

CAPITULO 1: ELEMENTOS BÁSICOS

1.1 DEFINICIONES

A continuación se presenta de manera muy sucinta los principales conceptos que serán utilizados en el desarrollo del presente capítulo.

1.1.1 Variable: es algo cuyo valor o magnitud puede cambiar. Ejemplos: el precio de un determinado bien, el nivel de contaminación, ingreso anual, etc. Generalmente se representa por x, y, z .

1.1.2 Constante: algo cuya magnitud no cambia

1.1.3 Coeficientes: son constantes que acompañan a las variables

1.1.4 Parámetro: Es una constante que a su vez es variable. Generalmente son representados por las letras α, β , etc.

1.2 SISTEMA DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones es simplemente un conjunto de ecuaciones las cuales pueden o no representar un comportamiento específico.

1.2.1 Ecuación: es la forma como se representan las variaciones entre variables implícitas. Una ecuación es una afirmación que una cosa es igual a otra. Por ejemplo las siguientes son ecuaciones simples: $S=Y-C$; $C=a+bY$; $S=I$.

Las características comunes de las tres ecuaciones anteriores es que todas contienen el símbolo $=$ (igual a) antes de los símbolos de la izquierda y después del símbolo de la derecha, que pueden ser variables o bien parámetros. Y cada parte antes del símbolo $=$ se llaman términos, en $S=Y-C$ existe un término en el lado izquierdo o sea S y dos términos en el lado derecho, o sea: Y y C ; y en la ecuación: $C=a+bY$, en el lado derecho hay dos términos: a y bY .

Una ecuación es un conjunto de variables y parámetros separados por el signo igual ($=$). La ecuación: $S=I$ contiene sólo dos variables y ningún parámetro, pero la ecuación: $C=a+bY$ tiene dos variables (C e Y) y dos parámetros (a y b). Si en una ecuación aparece un cero, ese valor es un parámetro.

Tipos de ecuaciones:

Ecuación de función: cuando la magnitud de una variable depende de alguna forma de la magnitud de otra u otras variables, se dice que las variables están funcionalmente relacionadas o una depende de la otra. O sea: el comportamiento de cómo varía una variable, depende de la magnitud de otra u otras variables.

En la ecuación: $C=f(Y)$, la letra " f " es una anotación para indicar que "es una función de" o "de alguna forma depende de". Es decir, C es una función de Y o C depende de Y .

A veces se utilizan otros símbolos, para indicar que existe una dependencia entre variables, como : f, g, h, u otras letras griegas.

Escribir $C = f(Y)$ no significa que C depende sólo de Y, lo que significa es que en esa ecuación existe sólo la variable Y; pero C también puede depender de la variable Y y de los parámetros a y b, en la ecuación: $C = a + bY$; es decir, la magnitud C está relacionada con la magnitud de los dos parámetros “a y b” y con la variable “Y” y en caso de mayor especificidad, se puede escribir: $C = 10 + 0,80Y$; esto quiere decir que para cualquier valor de Y se puede determinar el valor de C, o bien: $0,80 Y = C - 10$, o $Y = (C - 10) / 0,80$.

Sea cualquier valor de C, se puede también determinar el valor de Y. Se debe observar que no se dice que el valor de Y sea la causa de C (pues puede ser o no), porque también puede ser que C sea o no causa de Y. Los parámetros pueden cambiar de valor y entonces la relación entre C e Y habrá también cambiado; a esto se le llama cambio paramétrico.

Ecuación de definición: no todas las ecuaciones son de función, algunas son de identidad. Si definimos la utilidad de una empresa como la diferencia de “R” sus ingresos o rentas, menos “C” sus costos ,entonces podemos escribir: $\pi = R - C$, o también con el signo de identidad (tres rayitas).

La ecuación de definición, lo que señala es que la definición de utilidad o lucro siempre será verdadera para todos los valores de R (ingresos) y C (costos). En otras palabras, la ecuación por definición establece una identidad entre dos expresiones recíprocas que tienen exactamente el mismo significado (Chiang, 1987).

