CAPITULO 6: INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial es una ecuación que expresa una relación explicita o implícita entre una función $y = f(t)$ y una o más de sus derivadas o diferenciales. Lo que se busca es una función que no dependa de sus derivadas o diferenciales. En consecuencia, la solución será una función y no un valor numérico. Ejemplos de diferenciales son:

$$\frac{dy}{dt} = 3t + 2 \qquad \dot{y} = 3t + 2 \qquad y' = 3y \qquad y'' - 4y' + 5 = 0$$

Naturalmente, si se parte de derivadas o diferenciales, para obtener la función original o solución será necesario realizar un proceso de integración. (Note que las dos primeras expresiones son iguales: una notación alternativa de $\frac{dy}{dt}$ es $\dot{y}$).

La derivada dy/dt es la única que puede aparecer en una ecuación diferencial de primer orden, pero puede estar elevada a distintas potencias como $(dy/dt)^2$, $(dy/dt)^3$. La potencia más alta es la que dará el grado de la ecuación diferencial. En este capitulo se verá únicamente ecuaciones diferencial de primer orden (EDP).

6.1 EDP DE COEFICIENTE CONSTANTE Y TÉRMINO CONSTANTE

Una ecuación lineal de primer orden tomará generalmente la forma:

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t) \tag{6.1}$$

donde u y w son funciones de t (cúbicas, cuadráticas, lineales, constantes, etc.).

6.1.1 Caso homogéneo: cuando w(t)=0 y u(t)=a

Cuando u es una función constante (entonces, $u(t) = a$, donde obviamente, a es una constante) y w es una función nula ($w(t) = 0$).

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0 \tag{6.2}$$

La ecuación (6.2) puede re-escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -a \tag{6.3}$$

Al integrar ambos miembros se tiene:

$$\ln y(t) + c_1 = -(at + c_2)$$

$\ln y(t) = -c_2 - c_1 - at$

$y(t) = e^{-c_2 - c_1 - at}$

de donde,

$$y(t) = Ae^{-at} \tag{6.4}$$

siendo $A = e^{-c_1 - c_2}$. La expresión (6.4) es una función que es llamada **solución general.** Una variante de ésta, (6.5) es llamada **solución definida.**

$$y(t) = y(0)e^{-at} \tag{6.5}$$

Ejemplo 6-1. Obtener la solución de $dy/dt + 4y = 0$, cuando $y(0) = 1$.

Solución. Cuando se tiene una condición inicial debe usarse al final de problema para calcular la constante (A) y así poder obtener una **solución definida**.

Claramente este es el caso más sencillo cuando. Identificando que $u(t) = a = 4$, se puede aplicar directamente la formula (6.4),

$$y(t) = Ae^{-4t}$$

Por condición, $y(0) = 1$ entonces, $y(0) = Ae^{-4(0)} = 1$, de donde $A = 0$. De esta forma, la solución será: $y(t) = e^{-4t}$ (solución definida!).

6.1.2 Caso no homogéneo: cuando w(t) =b (b≠ 0)

Cuando en la ecuación (6.1) la función w es distinta de 0 ($w(t) \neq 0$) pero es constante (igual a b).

$$\frac{dy}{dt} + ay = b \tag{6.6}$$

En este caso, la solución de la ecuación (6.6) será la suma de dos términos, uno de los cuales se llama **función complementaria**, y_c, y el otro se le conoce como integral particular, y_p. La **solución complementaria** se obtiene asumiendo que w es una función nula (caso homogéneo). La solución particular se da cuando la función y es una constante, por lo que $dy/dt = 0$.

