

CAPITULO 4: OPTIMIZACION

Optimización es el proceso de hallar el máximo o mínimo relativo de una función, generalmente sin la ayuda de gráficos.

4.1 CONCEPTOS CLAVE

A continuación se describirá brevemente algunos conceptos necesarios para comprender apropiadamente el tema de optimización.

4.1.1 Funciones crecientes y decrecientes

Se dice que función $f(x)$ es creciente (decreciente) en $x = a$, si en la vecindad inmediata del punto $[a, f(a)]$ el gráfico de la función crece (cae) al moverse de izquierda a derecha. Puesto que la primera derivada mide la tasa de cambio y pendiente de una función, una primera derivada positiva en $x = a$ indica que la función es creciente “a”; una primera derivada negativa indica que es decreciente.

$$f'(a) > 0: \text{función creciente en } x = a$$

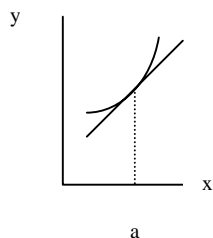
$$f'(a) < 0: \text{función decreciente en } x = a$$

4.1.2 Concavidad y convexidad

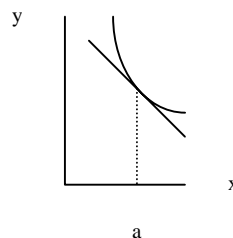
Una función $f(x)$ es *cóncava* en $x = a$, si en alguna pequeña región cercana al punto $[a, f(a)]$ el gráfico de la función se ubica completamente debajo de su línea tangente. Una función es *convexa* en $x = a$, si en un área cercana a $[a, f(a)]$ el gráfico esta completamente arriba de su línea tangente. Una segunda derivada positiva en $x = a$ denota que la función es convexa en $x = a$. Análogamente, una segunda derivada negativa en $x = a$ denota que la función es cóncava en “a”.

$$f''(a) > 0: f(x) \text{ es convexo en } x = a$$

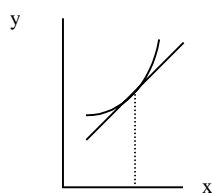
$$f''(a) < 0: f(x) \text{ es cóncavo en } x = a$$



Pendiente > 0
función creciente en $x=a$

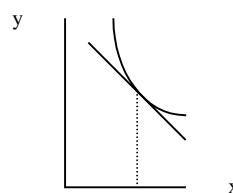


Pendiente < 0
función decreciente en $x=a$



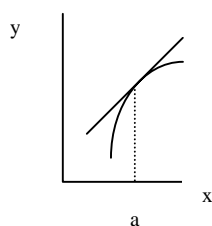
$$f'(a) > 0$$

$$f''(a) > 0$$

Convexo en $x=a$ 

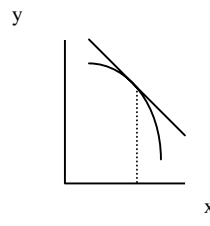
$$f'(a) < 0$$

$$f''(a) > 0$$



$$f'(a) > 0$$

$$f''(a) < 0$$

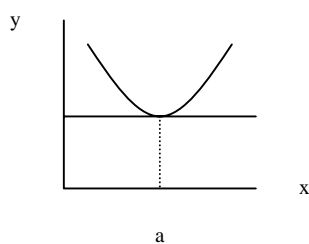
Concavo en $x=a$ 

$$f'(a) < 0$$

$$f''(a) < 0$$

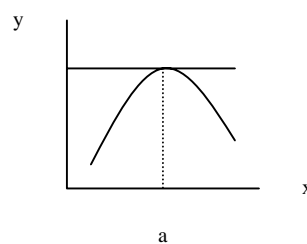
4.1.3 Extremo relativo

Un extremo relativo es un punto en el cual una función está a un máximo o mínimo. Para ello, la función debe estar en un punto en el cual no está creciendo ni decreciendo, y por ende, su primera derivada debe ser igual a cero o indefinida. Un punto en el dominio de una función donde la derivada iguala a cero o es indefinida es llamado punto o *valor crítico*.