Ecuación de equilibrio : la ecuación de equilibrio en economía permite que se determine cuáles serán las magnitudes de determinadas variables. En la ecuación: $C = 10 + 0,80Y$ se puede determinar el valor de C, si el valor de Y fuese conocido; o cuál es el valor de Y, si se conociese el valor de C. Para determinar los dos valores de C e Y se necesita otra ecuación. La ecuación de equilibrio señala cuál es la condición que debe prevalecer, antes que se pueda determinar cuál será la magnitud de cada variable.

Si con la ecuación $C = 10 + 0,80Y$ se quiere afirmar que los valores de C e Y tienen que ser iguales, entonces se puede escribir la ecuación de equilibrio: $C = Y$.

Así, se puede determinar los valores de C e Y de la siguiente manera: se sustituye C por Y en la ecuación: $C = 10 + 0,80Y$, porque la ecuación de equilibrio nos informa que Y tiene que ser igual que C. Se tiene entonces la ecuación: $Y = 10 + 0,80Y$, y si se sustituye $0,80Y$ en ambos lados de esa ecuación, se tiene: $Y - 0,80Y = 10 + 0,80Y - 0,80Y$, es decir: $0,2Y = 10$; y dividiendo ambos lados de la ecuación por 0,2, se obtiene: $0,20Y / 0,20 = 10 / 0,20$, o lo que es lo mismo: $Y = 50$. Ahora sí se puede sustituir este valor de $Y = 50$ en la ecuación: $C = 10 + 0,80Y$ a fin de verificar que $C = 10 + 0,80(50) = 10 + 40 = 50$. O sea, que en la ecuación de equilibrio $C = Y$, se puede escribir $C = 50$.

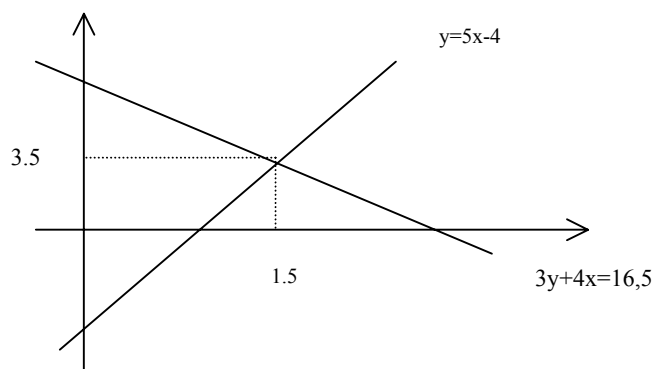
Cuando el valor de una variable demuestra una tendencia a subir o bajar, surge el desequilibrio. Si existe equilibrio entre fuerzas opuestas ello quiere decir que las fuerzas que aumentan el valor de una variable se equilibra o iguala con las fuerzas que disminuyen el valor de esa variable.

$CT=CF+CV$	ecuación por definición
$E = mc^2$	ecuación por definición
$Q_s = Q_d$	ecuación de equilibrio
$y = x^3 + 0.5x + 4$	ecuación de comportamiento

1.2.2 Solución de sistemas simples de ecuaciones lineales¹

Un sistema de ecuaciones lineales o ecuaciones simultaneas se puede resolver al menos de 3 formas:

- a) Gráficamente: consiste en graficar dos rectas y encontrar las intersecciones. Generalmente se aplica cuando solo existen 2 incógnitas. Sean las ecuaciones, $y = 5x - 4$ y $3y + 4x = 16.5$, la solución gráfica será:



- b) Sustitución. Consiste en reemplazar en la segunda ecuación, el valor resultante de una variable (ya sea x o y) de la primera ecuación. En el ejemplo anterior, se sabe que el valor de “ y ” en la primera ecuación es $5x - 4$. Este valor se sustituye en la segunda ecuación así:

$$\begin{aligned}
 3(5x - 4) + 4x &= 16.5 \\
 15x - 12 + 4x &= 16.5 \\
 19x &= 28.5 \\
 x &= 1.5
 \end{aligned}$$

Una vez conocido el valor de x , éste es sustituido en cualquiera de las dos ecuaciones para encontrar el valor de y .

$$\begin{aligned}
 y &= 5x - 4 \\
 y &= 5(1.5) - 4 = 3.5
 \end{aligned}$$

¹ El término “simple” se refiere a que el sistema tiene solo dos ecuaciones lineales (y por ende, dos incógnitas). También puede aplicarse cuando el sistema posee tres ecuaciones (y por ende, tres incógnitas). Para un número mayor cantidad de incógnitas (y por ende, de ecuaciones) es análisis se vuelve más difícil por lo que se aplican otras técnicas. Debe notarse que es prácticamente imposible solucionar gráficamente un sistema de 4 o más ecuaciones.

