

CAPITULO 2: MATRICES Y DETERMINANTES

El álgebra lineal puede ser aplicado solo a sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, puesto que muchas relaciones económicas pueden ser aproximadas mediante ecuaciones lineales y otras pueden ser convertidas a relaciones lineales, esta limitación puede ser en parte evitada.

Cuando los sistemas de sistema lineales son extensos, mayormente se utiliza matrices por su facilidad de manejo. Las matrices son ordenamientos de datos y se usan no solo en la resolución de sistemas de ecuaciones (lineales), sino además en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales y de derivadas parciales. Además las matrices también aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc..

2.1 MATRIZ: DEFINICIÓN

Se llama **matriz** de orden **m**×**n** a todo conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en **m** líneas horizontales (filas) y **n** verticales (columnas) de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

←
←
←
←
←
} filas de la matriz A

↑ ↑ ↑ ↑
└──────────┘
columnas de la matriz A

Abreviadamente suele expresarse en la forma $A = [a_{ij}]$, con $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila (i) y el segundo la columna (j). Por ejemplo el elemento a_{25} será el elemento de la fila 2 y columna 5.

Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

Sean las matrices A y B, donde $A_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} 9 & a \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} 9 & a \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, entonces $A=B$

Análogamente, $C_{(2 \times 3)} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & z & 2 \end{bmatrix}$, y $D_{(2 \times 3)} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & z & 2 \end{bmatrix}$. Entonces, $C = D$ (Note que C y D no necesitan tener una forma cuadrada o simétrica).

2.2 ALGUNOS TIPOS DE MATRICES

Vamos a describir algunos tipos de matrices que aparecen con frecuencia debido a su utilidad, y de los que es conveniente recordar su nombre.

2.2.1 Según la forma

Matriz columna: Es una matriz que solo tiene una columna, es decir, $n=1$ y por tanto es de orden $m \times 1$.

Por ejemplo: $A_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -a \end{bmatrix}$

Matriz fila: Es una matriz que solo tiene una fila, es decir $m=1$ y por tanto es de orden $1 \times n$. Es decir, $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$. Por ejemplo: $A_{(1 \times 3)} = [1 \ 2 \ -3]$

Matriz cuadrada: Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir $m = n$. En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden n , y no $n \times n$ (aunque es lo mismo). Los elementos a_{ij} con $i = j$, o sea a_{ii} forman la llamada diagonal principal de la matriz cuadrada, y los elementos a_{ij} con $i + j = n + 1$ la diagonal secundaria.

En la matriz $A_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$, la diagonal principal está formada por $[1 \ 1 \ 9]$ y la diagonal secundaria por $[0 \ 1 \ 3]$.

Matriz traspuesta: Dada una matriz A , se llama traspuesta de A , y se representa por A^t , a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas. La primera fila de A es la primera fila de A^t , la segunda fila de A es la segunda columna de A^t , etc. De la definición se deduce que si A es de orden $m \times n$, entonces A^t es de orden $n \times m$.

Ejemplo 2-1: $A_{(2 \times 3)} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, entonces $A^t_{(3 \times 2)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$.

Matriz simétrica: Una matriz cuadrada A es simétrica si $A = A^t$, es decir, si $a_{ij} = a_{ji} \ i, j$.

Ejemplo 2-2: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & \sqrt{7} \end{bmatrix}$ (Comprobar que $A = A^t$)

Matriz antisimétrica: Una matriz cuadrada se dice que es antisimétrica si $A = -A^t$, es decir, $a_{ij} = -a_{ji}$.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (comprobar que $A = -A^t$)

2.2.2 Según los elementos

Matriz nula es aquella que todos sus elementos son 0 y se representa por **0**.

Ejemplo 2-3: $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar: Es una matriz diagonal (y en consecuencia, una matriz cuadrada) con todos los elementos de la diagonal iguales. Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3I$$

Matriz unidad o identidad: Es una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal iguales a 1. Se denota por el símbolo I o I_n .

Ejemplo 2-4: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Triangular: Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que están a un mismo lado de la diagonal principal. Las matrices triangulares pueden ser de dos tipos:

Triangular Superior: Si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, $a_{ij}=0 \quad i < j$.

