x - 1$

Usando división sintetica obtenemos

$$(x+1)(8x^2 - 2x - 1)$$

$$(x+1)\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Entonces las raíces son

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{2}$$

c) $x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{1}{8} = 0$

Usando division sintetica

$$(x+1)(8x^2 - 2x - 1)$$

$$(x+1)\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Entonces las raíces son

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{2}$$

d) $x^4 - 6x^3 + 7\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = 0$

Multiplicando por 4 y usando división sintética

$$4x^4 - 24x^3 + 34x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$(x-1)(4x^3 - 20x^2 + 14x + 8) = 0$$

$$(x-1)(x-4)(4x^2 - 4x - 2) = 0$$

Usando formula general obtenemos las raíces del último término y obtenemos:

$$x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, x_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

<u>Ejercicio 6</u>

Obtenga la solución de equilibrio para cada uno de los siguientes modelos:

(a) $Q_d = Q_s$

$Q_d = 3 - P^2$

$Q_s = 6P - 4$

Utilizando la primera ecuación del sistema, que representa la condición de equilibrio, se deduce que:

$$3 - P^2 = 6P - 4$$

$$P^2 + 6P - 7 = 0$$

$$(P + 7)(P - 1) = 0$$

De estos dos resultados, el único que se puede admitir es $P^* = 1$, por la restricción a *priori* de precios estrictamente positivos. Entonces:

$$Q^* = 6(1) - 4 = 2$$

Por tanto, $(P^*, Q^*) = (1, 2)$

(b) $Q_d = Q_s$

$Q_d = 8 - P^2$

$Q_s = P^2 - 2$

Utilizando la primera ecuación del sistema, que representa la condición de equilibrio, se deduce que:

$$8 - P^2 = P^2 - 2$$

$$2P^2 = 10$$

$$P = \pm\sqrt{5}$$

De estos dos resultados, el único que se puede admitir es $P^* = \sqrt{5}$, por la restricción a *priori* de precios estrictamente positivos. Entonces:

$$Q^* = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2 = 3$$

Por tanto, $(P^*, Q^*) = \left(\sqrt{5}, 3\right)$

<u>Ejercicio 7:</u>

La condición de equilibrio de mercado, $Q_d = Q_s$, suele expresarse en una forma alternativa equivalente, $Q_d - Q_s = 0$, que tiene la interpretación económica "la demanda excedente es cero". ¿Representa la ecuación (3.7) esta última versión de la condición de equilibrio? Si no, provea una interpretación económica apropiada para (3.7).

Respuesta: *La ecuación 3.7 en realidad tiene la forma de $Q_s - Q_d = 0$, una interpretación similar a la descrita, pero que se lee como "La oferta excedente es cero" y sí, no se ha realizado ninguna modificación a la condición de equilibrio, dado que sigue representando el mismo concepto, son equivalencias.*

Sección 3.4

Ejercicio 1:

Desarrolle la solución de (3 .13'), paso a paso, y de este modo compruebe los resultados en (3.14) y (3.15).

$$c_1P_1 + c_2P_2 = -c_0$$

$$\gamma_1P_1 + \gamma_2P_2 = -\gamma_0$$

Utilizando la segunda ecuación

$$P_2 = -\frac{(\gamma_0+\gamma_1P_1)}{\gamma_2}$$

Sustituyendo en la primera ecuación.

$$c_1P_1 + c_2\left(-\frac{(\gamma_0+\gamma_1P_1)}{\gamma_2}\right) = -c_0$$

$$c_1\gamma_2P_1 - c_2\gamma_0 - c_2\gamma_1P_1 = -c_0\gamma_2$$

$$P_1(c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1) = c_2\gamma_0 - c_0\gamma_2$$

$$\boldsymbol{P_1 = \frac{c_2\gamma_0 - c_0\gamma_2}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}}$$

Por tanto,

$$P_2 = -\frac{\left(\gamma_0+\gamma_1\left(\frac{c_2\gamma_0 - c_0\gamma_2}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}\right)\right)}{\gamma_2}$$

$$P_2 = -\frac{\left(\gamma_0 + \left(\frac{\gamma_1c_2\gamma_0 - \gamma_1c_0\gamma_2}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}\right)\right)}{\gamma_2}$$

$$P_2 = -\frac{\left(\frac{\gamma_0c_1\gamma_2 - \gamma_0c_2\gamma_1 + \gamma_1c_2\gamma_0 - \gamma_1c_0\gamma_2}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}\right)}{\gamma_2}$$

$$P_2 = -\frac{\gamma_2\left(\frac{\gamma_0c_1 - \gamma_1c_0}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}\right)}{\gamma_2}$$

$$\boldsymbol{P_2 = \frac{\gamma_1c_0 - \gamma_0c_1}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}}$$

Ejercicio 2.

Vuelva a escribir (3.14) y (3.15) en términos de los parámetros originales del modelo en (3.12)

El modelo 3.12 es:

$$Q_{d1} - Q_{s1} = 0$$

$$Q_{d1} = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2$$

$$Q_{s1} = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2$$

$$Q_{d2} - Q_{s2} = 0$$

$$Q_{d2} = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2$$

$$Q_{s2} = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2$$

3.4 y 3.5 son

$$P_1^* = \frac{c_2\gamma_0 - c_0\gamma_2}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}$$

$$P_2^* = \frac{c_0\gamma_1 - c_1\gamma_0}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}$$

Escribiendo los precios de equilibrio en términos de 3.12 obtenemos

$$P_1^* = \frac{(a_2 - b_2)(\alpha_0 - \beta_0) - (a_0 - b_0)(\alpha_2 - \beta_2)}{(a_1 - b_1)(\alpha_2 - \beta_2) - (a_2 - b_2)(\alpha_1 - \beta_1)}$$

$$P_2^* = \frac{(a_0 - b_0)(\alpha_1 - \beta_1) - (a_1 - b_1)(\alpha_0 - \beta_0)}{(a_1 - b_1)(\alpha_2 - \beta_2) - (a_2 - b_2)(\alpha_1 - \beta_1)}$$

Ejercicio 3.

Las funciones de la oferta y la demanda de un modelo de mercado de dos artículos son como sigue:

$Q_{d1} = 18 - 3P_1 + P_2$ $\quad$ $Q_{d2} = 12 + P_1 - 2P_2$

$Q_{s1} = -2 + 4P_1$ $\quad$ $Q_{s2} = -2 + 3P_2$

Determine P_i^* y Q_i^* $(i = 1,2)$. (Use fracciones en vez de decimales).

Dado las condiciones de equilibrio:

$$Q_{d1} - Q_{s1} = 0$$

$$18 - 3P_1 + P_2 + 2 - 4P_1 = 0$$

$$7P_1 - P_2 = 20$$

$$Q_{d2} - Q_{s2} = 0$$

$$12 + P_1 - 2P_2 + 2 - 3P_2 = 0$$

$$P_1 - 5P_2 = -14$$

Despejando $P_2 = 7P_1 - 20$ de la primera ecuación y al sustituir se obtiene:

$P_1 - 5(7P_1 - 20) = -14$

$P_1 - 35P_1 = -114$

$\boldsymbol{P_1^*} = \frac{114}{34} = \boldsymbol{\frac{57}{17}}$

De la misma manera al despejar $P_1 = \frac{P_2+20}{7}$ y sustituir obtenemos:

$\left(\frac{P_2 + 20}{7}\right) - 5P_2 = -14$

$-\frac{34}{7}P_2 = -\frac{118}{7}$

$\boldsymbol{P_2^*} = \boldsymbol{\frac{59}{17}}$

Finalmente, con los precios de equilibrio calculamos la cantidad de equilibrio sustituyéndolos en $Q_{d1}\ y\ Q_{d2}$:

$\boldsymbol{Q_1^*} = 18 - 3P_1 + P_2 = 18 - 3\left(\frac{57}{17}\right) + \frac{59}{17} = \frac{194}{17}$

$\boldsymbol{Q_2^*} = 12 + P_1 - 2P_2 = 12 + \frac{57}{17} - 2\left(\frac{59}{17}\right) = \frac{143}{17}$

Sección 3.5

<u>Ejercicio 1</u>

Dado el siguiente modelo:

$Y = C + I_0 + G_0$

$C = a + b(Y - T) \qquad (a > 0, \quad 0 < b < 1) \quad [T: impuestos]$

$T = d + tY \qquad (a > 0, \quad 0 < y < 1) \quad [t: tasa\ de\ impuesto\ sobre\ la\ renta]$

a) ¿Cuántas variables endógenas hay?

Hay 3 variables endógenas, siendo Y, C y T las variables de ingreso nacional, gasto de consumo e impuestos, respectivamente.

b) Determine $Y^*, T^*\ y\ C^*$.

Hallando los valores de equilibrio de ingreso, consumo e impuesto en términos de a, b, d y t de las variables exógenas

$$Y = C + I_0 + G_0$$

Sustituyendo C y T tenemos

$$Y = a + b(Y - d - tY) + I_0 + G_0$$

$$Y = a + bY - bd - btY + I_0 + G_0$$

$$(1 - b + bt)Y = a - bd + I_0 + G_0$$

Despejando tenemos:

$$\boldsymbol{Y^* = \frac{a - bd + I_0 + G_0}{1 - b(1 - t)}}$$

Al sustituir en la tercera ecuación se encuentra el nivel de equilibrio para los impuestos:

$$T^* = d + tY^* = d + t\left(\frac{a - bd + I_0 + G_0}{1 - b(1 - t)}\right)$$

$$T^* = \frac{d\big(1 - b(1 - t)\big) + t(a - bd + I_0 + G_0)}{1 - b(1 - t)}$$

$$\boldsymbol{T^* = \frac{d(1 - b) + t(a + I_0 + G_0)}{1 - b(1 - t)}}$$

Finalmente, y por simplicidad para encontrar el nivel de equilibrio del consumo despejamos y sustituimos en la ecuación del ingreso nacional:

$$C^* = Y^* - I_0 - G_0 = \frac{a - bd + I_0 + G_0}{1 - b(1 - t)} - I_0 - G_0$$

$$C^* = \frac{a - bd + I_0 + G_0 - I_0\big(1 - b(1 - t)\big) - G_0\big(1 - b(1 - t)\big)}{1 - b(1 - t)}$$

$$\boldsymbol{C^* = \frac{a - bd + b(1 - t)(I_0 + G_0)}{1 - b(1 - t)}}$$

<u>Ejercicio 2</u>

Sea el modelo de ingreso nacional

$$Y = C + I_0 + G_0$$

$$C = a + b(Y - T) \quad (a > 0, 0 < b < 1)$$

$$G = gY \quad (0 < g < 1)$$

a) Identifique las variables endógenas

Las variables endógenas son Y, C y G

b) Dé el significado económico del parámetro g

Despejando g obtenemos $g = \frac{G}{Y}$ esto se puede considerar como la porción que el gobierno gasta respecto al ingreso nacional.

c) Determine el ingreso nacional de equilibrio

Sustituyendo C y G en I obtenemos el ingreso nacional de equilibrio

$$Y = a + b(Y - T) + I_0 + gY$$

Despejando y obtenemos

$$Y - gY = a + bY - bT + I_0$$

$$Y - gY - bY = a - bT + I_0$$

$$Y(1 - g - b) = a - bT + I_0$$

$$Y = \frac{a - bT + I_0}{(1 - g - b)}$$

d) ¿Qué restricción se requiere en los parámetros para que exista una solución?

Para que exista una solución se debe evitar que el denominador sea 0, por tanto, $1 - g - b = 0$

Entonces $1 \neq g + b$, quiere decir que la suma de g y b debe de ser diferente de 1 para que exista una solución

Ejercicio 3

Determine Y* y C* a partir de lo siguiente:

$Y = C + I_0 + G_0$ $\qquad$ $I_0 = 16$

$C = 25 + 6Y^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $G_0 = 14$

Primero se sustituyen todos los valores en la función de producción.

$$Y = \left(25 + 6Y^{\frac{1}{2}}\right) + 16 + 14$$

$$Y - 6Y^{\frac{1}{2}} = 55$$

Se utiliza como artificio la completación de cuadrados.

$$Y - 6Y^{\frac{1}{2}} + 9 = 55 + 9$$

$$\left(\sqrt{Y} - 3\right)^2 = 64$$

$$\sqrt{Y} - 3 = 8$$

$$Y^* = (8 + 3)^2 = 121$$

Entonces:

$$C^* = 25 + 6\sqrt{121} = 91$$

Por lo tanto $(Y^*, C^*) = (121{,}91)$

Capítulo 4. Modelos lineales y álgebra de matrices

Ejercicio 4.1

1) Reescriba el modelo de mercado (3.1) en el formato de (4.1), muestre que, si se disponen las tres variables en el orden Q_d, Q_s y P, la matriz de coeficientes será:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -d \end{bmatrix}$$

¿Cómo se escribiría el vector de constantes?

Modelo de ingreso nacional (3.1) es el siguiente:

$$Q_d = Q_s$$

$$Q_d = a - bP$$

$$Q_s = -c + dP$$

En formato de (4.1)

$$Q_d - Q_s + 0P = 0$$

$$Q_d + 0Q_s + bP = a$$

$$0Q_d + Q_s - dP = -c$$

$$\text{Matriz de coeficientes A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -d \end{bmatrix}$$

$$\text{vector de constantes d} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ -c \end{bmatrix}$$

2) Reescriba el modelo de mercado (3.12) en el formato de (4.1) con las variables dispuestas en el siguiente orden: $Q_{d1}, Q_{s1}, Q_{d2}, Q_{s2}, P_1, P_2$. Escriba la matriz de coeficientes, el vector de variables y el vector de constantes.

El Modelo de mercado (3.12) en el formato de (4.1) es el siguiente:

$$Q_{d1} - Q_{s1} = 0$$

$$Q_{d1} - a_1P_1 - a_2P_2 = a_0$$

$$Q_{s1} - b_1P_1 - b_2P_2 = b_0$$

$$Q_{d2} - Q_{s2} = 0$$

$$Q_{d2} - \alpha_1P_1 - \alpha_2P_2 = \alpha_0$$

$$Q_{s2} - \beta_1 P_1 - \beta_2 P_2 = \beta_0$$

$$\text{Matriz de coeficientes A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & -a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{vector de constantes d} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_0 \\ b_0 \\ 0 \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

3) ¿Se puede reescribir el modelo de mercado (3,6) en el formato de (4,1)? ¿Por qué?

El modelo de mercado (3.6) es el siguiente:

$$Q_d = Q_s$$

$$Q_d = 4 - P^2$$

$$Q_s = 4P - 1$$

Este tipo de ecuaciones no se puede reescribir en el formato de (4.1) debido a que uno de sus ecuaciones no es lineal.

4) Reescriba el modelo de ingreso nacional (3.23) en el formato de (4.1), con Y como la primera variable. Escriba la matriz de coeficientes y el vector de constantes.

Modelo de ingreso nacional (3.23) es el siguiente:

$$Y = C + I_0 + G_0$$

$$C = a + bY$$

En formato de (4.1)

$$Y - C = (I_0 + G_0)$$

$$bY - C = -a$$

$$\text{Matriz de coeficientes A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{vector de constantes d} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ -a \end{bmatrix}$$

5) Reescriba el modelo de ingreso nacional del ejercicio 3.5-1 en el formato de (4.1), con las variables en el orden Y, T y C. [Sugerencia: tenga cuidado con la expresión multiplicativa $b(Y-T)$ en la función de consumo]

El ejercicio 3.5-1 es el siguiente:

$$Y = C + I_0 + G_0$$

$$C = a + b(Y-T)$$

$$T = d + tY$$

En formato de (4.1)

$$Y + 0T - C = (I_0 + G_0)$$

$$bY - bT - C = -a$$

$$tY - T + 0C = -d$$

Sección 4.2

Ejemplo1.

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 & 9+0 \\ 2+0 & 1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{bmatrix}$$

En general, se puede expresar esta regla así

$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]$ donde $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

Note que la matriz suma $[c_{ij}]$ debe tener la misma dimensión que las matrices de componentes $[a_{ij}]$ y $[b_{ij}]$

La operación de resta A-B se puede definir de manera similar si y solo si A y B tienen la misma dimensión

Ejemplo 3.

$$\begin{bmatrix} 19 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19-6 & 3-8 \\ 2-1 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

La operación de resta A-B se puede considerar alternativamente como una operación de suma en la que participan una matriz A y otra matriz (-1)B. Sin embargo, esto origina la pregunta de qué denota la multiplicación de una matriz por un solo número (en este caso, -1).

Ejemplo 4.

$$7\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -7 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{2} & \frac{a_{21}}{2} \\ \frac{a_{21}}{2} & \frac{a_{22}}{2} \end{bmatrix}$$

De estos ejemplos, se debe aclarar la razón fundamental del nombre escalar; porque "incrementa (o disminuye)" la matriz por un cierto múltiplo. Por supuesto, el escalar puede ser también un número negativo.

Ejemplo 6.

$$-1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -d_1 \\ -a_{21} & -a_{22} & -d_2 \end{bmatrix}$$

Observe que si la matriz de la izquierda representa los coeficientes y los términos constantes de las ecuaciones simultáneas

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = d_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = d_2$$

Entonces la multiplicación por escalar -1 equivale a multiplicar ambos lados de ambas ecuaciones por -1, y de este modo cambia el signo de todo término en el sistema.

Ejemplo 7.

Si, después de un viaje de compras, se ordenan las cantidades compradas de *n* bienes como un vector renglón $Q´=[Q_1 \quad Q_2 \quad \ldots \quad Q_n]$, y la lista de precios de esos bienes en un vector precio $P´=[P_1 \quad P_2 \ldots \quad P_n]$, entonces el producto interior de esos dos vectores es

$$Q´.P´ = Q_1P_1 + Q_2P_2 + \cdots + Q_nP_n = costo\ de\ compra\ total$$

Con este concepto, se puede describir el elemento c_{ij} en el matriz producto C=AB simplemente como el producto interior del *i-ésimo* renglón de la matriz primaria A y la *j-ésima* columna de la matriz secundaria B.