En otras palabras, la intersección o solución es: $(x, y) = (1.5, 3.5)$

- c) Eliminación. Consiste en multiplicar una ecuación por un valor constante de tal manera que los valores de los coeficientes de alguna de las variables sean iguales entre ambas ecuaciones (pero con signo contrario). Al restar una ecuación de la otra, se elimina una de las variables.

$$\begin{array}{r} y - 5x = -4 \\ 3y + 4x = 16.5 \\ \hline 0 + 19x = -28.5 \end{array}$$

Reemplazando el valor de x en alguna de las ecuaciones se obtiene la misma solución de los casos anteriores.

1.3 MODELOS: MATEMÁTICO Y ECONÓMICO

1.3.1 Modelo matemático

Un modelo matemático es un esquema, una ecuación, un diagrama o una teoría que representa matemáticamente una situación de la realidad, como pueden ser fenómenos físicos, químicos, biológicos, etc. Un modelo matemático simplifica una parte difícil de las matemáticas, haciendo más fácil su comprensión y que engloba de manera general muchos aspectos diferentes. En otras palabras, un modelo matemático es una representación simplificada de la realidad a fin de estudiarla.

Los modelos matemáticos pueden clasificarse de la siguiente manera.

Determinista.- Se conoce de manera puntual la forma del resultado ya que no hay exceso de incertidumbre. En el siguiente modelo hipotético de una ecuación (1.1), no existe algún término que posea incertidumbre, asumiendo que x es conocido para un periodo dado.

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \phi x_{t-1} \quad (1.1)$$

Estocástico.- probabilístico o heurístico, que no se conoce el resultado esperado y existe incertidumbre. A diferencia de la expresión (1.1), la expresión (1.2) tiene un término estocástico (e).

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \phi x_{t-1} + e \quad (1.2)$$

1.3.2 Modelo económico

Un modelo (económico) o teoría económica es simplemente un esquema teórico, el cual si consta de ecuaciones (sistema de ecuaciones) puede decirse que es un modelo matemático. Por ello, no todo modelo económico es un modelo matemático.

Son pocos los modelos económicos que contienen sólo una ecuación, pues la mayoría contienen varias ecuaciones. Es necesario recordar que los modelos son abstracciones o simplificaciones de la realidad, por lo que no pueden explicar los valores de todas las variables de una economía. Se supone que las variables que no aparecen en el modelo permanecen constantes.

Las variables que aparecen en un modelo se pueden categorizar como endógenas y exógenas. Es necesario conocer las magnitudes de las variables exógenas para determinar los valores de las variables endógenas del modelo, ya que si las variables exógenas varían, entonces cambian también las variables endógenas del modelo. Se acostumbra a simbolizar las variables exógenas colocando una barra encima de su letra.

1.4 FUNCIONES

Función: Es una regla o proceso que asigna a cada elemento de un conjunto A (primer conjunto o conjunto de “ida”) uno y solo uno de los elementos del conjunto B.

Notación: $f : A \rightarrow B$

El conjunto A se llama dominio de f

El conjunto B se llama codominio de f (rango)

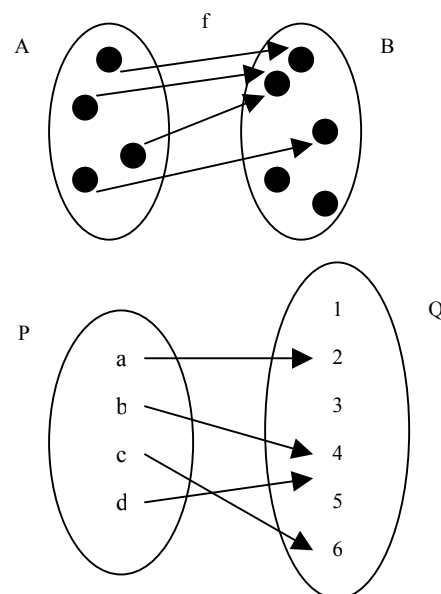
El rango o recorrido de f es el subconjunto del codominio