Triangular Inferior: Si los elementos que están por encima de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, $a_{ij}=0 \quad j < i$. Ejemplos:

$$A_{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 1 & 6 & y & 1 \end{bmatrix} \text{ (triangular inferior), } B_{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & z \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (triangular superior)}$$

2.3 OPERACIONES CON MATRICES

2.3.1 Trasposición

Dada una matriz de orden $m \times n$, $A = [a_{ij}]$, se llama matriz traspuesta de A , y se representa por A^t , a la matriz que se obtiene cambiando las filas por las columnas (o viceversa) en la matriz A . Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la trasposición de matrices

1. Dada una matriz A , siempre existe su traspuesta y además es única.
2. $(A^t)^t = A$.

2.3.2 Suma y diferencia

La suma de dos matrices $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ de la misma dimensión, es otra matriz $S = [s_{ij}]$ de la misma dimensión que los sumandos y con término genérico $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Por tanto, para poder sumar dos matrices estas han de tener la misma dimensión. La suma de las matrices A y B se denota por $A+B$. Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} -2 & f \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 4 & d \\ -3 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Entonces } A+B = \begin{bmatrix} (-2+4) & (f+d) \\ (3-3) & (4+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & f+d \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (propiedad asociativa)
2. $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa)
3. $A + 0 = A$ (0 es la matriz nula)
4. La matriz $-A$, que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de A , recibe el nombre de matriz opuesta de A , ya que $A + (-A) = 0$.

La diferencia de matrices A y B se representa por $A-B$, y se define como: $A-B$

2.3.3 Producto de una matriz por un escalar (número)

El producto de una matriz $A = [a_{ij}]$ por un número real k es otra matriz $B = [b_{ij}]$ de la misma dimensión que A y tal que cada elemento b_{ij} de B se obtiene multiplicando a_{ij} por k , es decir, $b_{ij} = k a_{ij}$. Ejemplo, sea $k = 2$, y $A = \begin{bmatrix} -2 & g & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\text{Entonces } kA = 2 \begin{bmatrix} -2 & g & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-2) & 2(g) & 2(-3) \\ 2(4) & 2(5) & 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2g & -6 \\ 8 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

El producto de la matriz A por el número real k se designa por $k \cdot A$. Al número real k se le llama también escalar, y a este producto, producto de escalares por matrices.

Propiedades del producto de una matriz por un escalar

1. $k(A + B) = kA + kB$ (propiedad distributiva 1ª)
2. $(k + h)A = kA + hA$ (propiedad distributiva 2ª)
3. $k[hA] = (kh)A$ (propiedad asociativa mixta)
4. $1 \cdot A = A$ (elemento unidad)

Propiedades simplificativas

1. $A + C = B + C \Rightarrow A = B$.
2. $kA = kB \Rightarrow A = B$ si k es distinto de 0.
3. $kA = hA \Rightarrow h = k$ si A es distinto de 0.

2.3.4 Producto de matrices

Dadas dos matrices A y B , su producto es otra matriz P cuyos elementos se obtienen multiplicando las filas de A por las columnas de B . De manera más formal, los elementos de P son de la forma:

$$p_{ij} = \sum a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Es evidente que el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B . Es más, si A tiene dimensión $m \times n$ y B dimensión $n \times p$, la matriz P será de orden: $m \times p$. Es decir:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

En otras palabras, el elemento que se encuentra en la fila i y la columna j de la matriz $C=AB$ se obtiene multiplicando los elementos de la fila i de A por la columna j de B y sumando los resultados.

Ejemplo 2-5. Obtener $C=AB$, siendo $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Solución: Primero, se comprueba que se pueda realizar el producto AB . Puesto que el número de columnas de A es igual al número de filas de B , entonces la operación es factible. La matriz resultante tendrá la dimensión 2×3 , es decir, 2 filas y 3 columnas:

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

Luego, el elemento de la fila 1 y columna 1 de AB (es decir, C) proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A por la columna 1 de B sumar:

$$(-3) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 0 + 2 + 2 + 12 = 16$$

El elemento de la fila 1 y la columna 2 de AB (o lo cual es igual, C) será igual a la multiplicación elemento a elemento la fila 1 de A y la columna 2 de B :

$$(-3) \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 12 - 4 + 0 + 8 = 16$$

El elemento de la fila 1 y la columna 3 de C proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A y la columna 3 de B :

$$(-3) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = -3 + 2 + 2 + 4 = 5$$