La solución general es:

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + \frac{b}{a} \tag{6.7}$$

La solución definida se dará cuando:

$$y(0) = A + \frac{b}{a}$$

$$A = y(0) - \frac{b}{a} \tag{6.8}$$

Por lo tanto,

$$y(t) = \left[y(0) - \frac{b}{a} \right] e^{-at} + \frac{b}{a} \tag{6.9}$$

Ejemplo 6-2. Dar la solución a $dy/dt + 2y = 6$ cuando $y(0) = 10$
Solución. Reconociendo que $a = 2$ y $b = 0$, se aplican estos datos en la expresión (6.9),

$$y(t) = [10 - 3]e^{-2t} + 3$$
$$y(t) = 7e^{-2t} + 3$$

Nótese que obteniendo el valor de A de (6.8), y reemplazarlo en la solución general (6.7) conllevaría al mismo resultado.

6.2 EDP DE COEFICIENTE VARIABLE Y TÉRMINO VARIABLE

El caso más general de una EDP es:

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t) \tag{6.10}$$

donde $u(t)$ y $w(t)$ representan un coeficiente variable y un termino variable, respectivamente.

6.2.1 Caso homogéneo: cuando w(t)=0

Partiendo de la función (6.10): $\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t)$, si $w(t) = 0$ entonces, la solución de la expresión (6.11) será:

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = 0 \tag{6.11}$$

$\frac{dy}{dt} + u(t)y = 0$, ordenando, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -u(t)$

Integrando ambos miembros con respecto a t,

Primer miembro: $\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int \frac{dy}{y} = \ln y + c$

Segundo miembro: $\int -u(t)dt = \int -u(t)dt$

luego,

$\ln y = -c - \int u(t)dt$

tomando logaritmos a ambos lados,

$y(t) = e^{-c-\int u(t)dt}$

$y(t) = e^{-c}e^{-\int u(t)dt}$, haciendo $A = e^{-c}$ (A es una constante arbitraria, la cual solo puede definirse o calcularse si se tiene una condición inicial apropiada).

se obtiene la solución general:

$$y(t) = Ae^{-\int u(t)dt} \qquad (6.12)$$

Ejemplo 6-3. Obtenga la solución general de $dy/dt + 3t^2 y = 0$

Solución. Sabiendo que $u(t) = 3t^2$, fácilmente se aplica en (6.12):

$$y(t) = Ae^{-\int 3t^2 dt}$$

sabiendo que $-\int 3t^2 dt = -(t^3 + c)$, entonces:

$$y(t) = Ae^{-(t^3+c)}$$
$$y(t) = Ae^{-c}e^{-t^3}$$
$$y(t) = Be^{-t^3}\text{, donde } B = Ae^{-c}$$

6.2.2 Caso no homogéneo: cuando w(t)≠0

En este caso, la expresión resultante es igual a la expresión (6.12). Igualmente, la constante A puede ser calculada teniendo una condición inicial idónea.

$$y(t) = e^{-\int u dt}\left(A + \int we^{\int u dt}dt\right) \qquad (6.13)$$

Ejemplo 6-4. Dar la solución de $dy/dt + 3t^2 y = t^2$

Solución. Claramente, $u(t) = 3t^2$ y $w(t) = t^2$, entonces colocando estos datos en (6.12)

$$y(t) = e^{-\int 3t^2 dt}\left(A + \int t^2 e^{\int 3t^2 dt}dt\right)$$

integrando $-\int 3t^2 dt = -(t^3 + c_1)$, entonces la expresión anterior se reduce a:

$$y(t) = e^{-(t^3+c_1)}\left[A + \int t^2 e^{(t^3+c_1)}dt\right] \qquad (6.14)$$

La expresión $\int t^2 e^{(t^3+c_1)}dt$ es igual a: $\int t^2 e^{(t^3+c_1)}dt = \int t^2 e^{t^3} e^{c_1}dt = e^{c_1}\int t^2 e^{t^3}dt$