Ejemplo: $g : P \rightarrow Q$

El dominio de la función g es $P = \{a, b, c, d\}$

El codominio de la función g es $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

El rango de la función g es $\{2, 4, 6\}$



En muchas situaciones prácticas, el valor de una variable puede depender del valor de otra. Por ejemplo: la demanda del plan puede depender del precio del mismo, el nivel de contaminación puede depender de la cantidad de autos, etc. Otro ejemplo será de utilidad.

Caso 1	
Dominio	Rango
Numero	cubo
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

Caso 2	
Dominio	Rango
Numero	cuadrado
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Caso 3	
Dominio	Rango
Numero	cuadrado
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

Los casos 1 y 2 especifican funciones puesto que a cada valor del dominio, corresponde solo un valor en el rango (por ejemplo, el cubo de -2 es -8 y no otro valor). Por otro lado, el caso 3 no es específica una función, dado que al menos a un valor del dominio le corresponde mas de un valor en el rango (por ejemplo, al valor del dominio 9 le corresponde 3 y -3 , ambas raíces cuadradas de 9).

¿Toda ecuación es una función?. Si en una ecuación –por ejemplo- de dos variables, se obtiene exactamente un resultado (valor de la variable dependiente) por cada valor de la variable independiente, entonces la ecuación define una función.

Ejemplo 1-1: Hallar: $f(4)$ si $f(x) = x^3 + 5$

Solución: $f(4) = (4)^3 + 5 = 64 + 5 = 69$

Ejemplo 1-2. Si $g(t) = \sqrt{t-2}$, encuentre $g(27)$, $g(5)$, $g(2)$, $g(1)$

Solución.

$$g(27) = \sqrt{27-2} = 5$$

$$g(5) = \sqrt{5-2} = \sqrt{3}$$

$$g(2) = \sqrt{2-2} = 0$$

$$g(1) = \sqrt{1-2} = i \text{ (i=imaginario)}$$

Ejemplo 1-2. Para comprar queso es necesario tomar el bus (S/. 150). El precio del queso es S/.400/kilo. ¿Cuál es la función del costo total de comprar medio kilo de queso?

Solución. El costo fijo siempre será S/. 150. El costo variable de medio kilo será entonces $150+200Q$. Entonces, la función de costo total será $CT = 150 + 200Q$, donde Q es la cantidad de queso (medidos en “medio kilo”).

1.4.1 Tipos de funciones

A continuación se comenta brevemente los tipos de funciones: constantes, polinomiales, racional y no algebraica.

Constantes o lineales

Una función cuyo rango esta constituido por un solo elemento se denomina función constante, por ejemplo, $y = f(x) = 9$, o lo que es igual, $y = 9$, cuyo valor es el mismo sin considerar el valor de x . En otras palabras, es una constante que gráficamente se vería como una línea recta (Gráfico 1-1).

Caso de $n = 0$: $y = a_0$

Polinomial

Se llama así a las funciones que contienen múltiples términos y tiene la forma siguiente (1.3):

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1.3)$$

Los tipos más usados de funciones polinomiales usadas son:

Caso de $n = 1$: $y = a_0 + a_1x$ (función lineal)

Caso de $n = 2$: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ (función cuadrática)

Caso de $n = 3$: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ (función cúbica)

Ejemplos gráficos de una función cuadrática y cúbica se presentan en los Gráficos 1-2 y 1-3, respectivamente.

Racional

Una función $f(x)$ es llamada racional cuando tiene la forma de la expresión (1.4):

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad (1.4)$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son ambos polinomiales, y $h(x) \neq 0$. En realidad, el término “racional” proviene de la palabra *ratio* o división.

Por ejemplo, $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 4}$ (siempre y cuando $x \neq -4$)

Note que la función, $m(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ no es una función racional puesto que tal función es reductible a: $m(x) = x - 3$. Entonces, no toda “división” de funciones es equivalente a una función racional. Debe asegurarse que la división sea *irreducible*. El Gráfico 1-4 presenta un ejemplo de una función racional.