Así, sucesivamente, se obtiene:

$$C = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 5 \\ 5 & -22 & 11 \end{bmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. El producto de matrices en general no es conmutativo (AB no necesariamente es igual a BA).
3. Si A es una matriz cuadrada de orden n se tiene $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.
4. Dada una matriz cuadrada A de orden n , no siempre existe otra matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Si existe dicha matriz B , se dice que es la matriz inversa de A y se representa por A^{-1} .
5. El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices, es decir: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Consecuencias de las propiedades

1. Si $A \cdot B = 0$ no implica que $A=0$ ó $B=0$.
2. Si $A \cdot B = A \cdot C$ no implica que $B = C$.
3. En general $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$, ya que $A \cdot B \neq B \cdot A$.
4. En general $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$, ya que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Ejemplo 2-6. Una compañía tiene 4 fabricas, cada una emplea administradores (A), supervisores (S) y trabajadores calificados (T) en la forma siguiente:

Tipo de empleado	Fabrica 1	Fabrica 2	Fabrica 3	Fabrica 4
Administradores (A)	1	2	1	1
Supervisores (S)	4	6	3	4
Trabajadores (T)	80	96	67	75

si los administradores ganan S/. 350 (P_A) a la semana, los supervisores S/. 275 (P_S) y los trabajadores S/. 200 (P_T). ¿cuál es la nómina de cada fabrica?.

Solución. Lo que se pide es el monto pagado por cada fabrica el cual es igual al numero de cada empleado por su respectivo ingreso salarial. En general, será: $I_i = P_A A_i + P_S S_i + P_T T_i$, donde I_i es el monto de la fabrica i. Por ejemplo, el monto de la fábrica 1 será: $I_1 = P_A A_1 + P_S S_1 + P_T T_1$: $350 \cdot 1 + 4 \cdot 275 + 80 \cdot 200 = 17450$

Con este sencillo calculo puede obtenerse fácilmente los 3 montos restantes. Sin embargo, si hubiera más tipos de empleados o un mayor número de fabricas el calculo se complicaría. Existe otra forma para calcular directamente los montos de todas las fabricas. El cuadro anterior equivale a cantidades de especialistas de cada fabrica. Entonces, si estas cantidades son multiplicas por su salario respectivo debería obtenerse el monto de cada fabrica. Llevando esto a matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ 80 & 96 & 67 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 350 \\ 275 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Si se multiplica ambas matrices debería obtenerse lo solicitado. Sin embargo, esta multiplicación matricial no esta definida. Note que la primera matriz es de orden 3×4 mientras la segunda es 3×1 (las cifras de negro debería ser iguales). La solución es transponer la primera matriz a fin de obtener una matriz de orden 4×3 y así, poderla multiplicar por la segunda (3×1), con lo cual es posible multiplicar ambas matrices y la matriz resultante sería del orden 4×1 , la cual brindaría los 4 montos solicitados.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 80 \\ 2 & 6 & 96 \\ 1 & 3 & 67 \\ 1 & 4 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 350 \\ 275 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17450 \\ 21550 \\ 14575 \\ 16450 \end{bmatrix}$$

Así, los montos de la fabrica 1,2,3 y 4 son: S/. 17450, S/. 21550, S/. 14575, y S/. 16450, respectivamente.

2.3.5 Inversibilidad

Una matriz cuadrada que posee inversa se dice que es inversible o regular; en caso contrario recibe el nombre de singular.

Propiedades de la inversión de matrices

1. La matriz inversa, si existe, es única
2. $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = I$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^{-1})^{-1} = A$
5. $(kA)^{-1} = (1/k) \cdot A^{-1}$
6. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Observación

Podemos encontrar matrices que cumplen $A \cdot B = I$, pero que $B \cdot A \neq I$, en tal caso, podemos decir que A es la inversa de B "por la izquierda" o que B es la inversa de A "por la derecha". Hay varios **métodos para calcular la matriz inversa** de una matriz dada:

- Directamente:

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ buscamos una matriz que cumpla $A \cdot A^{-1} = I$, es decir

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para ello planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2a - c = 1 \\ 2b - d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -c \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2c - c = 1 \\ d = 2b \\ a = -c \\ b + 2b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{1}{3} \\ c = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \\ d = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La matriz que se ha calculado realmente sería la inversa por la "derecha", pero es fácil comprobar que también cumple $A^{-1} \cdot A = I$, con lo cual es realmente la inversa de A.