Para obtener el resultado del término $\int t^2 e^{t^3}dt$ será necesario un cambio de variable, $u = t^3$ lo cual implica que $du = 3t^2 dt$. Re-agrupando

$$\frac{1}{3}e^{c_1}\int 3t^2 dte^u$$

$$\frac{1}{3}e^{c_1}\int e^u du$$

$$\frac{1}{3}e^{c_1}(e^u + c_2)$$

$$\frac{1}{3}e^{c_1}(e^{t^3} + c_2) \tag{6.15}$$

Reintroduciendo (6.15) en (6.14):

$$y(t) = e^{-(t^3+c_1)}\left[A + \frac{1}{3}e^{c_1}e^{t^3} + \frac{1}{3}e^{c_1}c_2\right] \tag{6.16}$$

$$y(t) = e^{-(t^3+c_1)}A + \frac{1}{3}e^{-t^3}e^{-c_1}e^{c_1}e^{t^3} + e^{-t^3}e^{-c_1}\frac{1}{3}e^{c_1}c_2$$

Realizando las operaciones, simplificando y agrupando apropiadamente:

$$y(t) = e^{-t^3}\left[Ae^{-c_1} + \frac{c_2}{3}\right] + \frac{1}{3} \tag{6.18}$$

La expresión (6.18) es la solución general. ¿Cuál es la solución particular?

6.3 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sea $X(t)$ el número de peces de peces de cierta población durante una estación de pesca, $0 \le t \le T$, y $R = X(0)$ como el reclutamiento inicial. Si $M(t)$ es la tasa de mortalidad natural y $F(t)$ la tasa de mortalidad pesquera, se tiene que:

$$\frac{dX}{dt} = -\big(M(t) + F(t)\big)X$$

   Muestre que el "escape" $S = X(t)$ esta dado por:

$$S = R\exp\left(-\int_0^T (M(t) + F(t))\right)$$

Solución. Reagrupando la expresión $\frac{dX}{dt} = -\left(M(t)+F(t)\right)X$ se tiene que:

$$\frac{dX}{dt} + \left[M(t)+F(t)\right]X = 0$$

En este caso, es posible aplicar directamente la formula 6.12 ($y(t) = Ae^{-\int u(t)dt}$), entonces:

$$X(t) = Ae^{-\int_0^T [M(t)+F(t)]dt}$$

Pero si $X(0) = A$ entonces,

$$X(t) = X(0)e^{-\int_0^T [M(t)+F(t)]dt}$$

2. Encuentre la función de demanda $Q = f(P)$ si la elasticidad punto ε es igual a –1 para todo P>0.

   Solución.

$$\varepsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -1 \text{, o lo que es igual } \frac{dQ}{dP} = -\frac{Q}{P}$$

   Separando y ordenando variables,

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dP}{P}$$

   Integrando ambos lado,

$$\ln Q = -\ln P + \ln c \text{ (c = constante de integración)}$$

   Agrupando,

$$\ln Q + \ln P = \ln c$$

   por propiedad de logaritmos, ($\ln a + \ln b = \ln ab$)

$$QP = c \text{ ó, } Q = c/P$$

3. Encuentre la función de demanda $Q = f(P)$ si $\varepsilon = -(5P + 2P^2)/Q$ y $Q = 500$ cuando $P = 10$. $\varepsilon =$ elasticidad.

   Solución.

$$\varepsilon = \frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q} = \frac{-(5P+2P^2)}{Q}$$

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{-(5P+2P^2)}{Q}\cdot\frac{Q}{P} = -5-2P$$

Separando variables,

$$dQ = (-5 - 2P)dP$$

Integrando ambos lados,

$$Q(P) = -5P - P^2 + c$$

Para encontrar el valor de la constante, c, se utiliza los datos dados.

$$Q(10) = -5(10) - (10)^2 + c = 500$$

de donde $c = 650$. Finalmente,

$$Q(P) = 650 - 5P - P^2$$

6.4 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. $2\frac{dy}{dt} - 2t^2y - 9t^2 = 0$, $y(0) = -2.5$
2. $\frac{dy}{dt} - 2ty = e^{t^2}$
3. $\frac{dy}{dt} + 3y = 6t$, $y(0) = 1/3$
4. $\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = 0$, $y(3) = 12$