Ejemplo 8.

Dadas

$$\underset{(3\times2)}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \underset{(2\times1)}{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Determine AB. El producto AB está definido porque A tiene dos columnas y B tiene dos renglones. Su matriz producto debe ser 3x1, un vector columna:

$$AB = \begin{bmatrix} 1(5)+3(9) \\ 2(5)+8(9) \\ 4(5)+0(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 9.

Dadas

$$\underset{(3\times3)}{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \underset{(3\times3)}{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Obtenga AB. La misma regla de multiplicación ahora produce una matriz producto muy especial:

$$AB = \begin{bmatrix} 0+1+0 & -\frac{3}{5}-\frac{1}{5}+\frac{4}{5} & \frac{9}{10}-\frac{7}{10}-\frac{2}{10} \\ 0+0+0 & -\frac{1}{5}+0+\frac{6}{5} & \frac{3}{10}+0-\frac{3}{10} \\ 0+0+0 & -\frac{4}{5}+0+\frac{4}{5} & \frac{12}{10}+0-\frac{2}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz (una matriz cuadrada con unos en su diagonal principal (la diagonal que va del noroeste al sudeste) y cero en los demás lugares) ejemplifica el tipo importante de matriz conocida como matriz identidad.

Ejemplo 10

Tómese la matriz A y el vector x como se define en (4.4) y determine A_x. La matriz producto es un vector columna de 3x1:

$$Ax = \underset{(3\times3)}{\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}} \underset{(3\times1)}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{(3\times1)}{\begin{bmatrix} 6x_1+3x_2+x_3 \\ x_1+4x_2-2x_3 \\ 4x_1-x_2+5x_3 \end{bmatrix}}$$

Nota: el producto de la derecha es un vector columna, ¡a pesar de su apariencia corpulenta! Por lo tanto, cuando se escribe $A_x = d$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 6x_1+3x_2+x_3 \\ x_1+4x_2-2x_3 \\ 4x_1-x_2+5x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

que, de acuerdo con la definición de igualdad de matrices, es equivalente a la expresión del sistema de ecuaciones completo en (4.3).

Observe que, para usar la notación matricial $A_x = d$, es necesario, como resultado de la condición de conformabilidad, disponer las variables x_j en un vector columna, aun cuando estas variables se listan en un orden horizontal en el sistema original de ecuaciones.

Ejemplo 11

El modelo de ingreso nacional simple de dos variables endógenas Y y C.

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G_0 \\ C &= a + bY \end{aligned}$$

se pueden disponer en el formato estándar de (4.1) como sigue:

$$\begin{aligned} Y - C &= I_0 + G_0 \\ -bY + C &= a \end{aligned}$$

Por consiguiente, la matriz de coeficientes A, el vector de variables x y el vector de constantes d son:

$$\underset{(2\times2)}{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{(2\times1)}{x} = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} \qquad \underset{(2\times1)}{d} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix}$$

Compruebe que este sistema se puede expresar mediante la ecuación $A_x = d$. Por la regla de multiplicación de matrices, se tiene:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(Y) + (-1)(C) \\ -b(Y) + 1(C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y - C \\ -bY + C \end{bmatrix}$$

Así, la ecuación matricial $A_x = d$ produciría

$$\begin{bmatrix} Y - C \\ -bY + C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix}$$

Puesto que la igualdad de matrices indica la igualdad entre elementos correspondientes, es claro que la ecuación $A_x = d$ representa con precisión el sistema de ecuaciones original, como se expresa en el formato (4.1).

Sección de Ejercicio 4.2

1. Dadas $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, obtenga:

a) A+B

$$A + B = \begin{bmatrix} 7+0 & -1+4 \\ 6+3 & 9-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

b) C-A

$$C - A = \begin{bmatrix} 8-7 & 3+1 \\ 6-6 & 1-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

c) 3A

$$3A = 3\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -3 \\ 18 & 27 \end{bmatrix}$$

d) 4B+2C

$$4B + 2C = 4\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 12 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 22 \\ 24 & -6 \end{bmatrix}$$

2. Dadas $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$:

a) ¿Está definido AB? Calcule AB. ¿Puede calcular BA? ¿Porqué?

Dado que A es una matriz de dimensión 3x2 y B es una matriz de dimensión de 2x2 si se puede calcular

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2*2)+(8*3) & (2*0)+(8*8) \\ (3*2)+0 & 0 \\ (5*2)+(1*3) & (5*0)+(1*8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 64 \\ 6 & 0 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$$

No se puede calcular BA debido a que la matriz primaria B tiene dos columnas mientras que la matriz secundaria A tiene tres reglones, por lo cual se viola la condición de conformabilidad.

b) ¿Está definido BC? Calcule BC. ¿Está definido CB? En caso afirmativo, calcule CB. ¿Es cierto que BC=CB?

Si, BC está definido

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2*7)+0 & (2*2)+0 \\ (21+56) & (6+24) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 77 & 30 \end{bmatrix}$$

Debido a que se cumple la condición de conformabilidad, CB si está definido

$$CB = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7*2)+(2*3) & 0+(2*8) \\ (6*2)+(3*3) & 0+(3*8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 16 \\ 21 & 24 \end{bmatrix}$$

Al calcular BC y CB se puede decir que BC no es igual a CB.

3. Con base en las matrices dadas en el ejemplo 9, ¿está definido el producto BA? Si es así, calcule el producto. ¿En este caso se tiene AB=BA?

SI, el producto BA está definido por que cumple con la condición de conformabilidad

$$BA=\begin{bmatrix}0 & -1/5 & 3/10\\ -1 & 1/5 & 7/10\\ 0 & 2/5 & -1/10\end{bmatrix} x \begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(0-\frac{1}{5}+\frac{6}{5}) & 0+0+0 & (0-\frac{3}{5}+\frac{3}{5})\\ (-3+\frac{1}{5}+\frac{14}{5}) & 1 & (-2+\frac{3}{5}+\frac{7}{5})\\ (0+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}) & 0 & (0+\frac{6}{5}-\frac{1}{5})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

En este caso, si se puede decir que AB=BA

4. Obtenga las matrices producto de los siguientes casos (en cada uno, anexa de bajo de cada matriz un indicador de dimisión

a) $\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(0+0+0) & (0+2+0)\\ (24+0+12) & (0+0+20)\\ (16+0+0) & (0+3+0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 36 & 20\\ 16 & 3\end{bmatrix}$

(3x3) (3x2) (3x2)

b) $\begin{bmatrix}6 & 5 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -1\\ 5 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(24+25+0) & (-6+10-1)\\ (4+0+0) & (-1+0+4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}49 & 3\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

(2x3) (3x2) (2x2)

c) $\begin{bmatrix}3 & 5 & 0\\ 4 & 2 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x+5y\\ 4x+2y-7z\end{bmatrix}$

(2x3) (3x1) (2x1)

d) $\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7a+c & 2b+4c\end{bmatrix}$

(1x3) (3x2) (1x2)

5. En el ejemplo 7, si se disponen las cantidades y precios como vectores columna en lugar de vectores renglón, ¿Está definido QP? ¿Es posible expresar el costo total de compra como QP, Q´P, QP´?

Por medio del concepto del producto interior de 2 vectores se puede concluir que QP está definido y que los costos totales de compra se pueden expresar como QP, Q´P, QP.

6. Desarrolle las siguientes expresiones de suma:

   a) $\sum_{i=2}^{5} x_i = x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

   b) $\sum_{i=5}^{8} a_i x_i = a_5 x_5 + a_6 x_6 + a_7 x_7 + a_8 x_8$

   c) $\sum_{i=1}^{4} b x_i = b x_1 + b x_2 + b x_3 + b x_4 = b(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

   d) $\sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1} = a_1 x^0 + a_2 x^1 + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$

   e) $\sum_{i=0}^{3} (x+i)^2 = x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2$

7. Reescriba lo siguiente en notación de Σ:

   a) $X_1(x_1-1)+2x_2(x_2-1)+3x_3(x_3-1)$

$$\sum_{i=1}^{3} i x_i (x_i - 1)$$

   b) $a_2(x_3+2)+a_3(x_4+3)+a_4(x_5+4)$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i (x_{i+1} + i)$$

   c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0)$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x^n}$$

   d) $1+1/x+1/x^2+\ldots+1/x^n$

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x^n}$$

8. Muestre que las siguientes expresiones son ciertas:

$$a) \sum_{i=0}^{n} x_i + x_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} x_i$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + x_{n+1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} x_i$$

$$b)\sum_{j=1}^{n} ab_j\, y_j \ = a\sum_{j=1}^{n} b_j\ y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} ab_j\, y_j \ = ab_1y_1 + ab_2y_2 + \cdots + ab_ny_n$$

$$= a(b_1y_1 + ab_2y_2 + \cdots + ab_ny_n) = \ a\sum_{j=1}^{n} b_j\ y_j$$

$$c)\sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j\,) = \ \sum_{j=1}^{n} x_j \ + \sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j\,) = (x_1 \ + y_1\,) + \ (x_2 \ + y_2\,) + \cdots + \ \ (x_n \ + y_n\,)$$

$$= (\ x_1 \ + \ x_2 \ + \cdots + \ x_n \ ) + \ (\ y_1 \ + \ y_2 \ + \cdots + \ y_n \ )$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \ + \sum_{j=1}^{n} y_j$$

Ejercicio 4.5.

Dadas $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$ **,** $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ **y** $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{bmatrix}$

1- Calcule: a. AI b. IA c. IX d. x´I

Indique la dimensión de la matriz identidad utilizada en cada caso.

a. AI3= $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ la dimensión de la matriz identidad es *3x3*.

b. $I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ la dimensión de la matriz identidad es *2x2*.

c. $I_2x = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ la dimensión de la matriz identidad es 2x2.

d. $x'I_2 = \begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}$ la dimensión e la matriz identidad es 2x2

2- Calcule: a. Ab b. AIb c. x´IA d. x´A

¿La inserción de I en b. afecta el resultado en a.? ¿La eliminación de I en d. afecta el resultado en c.?

a. $Ab = \begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\0 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\6\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(9)+5(6)+7(0)\\0(9)-2(6)+4(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}21\\-12\end{bmatrix}$

b. $AIb = \begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\0 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\6\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\0 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\6\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}21\\-12\end{bmatrix}$

c. $x'IA = \begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\0 & -2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\0 & -2 & 4\end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix}x_1(-1)+x_2(0) & x_1(5)+x_2(-2) & x_1(7)+x_2(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x_1 & 5x_1-2x_2 & 7x_1+4x_2\end{bmatrix}$

d. $x'A = \begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\0 & -2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x_1 & 5x_1-2x_2 & 7x_1+4x_2\end{bmatrix}$

En ninguno de los dos casos la inserción de I en ninguno de los dos casos afecta el resultado, ya que la matriz identidad cumple la misma función que el *1* en el álgebra escalar, por lo que cualquier matriz multiplicada por una *I* da como resultado la misma matriz.

3- ¿Cuál es la dimensión de la matriz nula que resulta de cada una de las siguientes operaciones?

a. Premultiplicar A por una matriz nula 5x2. **Obtendremos una matriz de 5x3**

b. Posmultiplicar A por una matriz nula de *3x6*. **Obtendremos una matriz de *2x6***

c. Premultiplicar b por una matriz nula de *2x3*. **Obtendremos una matriz de *2x1***

d. Posmultiplicar x por una matriz nula de *1x5*. **Obtendremos una matriz de 2x5.**

4- **Demuestre que la matriz diagonal**

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots\mathbf{0} & \boldsymbol{a_{22}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Puede ser idempotente, sólo si cada elemento diagonal es 1 o 0. ¿Cuántas matrices diagonales, idempotentes, numéricas, distintas de dimensión *nxn* se pueden construir en total de esta matriz?

Ya que las matrices son idempotentes si al multiplicarse por sí mismas dan como resultado la matriz misma, por ejemplo: A^2=A, la matriz diagonal de *nxn*, sólo puede satisfacer esta condición si a_{nn} es 0 o 1.

SECCIÓN 4.6

Ejemplo 1

Dada $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$, se pueden intercambiar los renglones y las columnas y escribir

$A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$ y $B' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

Por definición, si una matriz A es m x n, entonces su transpuesta A´ debe ser m x n, entonces su transpuesta A´ debe ser n x m. Sin embargo, una matriz cuadrada n x m posee una transpuesta con la misma dimensión.

Ejemplo 2

Si $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ **y** $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$, entonces

$C' = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $D' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

Aquí, la dimensión de cada transpuesta es idéntica a la de la matriz original.

Ejemplo 3

Si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{9} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$, entonces

$$(\mathrm{A} + \mathrm{B})' = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 16 & 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y

$$A' + B' = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

Dadas $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$ Y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$, se tiene $(\boldsymbol{AB})'$=$\boldsymbol{B'A'}$

Para comprobar esta propiedad partimos de $(AB)'$, en el cual se debe de realizar el producto de la matriz A por la matriz B:

$$(AB)' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\right)'$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1(0) + 2(6) & 1(-1) + 2(7) \\ 3(0) + 4(6) & 3(-1) + 4(7) \end{bmatrix}\right)' \quad multiplicando\ A\ por\ B$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}\right)' \quad se\ encuentra\ la\ transformada\ \ de\ la\ matriz\ AB$$

$$(AB)' = \begin{bmatrix} 12 & 24 \\ 13 & 25 \end{bmatrix}$$

Realizando el segundo miembro $B'A'$ se tendría que equivale a:

$$B'A' = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\right)'\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)' \ se\ encuentra\ la\ transformada\ de\ ambas\ matrices$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \ se\ realiza\ la\ multiplicacion\ de\ ambas\ matrices$$

$$= \begin{bmatrix} 0(1) + 6(2) & 1(-1) + 2(7) \\ 3(0) + 4(6) & 3(-1) + 4(7) \end{bmatrix}$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 12 & 24 \\ 13 & 25 \end{bmatrix}$$

Siendo esta equivalen al resultado de $(AB)'$

Ejemplo 5

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Y $B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, se debe comprobar que B es la inversa de A y que Aes inversa de B por lo que se verifica que AB=BA

Para llegar a esto se hace la multiplicación de AB

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \; por\ propiedades\ de\ matrices\ de\ un\ escalar$$

$$AB = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3(2)+1(0) & 3(-1)+1(3) \\ 0(2)+2(0) & 0(-1)+2(3) \end{bmatrix}$$

$$AB = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$por\ propiuedades\ de\ sumatoria\ ponemos\ ingresar\ al\ escalar \frac{1}{6}\ dentro\ de\ la\ matriz$$

$$AB = \begin{bmatrix} \frac{6}{6} & 0 \\ 0 & \frac{6}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Haciendo la multiplicación de BA

$$BA = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \; por\ propiedades\ de\ matrices\ de\ un\ escalar$$

$$BA == \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3(2)+1(0) & 3(-1)+1(3) \\ 0(2)+2(0) & 0(-1)+2(3) \end{bmatrix}$$

$$BA = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$por\ propiuedades\ de\ sumatoria\ ponemos\ ingresar\ al\ escalar \frac{1}{6}\ dentro\ de\ la\ matriz$$

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{6}{6} & 0 \\ 0 & \frac{6}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que la multiplicación de AB Y BA da como resultado la matriz identidad, se comprueba que A es inversa de B y que B es la inversa de A, verificándose de esa manera la propiedad conmutativa.

Ejemplo 6.

Como se muestra en el ejemplo 11 de la sección 4.2, el modelo de ingreso nacional simple

$$\boldsymbol{Y = C + I_0 + G_0}$$

$$\boldsymbol{C = a + bY}$$

Se puede escribir en notación de matrices como $Ax = d$, donde:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}$ $\quad X = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix}$ $\quad$ y $\quad d = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix}$

La inversa de la matriz A es (véase la explicación en la sección 5.6).

$$A^{-1} = \frac{1}{1-b}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, la solución del modelo es $x^* = A^{-1}d$, o bien:

$$\begin{bmatrix} Y^* \\ C^* \end{bmatrix} = \frac{1}{1-b}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix} = \frac{1}{1-b}\begin{bmatrix} I_0 + G_0 + a \\ b(I_0 + G_0) + a \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4.6

1. **Dada $A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{9} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$, obtenga A´, B´, C´.**

$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad C' = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

2. **Por medio de las matrices del problema 1, compruebe que (a)(A+B)´=A´+B´ (b)(AC)´=C´A´**

a) $(\mathrm{A} + \mathrm{B})' = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

$A' + B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

b) $(AC)' = \begin{bmatrix} (0*1)+(4*6) & (0*0)+(4*1) & (0*9)+(4*1) \\ (-1*1)+(3*6) & (-1*0)+(3*1) & (-1*9)+(3*1) \end{bmatrix}'$

$(AC)' = \begin{bmatrix} 24 & 4 & 4 \\ 17 & 3 & -6 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 24 & 17 \\ 4 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

$$C'A' = \begin{bmatrix} (1*0)+(6*4) & (1*-1)+(6*3) \\ (0*0)+(1*4) & (0*-1)+(1*3) \\ (9*0)+(1*4) & (9*-1)+(1*3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 17 \\ 4 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

3. **Generalice el resultado (4.11) al caso de un producto de tres matrices al probar que, para matrices conformables cualesquiera A, B, C, se cumple ecuación. (ABC)´=C´B´A´.**

Dadas $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Por ende, el producto de las tres seria, $ABC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, la transpuesta seria $(ABC)' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

El producto entre estas estaría dado por $A'B'C' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

De esa forma se cumple que (ABC)´=C´B´A´.