- Usando determinantes (lo cual se verá mas adelante)
- Por el método de Gauss-Jordan

2.4 DETERMINANTES

Un determinante es un número real o escalar asociado a una matriz, y su cálculo depende del orden de la matriz cuadrada en análisis.

2.4.1 Cálculo de determinantes de órdenes 1, 2 y 3

Orden 1 x 1: Es fácil comprobar que aplicando la definición: $A = a_{11} \Rightarrow \det(A) = a_{11}$.

Orden 2 x 2: se toma el producto de los dos elementos de la diagonal principal y se sustrae del producto de los dos elementos de la diagonal secundaria.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Orden 3 x 3: Regla de Sarrus

Solo para matrices de orden 3x3 se suele usar la **Regla de Sarrus**, que consiste en un esquema gráfico para los productos positivos y otro para los negativos:

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, la multiplicación de diagonales es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{Para los tres productos positivos}).$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{Para los tres productos negativos}).$$

O lo que es igual:

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Ejemplo 2-7. Obtener el determinante de la matriz A, siendo $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ -z & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Solución. Primero, se grafica la matriz/determinante, en la cual las dos primeras filas se repiten en la parte inferior de tal matriz,

$$\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 4 & & & \\ 2 & -2 & 0 & & & \\ -z & 6 & 2 & & & \\ \hline -3 & 1 & 4 & & & \\ & 2 & -2 & 0 & & \end{array}$$

luego, se procede a obtener los productos positivos (diagonales del medio hacia abajo). en este caso, por tratarse de una matriz 3×3 , serán 3 productos: $((-3) \cdot 2 \cdot 2) + (2 \cdot 6 \cdot 4) + ((-z) \cdot 1 \cdot 0) = 60$. Luego, los tres productos negativos: $-[((-z) \cdot (-2) \cdot 4) + ((-3) \cdot 6 \cdot 0) + (2 \cdot 1 \cdot 2)] = -4 - 8z$. Así, el determinante será $|A| = 60 - 4 - 8z = 56 - 8z$

2.4.2 Cálculo de un determinante de orden $n \times n$: desarrollo por menores

Sea una matriz de orden 3×3 como $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ contiene otras

submatrices tales como:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ (matriz obtenida al eliminar la primera fila y la primera columna)}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ (matriz obtenida al eliminar la segunda fila y la primera columna)}$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ (matriz obtenida al eliminar la tercera fila y la primera columna)}$$

ahora bien, se define el determinante de la matriz A mediante la formula:

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

o lo que es igual

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) + a_{31} \det(A_{31}) \quad (2.1)$$

Ejemplo 2-8. Obtener el determinante de la matriz A del ejemplo 2-7.

$$\det(A) = -3 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 12 - 4 + 48 - 8z = 56 - 8z$$

En realidad, la expresión (2.1) tiene múltiples generalizaciones por lo que es necesario formalizarlas.

Menor de un componente

Si A es una matriz cuadrada de orden $n \times n$, entonces el *menor del elemento* C_{ij} se denota por M_{ij} y se define como el determinante de la submatriz $(n-1)(n-1)$ de A que se forma suprimiendo todos los elementos de la fila i y todos los elementos de la columna j . Las matrices del punto 2.4.2 son menores de la matriz original, A . Para la matriz del ejemplo 2.7 los menores que se pueden formar son:

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -z & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -z & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ z & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -z & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{array}$$

Cofactor de un componente

El cofactor de un componente a_{ij} denotado por C_{ij} esta definido por:

$$|C_{ij}| = (-1)^{i+j} |M_{ij}| \quad (2.2)$$

En otras palabras, el cofactor del componente C_{ij} es el menor M_{ij} con signo prefijado $(-1)^{i+j}$. Por ejemplo, para el caso de una matriz 3×3 ,

$$|C_{13}| = |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Finalmente, para el caso de una matriz (cuadrada) de orden $n \times n$ el determinante será:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} (a_{ij}) |M_{ij}| \quad (2.3)$$

Nota: Esta regla rebaja el orden del determinante que se pretende calcular en una unidad. Para evitar el cálculo de muchos determinantes conviene elegir líneas con muchos ceros.