No algebraica

Toda expresión en términos de polinomios y/o raíces (tales como una función cuadrada) es una función algebraica. Sin embargo, las funciones exponenciales, como $y = b^x$, o las logarítmicas ($y = \log_b x$) donde la variable independiente aparece como exponente se denominan funciones *no algebraicas*. Las funciones trigonométricas (por ejemplo, $y = \cos x$) también forman parte de este tipo de funciones.

Los Gráficos 1-5 y 1-6 presentan un ejemplo de una función exponencial y una logarítmica, respectivamente.

Gráfico 1-1

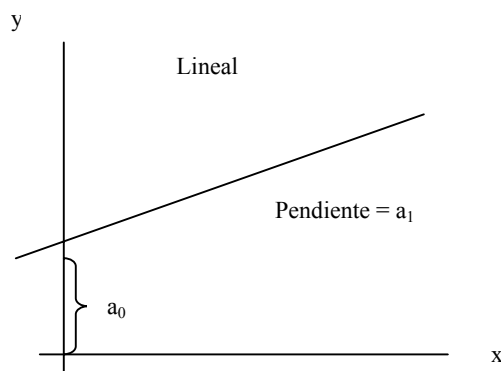


Gráfico 1-2

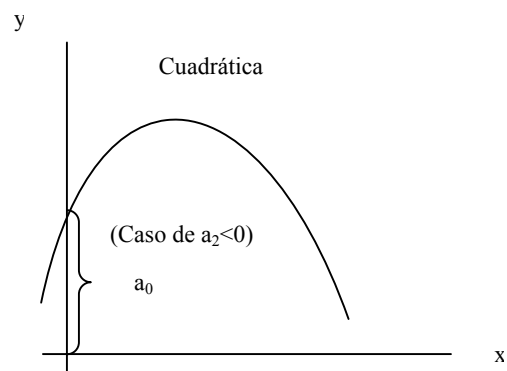


Gráfico 1-3

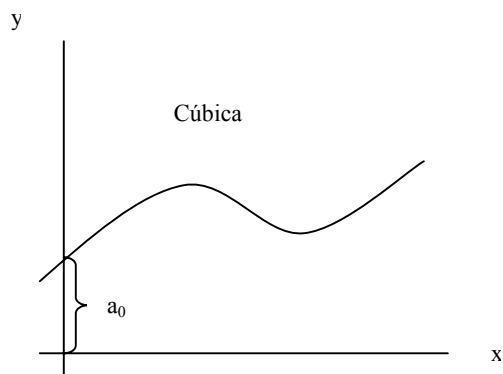


Gráfico 1-4

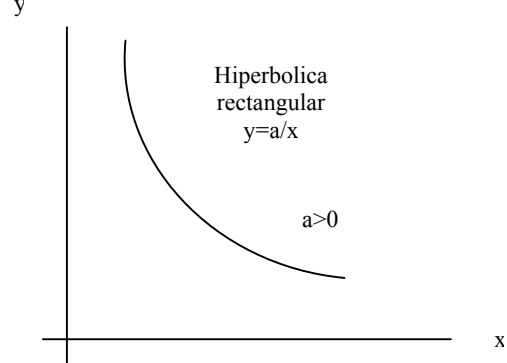


Gráfico 1-5

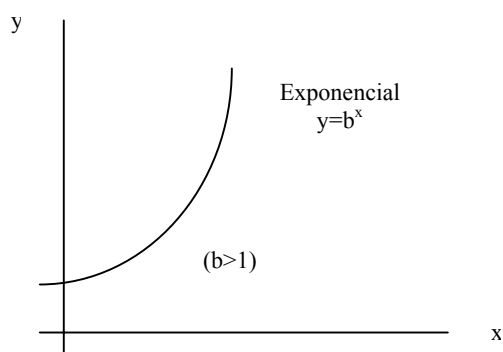
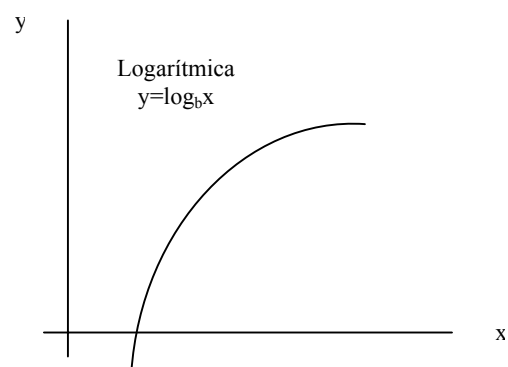