4. **Dadas las siguientes matrices, pruenbe si alguna de ellas es la inversa de la otra.**

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{bmatrix}, \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{8} \end{bmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & -\mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Para determinar lo anterior de deben realizar las combinaciones de productos posible entre ellas, y dado que se cumple la propiedad comutativa basta realizar los productos: DE, DF, DG, EF, EG, FG.

$$DE = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73 & 97 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$$

$$DF = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DG = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 & \frac{11}{2} \\ -9 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$EF = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{11}{3} \\ 6 & -\frac{64}{3} \end{bmatrix}$$

$$EG = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Dado que la multiplicación DF Y EG dieron como resultado la matriz identidad se verifica que para D su inversa es F, y para E su inversa es G.

5. **Generalice el resultado (4.14) al probar que, para matrices no singulares conformables A, B, y C, se cumple la ecuación** $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

Para verificar esta propiedad se considera una matriz D, definida como D=BC, con lo cual se realiza el producto entre A Y D,

$$AD, \qquad si\ se\ le\ encuentra\ la\ inversa, entonces$$

$$(AD)^{-1} = D^{-1}A^{-1}\ por\ la\ deficnicion\ expuesta\ en\ 4.14$$

$$(ABC)^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1}, dado\ que\ D = BC$$

$$(ABC)^{-1} = (C^{-1}B^{-1})A^{-1}, por\ la\ deficnion\ 4.14$$

Al realizar el producto se tendría:

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1},$$

6. **Sea $A = I - X(X'X)^{-1}X'$.**

   a) ¿A debe ser cuadrada? ¿$(X'X)$ debe ser cuadrado? ¿X debe ser cuadrada?

A necesita ser cuadrada debido a que al restarle a la matriz "I" quedaría una matriz cuadrada

El producto $(X'X)$ da como resultado una matriz cuadrada, por lo que también debe de serlo

La Matriz X no debe ser necesariamente cuadrada, ya que no posee dependencia para que necesite ser una matriz cuadrada.

   b) Muestre que la matriz A es idempotente.

$$AA = [I - X(X'X)^{-1}X'][I - X(X'X)^{-1}X']$$

$$AA = II - IX(X'X)^{-1}X' - IX(X'X)^{-1}X' + X(X'X)^{-1}X' * X(X'X)^{-1}X'$$

$$AA = I - X(X'X)^{-1}X' - X(X'X)^{-1}X' + X(X'X)^{-1}X' * X(X'X)^{-1}X'$$

$$AA = I - X(X'X)^{-1}X' - X(X'X)^{-1}X' + XI(X'X)^{-1}X'$$

$$AA = I - X(X'X)^{-1}X' - X(X'X)^{-1}X' + X(X'X)^{-1}X'$$

$$AA = I - X(X'X)^{-1}$$

$$AA = A$$

Demostrando así la condición de impotencia.

SECCIÓN 4.7

Ejemplo 1

Supóngase que la distribución inicial de empleados en dos lugares en el tiempo t=0 es:

$$\boldsymbol{x'_0} = [\boldsymbol{A_0} \quad \boldsymbol{B_0}] = [\boldsymbol{100} \quad \boldsymbol{100}]$$

En otras palabras, al inicio hay cantidades iguales en cada lugar. Además, sean las posibilidades de transición en la forma matricial como sigue:

$$M = \begin{bmatrix} P_{AA} & P_{AB} \\ P_{BA} & P_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Entonces la distribución de empleados en los lugares en el siguiente periodo (t=1) es:

$$[100 \quad 100] \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = [110 \quad 90] = [A_1 \quad B_1]$$

La distribución después de dos periodos se determina mediante:

$$[100 \quad 100] \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}^2 = [100 \quad 100] \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix} = [113 \quad 87] = [A_2 \quad A_2]$$

La distribución después de 10 periodos (t=10) está dada por:

$$[100 \quad 100] \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}^{10} = [100 \quad 100] \begin{bmatrix} 0.5174 & 0.4286 \\ 0.5174 & 0.4286 \end{bmatrix} = [114.3 \quad 85.7] = [A_{10} \quad A_{10}]$$

Ejercicio 4.7

1. **Considere la situación de un despido masivo (es decir, el cierre de una fábrica= donde laboran 1200 empleados y ahora comienzan a buscar trabajo. En este caso hay dos estados: empleado (E) y desempleado (U) con un vector inicial:**

$$x'_0 = [E \quad U] = [0 \quad 1200]$$

Suponga que en un periodo determinado una persona desempleada encontrará trabajo con probabilidad 0.7 y, por lo tanto, permanecerá desempleado con una probabilidad de 0.3. Además, las personas que tienen empleo podrían perderlo en algún periodo con una probabilidad de 0.1 (y tendrán una probabilidad de 0.9 de permanecer empleados).

a) Plantee una matriz de transición de Markov para este problema.

$$M = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

b) ¿Cuál será el número de personas desempleadas después de (i) 2 periodos; (ii) 3 periodos; (iii) 5 periodos; (iv) 10 periodos?

1) t=2

$[0 \quad 1200]\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}^2 = [0 \quad 1200]\begin{bmatrix} 0.88 & 0.12 \\ 0.84 & 0.16 \end{bmatrix} = [1008 \quad 192] = [E \quad U]$, 192 Desempleados

2) t=3

$[0 \quad 1200]\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}^3 = [0 \quad 1200]\begin{bmatrix} 0.876 & 0.124 \\ 0.868 & 0.132 \end{bmatrix} = [1042 \quad 158] = [E \quad U]$, 158 Desempleados

3) t=5

$[0 \quad 1200]\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}^5 = [0 \quad 1200]\begin{bmatrix} 0.87504 & 0.12496 \\ 0.87472 & 0.12528 \end{bmatrix} = [1050 \quad 150] = [E \quad U]$, 150 Desempleados

4) t=10

$[0 \quad 1200]\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}^{10} = [0 \quad 1200]\begin{bmatrix} 0.8750000128 & 0.1249999872 \\ 0.8749999104 & 0.1250000896 \end{bmatrix} = [1050 \quad 150] = [E \quad U]$, 150 Desempleados

c) ¿Cuál es el nivel de estado estable de desempleo?

Es de 150 desempleados

Capítulo 5. Modelos lineales y álgebra de matrices

Ejemplos 5.1

1) Si p es la afirmación "una persona es un padre" y q es la frase "una persona es varón", entonces se aplica el enunciado lógico p =» q. Una persona es un padre sólo si es varón, y ser varón es una condición necesaria para la paternidad. No obstante, observe que no se cumple lo contrario: la paternidad no es una condición necesaria para la masculinidad.

$$p \Rightarrow q \text{ que se lee como } p \text{ sólo si } q$$

2) Si p simboliza la afirmación "se puede ir a Europa" y q es la expresión "se viaja en avión a Europa", entonces p <<=q. Volar puede servir para que uno llegue a Europa, pero puesto que el transporte por el océano también es factible, volar no es un prerrequisito. Se puede escribir p<<=q, pero no p=>>q.

En una tercera situación posible, q es necesaria y suficiente para p. En tal caso, se escribe

$$p \Leftrightarrow q$$

3) Si la afirmación "hay menos de treinta días en el mes" se representa con p y la frase "es el mes de febrero" con q, $p \Leftrightarrow q$. Para tener menos de treinta días en el mes, es necesario que éste sea febrero. A la inversa, la especificación de febrero es suficiente para establecer que hay menos de treinta días en el mes. Así, q es una condición necesaria y suficiente para p. A fin de probar p => q, es necesario mostrar que q se deduce de manera lógica de p. Análogamente, para probar p => q, se requiere una demostración de que p se deduce lógicamente de q. Pero para probar p⇔q se necesita una demostración de que p y q se deducen una de otra.

4) Si la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix}$$

Entonces, puesto que $[6 \quad 8 \quad 10] = 2[3 \quad 4 \quad 5]$, se tiene $v'_3=2v'_1=2v'_1=2v'_1+0v'_2$. Así, el tercer renglón se puede expresar como una combinación lineal de los dos primeros, y los renglones no son linealmente independientes. Alternativamente, la ecuación previa se puede escribir como

$2v'_1+0v'_2-v'_3=[6 \quad 8 \quad 10]+[0 \quad 0 \quad 0]-[6 \quad 8 \quad 10]=[0 \quad 0 \quad 0]$

En vista de que el conjunto de escales condujo al vector cero de (5.4) no es $k_i=0$ para toda i, se deduce que los renglones son linealmente dependientes

5) Determine el rango de la matriz

$A=\begin{vmatrix}0 & -11 & -4\\ 2 & 6 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}$, a partir de su forma escalonada. Primero, se comprueba en la primera columna de A la presencia de elementos cero. Si hay elementos cero en la columna 1, se mueven a la parte inferior de la matriz. En el caso de A, se desea mover el 0 (primer elemento de la columna 1) a la parte inferior de esa columna, lo cual se puede llevar a cabo al intercambiar el renglón 1 y el renglón 3 (por medio de la primera operación elemental). El resultado es

$A_1=\begin{vmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 6 & 2\\ 0 & -11 & -4\end{vmatrix}$, El siguiente objetivo es cambiar la primera columna de Ai en un vector unitario como se define en (4.7). Para transformar el elemento 4 en la unidad, se divide el renglón 1 de A_1 entre el escalar 4 (aplicando la segunda operación elemental), lo cual produce

$A_2=\begin{vmatrix}1 & 1/4 & 0\\ 2 & 6 & 2\\ 0 & -11 & -4\end{vmatrix}$, Entonces, para transformar el elemento 2 de la columna 1 de A_2 en 0, se multiplica el renglón 1 de A_2 por - 2 , y luego se suma el resultado al renglón 2 de A_2 (aplicando la tercera operación elemental). La matriz resultante,

$A_3=\begin{vmatrix}1 & -1/4 & 0\\ 0 & 5*(1/2) & 2\\ 0 & -11 & -4\end{vmatrix}$, ahora tiene el vector unitario deseado e\ como su primera columna. Una vez logrado esto, dejamos de lado el primer renglón de A_3— el cual consideraremos más adelante— y continuamos sólo con los dos renglones restantes, donde deseamos crear un vector unitario de dos elementos en la segunda columna, al transformar el elemento 5*(1/2) en 1, y el elemento -11 en 0. Para este fin, se requiere dividir el renglón 2 de A_3 entre 5* (1/2) y de este modo se cambia el renglón en el vector $[0 \quad 1 \quad 4/11]$; luego, se agrega 11 veces este vector al renglón 3 de A_3. El resultado final en la forma de

$A_4=\begin{vmatrix}1 & 1/4 & 0\\ 0 & 1 & 4/11\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$, ejemplifica la matriz escalonada, que, por definición, posee tres características estructurales. Primera, los renglones no cero (renglones con por lo menos un elemento no cero) aparecen arriba de los renglones cero (renglones que contienen solamente ceros). Segunda, en todo renglón no cero, el primer elemento no cero es la unidad. Tercera, el elemento unitario (el primer elemento no cero) en cualquier renglón debe aparecer a la izquierda del elemento unitario homólogo del renglón justo después. Por ahora debe quedar claro que todas las operaciones elementales en los renglones que hemos llevado a cabo están diseñadas para producir estas características en A_4.

Ahora bien, podemos leer simplemente el rango de A por el número de renglones no cero presentes en la matriz escalonada A4. Puesto que A4 contiene dos renglones no cero, podemos concluir que r(A) = 2. Por supuesto, éste es también el rango de las matrices As a A4, porque las operaciones elementales de los renglones no modifican el rango de una matriz.

Ejercicios 5.1

Ejercicio 1

En las siguientes proposiciones por pares, sea p la primera y q la segunda proposición. Indique para cada caso si se aplica (5.1) (5.2) o (5.3).

(a) Es un día de fiesta; es el día de acción de gracias.

5.2

(b) Una figura geométrica tiene cuatro lados; es un rectángulo.

5.2

(c) Dos pares ordenados (c¡, h) y (b, u) son iguales; ti es igual a b.

5.3

(d) Un número es racional; éste se puede expresar como un cociente de dos enteros.

5.3

(e) Una matriz de 4 x 4 es no singular; el rango de la matriz de 4 x 4 es 4.

5.3

(f) El tanque de gasolina de mi automóvil está vacío; no puedo encender mi automóvil.

5.1

(g) La carta se devuelve al remitente con la leyenda "destinatario desconocido"; el remitente escribió mal la dirección en el sobre.

Ejercicio 2

Sea p la proposición "una figura geométrica es un cuadrado" y sea q como sigue:

(a) Tiene cuatro lados.

$p \Longrightarrow q$

(b) Tiene cuatro lados ¡guales.

$p \Longrightarrow q$

(c) Tiene cuatro lados iguales, cada uno perpendicular al adyacente.

$p \Longleftrightarrow q$

¿Cuál es verdadero en cada caso: $p \Longrightarrow q$, $p \Longleftarrow q$ o $p \Longleftrightarrow q$?

Ejercicio 3

¿Son linealmente independientes los reglones en cada una de las siguientes marices?

a) $\begin{bmatrix} \mathbf{24} & \mathbf{8} \\ \mathbf{9} & \mathbf{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1'} \\ \boldsymbol{v_2'} \end{bmatrix}$

Esta matriz es linealmente independiente ya que, sus reglones no forman parte de una combinación lineal del resto.

b) $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1'} \\ \boldsymbol{v_2'} \end{bmatrix}$

Esta matriz es linealmente independiente ya que, sus reglones no forman parte de una combinación lineal del resto.

c) $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1'} \\ \boldsymbol{v_2'} \end{bmatrix}$

Esta matriz es linealmente independiente ya que, sus reglones no forman parte de una combinación lineal del resto.

d) $\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1'} \\ \boldsymbol{v_2'} \end{bmatrix}$

Para este caso la matriz no es linealmente independiente, puesto que $\boldsymbol{v_2' = -2v_1'}$, es decir:

$$[-1 \quad 5] = -2[-1 \quad 5]$$

<u>Ejercicio 4:</u>

Determine el rango de cada una de las siguientes matrices a partir de su matriz escalonada, y comente acerca de la cuestión de no singularidad.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = f_1 \leftrightarrow f_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = f_1 * (-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = f'_3 \rightarrow f_3 -$
$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = f'_2 \rightarrow f_2 * \left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = f'_3 \rightarrow f_3 - 5f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$

$$r(A) = 3$$

Es una matriz no singular, la matriz es cuadrada y tiene rango igual a las dimensiones.

(b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} = f_1 \leftrightarrow f_3 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} = f'_1 \rightarrow f'_1 * \left(\frac{1}{6}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} =$
$f'_2 \rightarrow f_2 - 3f_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} = f'_2 \rightarrow f_2 * 2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} = f'_3 \rightarrow f_3 + f_2 =$
$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$r(B) = 2$$

Es una matriz singular, la matriz es cuadrada, pero tiene rango diferente a las dimensiones.

(c) $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = f_1 \leftrightarrow f_3 \quad y \quad f'_1 \rightarrow f_1 * \left(\frac{1}{8}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} = f'_3 \rightarrow f_3 - 7f_1 =$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -4 \end{bmatrix} = f'_3 \rightarrow f_3 - 6f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -10 \end{bmatrix} = f'_3 \rightarrow f_3 * \left(-\frac{1}{9}\right) =$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$

$$r(C) = 3$$

Es una matriz singular, la matriz no es cuadrada y tiene rango diferente a las dimensiones

(d) $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & -3 \end{bmatrix} = f_1 \leftrightarrow f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 9 & -3 \end{bmatrix} = f_2 \leftrightarrow f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & -3 \\ 2 & 7 & 9 & -1 \end{bmatrix} =$

$f'_3 \rightarrow f_3 - 2f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & -3 \\ 0 & 5 & 9 & -3 \end{bmatrix} = f_2 * \left(\frac{1}{5}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 5 & 9 & -3 \end{bmatrix} = f'_3 \rightarrow f_3 - 5f_2 =$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$r(D) = 2$$

Es una matriz singular, la matriz no es cuadrada y tiene rango diferente a las dimensiones

Ejercicio 5.

Por definición de la dependencia lineal entre los renglones de una matriz, uno o más renglones se pueden expresar como una combinación lineal de algunos otros renglones. En la matriz escalonada, la presencia de uno o más renglones ceros indica la dependencia lineal. ¿Qué proporciona el enlace entre la presencia de una combinación de renglones lineales en una determinada matriz y la presencia de renglones cero en la matriz escalonada?

Lo que relaciona una condición con otra, tiene que ver con una de las transformaciones elementales de las matrices, la segunda y la tercera, que es poder multiplicar uno renglón por una constante k y sumar o restar entre renglones sin afectar el determinante de la matriz. Las transformaciones necesarias para llevar a una matriz de su forma original a la forma escalonada obligan a la cancelación de aquellos vectores renglones o columna que son dependientes linealmente. Este recurso se aprovecha al máximo para conocer de antemano si un sistema de ecuaciones tiene una solución única.