Matriz de cofactores

Una matriz de cofactores es una matriz en la cual cada elemento a_{ij} es reemplazado por su cofactor $|C_{ij}|$. Una **matriz adjunta** es la transpuesta de una matriz de cofactores.

$$C = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix} \text{ y su adjunta será, } \text{adj}(A) = C^t = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & |C_{31}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & |C_{32}| \\ |C_{13}| & |C_{23}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2-9. Dado $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, la matriz de cofactores, C será:

$$C = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 7 \\ -9 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

La matriz adjunta $\text{adj}(A)$ es la transpuesta de C:

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 5 \\ -6 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & -10 \end{bmatrix}$$

Esta matriz será vista con mayor detalle en el punto 2.4.4

Ejemplo 2-10. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, obtener el determinante.

Solución. El determinante resultará de usar alguna fila al azar, por ejemplo, la tercera fila. (-1,3,2). Luego se forman los determinantes de las submatrices correspondientes: menores,

$$\begin{aligned} |A| &= -1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \\ |A| &= -(8-15) - 3(4+9) + 2(-10-12) \\ |A| &= -76 \end{aligned}$$

Aplicado un razonamiento análogo usando la 2 columna:

$$|A| = 4(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + -3(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -4(6+2) - 5(4-3) - 3(4+9)$$

$$|A| = -76$$

2.4.3 Propiedades básicas de los determinantes

Propiedad 1. Si se permuta dos líneas paralelas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo con respecto al inicial:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \text{ pero con intercambiando las dos filas:}$$

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc)$$

Si una matriz cuadrada tiene una línea con todos los elementos nulos, su determinante vale cero.

Propiedad 2. La multiplicación de una fila (columna) por un escalar cambia el valor del determinante k veces.

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad - bc) = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Propiedad 3. La suma (resta) de un múltiplo de una fila a otra fila dejará el valor del determinante inalterado. Esto también es válido en el caso de columnas.

Ejemplo. Si en el determinante anterior, se suma k veces la fila superior a su segunda fila, se obtiene el determinante original

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} = a(d+kb) - b(c+ka) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Propiedad 4. El intercambio de filas y columnas no afecta el valor del determinante. En otras palabras, el determinante de una matriz A tiene el mismo valor que el de su transpuesta: $|A| = |A^t|$. Ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 9; \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.4.4 Aplicaciones

Cálculo de la matriz inversa

Dada una matriz cuadrada A , su inversa será igual a la expresión 2.4, la cual es fácil probarla ya que la suma de los productos de los elementos de una fila por sus adjuntos es el valor del determinante, y que la suma de los productos de los elementos de una fila por los adjuntos de otra fila diferente es 0 (esto sería el desarrollo de un determinante que tiene dos filas iguales por los adjuntos de una de ellas).

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \quad (2.4)$$

Solución de sistemas de ecuaciones lineales (s.e.l)

Un sistema de ecuaciones lineales (s.e.l.) es un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

donde a_{ij} son los coeficientes, x_i las incógnitas y b_i son los términos independientes. El anterior sistema se puede expresar en forma matricial, usando el producto de matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

De modo simplificado suele escribirse $A_{m \times n} X_{n \times 1} = b_{m \times 1}$, donde la matriz A se denomina **matriz de coeficientes**. También se usará la matriz ampliada, que se representa por A' , que es la matriz de coeficientes a la cual le hemos añadido la columna del término independiente:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

a) Aplicando la Regla de Cramer

Es aplicable si el sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas ($n=m$) y es compatible determinado (a un s.e.l. que cumple estas condiciones se le llama un sistema de Cramer). El valor de cada incógnita x_i se obtiene de un cociente cuyo denominador es el determinante de la matriz de coeficientes, y cuyo numerador es el determinante que se obtiene al cambiar la columna i del determinante anterior por la columna de los términos independientes:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad (2.5)$$

Ejemplo 2-11. Obtener el valor de las incógnitas del siguiente sistema de ecuaciones *lineales*:

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 12$$

$$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 13$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 17$$

Solución. El primer paso es ordenar el sistema de ecuaciones: cada columna debe corresponder a una sola variable y todas las constantes deben pasar al lado derecho de la igualdad. Una vez ordenado el sistema, se procede a calcular el determinante de la matriz principal o matriz de coeficientes (A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(-10 - 6) - 4(6 + 2) - 3(9 - 5) = -76$$

