

CAPITULO 3: DIFERENCIACIÓN

3.1 COCIENTE DE LAS DIFERENCIAS

En muchos casos, es de interés la tasa de cambio en la variable dependiente de una función cuando hay un cambio en la variable independiente. Por ejemplo, en el caso de la función $y = f(x) = x^2$, ¿cuál es el cambio en y cuando el valor de x cambia?

Cuando x cambia de una valor inicial x_0 a un nuevo valor x_1 , se escribe el cambio en x como $\Delta x = x_1 - x_0$.

El cambio en $y = f(x)$ va desde $y = f(x_0)$ hasta $y = f(x_0 + \Delta x)$. El cambio en y por unidad de cambio en x puede entonces representarse por el cociente de las diferencias:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ejemplo 3-1. Dado, $y = f(x) = 3x^2 - 4$, obtener el cociente de la diferencias (o lo que es igual, la tasa media de cambio) si $x_0 = 3$ y $\Delta x = 4$.

Solución.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x_0 + \Delta x)^2 - 4 - (3x_0^2 - 4)}{\Delta x} = \frac{6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

Reemplazando términos se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6(3)(4) + 3(4)^2}{4} = 30$$

Lo que significa que cuando x cambia de 3 a 7, el cambio en y es 30 unidades. Otra forma de resolver este problema es plantearlo directamente. Si $\Delta x = 4$ y $x_0 = 3$, entonces $x_1 = 7$. Sabiendo que $\Delta y = y_1 - y_0$, entonces:

$$y_1 = 3(7)^2 - 4 = 143$$

$$y_0 = 3(3)^2 - 4 = 23$$

para finalmente,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{143 - 23}{4} = 30$$

El resultado indica lo siguiente: en promedio, cuando x cambia de 3 a 7, el cambio en y es de 30 unidades por unidad de cambio en x .

Ejemplo 3-2. Del ejercicio anterior, obtenga el cociente de las diferencia cuando $\Delta x = 0.005$

Solución. Análogamente al ejercicio anterior, y planteando de forma directa:

$$y_1 = 3(3.005)^2 - 4 = 23.090075$$

$$y_0 = 3(3)^2 - 4 = 23 \quad \text{de donde,}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{23.090075 - 23}{0.005} = 18.015$$

El resultado indica lo siguiente: “en promedio, cuando x cambia de 3 a 3.005, el cambio en y es de 18.015 unidades por unidad de cambio en x ”.

3.2 LA DERIVADA

A menudo interesa la tasa de cambio en y cuando la variación de x (es decir, Δx) es pequeña. Cuando Δx tiende a cero (pero nunca lo toma), $\Delta y / \Delta x$ se aproximará a una función derivada que devuelve la magnitud de la tangente de la función $y = f(x)$ para cualquier valor de x_0 .

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ejemplo 3-3. Obtener la aproximación a la tasa de cambio de la función del ejemplo anterior, $y = f(x) = 3x^2 - 4$.

Solución. La derivada correspondiente será: $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 6x$.

Ahora evaluando el punto dado, es decir, $f'(x_0)$ se tiene que $f'(x) = 6x$. Entonces, $f'(x_0) = 6x_0 = 6(3) = 18$.

Para la misma función, usando el cociente de las diferencias, $(\Delta y / \Delta x)$, se obtiene 30 mientras que usando la derivada, (dy / dx) , el resultado es 18. ¿Por qué la diferencia tan amplia?. La razón de ello es la variación de x , (Δx) . Cuando ésta variación es pequeña, como $\Delta x = 0.005$ (Ejemplo 3-2) el resultado es similar al de éste ejemplo (18.015 vs 18). Ello es coherente con la teoría que afirma que la derivada es una buena aproximación al cociente de la diferencia solo cuando la variación en la variable endógena es muy pequeña.

Note que cuando $\Delta x = 4$ la diferencia entre el coeficiente de las diferencias y la derivada respectiva es $30 - 18 = 12$. Sin embargo, cuando Δx es muy pequeño (en este caso, 0.005) la diferencia es apenas $18.015 - 18 = 0.015$.

Así, mientras más pequeña sea la variación en x (cuando $\Delta x \rightarrow 0$), entonces la derivada respectiva ofrecerá una buena aproximación respecto al cociente de las diferencias.