Ejemplos 5.2

1) Dadas A=$\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$ $y\ B = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, sus\ determinantes\ son$

A=$\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$=10*5-8*4=18

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 * (-1) - 0 * 5 = -3$$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 * 5 * 9 + 1 * 6 * 7 + 3 * 8 + 4 - 2 * 8 * 6 - 1 * 4 * 9 - 3 * 5 * 7 = -9$

3) $\begin{vmatrix} -7 & 0 & 3 \\ 9 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = (-7) * 1 * 5 + 0 * 4 * 0 + 3 * 6 * 9 - (-7) * 6 * 4 - 0 * 9 * 5 - 3 * 1 *$
$0 = 295$

4) En el determinante $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, el menor del elemento 8 es $|M_{12}| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$

En tanto el cofactor del mismo elemento es $|C_{12}| = -|M_{12}| = 6$ porque i + j=1+2=3 es impar. De manera similar, el cofactor del elemento 4 es

$$|C_{23}| = -|M_{23}| = -\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

5) Dada $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{vmatrix}, el\ desarrollo\ por\ el\ primer\ renglón\ produce\ el\ resultado$

$$|A| = 5\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 27 = -27$$

En tanto el desarrollo de la primera columna produce la respuesta idéntica:

$$|A| = 5\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 - 21 = -27$$

Ejercicios 5.2

1. Evalúe los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (8)(0)(3) + (1)(1)(6) + (3)(0)(4) - (8)(0)(1) - (1)(4)(3) - (3)(0)(6) = -6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = (1)(7)(9) + (2)(5)(3) + (3)(6)(4) - (1)(6)(5) - (2)(4)(9) - (3)(7)(3) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (4)(0)(3) + (0)(3)(8) + (2)(2)(6) - (4)(2)(3) - (0)(6)(3) - (2)(0)(8) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 8 & 11 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = (1)(11)(7) + (1)(-2)(0) + (4)(8)(4) - (1)(4)(-2) - (1)(8)(7)$$
$$- (4)(11)(0) = 157$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a)(c)(b) + (b)(a)(c) + (c)(a)(b) - (a)(a)(a) - (b)(b)(b) - (c)(c)(c)$$

$$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 0 \\ 3 & y & 2 \\ 9 & -1 & 8 \end{vmatrix} = (x)(y)(8) + (5)(2)(9) + (0)(-1)(3) - (x)(-1)(2) - (5)(3)(8) - (0)(y)(9)$$

$$= 8xy + 2x - 30$$

2. Determine los signos que se anexarán a los menores pertinentes a fin de obtener los siguientes

cofactores de un determinante: $|C_{13}|, |C_{23}|, |C_{33}|, |C_{41}|\ y\ |C_{34}|$

$$|C_{13}| = +$$

$$|C_{23}| = -$$

$$|C_{33}| = +$$

$$|C_{41}| = -$$

$$|C_{34}| = -$$

3. Dada $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix}, obtenga\ los\ menores\ y\ cofactores\ de\ los\ elementos\ a, b\ y\ f.$

$$|M_a| = |C_a| = \begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix} = ej - fh$$

$$|M_b| = |C_b| = \begin{vmatrix} d & f \\ g & j \end{vmatrix} = dj - fg$$

$$|M_f| = |C_f| = \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} = ah - bg$$

4. Evalue los siguientes determinantes

A) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{F2-2f1,\ F3-F1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 0 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{F3+2F2,\ F4-5F2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 16 & -58 \\ 0 & 0 & -20 & 68 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{F4+5/4\ F3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 16 & -58 \\ 0 & 0 & 0 & -9/2 \end{vmatrix} = 1(-1)(16)(-9/2) = 72$$

B) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{F2-5/2\,F1,\;\; F4-1/2\,F1} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -23/2 & 4 & 11/2 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & -13/2 & 1 & 7/2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F4-13/23\,F2}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -23/2 & 4 & 11/2 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -29/23 & 9/23 \end{vmatrix} \xrightarrow{F4-29/207\,F3} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -23/2 & 4 & 11/2 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/23 \end{vmatrix}$$
$$= 2 * (-23/2) * (9) * (9/23) = -81$$

5. En el primer determinante del problema 4, obtenga el valor del cofactor del elemento 9.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 4 * -5 = -20$$

6. Determine los menores y cofactores del tercer renglón, a partir de

A= $\begin{vmatrix} 9 & 11 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 6 & 10 & 4 \end{vmatrix}$

Menores:

M_{31}=$\begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 69$ M_{32}=$\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 51$ M_{33}=$\begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -15$

Cofactores

C_{31}= $(-1)^4$*69=69

C_{32}= $(-1)^5$*51=51

C_{33}= $(-1)^6$(-15) =-15

7. Utilice la expansión de Laplace para hallar el determinante de

$$\begin{vmatrix} 12 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 9 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 9 * C31 + 0.C32 + 12 * C33 = 9 * -3 + 12 * 46 = 525$$

C31= $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (7 * 6 - 5 * 9) * (-1)^4 = -3$

C32= $\begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 46 * (-1)^6 = 46$

Ejemplos 5.3

Ejemplo 1.

Se basa en la propiedad I que indica que el determinante de una matriz es equivalente al determinante de su transpuesta.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 9$$

Ejemplo 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Propiedad II. El intercambio de *dos* renglones cualesquiera (o *dos* columnas cualesquiera) modificará el signo, pero no el valor numérico del determinante. (Es obvio que esta propiedad se relaciona con la primera operación elemental del renglón en una matriz.)

Ejemplo 3:

$\begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{vmatrix} = \mathrm{ad} - \mathrm{bc}$, pero el intercambio de los dos renglones produce

$\begin{vmatrix} \mathrm{c} & \mathrm{d} \\ \mathrm{a} & \mathrm{b} \end{vmatrix} = \mathrm{cb} - \mathrm{ad} = -(\mathrm{ad} - \mathrm{bc})$

Ejemplo 4.

Se basa en la propiedad II que indica que el intercambio de dos renglones modificará únicamente el signo del determinante.

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -26; \text{se intercambian las columnas primera y tercera.}$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 26$

Ejemplo 5

Al multiplicar el renglón superior del determinante del ejemplo 3 por k, se obtiene:

:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad - bc) = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Es importante distinguir entre las dos expresiones kA y $k|A|$. Al multiplicar una matriz A por un escalar k, todos los elementos de A se multiplican por k. Pero, si leemos de derecha a izquierda la ecuación del ejemplo presente, debe quedar claro que, al multiplicar un determinante \A\ por k, sólo un renglón (o columna) se debe multiplicar por k. Por lo tanto, esta ecuación en efecto nos proporciona una regla para factorizar un determinante: siempre que un solo renglón o columna contenga un divisor común, éste se puede usar como factor determinante.

Ejemplo 6:

Factorizando a su vez la primera columna y el segundo renglón, se tiene

$$\begin{vmatrix} 15\text{a} & 7\text{b} \\ 12\text{c} & 2\text{d} \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5\text{a} & 7\text{b} \\ 4\text{c} & 2\text{d} \end{vmatrix} = 3(2)\begin{vmatrix} 5\text{a} & 7\text{b} \\ 2\text{c} & \text{d} \end{vmatrix} = 6(5\text{ad} - 14\text{bc})$$

La evaluación directa del determinante original produce, por supuesto, la misma respuesta.

Ejemplo 7.

Se basa en la propiedad IV que indica que la suma o resta de un múltiplo de cualquier renglón a otro renglón no cambiará el determinante.

Al sumar k veces el renglón superior del determinante del ejemplo 3 a su segundo renglón, terminamos con el determinante original.

Ejemplo 8

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{vmatrix} = 2ab - 2ab = 0 \qquad \begin{vmatrix} c & c \\ d & d \end{vmatrix} = cd - cd = 0$$

En el ejercicio 5.2-1 se encuentran más ejemplos de este tipo de determinante "nulo".

Esta propiedad importante es, de hecho, una consecuencia lógica de la propiedad IV Para

entender esto, aplicamos la propiedad IV a los dos determinantes del ejemplo 8 y observamos

el resultado. Para el primero, intente restar dos veces el segundo renglón del renglón de la

parte superior; para el segundo determinante, reste la segunda columna de la primera. Puesto

que estas operaciones no modifican los valores de los determinantes, se puede escribir:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} c & c \\ d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{vmatrix}$$

Los nuevos determinantes (reducidos) ahora contienen, respectivamente, un renglón y una columna de ceros; así que su expansión de Laplace produce un valor cero en ambos casos. En general, cuando un renglón (columna) es un múltiplo de otro renglón (columna), la aplicación de la propiedad IV siempre puede reducir los elementos de ese renglón (columna) a cero y, por lo tanto, se deduce la propiedad V. Las propiedades básicas recién explicadas son útiles en varios sentidos. En primer lugar, pueden ser de gran ayuda para simplificar la tarea de evaluar determinantes. Al restar múltiplos de un renglón (o columna) de otro, por ejemplo, los elementos del determinante se pueden reducir a números mucho más pequeños y más simples. Con la factorización, si es factible, también se logra lo mismo. De hecho, si se pueden aplicar estas propiedades para transformar algún renglón o columna de manera que contengan principalmente ceros o unos, la expansión de Laplace del determinante se convierte en una tarea mucho más manejable.

Ejemplo 9:

¿El sistema de ecuaciones?

$7x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 7$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$

$-2x_2 - x_3 = 2$

posee una solución única? El determinante $|A|$ es

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Por lo tanto, existe una solución única.

Ejercicios 5.3

Ejercicio 1

Use el determinante $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ para comprobar las primeras cuatro propiedades de los determinantes.

Propiedad #1: $|A| = |A'|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(9+21) - 0(18+21) - 1(6-3) = 4(30) - 1(3) = \mathbf{117}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -7 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} + (3)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 4(9+21) - 2(0+3) + 3(0+1) = 4(30) - 2(3) + 3 = \mathbf{117}$$

$$|A| = |A'|$$

$$117 = 117$$

Propiedad #2: El intercambio entre 2 filas o columnas, produce que el signo del determinante cambio de sentido.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(9+21) - 0(18+21) - 1(6-3) = 4(30) - 1(3) = \mathbf{117}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -7 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1(3-6) - 0(-21-18) + 4(-21-9) = -1(-3) + 4(-30) = -\mathbf{117}$$

Propiedad #3: Multiplicar un renglón o columna por un escalar k, cambiara el valor del determinante k-veces.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(9+21) - 0(18+21) - 1(6-3) = 4(30) - 1(3) = \mathbf{117}$$

Multipliquemos la primera fila por (2):

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2[4(9+21) - 0(18+21) - 1(6-3)] = 2[4(30) - 1(3)] = \mathbf{2(117)} = \mathbf{234}$$

Propiedad #4: La suma (resta) de un múltiplo de cualquier renglón a (de) otro renglón dejará sin cambio al determinante.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(9+21) - 0(18+21) - 1(6-3) = 4(30) - 1(3) = \mathbf{117}$$

Sumaremos a la segunda fila, la primera multiplicada por (2)

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2+2(4) & 1+2(0) & -7+2(-1) \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & -9 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & -9 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 10 & -9 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(9+27) - 0(90+27) - 1(30-3) = 4(36) - 1(27) = \mathbf{117}$$

Ejercicio 2

Muestre que, cuando los elementos de un determinante de n-ésimo orden $|A|$ se multiplican por un número k, el resultado será $k^n|A|$

$$Det\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{vmatrix} = kakeki + kbkfkg - kckekg - kbkdki - kfkhka$$

$$= k^3 * (aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha)$$

$$= k^3 * Det\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Ejercicio 3

¿Cuáles propiedades de los determinantes nos permiten escribir lo siguiente?

(a) $\begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 56 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 9 & 27 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) Propiedad IV: La suma o resta de un múltiplo de cualquier renglón a otro, dejará sin cambios al determinante.

$$\begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 56 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 27-3*9 & 56-3*18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Propiedad III: La multiplicación de cualquier renglón por un escalar k, cambiará el valor del determinante k veces.

$$\begin{vmatrix} 9 & 27 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 9*2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 4

Pruebe se las siguientes matrices son no singulares

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 19 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 19 & -3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 19 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 4(0+3) - 0(0+21) + 1(19-7) = 4(3) + 1(12) = \mathbf{24}$$

No Singular

b) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 4\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$

$$= 4(18-0) - 2(-15-7) + 1(0-42) = 4(18) - 2(-42) + 1(-42) = \mathbf{114}$$

No Singular

c) $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 13 & -3 & -4 \end{bmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 13 & -4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 13 & -3 \end{vmatrix}$

$$= 7(-4+12) - 1(-4-52) + 0(-3-13) = 7(8) - 1(-56) + 0(-16) = \mathbf{112}$$

No Singular

d) $\begin{bmatrix} -4 & 9 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix} = -4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

$$= -4(0-8) - 9(18-10) + 5(24-0) = -4(-8) - 9(8) + 5(24) = \mathbf{80}$$

No Singular

Ejercicio 5

¿Qué se puede concluir acerca del rango de cada matriz del problema 4?

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 19 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 19 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -31/4 \\ 0 & 1 & -7/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -31/4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ Rango 3

b) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 7/2 & 5/4 \\ 0 & 7/2 & 5/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 7/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Rango 2

c) $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 13 & -3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/7 & 0 \\ 0 & 8/7 & 4 \\ 0 & -8/7 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/7 & 0 \\ 0 & 8/7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Rango 2

d) $\begin{bmatrix} -4 & 9 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -9/4 & -5/4 \\ 0 & 27/4 & 9/4 \\ 0 & 180 & 37/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/7 & 0 \\ 0 & 1 & 7/27 \\ 0 & 0 & 449/5 \end{bmatrix}$ Rango 3

Ejercicio 6.

¿Alguno de los siguientes conjuntos de vectores de 3 dimensiones generan el espacio tridimensional? ¿Por qué sí o por qué no?

(a) $[1 \quad 2 \quad 1]$ $[2 \quad 3 \quad 1]$ $[3 \quad 4 \quad 2]$

(b) $[8 \quad 1 \quad 3]$ $[1 \quad 2 \quad 8]$ $[-7 \quad 1 \quad 5]$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-4) - 2(4-4) + 3(2-3) = -2 - 3 = -5$

Si, porque el determinante es distinto de 0.

b) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \\ -7 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8(10-8) - 1(5-3) - 7(8-6) = 16 - 2 - 14 = 0$

No, porque el determinante es equivalente a 0.

Ejercicio 7

Reescriba el modelo de ingreso nacional simple (3.23) en forma Ax=d (con Y como la primera variable del vector x), y luego pruebe si la matriz de coeficientes A es no singular.

$$Y = C + I_0 + G_0$$

$$C = a + bY$$

$$Y - C = I_0 + G_0$$

$$-bY + C = a$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1-b \end{vmatrix} = 1 - b, \quad 0 < b < 1$$

Es no singular

Ejercicio 8

Comente acerca de la validez de las siguientes afirmaciones:

a) "Dada cualquier matriz A, se puede obtener de ésta siempre una transpuesta y un determinante".

No todas las matrices poseen determinantes, ya que estas solo existen en matrices cuadradas, pero todas las matrices A pueden tener transpuesta.

b) "Al multiplicar por 2 cada elemento de un determinante de nxn se duplica el valor de ese determinante"

Es verdadero, ya que al multiplicar por un número k individualmente se llega al mismo resultado que haberlo multiplicado por el determinante tal como se muestra en el ejercicio (2).

c) "Si se anula una matriz cuadrada A, entonces se puede tener la seguridad de que el sistema de ecuaciones Ax=d es no singular".

Falso, ya que demostraría que sus reglones son linealmente independientes dado que el determinante no es cero, se demuestra una condición suficiente para la no Singularidad.

Ejemplos 5.4

<u>Ejemplo 1.</u>

Si desarrollamos el determinante $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ por medio de sus elementos de primer reglón, pero los cofactores de los elementos del segundo reglón.

$|c_{21}| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \; |c_{22}| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \; |c_{23}| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

Obtenemos $a_{11}|c_{21}| + a_{12}|c_{22}| + a_{13}|c_{23}| = 4(-3) + 1(10) + 2(1) = 0$

Ejemplo 2

Obtenga la inversa de $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Puesto que $|\mathrm{A}| = -2 \neq 0$, existe la inversa de A^{-1}

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} |\mathrm{C}_{11}| & |\mathrm{C}_{12}| \\ |\mathrm{C}_{21}| & |\mathrm{C}_{22}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj} \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(\mathrm{A})}{|\mathrm{A}|} \qquad \mathrm{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3

Obtenga la inversa de $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Puesto que $|\mathrm{B}| = 99 \neq 0$, también existe la inversa de B^{-1}

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 6 & -9 \\ -7 & 31 & 3 \\ 5 & -8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj B} = \begin{bmatrix} 21 & -7 & 5 \\ 6 & 31 & -8 \\ -9 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\text{adj(B)}}{|B|} \qquad B^{-1} = \frac{1}{99}\begin{bmatrix} 21 & -7 & 5 \\ 6 & 31 & -8 \\ -9 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 5.4

Ejercicio 1.

Suponga que expandimos un determinante de cuarto orden por su tercera columna y los cofactores de los elementos de la segunda columna. ¿Cómo escribiría la suma resultante de productos en la notación de Σ? ¿Cuál será la suma de productos en la notación de Σ si la expandimos por el segundo renglón y los cofactores de los elementos del cuarto renglón?

Pregunta 1:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}|C_{ij'}| = \sum_{i=1}^{4} a_{i3}|C_{i2}|$$

Pregunta 2:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|C_{i'j}| = \sum_{j=1}^{4} a_{2j}|C_{4j}|$$

Ejercicio 2.

Obtengamos la inversa de cada una de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $|A| = 5 - 0 = 5$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad \text{adj(A)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{\text{adj(A)}}{|A|}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\frac{1}{5}} & -\mathbf{\frac{2}{5}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$ $|B| = -2 - 0 = -2$

$C = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \text{adj(A)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{\text{adj(A)}}{|A|}$ $\quad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\frac{9}{2}} & \mathbf{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $|C| = -3 - 21 = -24$

$C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$ $\quad A^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & \frac{7}{24} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $|B| = 21 - 0 = 21$

$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Ejercicio 3

Obtenga la inversa de cada una de las siguientes matrices:

6. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Por gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & -7/4 & -7/4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/26 & -7/26 & 2/13 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/26 & -7/26 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & -3/13 & -3/13 & -2/13 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/26 & -7/26 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & -13/3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/26 & 3/26 & 1/13 & 0 \\ 0 & 1 & -7/26 & -7/26 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & -13/3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6/26 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 35/3 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & -13/3 \end{array}\right)$$

Ejercicio 4.

Obtenga la inversa de cada una de las siguientes matrices:

(a) $E = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$|E| = 1(0-6) - 0 + 1(12+14) = -6 + 26 = 20$

Matriz de cofactores y adjunta.