Paso seguido, se obtienen las matrices especiales formadas del reemplazo de la columna de coeficientes x_i con el vector columna de constantes. Para las tres variables, los determinantes de tales matrices son:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 12 & 4 & -3 \\ 13 & -5 & 2 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12(-10 - 6) - 4(26 - 34) - 3(39 + 85) = -532$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 12 & -3 \\ 3 & 13 & 2 \\ -1 & 17 & 2 \end{vmatrix} = 2(26 - 34) - 12(51 + 13) - 3(51 + 13) = -304$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 12 \\ 3 & -5 & 13 \\ -1 & 3 & 17 \end{vmatrix} = -248 - 256 - 48 = -456$$

Una vez obtenidos los determinantes, se procede a obtener el valor de las incógnitas:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-372}{-76} = 7; \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-304}{-76} = 4; \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-456}{-76} = 6$$

b) Inversibilidad mediante la matriz de cofactores

Si $AX = b$, entonces X será equivalente a:

$$X = A^{-1}b \quad (2.6)$$

Pero, conforme a (2.4), $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [\text{adj}(A)]$. Entonces X también será igual a:

$$X = \frac{1}{\det(A)} [\text{adj}(A)]b \quad (2.7)$$

Por ello es necesario calcular no solo el determinante de A , sino la transpuesta de su matriz de cofactores (llamada **matriz adjunta**). Esta forma de solución es aplicable si el sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas ($n=m$). En el ejercicio anterior será:

$$C = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -8 & 4 \\ -17 & 1 & -10 \\ -7 & -13 & -22 \end{bmatrix}$$

Ahora la matriz adjunta es,

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{bmatrix} -16 & -17 & -7 \\ -8 & 1 & -13 \\ 4 & -10 & -22 \end{bmatrix}$$

Ordenando los resultados conforme a (2.4),

$$A^{-1} = -\frac{1}{76} \begin{bmatrix} -16 & -17 & -7 \\ -8 & 1 & -13 \\ 4 & -10 & -22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/76 & 17/76 & 7/76 \\ 8/76 & -1/76 & 13/76 \\ -4/76 & 10/76 & 22/76 \end{bmatrix}$$

Finalmente, poniendo los resultados según (2.6),

$$X = \begin{bmatrix} 16/76 & 17/76 & 7/76 \\ 8/76 & -1/76 & 13/76 \\ -4/76 & 10/76 & 22/76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{192 + 221 + 119}{76} \\ \frac{96 - 13 + 221}{76} \\ \frac{-48 + 130 + 374}{76} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Entonces, los valores del vector X serán: 7,4,y 6.

2.4.5 El Jacobiano

Es un determinante especial que sirve para testear la dependencia funcional, tanto *lineal* como *no lineal*. Un determinante jacobiano esta compuesto por todas las primeras derivadas parciales. Por ejemplo, dadas las siguientes funciones,

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

El (determinante) Jacobiano será igual a:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

Note que los elementos de cada fila son las primeras derivadas parciales de una función y_i con respecto a cada una de las variables independientes (x_1, x_2, x_3), mientras que los elementos de cada columna son las primeras derivadas parciales de cada una de las funciones y_1, y_2, y_3 respecto a una de las variables independientes, x_j . Si $|J| = 0$, las ecuaciones son funcionalmente dependientes. Caso contrario ($|J| \neq 0$), son independientes.

Ejemplo 2-12. Usar el Jacobiano para testear la dependencia funcional de:

$$y_1 = 5x_1 + 3x_2$$

$$y_2 = 25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2$$

Solución. Primero, se toma las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 5; \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 3; \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 50x_1 + 30x_2; \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 30x_1 + 18x_2$$

luego se plantea el jacobiano,

$$|J| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 50x_1 + 30x_2 & 30x_1 + 18x_2 \end{vmatrix}$$

$$|J| = 5(30x_1 + 18x_2) - 3(50x_1 + 30x_2) = 0$$

Así, puesto que $|J| = 0$, existe dependencia funcional entre ambas ecuaciones.

Intuitivamente, esto es fácil de corroborar: $(5x_1 + 3x_2)^2 = 25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2$.