3.2.1 Reglas de Diferenciación

a) Para el caso de funciones de la misma variable

Regla de la suma

La derivada de una suma (diferencia) de dos funciones es la suma (diferencia) de las derivadas de las dos funciones:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

Ejemplo 3-4. Obtener la derivada de $5x^3 + 9x^3$.

Solución. Asignando a $f(x) = 5x^3$ y $g(x) = 9x^3$, ($y = f(x) + g(x)$), por la regla de la suma, $\frac{d}{dx}(5x^3 + 9x^3) = \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}(9x^3) = 15x^2 + 27x^2 = 42x^2$

Regla del producto

La derivada del producto de dos funciones (diferenciabiles) es igual a la primera función derivada por la derivada de la segunda función más la segunda función por la derivada de la primera función:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

Ejemplo 3-5. Hallar la derivada de $y = (2x + 3)(3x^2)$.

Solución. Haciendo $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 3x^2$. Luego, $\frac{d}{dx}g(x) = 6x$, y $\frac{d}{dx}f(x) = 2$. Entonces, $\frac{d}{dx}[(2x + 3)(3x^2)] = (2x + 3)(6x) + (3x^2)(2) = 18x^2 + 18x$

Regla del cociente

La derivada del cociente de dos funciones $f(x)/g(x)$ será,

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo 3-6. Obtener la derivada de $(2x - 3)/(x + 1)$.

Solución. Usando la regla del cociente,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2x - 3}{x + 1} \right) = \frac{2(x + 1) - (2x - 3)(1)}{(x + 1)^2} = \frac{5}{(x + 1)^2}$$

b) Para el caso de funciones de variables diferentes**Regla del producto**

Dado $z = g(x, y) \cdot h(x, y)$

La derivada respectiva será:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(x, y) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, y) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

Ejemplo 3-7. Dado $z = (3x + 5)(2x + 6y)$, por la regla del producto

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = (3x + 5)(2) + (2x + 6y)(3) = 12x + 10 + 18y$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = (3x + 5)(6) + (2x + 6y)(0) = 18x + 30$$

Regla del cociente

Dado $z = g(x, y) / h(x, y)$ y $h(x, y) \neq 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h(x, y) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - g(x, y) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}}{[h(x, y)]^2}$$

Ejemplo 3-8. Dado $z = (6x + 7y) / (5x + 3y)$ por la regla del cociente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{(5x + 3y)(6) - (6x + 7y)(5)}{(5x + 3y)^2} \\ &= \frac{30x + 18y - 30x - 35y}{(5x + 3y)^2} = \frac{-17y}{(5x + 3y)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{(5x + 3y)(7) - (6x + 7y)(3)}{(5x + 3y)^2} \\ &= \frac{35x + 21y - 18x - 21y}{(5x + 3y)^2} = \frac{17x}{(5x + 3y)^2} \end{aligned}$$

Regla de la potencia

Dado $z = [g(x, y)]^n$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = n[g(x, y)]^{n-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = n[g(x, y)]^{n-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

Ejemplo 3-9. Dado $z = (x^3 + 7y^2)^4$, por la regla de la potencia

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4(x^3 + 7y^2)^3 \cdot (3x^2) = 12x^2(x^3 + 7y^2)^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4(x^3 + 7y^2)^3 \cdot (14y) = 56y(x^3 + 7y^2)^3$$

Regla de la función inversa

Esta regla solo se aplica para funciones monótonas (cuando la derivada evaluada en cualquier punto mantiene siempre el mismo signo algebraico). La regla de diferenciación es,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

Ejemplo 3-10. Si $y = x^5 + x$, obtenga dx/dy .

Solución. Sea $dy/dx = 5x^4 + 1$, aplicando la formula anterior,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{5x^4 + 1}$$

Regla de la cadena

Sea la función $z = f(y)$ donde “y” a su vez, esta en función de otra variable “x”, es decir, $y = g(x)$, entonces la derivada de “z” con respecto a “x” es igual a la derivada de “z” con respecto a “y” multiplicada por la derivada de “y” respecto de “x”.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

Esta regla es conocida como la “regla de la cadena”. Para el caso de 3 funciones, $z = f(y)$, $y = g(x)$, $y = x = h(w)$ será,

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dw}$$

Para el caso de 4 o más funciones, el lector puede extender esta formula fácilmente.