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & -6 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & 7 & 26 \end{bmatrix} \rightarrow \text{adj } E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & 7 \\ -6 & -4 & 26 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1} = \frac{1}{|E|} \text{adj } E = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & 7 \\ -6 & -4 & 26 \end{bmatrix}$$

(b) $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$|F| = 1(2-12) - 0 + 0 = -10$

Matriz de cofactores y adjunta.

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 2 & -6 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{adj } F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 10 & -6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{1}{|F|} \text{adj } F = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 10 & -6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$|G| = 1(0-1) - 0 + 0 = -1$

Matriz de cofactores y adjunta.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{adj } G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} = \frac{1}{|G|} \text{adj } G = -1 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$|H| = 1(1-0) - 0 + 0 = 1$

Matriz de cofactores y adjunta.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{adj } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} = \frac{1}{|G|} \text{adj } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5

Determine la inversa de $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$|A| = 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4(13) - 1(-11) - 5(-7) = 98$$

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 1 & 31 & 7 \\ 16 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \frac{1}{98}\begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{8}{49} \\ \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{3}{49} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Sección 5.5

Ejemplo 1

Obtenga la solución del sistema de ecuaciones

$5x_1+3x_2=30$

$6x_1-2x_2=8$

$$|A| = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = (-10) - (18) = -28$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 30 & 3 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} = (-60) - (24) = -84$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 5 & 30 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = (40) - (180) = -140$$

$$x_1^* = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-84}{-28} = 3$$

$$x_2^* = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-140}{-28} = 5$$

Ejemplo 2

$7x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$10x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$

$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7$

$$|A| = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} = -61$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix} = -61$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 10 & 8 & 1 \\ 6 & 7 & -2 \end{bmatrix} = -183$$

$$|A_3| = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 10 & -2 & 8 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} = -244$$

$$x_1^* = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-61}{-61} = 1$$

$$x_2^* = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-183}{-31} = 3$$

$$x_3^* = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-244}{-61} = 4$$

Ejercicio 1

Use la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a) $3x_1$-$2x_2$= 6

$2x_1$+x_2= 11

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (3 * 1) - \big(2 * (-2)\big) = 3 + 4 = 7$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} = (6 * 1) - \big(11 * (-2)\big) = 6 + 22 = 28$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} = (3 * 11) - (2 * 6) = 33 - 12 = 21$$

$$x_1^* = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{28}{7} = 4$$

$$x_2^* = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{21}{7} = 3$$

(b) -x_1+$3x_2$= -3

$4x_1$-x_2= 12

$$|A| = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = ((-1) * (-1)) - (4 * 3) = 1 - 12 = -11$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 12 & -1 \end{bmatrix} = \big((-3) * (-1)\big) - (12 * 3) = 3 - 36 = -33$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} = ((-1) * 12) - \big(4 * (-3)\big) = -12 + 12 = 0$$

$$x_1^* = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-33}{-11} = 3$$

$$x_2^* = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{0}{-11} = 0$$

(c) $8x_1-7x_2= 9$

$x_1+x_2=3$

$$|A| = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (8 * 1) - \big((-7) * 1\big) = 8 + 7 = 15$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = (9 * 1) - (3 * (-7)) = 9 + 21 = 30$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = (8 * 3) - (9 * 1) = 24 - 9 = 15$$

$$x_1^* = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{30}{15} = 2$$

$$x_2^* = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{15}{15} = 1$$

(d) $5x_1+9x_2= 14$

$7x_1-3x_2=4$

$$|A| = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} = (5 * (-3)) - (7 * 9) = -15 - 63 = -78$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = (5 * 4) - (7 * 14) = 20 - 98 = -78$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = (14 * (-3)) - (4 * 9) = (-42) - 36 = 78$$

$$x_1^* = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-78}{-78} = 1$$

$$x_2^* = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-78}{-78} = 1$$

Ejercicio 2

Para cada uno de los sistemas de ecuaciones del problema 1, encuentre la inversa de la matriz de coeficientes y obtenga la solución por la fórmula $x^*=A^{-1}d$.

(a)

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad det|A| = 7$$

$$Adj = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = Adj * \frac{1}{det} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}d = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$|A| = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad det|A| = -11$$

$$Adj = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = Adj * \frac{1}{det} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}d = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$|A| = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad det|A| = 15$$

$$Adj = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = Adj * \frac{1}{det} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{7}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{8}{15} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}d = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{7}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{8}{15} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$|A| = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad det|A| = -78$$

$$Adj = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = Adj * \frac{1}{det} = \begin{bmatrix} \frac{13}{78} & \frac{9}{78} \\ \frac{7}{78} & -\frac{5}{78} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}d = \begin{bmatrix} \frac{13}{78} & \frac{9}{78} \\ \frac{7}{78} & -\frac{5}{78} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

Utilice la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a) $8x_1 - x_2 = 16$

$2x_2 + 5x_3 = 5$

$2x_1 + 3x_3 = 7$

$$|A| = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 38$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 16 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 76$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 16 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} = 38$$

$$x_1^* = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{76}{38} = 2$$

$$x_2^* = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{0}{38} = 0$$

$$x_3^* = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{38}{38} = 1$$

(b) $-x_1+3x_2+2x_3=16$

$x_1 \quad +x_3=6$

$5x_2 - x_3=8$

$$|A| = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} = 18$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 24 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix} = -18$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} -1 & 24 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix} = 54$$

$$|A_3| = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 24 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} = 126$$

$$x_1^* = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-18}{18} = -1$$

$$x_2^* = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{54}{18} = 3$$

$$x_3^* = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{126}{18} = 7$$

(c) $4x+3y-2z=1$

$x+2y \quad =6$

$3x \quad +z=4$

$$|A| = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 17$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 51$$

$$|A_3| = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 68$$

$$x_1^* = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{0}{17} = 0$$

$$x_2^* = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{51}{17} = 3$$

$$x_3^* = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{68}{17} = 4$$

(d) -x+y+z=a

x−y+z=b

x+y−z=c

$$|A| = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 4$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2(b+c)$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} -1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & -1 \end{bmatrix} = 2(a+c)$$

$$|A_3| = \begin{bmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix} = 2(a+b)$$

$$x_1^* = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2(b+c)}{4} = \frac{1}{2}(b+c)$$

$$x_2^* = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2(a+c)}{4} = \frac{1}{2}(a+c)$$

$$x_3^* = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2(a+b)}{4} = \frac{1}{2}(a+b)$$

Ejercicio 4

Muestre que la regla de Cramer se puede obtener de otra manera mediante el siguiente procedimiento. Multiplique ambos lados de la primera ecuación del sistema Ax = d por el cofactor |C1j|, y después multiplique ambos lados de la segunda ecuación por el cofactor |C2j|, etc. Sume las ecuaciones recién obtenidas. Luego, asigne los valores 1,2, ..., n al índice j, de forma sucesiva, para obtener los valores solución x1*, x2*, xn*, como se muestra en (5.17).

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}|C_{ij}|x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}|C_{ij}|x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}|C_{in}|x_n = \sum_{i=1}^{n} d_i|C_{ij}|$$

Agregar interpretación

Sección 5.6

Ejercicio 1

Resuelva el modelo de ingreso nacional del ejercicio 3.5-1

a) por inversión de matriz

b) por regla de Cramer

(Enumere las variables en el orden Y, C, T)

Del ejercicio 3.5-1 tenemos que:

$$Y = C + Io + Go$$

$$C = a + b(Y - T); (a > 0, 0 < b < 1)$$

$$T = d + tY;; (d > 0, 0 < t < 1)$$

Replanteando el sistema tenemos:

$$Y - C = Io + Go$$

$$-bY + C + bT = a$$

$$-tY + T = d$$

Por lo cual podemos expresar el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Io + Go \\ a \\ d \end{bmatrix}$$

a) Para calcularlo por inversión de matriz necesitamos calcular

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * AdjuntaA = \frac{1}{1 - b + bt} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b(1-t) & -1 & -b \\ t & t & 1-b \end{bmatrix}$$

Para encontrar la solución

$$\begin{bmatrix} Y^* \\ C^* \\ T^* \end{bmatrix} = A^{-1}d = \frac{1}{1 - b + bt} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b(1-t) & -1 & -b \\ t & t & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Io + Go \\ a \\ d \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{1 - b + bt} \begin{bmatrix} Io + Go + a - bd \\ b(1-t)(Io + Go) + a - bd \\ d(1-b) + at + t(Io + Go) \end{bmatrix}$$

Para realizar Cramer calculamos

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - b + bt}$$

$$|A_Y| = \begin{bmatrix} Io + Go & -1 & 0 \\ a & 1 & b \\ d & 0 & 1 \end{bmatrix} = Io + Go + a - bd$$

$$|A_C| = \begin{bmatrix} 1 & Io + Go & 0 \\ -b & a & b \\ -t & d & 1 \end{bmatrix} = b(1-t)(Io + Go) + a - bd$$

$$|A_T| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & Io + Go \\ -b & 1 & a \\ -t & 0 & d \end{bmatrix} = d(1-b) + at + t(Io + Go)$$

Por lo tanto, las soluciones de este sistema son

$$Y^* = \frac{Io + Go + a - bd}{1 - b + bt}$$

$$C^* = \frac{b(1-t)(Io+Go)+a-bd}{1-b+bt}$$

$$T^* = \frac{d(1-b)+at+t(Io+Go)}{1-b+bt}$$

Ejercicio 2

Resuelva el modelo de ingreso nacional del ejercicio 3.5-2

a) por inversión de matriz

b) por regla de Cramer

(Enumere las variables en el orden Y, C, G)

Del ejercicio 3.5-2 tenemos que

$$Y = C + Io + G$$

$$C = a + b(Y - To); (a > 0, 0 < b < 1)$$

$$G = gY; (0 < g < 1)$$

Replanteando el sistema tenemos

$$Y - C - G = Io$$

$$-bY + C = a - bTo$$

$$-gY + G = 0$$

El sistema puede ser escrito

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Io \\ a - bTo \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Para resolver por inversión de matriz necesitamos calcular la inversa de modo que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * AdjuntaA = \frac{1}{1-b-g} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1-g & b \\ g & g & 1-b \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución viene dada por

$$\begin{bmatrix} Y^* \\ C^* \\ G^* \end{bmatrix} = A^{-1}d = \frac{1}{1-b-g} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1-g & b \\ g & g & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Io \\ a - bTo \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-b-g} \begin{bmatrix} Io + a - bTo \\ bIo + (1-g)(a - bTo) \\ g(Io + a - bTo) \end{bmatrix}$$

b) Para Cramer es necesario calcular

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-b-g}$$

$$|A_Y| = \begin{bmatrix} Io & -1 & -1 \\ a-bTo & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Io + a - bTo$$

$$|A_C| = \begin{bmatrix} 1 & Io & -1 \\ -b & a-bTo & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{bmatrix} = bIo + (1-g)(a-bTo)$$

$$|A_G| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & Io \\ -b & 1 & a-bTo \\ -g & 0 & 0 \end{bmatrix} = \ g(Io + a - bTo)$$

Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$Y^* = \ \frac{Io + a - bTo}{1-b-g}$$

$$C^* = \frac{bIo + (1-g)(a-bTo)}{1-b-g}$$

$$G^* = \frac{g(Io + a - bTo)}{1-b-g}$$

Ejercicio 3

Sea la ecuación para IS (Investment saving)

$$Y = \frac{A}{1-b} - \frac{g}{1-b} i$$

Donde 1-b es la propensión marginal a ahorrar, g es la sensibilidad de la inversión en relación con la tasa de interés y A es un agregado de variables exógenas. Sea la ecuación para LM (Liquid market)

$$Y = \frac{Mo}{k} + \frac{l}{k} i$$

Donde K y l son la sensibilidad de demandad de dinero respecto al ingreso y a la tasa de interés, respectivamente, y Mo son los saldos reales en efectivo.

Si b=0.7, g=100, A=252, k=0.25, l=200 y Mo=176, entonces

Sustituyendo tenemos

$$Y = \frac{252}{0.3} - \frac{100}{0.3} i$$

$$Y = \frac{176}{0.25} + \frac{200}{0.25} i$$

Rearmando el sistema tenemos que:

$$\begin{cases} 0.3Y + 100i = 252 \\ 0.25Y - 200i = 176 \end{cases}$$

a) Escriba el sistema IS-LM en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 100 \\ 0.25 & -200 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 176 \end{bmatrix}$$

b) Determine el Y e i mediante inversión de matriz

Primero conseguimos la inversa de la matriz

Donde:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * AdjuntaA = \frac{1}{-85}\begin{bmatrix} -200 & -0.25 \\ -100 & 0.30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{17} & \frac{20}{17} \\ \frac{0.05}{17} & -\frac{0.06}{17} \end{bmatrix}$$

Resolviendo con

$$\begin{bmatrix} Y^* \\ i^* \end{bmatrix} = A^{-1}d = \begin{bmatrix} \frac{40}{17} & \frac{20}{17} \\ \frac{0.05}{17} & -\frac{0.06}{17} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 252 \\ 176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 0.12 \end{bmatrix}$$

Sección 5.7

Ejercicio 1

Con base en el modelo (5.24), si las demandas finales son $d_1 = 30, d_2 = 15\ y\ d_3 = 10$ (todas en millones de dólares), ¿Cuáles son los niveles de producción correctos para las tres industrias? (redondee respuestas a dos decimales.)

En base al modelo 5.24 tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.9 & -0.2 \\ -0.1 & -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Por lo cual replanteando el modelo nos queda que:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.9 & -0.2 \\ -0.1 & -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Dado que se nos da la el planteamiento de $\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = A^{-1}d$

Solo se sustituye

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \frac{1}{0.384}\begin{bmatrix} 0.66 & 0.30 & 0.24 \\ 0.34 & 0.62 & 0.24 \\ 0.21 & 0.27 & 0.60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69.53 \\ 57.03 \\ 42.58 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2

Con la información en (5.23), calcule la cantidad total de insumo primario requerido para producir los niveles de producción correctos del problema 1.

La información en 5.23 plantea:

$$a_{01} = 0.3 \quad a_{02} = 0.3 \quad a_{03} = 0.4$$

Esto será igual a $a_{0i} * x^*{}_i$

Entonces tenemos que:

$$0.3 * 69.53 = 20.859$$

$$0.3 * 57.03 = 17.109$$

$$0.4 * 42.58 = 17.032$$

Sumando todo esto nos da la cantidad de insumo requerido siendo de 55.00

Ejercicio 3

En una economía de dos industrias, se sabe que la industria I utiliza 10 centavos de su propio producto y 60 centavos del artículo II para producir una cantidad con valor de un dólar del artículo I; la industria II no utiliza su propio producto, pero emplea 50 centavos del artículo I para producir una cantidad con valor de un dólar del artículo II, y el sector abierto demanda 1 000 miles de millones de dólares del artículo I y 2 000 miles de millones del artículo II.

(a) Escriba la matriz de insumos, la matriz de Leontief y la ecuación matricial específica de insumo-producto para esta economía.

$$A = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.50 \\ 0.60 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0.90 & -0.50 \\ -0.60 & 1.00 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

(b) Compruebe si los datos de este problema satisfacen la condición de Hawkins-Simon.

Los menores principales de la matriz de Leontief son $|B_1|$=0.90 > 0, $|B_1|$ = |I-A| =0.60 > 0, por lo tanto, diremos que se si se cumple la condición de Hawkins-Simon.

(c) Determine los niveles de producción correctos mediante la regla de Cramer.

$$x_1^* = \frac{2000}{0.6} = 3333\frac{1}{3}$$

$$x_2^* = \frac{2400}{0.6} = 4000$$

Ejercicio 4

Dados la matriz de insumos y el vector de demanda final

$$A = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.25 & 0.34 \\ 0.33 & 0.10 & 0.12 \\ 0.19 & 0.38 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 1800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$$

(a) Explique el significado económico de los elementos 0.33, 0 y 200.

Elemento 0.33:

Se necesita 33c del producto básico II como insumo para producir 1 dólar del producto I.

Elemento 0:

Industria III no utiliza su propia producción como insumo.

Elemento 200:

El sector abierto demanda 200 mil millones de dólares del producto II.

(b) Explique el significado económico (si existe) de la suma de la tercera columna.

La suma de la tercera columna equivale a 0.46, lo que significa que 46u de insumos no primarios se utilizan para producir $1 de producto III.

(c) Explique el significado económico (si existe) de la suma de la tercera columna.

No tiene un significado económico.

(d) Escriba la ecuación matricial especifica de insumo-producto para este modelo.

$$\begin{bmatrix} 0.95 & -0.25 & -0.34 \\ -0.33 & 0.90 & -0.12 \\ -0.19 & -0.38 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$$

(e) Compruebe si los datos de este problema satisfacen la condición de Hawkins-Simon.

$$|B_1| = 0.95 > 0$$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} 0.95 & -0.25 \\ -0.33 & 0.90 \end{vmatrix} = 0.7725 > 0$$

$$|B_3| = |I - A| = 0.6227 > 0$$

Por tanto, la condición de Hawkins-Simón si se satisface

Ejercicio 5

(a) Dada una matriz B = [b_{ij}] de 4 x 4, escriba los menores principales.

1er orden: $|B_{11}|, |B_{22}|, |B_{33}|, |B_{44}|$

2do orden: $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{1\,3} \\ b_{\,31} & b_{\,3\,3} \\ b_{\,22} & b_{\,24} \\ b_{42} & b_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{41} & b_{44} \\ b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$

3er orden: $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1\,4} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2\,4} \\ b_{\,41} & b_{\,42} & b_{\,4\,4} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1\,4} \\ b_{31} & b_{33} & b_{3\,4} \\ b_{\,41} & b_{\,43} & b_{\,4\,4} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{2\,4} \\ b_{32} & b_{33} & b_{3\,4} \\ b_{\,42} & b_{\,43} & b_{\,4\,4} \end{vmatrix}$

4to orden: igual que |B|.