2.5 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} x & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2a \\ -1 & -x & 3x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Si $C = (2AB)^t$, obtenga la suma $S = c_{21} + c_{32} + c_{33}$

Solución:

$$2AB = \begin{bmatrix} 2x-10 & 2x-2 & 2x+4 & 2 \\ -4a-4 & 2 & 4a+10 & -2 \\ 14x-2 & 6x-2 & 4x-2 & -6x \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ luego,}$$

$$(2AB)^t = \begin{bmatrix} 2x-10 & -4a-4 & -14x-2 & 2 \\ 2x-2 & 2 & 6x-2 & 2 \\ 2x+4 & 4a+10 & 4x-2 & 4 \\ 2 & -2 & -6x & -2 \end{bmatrix}$$

entonces, $c_{21} = 2x - 2$; $c_{32} = 4a + 10$, $c_{33} = 4x - 2$. $S = 6x + 4a + 6$

2. Si $A = \begin{bmatrix} -2a & 3b \\ 2 & b \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & -6 \\ -1 & b & -5 & 1 \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 6a \\ -2 \end{bmatrix}$, obtenga a) $D = ABC$ y

b) si $a=0$, ¿como cambia D?

Solución.

$$a) AB = \begin{bmatrix} -4a-3b & 8a+3b^2 & -4a-15b & 12a+3b \\ 4-b & b^2-8 & 4-5b & b-12 \\ -18 & 8b+20 & -50 & 38 \end{bmatrix}$$

$$AB \times C = D = \begin{bmatrix} -24a^2 - 2a(45b+34) - 3b(4b+5) \\ 6a(4-5b) - 4b^2 - 5b + 68 \\ -300a - 2(16b+105) \end{bmatrix}$$

b) Si $a=0$, ¿cómo cambia D ?

Simplemente, se reemplaza el valor 0 de a en la matriz resultante D,

$$D = \begin{bmatrix} -3b(4b+5) \\ -4b^2 - 5b + 68 \\ -2(16b+105) \end{bmatrix}$$

$$3. \text{ Si } H = \begin{bmatrix} -3a & -1 & a \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \text{ y } H^{-1} = D, \text{ obtenga a sabiendo que } d_{22} = 1$$

Solución.

$$H^{-1} = D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8a+1} & -\frac{3a+1}{8a+1} & -\frac{4a+1}{8a+1} \\ -\frac{1}{8a+1} & \frac{5a}{8a+1} & \frac{4a}{8a+1} \\ \frac{5}{8a+1} & \frac{2-9a}{8a+1} & \frac{1-12a}{8a+1} \end{bmatrix} \quad \text{Por condición: } d_{22} = \frac{5a}{8a+1} = 1,$$

$$\text{entonces } a = -\frac{1}{3}$$

4. Una tienda vende 1000 hamburguers, 600 chessburguers, y 1200 milks en una semana. El precio de la hamburguer es 45 centavos (c), una chessburguer 60 c, y el milk 50 c. El costo de vender una hamburguer es 38c, una chessburguer es 42c y un milk es 32c. Encuentre el ingreso, costo y beneficio semanal de la firma.

Definiendo y ordenando:

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 \\ 600 \\ 1200 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.60 \\ 0.50 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.42 \\ 0.32 \end{bmatrix}$$

El ingreso total será: PQ , pero esta operación no está definida. Entonces se aplica la transpuesta de P . Solo así es posible la multiplicación:

$$I = P'Q = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.60 & 0.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 600 \\ 1200 \end{bmatrix} = 1410$$

Similarmente, el costo total será:

$$C = C'Q = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.42 & 0.32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 600 \\ 1200 \end{bmatrix} = 1016. \text{ Entonces, } B = 1410 - 1016 = 394$$

2.6 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar la solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

2. Obtenga los precios de equilibrio de:

$$\begin{aligned} c_1P_1 + c_2P_2 &= -c_0 \\ \gamma_1P_1 + \gamma_2P_2 &= -\gamma_0 \end{aligned}$$

3. Dado el siguiente modelo, donde T = impuestos y t = tasa impositiva sobre la renta, obtenga el ingreso de equilibrio, \bar{Y} .

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G_0 \\ C &= a + b(Y - T), \quad (a > 0, 0 < b < 1) \\ T &= d + tY \quad (d > 0, 0 < t < 1) \end{aligned}$$

4. Sea el modelo de renta nacional, halle la renta nacional de equilibrio, \bar{Y} .

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G \\ C &= a + b(Y - T_0), \quad (a > 0, 0 < b < 1) \\ G &= gY \quad (0 < g < 1) \end{aligned}$$