Ejemplo 3-11. Si $z = y - 3$, donde $y = x^3$, obtenga dz/dx .

Solución. Haciendo,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1(3x^2) = 3x^2$$

3.3 DIFERENCIAL

Hasta ahora, la derivada dy/dx ha sido representada como un símbolo que denota el límite de $\Delta y/\Delta x$ cuando Δx se aproxima a cero. Sin embargo, la derivada dy/dx también puede ser tratada como un ratio de diferenciales, en el cual dy es el diferencial de “y” y dx es el diferencial de “x”. Dada una función de una sola variable independiente $y = f(x)$, el diferencial de “y”, dy , mide el cambio en “y” resultante de un pequeño cambio en “x”, es decir, dx .

Dado $y = 2x^2 + 5x + 4$, el diferencial de “y” es obtenido tomando la primera derivada de “y” con respecto a “x”, lo cual mide la tasa de cambio a la cual “y” cambia ante un pequeño cambio en “x”.

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 5 \quad \text{una derivada o tasa de cambio}$$

y entonces multiplicando esa tasa de cambio por un pequeño cambio en “x” por un cambio específico en “x” (en otras palabras, dx) para obtener el cambio resultante en “y” (es decir, dy).

$$dy = (4x + 5)dx \quad \text{un diferencial o cambio simple}$$

dy : cambio en y

$(4x + 5)$: tasa a la cual “y” cambia para un pequeño cambio en “x”.

dx : cambio en x

Ejemplo 3-12. Si $y = 4x^3 + 5x^2 - 7$, obtenga el diferencial.

Solución. Si $dy/dx = 12x^2 + 10x$ y el diferencial será:

$$dy = (12x^2 + 10x)dx$$

Ejemplo 3-13. Si $y = (2x - 5)^2$, obtenga el diferencial.

Solución. Si $dy/dx = 2(2x - 5)(2) = 8x - 20$, y el diferencial será,

$$dy = (8x - 20)dx$$

3.3 1 Diferenciales y cambios incrementales

Usualmente en economía se desea medir en efecto sobre la variable dependiente (costos, ingreso, beneficio, etc) ante un cambio en la variable independiente (trabajo, capital, etc.). Entonces, si $z = f(x, y)$ el efecto sobre z de un pequeño cambio en “ x ” esta dado por el diferencial parcial

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx$$

El efecto del cambio puede ser aproximado multiplicando la derivada parcial por el cambio propuesto. Entonces,

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x$$

Si la función original $z = f(x, y)$ es lineal¹,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

y el efecto del cambio será medido exactamente:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x$$

Ejemplo 3-14. Si $y = f(x) = x^3 + 6$, obtener $\Delta f(x)$ y $df(x)$ cuando $x = 2$, y $\Delta x = 0.5 = dx$.

Solución. El diferencial de y será:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3x^2 \\ dy &= (3x^2)dx \\ dy &= (3(2)^2)0.5 \\ dy &= 6\end{aligned}$$

La variación de x será:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_2 - y_1 \\ y_2 &= (2.5)^3 + 6 = 21.625 \\ y_1 &= (2)^3 + 6 = 14 \\ \Delta y &= 21.625 - 14 = 7.625\end{aligned}$$

¹ En este caso, se dice “lineal” no significa que los términos de la función deban ser de grado 1, o elevados a la potencia 1. Se dice “lineal” cuando los términos son sumados o restados independientemente, cada uno de los cuales puede ser de cualquier grado.

Ejemplo 2. Sea $y = 3x^2 + 7x - 5$, obtener dy si $x = 5$ y $\Delta x = 0.01$

Solución. El diferencial será:

$$\begin{aligned} dy &= (6x + 7)dx \\ dy &= (6(5) + 7)0.01 \\ dy &= 0.37 \end{aligned}$$

La variación será,

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1 \\ y_2 &= 3(5.01)^2 + 7(5.01) - 5; y_2 = 105.3703 \\ y_1 &= 3(5)^2 + 7(5) - 5; y_1 = 105 \\ \Delta y &= 105.3703 - 105 = 0.3703 \end{aligned}$$