(b) Escriba los menores principales directores.

$$|B_1| \equiv |b_{11}|$$

$$|B_2| \equiv \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$|B_3| \equiv \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$|B_4| \equiv |B|$$

Ejercicio 6

Muestre que, por sí misma (sin otras restricciones en la matriz 6), la condición de Hawkins-Simon garantiza la existencia de un vector solución único x4, aunque no necesariamente no negativa

La última parte de la condición Hawkins-Simon, $|B_n| > 0$, es equivalente a $|B| > 0$. Desde |B| es una matriz no singular, y Bx = d tiene una solución única $x^* = B^{-4}d$, no necesariamente no negativo.

Capítulo 6: Estática comparativa y concepto de derivada

Sección 6.2

Ejemplo 1.

Dada $y = 3x^2 - 4$, podemos decir

$$f(x_0) = 3{x_0}^2 - 4 \qquad f(x_0 + \Delta x) = 3(x_0 + \Delta x)^2 - 4$$

Por lo tanto, el cociente de diferencias es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x_0 + \Delta x)^2 - 4 - ({x_0}^2 - 4)}{\Delta x} = \frac{6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

que se puede evaluar si tenemos x_0 y Δx. Sea x_0 = 3 y Δx = 4 ; entonces, la tasa promedio de cambio de y es 6(3) + 3(4) = 30. Esto significa que, en promedio, cuando x cambia de 3 a 7, el cambio en y es 30 unidades por cambio unitario en x.

Ejemplo 2

En relación con la función $y = 3x^2 - 4$, se ha mostrado que su cociente de diferencias es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6x_0 + 3\Delta x$ y el limite de ese cociente es $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x_0 + 3\Delta x) = 6x_0$.Con base en esto ultimo, ahora podemos escribir (sustituyendo x_0 con x):

$$\frac{dy}{dx} = 6x, o\ bien, f'(x) = 6x$$

Note que distintos valores de x darán a la derivada distintos valores correspondientes. Por ejemplo, cuando x=3, encontramos, sustituyendo x=3 en la expresión $f'(x)$, que $f'(3) = 6(3) = 18$; de manera similar, cuando x=4, tenemos $f'(4) = 6(4) = 24$. Asi, mientras $f'(x)$ denota una función derivada, las expresiones $f'(3), f'(4)$ representan cada una un valor de derivada específico.

Ejercicio n°1

Dado la función $y = 4x^2 + 9$

a) Encuentre el cociente de diferencias como una función de x y Δx. (Use x en lugar de x_0)

El cociente de la diferencia es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4(x + \Delta x)^2 + 9 - (4x^2 + 9)}{\Delta x} = \frac{(4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 9) - 4x^2 - 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x(8x + 4\Delta x)}{\Delta x} = 8x + 4\Delta x$$

b) Obtenga la derivada dy/dx

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 2(4(x)^{2-1}) + 0 = 8x$$

c) Determine f'(3) y f'(4).

$$\mathrm{f}'(3) = 8(3) = 24$$

$$\mathrm{f}'(4) = 8(4) = 32$$

Ejercicio 2

Dada la función $y = 5x^2 - 4x$:

a) Encuentre el cociente de diferencias como una función de x y Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5(x_0 + \Delta x)^2 - 4(x_0 + \Delta x) - 5x_0^2 + 4x_0}{\Delta x} = \frac{10x_0\Delta x + 5\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x} = 10x_0 + 5\Delta x - 4$$

b) Obtenga la derivada $\frac{dy}{dx}$

$$y' = 10x - 4$$

c) Determine $f'(2)\ y\ f'(3)$

$$f'(2) = 10 * 2 - 4 = 16$$

$$f'(3) = 10 * 3 - 4 = 26$$

Ejercicio 3

Dada la función y = 5x - 2:

(a) Encuentre el cociente de diferencias $\Delta y/\Delta x$. ¿De qué tipo de función se trata?

Se trata de una función lineal cuya pendiente siempre es creciente. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$

(b) Puesto que la expresión Δx no aparece en la función $\Delta y/\Delta x$ en el inciso (o), ¿sería importante para el valor de $\Delta y/\Delta x$ si Δx fuera grande o pequeña? En consecuencia, ¿cuál es el límite del cociente de diferencias cuando Δx tiende a cero?

No, no tiene importancia alguna el tamaño de Δx, porque no aparece expresada en su derivada, sea cual sea el valor de X, la función siempre mantendrá la misma pendiente. Su límite seguirá siendo la constante 5.

Sección 6.4

Ejemplo 1

Dada $q = 2 + v^2$, determine el $Lim_{v \to 0}\, q$. Para tomar el límite izquierdo, se sustituye la serie de valores negativos $-1, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{100}$ (en ese orden) para v y se encuentra que $(2 + v^2)$ disminuye en forma constante y tiende a 2 (porque v^2 se aproxima poco a poco a 0). A continuación, para el límite del lado derecho, sustituimos la serie de valores $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100} \dots$ (en ese orden) para *v y* se encuentra el mismo límite que antes. En vista de que los dos límites son idénticos, se considera que existe el límite de *q y se* escribe $Lim_{v \to 2}\, q = 2$.

Es tentador considerar la respuesta obtenida en el ejemplo 1 como el resultado de fijar

v = 0 en la ecuación $q = 2 + v^2$, pero en general se debe resistir esta tentación. Al evaluar $Lim_{v \to N}\, q$, sólo se permite que *v tienda a N,* pero, como regla, no se permite que *v = N.* De hecho, *V—> N* se puede hablar con bastante legitimidad del límite de *q* cuando *v = N* , incluso si *N no* está en el dominio de la función *q = g(v).* En este último caso, si se intenta establecer *v = N,* es obvio que *q* estará indefinida.

Ejemplo 2

Dada $q = \frac{1 - v^2}{1 - v}$ encuentre $\lim\limits_{v \to \infty} q$. Aquí, N = 1 no está en el dominio de la función, y no se puede establecer v = 1 porque eso tendría que ver con la división entre cero. Además, Incluso el procedimiento de evaluación de límite de permitir que $v \to 1$, como se usó en el ejemplo 1, causará dificultad, porque el denominador (1 - v) tenderá a cero cuando 1, y todavía no se tiene manera de llevar a cabo la división en el límite.

Una manera de evitar esta dificultad es tratar de transformar la relación dada a una forma en la cual v no aparezca en el denominador. Puesto que $v \to 1$ significa que $v \neq 1$, de modo que (1 - v) es distinta de cero, es legítimo dividir la expresión $(1 - v^2)$ entre (1 —v) y escribir

$$q = \frac{1 - v^2}{1 - v} = 1 + v$$

En esta nueva expresión para q, ya no hay un denominador con v en él. Puesto que (1 + v) → 2 cuando $v \to 1$ desde cualquier lado, se puede concluir entonces que $\lim\limits_{v \to \infty} q = 2$

Ejemplo 3

Dada $q = (2v + 5) = (2v + 5)/(v + 1)$, encuentre $\lim_{v \to +\infty} q$. De nuevo aparece la variable v tanto en el numerador como en el denominador. SI establecemos que $+\infty$ en ambos, el resultado será una relación entre dos números infinitamente grandes, lo cual no tiene un significado claro. Para salir de la dificultad, esta vez se intenta transformar la relación dada a una forma en la cual la variable v no aparecerá en el numerador.3 Esto, de nuevo, se puede llevar a cabo dividiendo la relación dada. Sin embargo, puesto que $(2v + 5)$ no es exactamente divisible entre $(v + 1)$, el resultado contendrá un residuo como sigue:

$$q = \frac{2v + 5}{v + 1} = 2 + \frac{3}{v + 1}$$

Pero, de todos modos, esta nueva expresión para q ya no tiene un numerador con v en él. Al observar que el residuo $3/(v + 1) \to \infty$ cuando $v \to \infty$, se puede concluir entonces que $\lim_{v \to +\infty} q = 2$.

También existen varios teoremas útiles en la evaluación de límites.

La división se puede efectuar, como en el caso de números, de la siguiente manera:

$$1 - v \frac{1 + v}{|1 - v^2}$$

$$\underline{1 - v}$$

$$v + v^2$$

$$\underline{\underline{v + v^2}}$$

Por otro lado, podemos recurrir a la factorización como sigue:

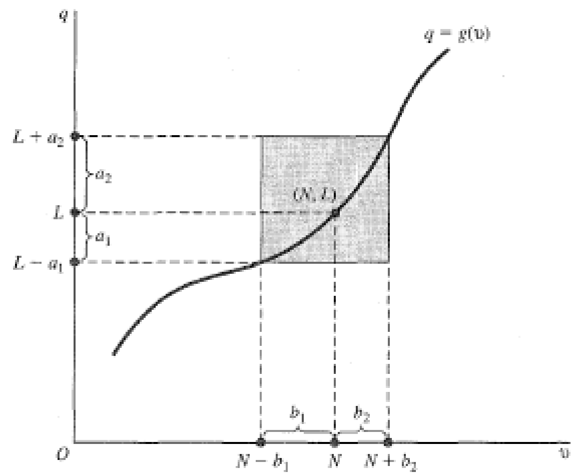
$$\frac{1 - v^2}{1 - v} = \frac{(1 + v)(1 - v)}{1 - v} = 1 + v \qquad (v \neq 0)$$

Note que, a diferencia del caso $v \to 0$, donde se desea sacar a v del denominador a fin de evitar la división entre cero, el caso $v \to \infty$ se presenta mejor al sacar a v del numerador. Cuando $v \to \infty$, una expresión que contiene a v en el numerador se volverá infinita, pero una expresión con v en el denominador tenderá a cero y desaparecerá suavemente de la escena, lo cual es más conveniente.

Ejercicio n°4

Use la figura 6.3 para mostrar que no se puede considerar al número $(L + a_2)$ como el límite de q cuando v tiende a N.

FIGURA 6.3



No se puede considerar ya que a como se observa la vecindad para el valor v cuando tiende a N, no se encuentra en la vecindad elegida, $(L + a_2)$. Por lo que para este caso no existe tal límite.

Ejemplo 2

Dada $q = (1 — v^2)/(1 - v)$ encuentre $Lim_{v \to 1}\, q$. Aquí, *N* = 1 no está en el dominio *V*= 1 de la función, y no se puede establecer v = 1 porque eso tendría que ver con la división entre cero. Además, Incluso el procedimiento de evaluación de límite de permitir que v tiende a 1, como se usó en el ejemplo 1, causará dificultad, porque el denominador (1 - v) tenderá a cero cuando v tiende a 1, y todavía no se tiene manera de llevar a cabo la división en el límite.

Una manera de evitar esta dificultad es tratar de transformar la relación dada a una forma en la cual *v* no aparezca en el denominador. Puesto que v tiende a 1 significa que $v \neq 1$, de modo que (1 - *v)* es distinta de cero, es legítimo dividir la expresión (1 – v^2) entre $(1 - v)$ *y* escribir:

$$q = \frac{1 — v^2}{1 - v} = 1 + v \qquad (v \neq l)$$

En esta nueva expresión para *q,* ya no hay un denominador con v en él. Puesto que (1 + v*)* → 2 cuando 1 desde *cualquier* lado, se puede concluir entonces que $Lim_{v \to 1}\, q = 2$.

Ejercicio 1

Darla la función $q = \frac{(v^2+v- 56)}{v-7}$, $(v \neq\ 7)$, halle el limite izquierdo y el límite derecho de q cuando v tiende a 7. ¿Se puede concluir de estas respuestas que q tiene un limite cuando v se aproxima a 7?

$$Lim_{v\to 7^-}\ q = Lim_{v\to 7^-} \frac{(v^2+v- 56)}{v-7} = Lim_{v\to 7^-} \frac{(v+8)(v-7)}{v-7}$$
$$= Lim_{v\to 7^-} (v+8) = 15$$

$$Lim_{v\to 7^+}\ q = Lim_{v\to 7^+} \frac{(v^2+v- 56)}{v-7} = Lim_{v\to 7^+} \frac{(v+8)(v-7)}{v-7}$$
$$= Lim_{v\to 7^+} (v+8) = 15$$

$$\therefore\ Lim_{v\to 7^-} = Lim_{v\to 7^+} = 15$$

Ejercicio 2

Dada $q = \frac{[(v+2)^3-8]}{v}$ $, v \neq 0$ encuentre:

$$= \frac{[(v+2)^3-8]}{v} = \frac{[v^3+6v^2+12v+8-8]}{v} = \frac{v[v^2+6v+12]}{v} = v^2+6v+12$$

a) $Lim_{v\to 0}\ q = (0)^2 + 6(0) + 12 = 12$

b) $Lim_{v\to 2}\ q = (2)^2 + 6(2) + 12 = 28$

c) $Lim_{v\to a}\ q = (a)^2 + 6(a) + 12$

Ejercicio 3

Dada $q = 5 - \frac{1}{v}\ (v \neq 0)\text{: } Encuentre$

a) $\lim\limits_{v\to +\infty} q = 5 - \frac{1}{\infty} = 5$

b) $\lim\limits_{v\to -\infty} q = 5 - \frac{1}{\infty} = 5$

Sección 6.5

Ejemplo 1

Puesto que 6 > 5, la multiplicación por 3 produce 3(6) > 3(5), o 18 > 15 ; pero la multiplicación por —3 da como resultado (—3)6 < (- 3)5 , o —18 < - 1 5 .

La división de una desigualdad entre un número n es equivalente a la multiplicación por el número 1/n; por lo tanto, la regla sobre la división se incluye en la regla sobre la multiplicación.

Regla III (elevar al cuadrado) a > b, $(b \geq 0) \Rightarrow a^2 > b^2$

Si sus dos lados no son negativos, la desigualdad se mantendrá cuando ambos lados se eleven al cuadrado.

Ejemplo 2

Puesto que 4 > 3 y como ambos lados son positivos, se tiene 42 > 32, o bien 16 > 9. De manera similar, puesto que 2 > 0, se deduce que $2^2 > 0^2$, o bien 4 > 0.

Las **reglas I a III** se expresaron en términos de desigualdades estrictas, pero su validez no se ve afectada si los signos > se reemplazan con signos ≥.

Ejemplo 3

Si *m* = 5 y *n* = 3, entonces |m| + |n| = |m + n| = 8. Pero si *m* = 5 y *n* = *- 3* , entonces |m| + |n| = 5 + 3 = 8, mientras que |m + n| = |5 - 3| = 2 es un número más pequeño. Por otro lado, en las otras dos propiedades no importa si m y n tienen signos idénticos u opuestos, ya que, al tomar el valor absoluto del producto o el cociente en el lado derecho, el signo del último término se elimina en cualquier caso.

Ejemplo 4

Si m = 7 y n = 8, entonces |m| · |n| = |m · n| = 7(8) = 56. Pero incluso si m = - 7 y n = 8 (signos opuestos), aún se obtiene el mismo resultado de

|m|-|n| = | - 7 | - | 8 | = 7(8) = 56 y

|m - n| = | - 7(8) | = 7(8) = 56

Ejemplo 5

Obtenga la solución de la desigualdad

$$3x - 3 > x + 1$$

Como cuando se resuelve una ecuación, los términos variables se deben reunir primero en un lado de la desigualdad. Al sumar (3 - x) a ambos lados, se obtiene

$$3x - 3 + 3 - x > x + 1 + 3 - x$$

$$2x > 4$$

que por sí misma es una desigualdad. Esta solución no es un solo número, sino un conjunto de números. Por lo tanto, la solución se puede expresar también como el conjunto $\{x|x > 2\}$ o como el intervalo abierto (2, ∞).

Ejemplo 6

Resuelva la desigualdad $|1 - x| \leq 3$. Primero, se elimina la notación de valor absoluto utilizando (6.10). La desigualdad dada es equivalente a la afirmación de que

$$-3 \leq 1 - x \leq 3$$

o bien, después de restar 1 de cada lado,

$$-4 \leq -x \leq 2$$

Al multiplicar cada lado por (-1), se obtiene

$$4 \geq x \geq -2$$

donde el sentido de la desigualdad se ha invertido apropiadamente. Escribiendo primero el número más pequeño, podemos expresar la solución en la forma de la desigualdad

$$-2 \leq x \leq 4$$

O en la forma de conjunto $\{x|-2 \leq x \leq 4\}$ o el intervalo cerrado $[-2,4]$

En ocasiones, un problema podría requerir el cumplimiento de varias desigualdades en varias variables al mismo tiempo; entonces, se debe resolver un sistema de desigualdades simultáneas. Este problema surge, por ejemplo, en programación no lineal.

Ejercicio 1

1. Resuelva las siguientes desigualdades:

a) $3x - 1 < 7x + 2$

$$-3 < 4x$$

$$x > -\frac{3}{4}$$

b) $2x + 5 < x - 4$

$$x < -9$$

c) $5x + 1 < x + 3$

$$4x < 2$$

$$x < \frac{1}{2}$$

d) $2x - 1 < 6x + 5$

$$-6 < 4x$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

Ejercicio nº2

Si $8x - 3 < 0\ y\ 8x > 0$, exprese estas desigualdades en una desigualdad continua y encuentre su solución.