Gráfico 1-6



1.4.2 Problemas resueltos

1. Si, $5 \ln x + 8 = 14$ obtenga x .

Solución. Despejando, $\ln x = 1.2$ y estableciendo logaritmos neperianos a ambos lados de la expresión anterior,

$$e^{\ln x} = e^{1.2}$$

$$x = e^{1.2}; x \approx 3.32$$

2. Obtenga x si $\ln(x + 4)^2 = 3$

Solución. Por la regla de logaritmos,

$$2 \ln(x + 4) = 3$$

$$\ln(x + 4) = 1.5$$

luegom, estableciendo logaritmos a ambos lados,

$$e^{\ln(x+4)} = e^{1.5}$$

$$x + 4 = e^{1.5}$$

$$x = 0.48169$$

3. Sea $R = 2a + e^{3q}$ y teniendo en cuenta que el $q_{\text{MAX}} = 25$, se pide obtener el dominio y el rango. Nota: restrínjase al primer cuadrante.

Solución

Q pertenece al primer cuadrante, entonces solo puede tomar valores positivos. Entonces, $q \in [0..25]$ (dominio)

El rango dependerá de estos limites:

$$\text{Si } q = 0 \rightarrow R = 2a + 1;$$

$$\text{Si } q = 25 \rightarrow R = 2a + e^{75}$$

$$R \in [2a + 1..2a + e^{75}]$$

4. Suponga que el costo total de la fabricación de q unidades de un determinado bien esta dado por la función $C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 500$, calcule a) el costo de fabricación de 20 unidades y b) calcule el costo de fabricación de la unidad número 20

Solución

- a) Costo de fabricación de 20 unidades

$$C(20) = 20^3 - 30(20)^2 - 400(20) + 500$$

$$C(20) = 4500$$

b) Calcule el costo de fabricación de la unidad número 20

$$C(20) - C(19)$$

$$C(19) = 19^3 - 30(19)^2 + 400(19) + 500$$

$$C(19) = 4129$$

$$C(20) - C(19) = 4500 - 4129 = 371$$

1.4.3 Problemas propuestos

- ¿Las siguientes expresiones son funciones?: a) $y = \sqrt{3x-1}$ y b) $y^2 - x^2 = 9$
- La función de comportamiento del precio de un bien, P es $P(t) = P_0 e^{-rt}$ donde, $r=0.05$ =tasa de descuento y t =periodo corriente. Conociendo que en el periodo $t=22$ el precio es igual a 5, se pide obtener el ingreso I para el periodo 44, asumiendo que la cantidad ofrecida, Q , en ese periodo fue 20 unidades. Nota: $I_t = P_t Q_t$
- Conforme al censo del 1993, INEI pronosticó que la población de Lima para el año 2013 será 8'081,130 personas. Un estudiante de la Universidad Agraria asumió una tasa mayor (considerando mayor migración, entre otras cosas) y estimó una población de 9'352,658 personas para el mismo periodo. Obtenga la diferencia entre ambas tasas.
- Dado el siguiente modelo, donde T = impuestos y t = tasa impositiva sobre la renta.

$$Y = C + I_0 + G_0$$

$$C = a + b(Y - T), \quad (a > 0, 0 < b < 1)$$

$$T = d + tY \quad (d > 0, 0 < t < 1)$$

- ¿Cuántas variables endógenas hay?
 - Hallar \bar{Y} , \bar{T} y \bar{C}
- Sea el modelo de renta nacional:

$$Y = C + I_0 + G$$

$$C = a + b(Y - T_0), \quad (a > 0, 0 < b < 1)$$

$$G = gY \quad (0 < g < 1)$$
 - Identificar las variables endógenas
 - Dar el significado económico del parámetro g
 - Hallar la renta nacional de equilibrio
 - ¿Qué restricción adicional es necesaria para que exista una solución?