El error en usar la aproximación (derivada) es: $0.3703 - 0.37 = 0.0003$

3.3.2 Diferencial Total

Para una función de dos o más variables independientes, el *diferencial total* mide el cambio en la variable dependiente ante un pequeño cambio en cada una de las variables independientes. Si $z = f(x, y)$, el diferencial total dz es expresado como,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

o lo que es igual

$$dz = z_x dx + z_y dy$$

donde z_x y z_y son las derivadas parciales de z con respecto a “ x ” y “ y ” respectivamente, y dx y dy son los pequeños cambios en “ x ” y “ y ”. El diferencial total puede entonces obtenerse tomando las derivadas parciales de la función con respecto a cada variable independiente y substituyendo esos valores en la formula anterior.

Ejemplo 3-15. Obtener el diferencial total de $z = x^4 + 8xy + 3y^3$.

Solución. Sean $z_x = 4x^3 + 8y$ y $z_y = 8x + 9y^2$, las cuales son substituidas en la expresión original,

$$dz = (4x^3 + 8y)dx + (8x + 9y^2)dy$$

Ejemplo 3-16. Obtener el diferencial total de $z = (x - y)/(x + 1)$

Solución.

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+1) - (x-y)(1)}{(x+1)^2} = \frac{y+1}{(x+1)^2} \\ z_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x+1)(-1) - (x-y)(0)}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x+1} \end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones convenientemente,

$$dz = \frac{y+1}{(x+1)^2} dx - \left(\frac{1}{x+1} \right) dy$$

3.3.3 Diferencial Parcial

El diferencial parcial mide el cambio en la variable dependiente de una función multivariada resultante de un pequeño cambio en una de las variables independientes y asume que el resto de variables independientes permanece constante.

Ejemplo 3-17. Sea $z = f(x, y) = 5x^3 - 12xy - 6y^5$ obtener el diferencial total y el diferencial parcial para un pequeño cambio en x .

Solución. El diferencial total será:

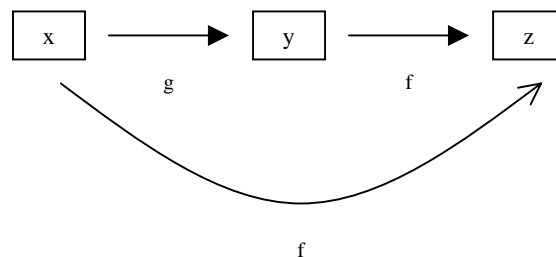
$$\begin{aligned} dz &= z_x dx + z_y dy \\ z_x &= 15x^2 - 12y; \quad z_y = -12x - 30y^4 \\ dz &= (15x^2 - 12y)dx - (12x + 30y^4)dy \end{aligned}$$

Para obtener el diferencial parcial, el problema se refiere aun cambio en x , entonces el pequeño cambio en y , dy , debe permanecer constante: en otras palabras, $dy = 0$. Reemplazando esto en el diferencial total se obtendrá el diferencial parcial:

$$dz = (15x^2 - 12y)dx$$

3.4 DERIVADA TOTAL

Cuando $z = f(x, y)$ y $y = g(x)$, que es, cuando “ y ” no es independiente, un cambio en “ x ” afectará “ z ” directamente mediante la función “ f ” e indirectamente a través de la función “ g ”. Así, para medir el efecto del cambio en “ x ” sobre “ z ” cuando “ y ” no es independiente, la derivada total debe ser encontrada.



En otras palabras, la derivada total mide el efecto directo de “ x ” sobre “ z ”, $\partial z / \partial x$, más el efecto indirecto de “ x ” sobre “ z ” mediante “ y ”, $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$. En este caso, la derivada total será:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx},$$

o lo que es igual,

$$\frac{dz}{dx} = z_x + z_y \frac{dy}{dx}$$

Una forma alternativa de plantear la derivada total es tomar el diferencial total de “z”.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

y multiplicar por $1/dx$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

dado que $dx/dx = 1$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

Ejemplo 3-18. Sea $z = f(x, y) = 6x^3 + 7y$, donde $y = g(x) = 4x^2 + 3x + 8$, la derivada total dz/dx con respecto a “x” será,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

donde $\partial z/\partial x = 18x^2$, $\partial z/\partial y = 7$, y $dy/dx = 8x + 3$. Substituyendo estos términos en la ecuación superior, se tiene que:

$$\frac{dz}{dx} = 18x^2 + 7(8x + 3) = 18x^2 + 56x + 21$$

Note que la solución debería estar únicamente en función de la variable en análisis, en este caso, x.