Dado que

$$8x - 3 < 0 < 8x$$

Sumamos -8x

$$8x - 3 - 8x < -8x < 8x - 8x$$

$$-3 < -8x < 0$$

Ahora bien, multiplicamos por (-1/8)

$$\frac{3}{8} > x > 0$$

Finalmente, la solución es:

$$0 < x < \frac{3}{8}$$

Ejercicio 3

Resuelva

a) $|x + 1| < 6$

$$-6 < x + 1 < 6$$

$$-7 < x < 5$$

b) $|4 - 3x| < 2$

$$-2 < 4 - 3x < 2$$

$$-2 < 3x - 4 < 2$$

$$2 < 3x < 6$$

$$\frac{2}{3} < x < 2$$

c) $|2x + 3| \leq 5$

$$-5 \leq 2x + 3 \leq 5$$

$$-8 \leq 2x \leq 2$$

$$-4 \leq x \leq 1$$

Capítulo 9:

Sección 9.6

Ejemplo 1

Examine la función $y = (7 - x)^4$ para su extremo relativo. Puesto que $f'(x) = -4(7 - x)^3$ es cero cuando x = 7, tomamos x = 7 como el valor crítico para la prueba, con y = 0 como el valor estacionario de la función. Por derivación sucesiva (continua hasta que encontramos un

valor de derivada no cero en el punto x = 7), obtenemos

$f''(x) = 12(7 - x)^2$ de modo que $f''(7) = 0$

$$f'''(x) = -24(7 - x) \qquad f'''(7) = 0$$

$$f^4(x) = 24 \qquad f^4(4) = 24$$

Puesto que 4 es un número par y corno $f^4(4) = 24$ es positivo, concluim os que el punto (7, 0) representa un mínimo relativo.

Según se comprueba fácilmente, esta función representa una curva estrictamente convexa. En vista de que la segunda derivada en x=7 es cero (en lugar de positiva), este ejemplo nos sirve para ilustrar la afirmación anterior en relación con la segunda derivada y la curvatura de una curva para el efecto de que, si bien una f''(x) positiva para toda x implica una f(x) estrictamente convexa, una f(x) estrictamente convexa no implica una f''(x) positiva para toda x. Y lo más importante es que también sirve para ilustrar el hecho de que, dada una curva estrictamente convexa (cóncava), el extremo encontrado en esa curva debe ser un mínimo (máximo), porque tal extremo cumplirá la condición suficiente de segundo orden, o bien, si no es así, cumplirá otra condición suficiente (de orden superior) para un mínimo (máximo).

Ejercicio 1

Encuentre los valores estacionarios de las siguientes funciones:

Determine por medio del criterio de la n-esima derivada si representan, máximos relativos, minimos relativos o puntos de inflexion

a) $y = x^3$

$$y' = 3x^2$$

En este caso el valor que hace 0 a la derivada es 0 se tiene que seguir derivando

Entonces:

$$y'' = 6x$$

Sigue siendo 0

$$y''' = 6$$

En este caso es diferente de 0 al evaluar x=0, por tanto, es un punto de inflexión por que está en una derivada impar

b) $y = -x^4$

$$y' = -4x^3$$

El valor que hace 0 a la derivada es 0, por tanto, se seguirá derivando

$$y'' = -12x^2$$

El valor sigue 0

$$y''' = -24x$$

Sigue siendo 0

$$y^{IV} = -24$$

Como la cuarta derivada es menor a 0 y es un valor estacionario, se trata de un máximo relativo

c) $y = x^6 + 5$

$$y' = 6x^5$$

Se sigue derivando, el valor que hace 0 es x=0

$$y'' = 30x^4$$

El valor sigue siendo x=0

$$y''' = 120x^3$$

$$y^{IV} = 360x^2$$

$$y^{V} = 720x$$

$$y^{VI} = 720$$

En este caso, hasta la sexta derivada se encontró un valor estacionario mayor a 0 por tanto es un mínimo relativo

Ejercicio 2:

Determine los valores estacionarios de las siguientes funciones:

a) $\mathrm{y} = (\mathrm{x} - 1)^3 + 16$

$$y' = 3(x-1)^2 = 0 \qquad\qquad Cuando\ x = 1$$

$$y''(1) = 6(x-1) = 6 - 6 = 0$$

$$y'''(1) = 6x = 6$$

Al sustituir en $y(1) = 16$ se determina que se está frente a un punto de inflexión.

b) $y = (3-x)^6 + 7$

$$y' = -6(3-x)^5 = 0 \qquad\qquad Cuando\ x = 3$$

$y''(3) = 0,\ y'''(3) = 0, y^{(4)}(3) = 0, y^{(5)}(3) = 0$

$$y^{(6)}(3) = 720$$

Debido a que el valor es positivo $y(3) = 7$ representa un mínimo relativo.

c) $y = (x-2)^4$

$$y' = 4(x-2)^3 = 0 \qquad\qquad Cuando\ x = 2$$

$$y''(2) = 0, y'''(2) = 0$$

$$y^{(4)}(2) = 24$$

Debido a que el valor es positivo $y(0) = 0$ representa un mínimo relativo.

d) $y = (5-2x)^4 + 8$

$$y' = -4(5-2x)^3 = 0 \qquad\qquad Cuando\ x = \frac{5}{2}$$

$$y''(5/2) = 0, y'''(5/2) = 0$$

$$y^{(4)}(5/2) = 384$$

Debido a que el valor es positivo $y(5/2) = 8$ representa un mínimo relativo.

SECCION 6.6

Ejemplos 6.6

Ejemplo 1

q=av+b $\lim_{v\to N} q = aN + b$

Dada *q=5v+7*, se tiene $\lim_{v\to 2} q = 5(2) + 7 = 17$

De manera similar, $\lim_{v\to 0} q = 5(0) + 7 = 7$

Ejemplo 2

Dada *q*=v^3, se tiene que $\lim_{v\to 2} q = (2)^3 = 8$

Ejemplo 3

Determine $\lim_{v\to 0} \frac{1+v}{2+v}$. Puesto que aquí se tiene $\lim_{v\to 0}(1+v) = 1$ y $\lim_{v\to 0}(2+v) = 2$, el límite deseado es ½.

Ejercicios 6.6

1. Encuentre los límites de la función *q=7-9v+*v^2
   a) Cuando v→0
   $$\lim_{v\to 0} q = 7 - 9(0) + (0)^2 = 7$$
   b) Cuando v→3
   $$\lim_{v\to 3} q = 7 - 9(3) + (3)^2 = -11$$
   c) Cuando v→-1
   $$\lim_{v\to -1} q = 7 - 9(-1) + (-1)^2 = 17$$

2. Halle los límites de *q=(v+2)(v-3)*
   a) Cuando v→-1
   $$\lim_{v\to -1} q = (-1+2)(-1-3) = -4$$
   b) Cuando v→0

$$\lim_{v\to 0} q = (0+2)(0-3) = -6$$

c) Cuando v→5

$$\lim_{v\to 5} q = (5+2)(5-3) = 14$$

3. Obtenga los límites de *q=(3v+5)/(v+2)*

a) Cuando v→0

$$\lim_{v\to 0} q = \frac{3(0)+5}{0+2} = \frac{5}{2}$$

b) Cuando v→5

$$\lim_{v\to 5} q = \frac{3(5)+5}{5+2} = \frac{20}{7}$$

c) Cuando v→-1

$$\lim_{v\to -1} q = \frac{3(-1)+5}{-1+2} = 2$$

6.7 Continuidad y diferenciabilidad de una función

Ejemplos 6.7

Ejemplo 1

La función racional

$$q = g(v) = \frac{4v^2}{v^2+1}$$

Se define para todos los números reales finitos; así que su dominio consiste en el intervalo (-∞,∞). Para cualquier número N en el dominio, el límite de q es (por el teorema de límite de cociente).

$$\lim_{v\to N} q = \frac{\lim_{v\to N}(4v^2)}{\lim_{v\to N}(v^2+1)} = \frac{4N^2}{N^2+1}$$

que es igual a g(N). Por lo tanto, los tres requerimientos de continuidad se satisfacen en N. Además, se observa que N puede representar cualquier punto en el dominio de esta función; en consecuencia, esta función es continua en su dominio.

Ejemplo 2

La función racional

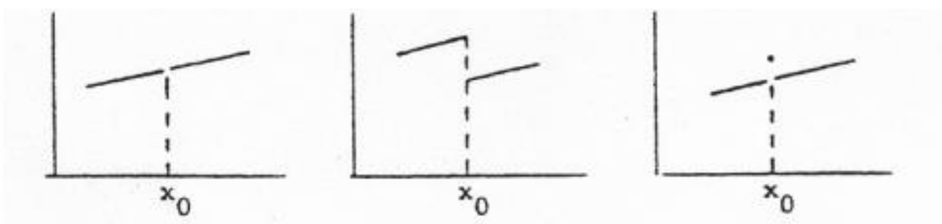
$$q = \frac{v^3+v^2-4v-4}{v^2-4}$$

no está definida en v = 2 y en v = - 2 . Puesto que esos dos valores de v no están en el dominio, la función es discontinua en v = - 2 y v = 2, a pesar del hecho de que existe un límite de q cuando v → -2 o 2. En una gráfica, esta función muestra un hueco en cada uno de estos dos valores de v. Pero para otros valores de v (los que están en el dominio), esta función es continua.

Ejercicios 6.7

Ejercicios

1. Una función y =f(x) es discontinua en $x = x_0$ cuando se viola cualquiera de los tres requerimientos para continuidad en $x = x_0$. Construya tres gráficas para ilustrar la violación de cada uno de esos requerimientos.



2. **Tomando el conjunto de los números reales finitos como el dominio de la función**

q = g (v) = $v^2 - 5v - 2$:

(a) Encuentre el límite de q cuando v tiende a N (un número real finito).

Sol. $\lim_{v \to N} q = N^2 - 5N - 2 = g(N)$

(b) Compruebe si este límite es igual a g(N).

Si, la función es continua para todo valor real de N además es continua en todo su dominio.

(c) Compruebe si la función es continua en N y continua en su dominio

Si.

3. **Dada la función** $q = g(v) = \frac{v+2}{v^2+2}$

(a) Use los teoremas de límite para hallar $\lim_{v \to N} q$ **siendo N un número real finito.**

$$\lim_{v \to N} q = \frac{N+2}{N^2+2} = g(N)$$

(b) Compruebe si este límite es igual a g(N).

Si.

(c) Verifique la continuidad de la función g(v) en N y en su dominio (-∞,∞).

La función es continua en el dominio

4. Dada

$$\boldsymbol{y = f(x) = \frac{x^2 - 9x + 20}{X - 4} = g(N)}$$

(a) ¿Es posible aplicar el teorema del límite del cociente (jara hallar el límite de esta función cuando x→ $\boldsymbol{4}$?

No, dado que resultará -32/0 lo cual no está definido

(b) ¿Esta función es continua en x = 4? ¿Por qué?

No, puesto que no se puede evaluar en x=4 desde el inicio. No está en el dominio de la función.

(c) Obtenga una función que, para $\boldsymbol{x \neq 4}$, es equivalente a la función dada, y obtenga de la función equivalente el límite de y cuando $\boldsymbol{x \to 4}$.

Para $x \neq 4$ la función se reduce a $y = x - 5$ entonces $\lim_{x \to 4} y = -1$.

Ejercicio 5 En la función racional del ejemplo 2, el numerador es divisible por el denominador de modo uniforme, y el cociente es $\boldsymbol{v + 1}$. Con base en lo anterior, ¿se puede reemplazar en el acto la función por $\boldsymbol{q = v + 1}$? ¿Por qué sí o por qué no?

En el ejemplo 2, se puede ver que al ordenar la expresión y aplicar factorización, se puede simplificar cierta expresión del numerador con el denominador, y por eso resulta ser una división exacta.

$$q = \frac{v^3 + v^2 - 4v - 4}{v^2 - 4} = \frac{v^2(v + 1) - 4(v + 1)}{v^2 - 4} = \frac{(v^2 - 4)(v + 1)}{v^2 - 4} = (v + 1)$$

Respondiendo el ejercicio, no se puede reemplazar ya que $v + 1$, es el resultado de aplicar métodos algebraicos. La ecuación original no es equivalente a $v + 1$, las dos definen casos diferentes, $v + 1$ es una aproximación de q. ahora bien, q no está definida cuando $v = -2\ o\ v = 2$, mientras que $v + 1$ si lo va a estar.

Ejercicio 6_Con base en las gráficas de las seis funciones de la figura 2.8, ¿concluiría que cada una de esas funciones es diferenciable en todo punto de su dominio? Explique.

Al analizar las estructuras de las funciones se puede decir que este si son diferenciables dado que son derivables y a simple vista se puede notar que son continuas lo que confirma su diferenciabilidad.

Sección 7.1

Ejemplo 7.1

Ejemplo 1

La derivada de $y = x^3\ es\ \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$

Ejemplo 2

La derivada de $y = x^9\ es\ \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^9 = 3x^2$

Ejemplo 3

Encuentre la derivada de $y = x^0$. Al aplicar (7.1) se encuentra

$$\frac{dy}{dx}x^0 = 0(x^{-1}) = 0$$

Ejemplo 4

Halle la derivada de $y = \frac{1}{x^3}$. Esto tiene que ver con el recíproco de una potencia, pero al reescribir la función como $y = x^{-3}$, podemos utilizar de nuevo (7.1) para obtener la derivada:

$$\frac{dy}{dx}x^{-3} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

Ejemplo 5

Encuentre la derivada de $y = \sqrt{x}$. En este caso se tiene una raíz cuadrada, pero como $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, la derivada se puede hallar como sigue:

$$\frac{dy}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

Ejemplo 6

Dada $y = 2x$, tenemos $\frac{dy}{dx} = 2x^0 = 0$

Ejemplo 7

Dada $f(x) = 4x^3$, la derivada es $f'(x) = 12x^2$

Ejemplo 8

La derivada de $f(x) = 3x^{-2}$ es $f'(x) = -6x^{-3}$

Ejercicios 7.1

Ejercicio 1

Obtenga la derivada de cada una de las siguientes funciones:

(a) $y = x^{12}$

$$f'(y) = 12x^{11}$$

(b) $y = 63$

$$f'(y) = 0$$

(c) $y = 7x^5$

$$f'(y) = 35x^4$$

(d) $w = 3u^{-1}$

$$f'(w) = -3u^{-2}$$

(e) $w = -4u^{\frac{1}{2}}$

$$f'(w) = -2u^{-1/2}$$

(f) $w = 4u^{\frac{1}{4}}$

$$f'(w) = u^{-3/4}$$

Ejercicio 2

Encuentre lo siguiente:

(a) $\frac{d}{dx}(-x^{-4}) = 4x^{-5}$

(b) $\frac{d}{dx} 9x^{1/3} = 3x^{-2/3}$

(c) $\frac{d}{dw} 5w^4 = 20w^3$

(d$\frac{d}{dx} cx^2 = 2cx$

(e$\frac{d}{du} au^b = abu^{b-1}$

(f) $\frac{d}{du} - au^{-b} = abu^{-b-1}$

Ejercicio 3

Halle $f'(1)$ y $f'(2)$ de las siguientes funciones:

(a) $y = f(x) = 18x$

$f'(x) = 18$

$f'(1) = 18$

$f'(2) = 18$

(b) $y = f(x) = cx^3$

$f'(x) = 3cx^2$

$f'(1) = 3c$

$f'(2) = 12c$

(c) $f(x) = -5x^{-2}$

$f'(x) = 10x^{-3}$

$f'(1) = 10$

$f'(2) = \frac{5}{4}$

(d) $f(x) = \frac{3}{4}x^{4/3}$

$f'(x) = x^{1/3}$

$f'(1) = 1$

$f'(2) = \sqrt[3]{2}$

(e) $f(w) = 6w^{1/3}$

$f'(w) = 2w^{-2/3}$

$f'(1) = 2$

$f'(2) = \sqrt[3]{2}$

(f) $f(w) = -3w^{-1/6}$

$f'(w) = \frac{1}{2}w^{-7/6}$

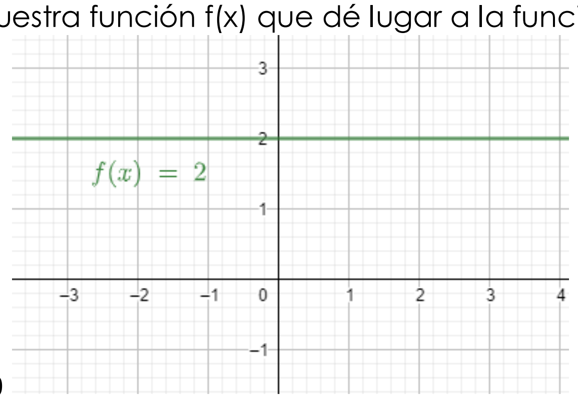
$f'(1) = \frac{1}{2}$

$f'(2) = \frac{1}{4\sqrt[6]{2}}$

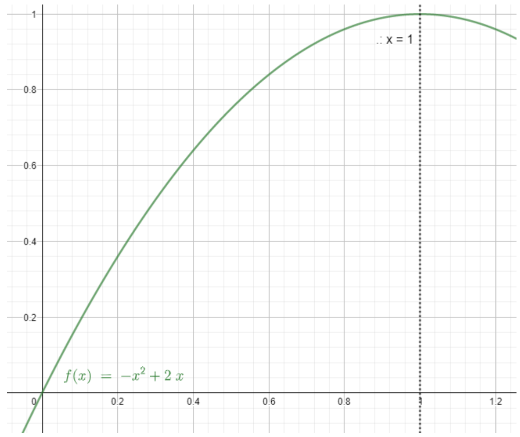
Ejercicio 4

Grafique una función $f(x)$ que dé lugar a la función derivada $f'(x) = 0$. Luego, grafique una función $g(x)$ caracterizada $g'(x_0) = 0$

El siguiente grafico muestra función f(x) que dé lugar a la función derivada $f'(x) = 0$



El siguiente grafico muestra una función $g(x)$ caracterizada $g'(x_0) = 0$



Ejemplos 7.2

Ejemplo 1.

De la función $y = 14x^3$ se puede obtener la derivada $\frac{dy}{dx} = 42x^2$. Pero $14x^3 = 5x^3 + 9x^3$, de modo que "y" se puede considerar como la suma de dos funciones $f(x) = 5x^3$ y $g(x) = 9x^3$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^3 + 9x^3) = \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}(9x^3) = 15x^2 + 27x^2 = 42x^2$$

Que es idéntica al resultado interior.

Esta regla se puede ampliar fácilmente a más funciones.

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x) \pm h(x)] = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$$

Ejemplo 2:

La función citada en el ejemplo 1, $y = 14x^3$, se puede escribir como $y = 2x^3 + 13x^3 - x^3$. La derivada de esta última, de acuerdo con la regla de la suma o de la diferencia, es:

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 39x^2 - 3x^2 = 42x^2$$

Que de nuevo se comprueba con la respuesta previa.

Esta regla es de gran importancia práctica. Ahora que se cuenta con esto, se puede hallar la derivada de cualquier función polinomial, puesto que la última no es sino una suma de funciones potencia.

Ejemplo 3:

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

Ejemplo 4.

$$\frac{d}{dx}(7x^4 + 2x^3 - 3x + 37) = 28x^3 + 6x^2 - 3 + 0 = 28x^3 + 6x^2 - 3$$

Nota: Las constantes no producen efectos en la derivada

Ejemplo 5:

Encuentre la derivada de y= (2x+3) ($3x^2$). Sean $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 3x^2$ Entonces, se deduce que $f'(x) = 2 \; y \; g'(x) = 6x$ y, la derivada deseada es:

$$\frac{d}{dx} = (2x + 3)(6x) + (3x^2)(2) = \; 18x^2 + 18x$$

Este resultado se comprueba al multiplicar f(X) g(X) y después tomar la derivada del producto de los polinomios.

El punto importante que se debe recordar es que la derivada de un producto de dos funciones no es el simple producto de las dos derivadas separadas. En cambio, es una suma ponderada de f '{x) y g'(x), donde las ponderaciones son g(x) y f (x) , respectivamente. Puesto que esto difiere de lo que se esperaría de la generalización intuitiva, se procede a producir una prueba para (7.4). De acuerdo con (6.13), el valor de la derivada de f{ x) g (x) cuando x = N debe ser

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \lim_{x \to N}\left(\frac{f(x)g(x) - f(N)g(N)}{x - N}\right)$$

Pero al sumar y restar f (x) g (N) en el numerador (y, por lo tanto, dejar sin cambio la magnitud original), se puede transformar el cociente de la derecha de (7.5) como sigue:

$$f(x)\frac{g(x) - g(N)}{x - N} + g(N)\frac{f(x) - f(N)}{x - N}$$

Al sustituir esto por el cociente de la derecha de (7.5) y tomar su límite, se obtiene:

$$\lim_{x - N} f(x) \lim_{x - N}\frac{g(x) - g(N)}{x - N} + \lim_{x - N} g(N) \lim_{x - N}\frac{f(x) - f(N)}{x - N}$$

Las cuatro expresiones de límite se evalúan fácilmente. La primera es f (N) y la tercera es g (N) (límite de una constante). Las dos restantes son, de acuerdo con (6.13), respectivamente, g '(N) y f'{ N) . Así se reduce a:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(N)g'(N) + g(N)f'(N)$$

Y, puesto que A representa cualquier valor de x, sigue siendo válida si el símbolo N se reemplaza por x. Esto prueba la regla.

Como una extensión de la regla al caso de tres funciones, se tiene

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Ejemplo 6:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) = \frac{2(x+1)-(1)(2x+3)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

Ejemplo 7.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5x}{x^2+1}\right) = \frac{5(x^2+1)-5x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{5(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Ejercicios 7.2

Ejercicio 1.

Dada la función de costo total $C = Q^3 - 5Q^2 + 12Q + 75$, escriba la función de costo variable (VC). Encuentre la derivada de la función VC e interprete el significado económico de esa derivada.

Como los costos fijos equivalen a 75, la función de costo variable sería la siguiente:

$VC = Q^3 - 5Q^2 + 12Q$

$\frac{d}{dQ}(VC) = 3Q^2 - 10Q + 12$

Este valor representa el costo marginal, es decir, el costo adicional que implica producir una unidad más.

Ejercicio 2.

Dada la función de costos promedio $AC = Q^2 - 4Q + 174$, encuentre la función MC. ¿La función dada es más apropiada como una función de largo o corto plazo? ¿Por qué?

$$AC = Q^2 - 4Q + 174$$

Multiplicamos por Q

$$\boldsymbol{C} \equiv AC.Q = Q^3 - 4Q^2 + 174Q$$

Para obtener MC derivamos c en función de Q

$$\frac{dc}{dq} = 3Q^2 - 8Q + 174$$

$$MC = 3Q^2 - 8Q + 174$$

Ejercicio 3.

Diferencie las siguientes funciones por medio de la regla del producto:

$(a)\ (9x^2 - 2)(3x + 1) \quad (c)\ x^2(4x + 6) \qquad (e)\ (2 - 3x)(1 + x)(x + 2)$

$(b)\ (3x + 10)(6x^2 - 7x) \quad (d)\ (ax - b)(cx^2) \qquad (f)\ (x^2 + 3)x^{-1}$

$a)\ (9x^2 - 2)(3) + (18x)(3x + 1) = 27x^2 - 6 + 54x^2 + 18x = 81x^2 + 18x - 6$

$b)\ (3x + 10)(12x - 7) + (3)(6x^2 - 7x) = 36x^2 - 21x + 120x - 70 + 18x^2 - 21x$

$= 54x^2 + 78x - 70$

$c)\ x^2(4) + 2x(4x + 6) = 4x^2 + 8x^2 + 12x = 12x^2 + 12x$

$d)\ (ax - b)(2cx) + (a)(cx^2) = 2acx^2 - 2bcx + acx^2 = 3acx^2 - 2bcx$

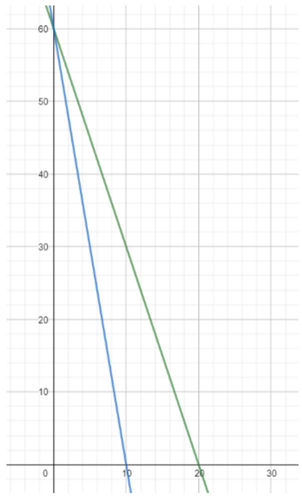
$e)\ (2 - 3x)[(1 + x) + (x + 2)] - 3(x + 1)(x + 2) = (2 - 3x)(2x + 3) - 3(x^2 + 3x + 2)$

$= 4x + 6 - 6x^2 - 9x - 3x^2 - 9x - 6 = -9x^2 - 14x$

$f)\ (x^2 + 3)(-1)(x^{-2}) + 2x(x^{-1}) = -1 - 3x^{-2} + 2 = 1 - 3x^{-2}$

Ejercicio 4.

(a) Dado un $AR = 60 - 3Q$, grafique la curva de ingreso promedio; después, determine la curva de MR por el método usado en la figura 7.2.



LA GRAFICA ESTA BIEN, PERO NO APLIQUE EL METODO DE LA FIGURA 7.2 YA QUE NO LO COMPRENDI

(b) Encuentre matemáticamente la función de ingreso total y la función de ingreso marginal correspondientes de la función dada AR.

$$AR = 60 - 3Q$$

Multiplicamos por Q

$$R \equiv AR * Q = 60Q - 3Q^2$$

Para obtener MC derivamos C en función de Q

$$\frac{dR}{dQ} = 3Q^2 - 8Q + 174$$

Las funciones R y MR calculadas:

$$R = 60Q - 3Q^2$$

$$MR = 60 - 6Q$$

Ejercicio 5.

Proporcione una prueba matemática para el resultado general de que, dada una curva lineal que representa un promedio, la curva marginal correspondiente debe tener la misma ordenada al origen, pero su pendiente será el doble de la pendiente de la curva promedio.

Sea A la curva lineal que representa un promedio:

$A = ax + b$

La curva total será equivalente a A*x

$A * x = ax^2 + bx$

Por tanto, la curva marginal se obtiene al derivar la total respecto a "x"

$\frac{d}{dx}(ax^2 + bx) = 2ax + b$

Se observa claramente que en ambas la coordenada al origen es "b" y las pendientes son "a" y "2ª" respectivamente, cumpliéndose así los criterios orientados.

Ejercicio 6.

Prueba el resultado de (7.6) tratando primero a $g(x)\ h(x)$ como una sola función, $g(x)h(x) \equiv \emptyset(x)$, y después aplicando la regla del producto (7.4)

$$\emptyset(x) = g(x)h(x)$$

Derivamos la función $\emptyset(x)$:

$$\emptyset'(x) = g'(x)'h(x) + g(x)h'(x)$$

Entonces:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)\emptyset(x) + f(x)\emptyset'(x)$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)[g'(x)'h(x) + g(x)h'(x)]$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)'h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Ejercicio 7.

Encuentre las derivadas de:

$(a)\ \frac{x^2+3}{x}$

$(b)\ \frac{x+9}{x}$

$(c)\ \frac{6x}{x+5}$

$(d)\ \frac{ax^2+b}{cx+d}$

$$a)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3}{x}\right)=\frac{2x(x)-(x^2+3)}{x^2}=\frac{x^2-3}{x^2}=1-3x^{-2}$$

$$b)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x+9}{x}\right)=\frac{x-(x+9)}{x^2}=\frac{-9}{x^2}$$

$$c)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{6x}{x+5}\right)=\frac{6(x+5)-6x}{(x+5)^2}=\frac{30}{(x+5)^2}$$

$$d)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{ax^2+b}{cx+d}\right)=\frac{(2ax)(cx+d)-(ax^2+b)(c)}{(cx+d)^2}=\frac{2acx^2+2adx-acx^2-bc}{(cx+d)^2}$$

$$=\frac{acx^2+2adx-bc}{(cx+d)^2}$$

Ejercicio 8.

Dada la función $f(x)=ax+b$, encuentre las derivadas de:

(a) $f(x)=ax+b$

$$\frac{d}{dx}=a$$

(b) $xf(x)=ax^2+bx$

$$\frac{d}{dx}=2ax+b$$

(c) $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{ax+b}$

$$\frac{d}{dx}=\frac{0*(ax+b)-1*a}{(ax+b)^2}=\frac{-a}{(ax+b)^2}$$

(d) $\frac{f(x)}{x}=\frac{ax+b}{x}$

$$\frac{d}{dx}=\frac{ax-(ax+b)}{x^2}=\frac{-b}{x^2}$$

Ejercicio 9.

(a) ¿Es cierto que $f\in C'\Rightarrow f\in C$?

(b) ¿Es verdad que $f\in C\Rightarrow f\in C'$?

$a)\ Es\ verdadera\ ya\ que\ es\ necesario\ que\ f\ sea\ continua\ para\ ser\ diferenciable$

$b)\ Es\ falso\ ya\ que\ no\ necesariamente\ una\ función\ continua\ tendrá\ derivadas\ continuas.$

Ejercicio 10.

Encuentre las funciones marginal y promedio de las funciones totales y grafique los resultados.

Función de costo total:

$(a)\ C = 3Q^2 + 7Q + 12$

$AC = 3Q + 7 + \frac{12}{q}$

$MC = 6Q + 7$

Función de Ingresos total:

$(b) R = 10Q - Q^2$

$AR = 10 - Q$

$MR = 10 - 2Q$

Función de producto total:

$(c) Q = aL + bL^2 - cL^3$

$AQ = a + bL - cL^2$

$$MQ = a + 2bL - 3cL^2$$

Ejemplos 7.3

Ejemplo 1:

Si $z = 3y^2$, donde $y = 2x + 5$, entonces

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 6y(2) = 12y = 12(2x + 5)$$

Ejemplo 2.

$Si\ z = y - 3, donde\ y = x^3, entonces$:

$\frac{dz}{dx} = 1(3x^2) = 3x^2$

Ejemplo 3:

$Z = (x^2 + 3x - 2)^{17}$, encontrar $\frac{dz}{dx}$

Usando la regla de la cadena

$$y = x^2 + 3x - 2$$

Sustituimos

$$Z = (y)^{17}$$

Derivamos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 17y^{16}(2x+3) = 17(x^2 + 3x - 2)^{16}(2x+3)$$

Ejemplo 4:

Dada una función de ingreso total de una empresa R = f(Q), donde la producción Q es una función de insumo de mano de obra L ,o Q = g(L), determine dR /dL . Por la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{dR}{dL} = \frac{dR}{dQ}\frac{dQ}{dL} = f'(Q)g'(L)$$

Traducida en términos económicos, d R / d Q es la función MR y d Q / d L es la función de producto

físico marginal de mano de obra (MPP_L). De manera similar, d R / d L tiene la connotación de la función de producto de ingreso marginal de mano de obra (MRPt). Así, el resultado mostrado constituye la expresión matemática del resultado bien conocido en economía de que

$MRP_L = MR^* MPP_L$.

Ejemplo 5.

La función y=5x+25 tiene la derivada dy/dx=5, que es positiva sin importar el valor de x; por lo tanto, la función es estrictamente creciente. Se deduce que su función inversa existe. En el caso presente, la función inversa se determina con facilidad resolviendo la ecuación y=5x+25 para x. El resultado es la función:

$x = \frac{1}{5}y - 5$

Es interesante notar que la función inversa es también estrictamente creciente, porque dx/dy=1/5 > 0 para todos los valores de "y".

Ejemplo 6:

Dada $y = x^5 + x$, determinante $\frac{dx}{dy}$. En$\frac{dx}{dy}$ primer lugar, puesto que

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 1 > 0$$

Se puede calcular la inversa, la cual está dada por:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{5x^4 + 1}$$

Ejercicios 7.3

Ejercicio 1

Dada y= $y = u^3 + 2u$, donde $u = 5 - x^2$, encuentre $\frac{dy}{dx}$ por la regla de la cadena.

$y = u^3 + 2u$

$y = (5 - x^2)^3 + 2(5 - x^2)$

$\frac{dy}{dx}$ = $3\ (5 - x^2)^2 * (-2x) + 2(-2x)$

$\frac{dy}{dx}$ = -6x $(25 - 10x^2 + x^4)^1 - 4x$

$\frac{dy}{dx} = -150x + 60x^3 - 6x^5 - 4x$

$\frac{dy}{dx} = -6x^5 + 60x^3 - 154x$

Ejercicio 2

Dada $w = ay^2$ y $y = bx^2 + cx$, obtenga $\frac{dw}{dx}$ por la regla de la cadena

$$w = a * (bx^2 + cx)^2$$

$$\frac{dw}{dx} = (bx^2 + cx)^2 + 2\ (bx^2 + cx) * (2bx + c) * (a)$$

$$\frac{dw}{dx} = (bx^2 + cx)^2 + (4abx + c) * (bx^2 + cx)$$

$$\frac{dw}{dx} = (bx^2 + cx) * [(bx^2 + cx) + (4abx + c)]$$

Ejercicio 3

Use la regla de la cadena para hallar $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones:

a) $y = (3x^2 - 13)^3$

$y' = 3(3x^2 - 13)^2 * 6x$

$y' = 18x * (3x^2 - 13)$

b) $y = (7x^3 - 5)^9$

$y' = 9\,(7x^3 - 5)^8 * 21x^2$

$y' = (7x^3 - 5)^8 * 189x^2$

c) $y = (ax + b)^5$

$y' = 5\,(ax + b)^4 * a$

$$y' = 5a\,(ax + b)^4$$

Ejercicio 4

Dada $y = (16x + 3)^{-2}$, use la regla de la cadena para hallar $\frac{dy}{dx}$. Después exprese la función como $y = \frac{1}{(16x+3)^2}$ y encuentre $\frac{dy}{dx}$. Por la regla del cociente ¿Son idénticas las respuestas?

Por la Regla de la cadena:

$y = (16x + 3)^{-2}$

$y' = -2(16x + 3)^{-3} * 16$

$y' = -32(16x + 3)^{-3}$

$$y' = \frac{-32}{(16x + 3)^3}$$

Por la regla del cociente:

$$y = \frac{1}{(16x + 3)^2}$$

$$y' = \frac{-2 * (16x+3) * 16}{(16x+3)^4}$$

$$y' = \frac{-32}{(16x+3)^3}$$

Por lo tanto, se concluye que por ambos métodos la respuesta es la misma.

Ejercicio 5

Dada $y = 7x + 21$, determine su función inversa. Luego, halle $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dx}{dy}$ y compruebe la regla de la derivada de la función inversa. Así mismo, verifique que las gráficas de las dos funciones guardan una relación de imagen especular entre sí.

$y = 7x + 21$

$7x = y - 21$

$x = {}^{y}/_{7} - 3$

$\frac{dy}{dx} = 7x + 21$

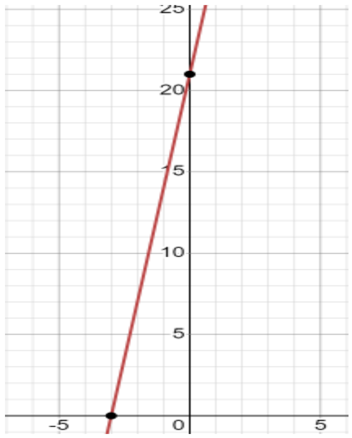
$\frac{dy}{dx} = 7$

$\frac{dx}{dy} = {}^{y}/_{7} - 3$

$\frac{dx}{dy} = {}^{1}/_{7}$

- La regla de la derivada de la función inversa es igual a que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = {}^{1}/_{7}$; Se cumple.

Dada la función $y = 7x + 21$, se obtiene el gráfico:



Se concluye que no se da una relación especular entre sí.

Ejercicio 6

¿Las siguientes funciones son estrictamente monótonas?

a) $y = -x^6 + 5 \qquad (x > 0)$

$y' = -6x^5$ Si la función es monótona decreciente

b) $y = 4x^5 + x^3 + 3x$

$y = 20x^4 + 3x^2 + 3$ Si la función es estrictamente monótona creciente.

- **Para cada función estrictamente monótona, determine $\frac{dx}{dy}$, mediante la regla de la función inversa**

  - ✓ Para a)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/_{dx}} = \frac{-1}{6x^5}$$

  - ✓ Para b)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/_{dx}} = \frac{1}{20x^4 + 3x^2 + 3}$$