Ejemplo 3-19. Dado $z = f(x, y) = 8x^2 + 3y^2$ donde $x = 4t$ y $y = 5t$, la derivada total de z con respecto a t será entonces,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

donde, $\partial z/\partial x = 16x$, $\partial z/\partial y = 6y$, $dx/dt = 4$, y $dy/dt = 5$. Substituyendo abajo,

$$\frac{dz}{dt} = 16x(4) + 6y(5) = 64x + 30y$$

sustituyendo $x = 4t$ y $y = 5t$ (a fin de que la expresión obtenida quede en función de t) se obtiene,

$$\frac{dz}{dt} = 64(4t) + 30(5t) = 406t$$

3.5 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si $z = f(x, y, t)$, donde $x = a + bt$, e $y = c + dt$, hallar dz/dt

Solución. Dado que hay dependencia entre las variables de la función z , entonces se refieren a una diferencial total $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{dt}{dt}$, reemplazando valores:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x} b + \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial y} d + \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t}. \text{ Es la expresión solicitada.}$$

Note que en esta caso, no se tiene los valores de las derivadas parciales, puesto que no hay el dato de las funciones relevantes. Por ello, solo pueden ser enunciadas.

2. Dada la función de consumo $C = a + bY$ ($a > 0; 0 < b < 1$)

- a. Hallar su función marginal y su función promedio

Solución. La función marginal será: $\frac{dC}{dY} = b$ mientras que la función promedio,

$$\frac{C}{Y} = \frac{a}{Y} + b.$$

- b. Calcular la elasticidad de la renta respecto del consumo, ε_{CY} y determinar su signo, suponiendo que $Y > 0$.

Solución.

$$\varepsilon_{CY} = \frac{dC}{dY} \frac{Y}{C} = b \frac{Y}{C} = \frac{bY}{a + bY}.$$

El signo será positivo: a medida que el ingreso aumenta, el consumo también aumentará. Si el ingreso cae, también caerá el consumo.

3. El costo total de producir x calculadoras por día es: $C(x) = 10 + \sqrt{2x + 16}$, ($0 \leq x \leq 50$). Encuentre: a) el costo marginal de producir x unidades, b) el costo medio, y c) $C'(24)$ e interprete el resultado.

Solución

- a) el costo marginal será:

$$C'(x) = \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}(2x + 16)^{-1/2} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x + 16}}$$

b) el costo medio será igual a:

$$\frac{C(x)}{x} = \frac{10}{x} + \frac{\sqrt{2x+16}}{x}$$

c) el costo marginal evaluado

$$C'(24) = \frac{1}{\sqrt{2(24)+16}} = \frac{1}{8}$$

A un nivel de producción de 24 calculadoras por día, el costo total de producción se incrementa a una tasa de 1/8 por calculadora.

3.6 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dada la función de importación $M = f(Y)$, donde M son las importaciones e Y la renta nacional, exprese la elasticidad de la renta respecto de las importaciones, ε_{MY} en términos de la propensión a importar.
2. Una compañía fabrica timones para autos. El costo total semanal de producir x timones esta dado por: $C(x) = 50000 + 600x - 0.75x^2$. Encuentre: a) la función de costo marginal, b) $C'(200)$ y discuta el resultado, y c) el costo de producir la 201^{ava} unidad.
3. El departamento de investigación de una compañía recomienda un nuevo producto, para el cual han presentado la siguiente información:

ecuación de demanda (x = demanda): $x = 10000 - 1000p$

función de costo (total): $7000 + 2x$

En base a ello, encuentre:

- a) Dominio de la función definida por el precio
- b) Costo marginal de producción
- c) Función de ingreso como una función de x y obtenga su dominio
- d) Ingreso marginal en $x = 2000$, 5000 y 7000 . Interprete.
- e) Función de beneficio y calcule su dominio
- f) Función de beneficio marginal en $x = 1000$, 4000 y 6000 . Interprete.