$$f'(a) = 0$$

$$f''(a) > 0$$

mínimo relativo en $x=a$ 

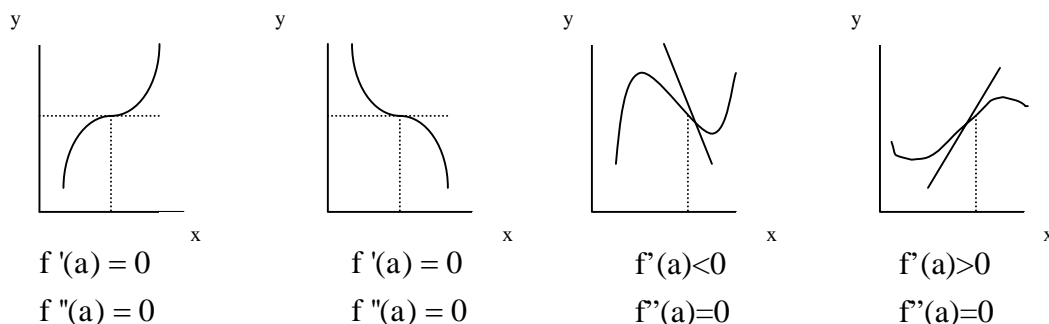
$$f'(a) = 0$$

$$f''(a) < 0$$

máximo relativo en $x=a$

4.1.4 Puntos de inflexión

Un punto de inflexión es un punto en el gráfico donde la función cruza su línea tangente y cambia de cóncavo a convexo y viceversa. Los puntos de inflexión pueden ocurrir solo donde la segunda derivada iguala a cero o es indefinida. Es decir, $f''(a) = 0$



4.2 OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIÓN

4.2.1 Funciones objetivo de una variable

Sea la función: $y = f(x)$, los pasos o condiciones para obtener el (los) máximo(s) o mínimo(s) relativo(s) serán:

1. Identificar los puntos críticos. Tomar la primera derivada e igualarla a 0, $\frac{dy}{dx} = 0$
2. Tomar la segunda derivada, evaluar los puntos críticos, y revisar los signos. esta condición es llamada “condición suficiente”. Si un punto crítico es “a”, entonces:
 - $f''(a) < 0$, la función es cóncava en “a”, por ende un máximo relativo
 - $f''(a) > 0$, la función es convexa en “a”, por ende un mínimo relativo
 - $f''(a) = 0$, el test es inconcluso y es necesario realizar el test de las “derivadas sucesivas”:
 - Si el primer valor diferente de cero de una derivada de orden superior, cuando se evalúa un punto crítico es una derivada de grado impar (tercer, quinto, etc), la función es un punto de inflexión.
 - Si el primer valor diferente de cero de una derivada de orden superior, cuando es evaluado en un punto crítico es una derivada de grado par, entonces la función es un extremo relativo en “a”. Si esta derivada tiene valor negativo entonces la función es cóncava en “a” (y por ende, es un máximo relativo). Caso contrario, la función es convexa y presenta un mínimo relativo en “a”.

Ejemplo 4-1. Sea $f(x) = -7x^2 + 126x - 23$, obtener el extremo relativo de tal función.

Solución.

- Calculando la primera derivada e igualándola a 0: $f'(x) = -14x + 126 = 0$;
 $x = 9$ (valor crítico)
- Tomando la segunda derivada y evaluando el valor crítico: $f''(x) = -14$,
entonces $f''(9) = -14 < 0$ es cóncavo, máximo relativo.

Ejemplo 4-2. Sea $f(x) = 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 + 5$, obtener el extremo relativo de tal función.

Solución.

- Calculando la primera derivada e igualándola a 0:

$$f'(x) = 8x^3 - 48x^2 + 64x = 0$$

$$f'(x) = 8x(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x = 0, x = 2, x = 4 \text{ (puntos críticos)}$$

- Tomando la segunda derivada y evaluando los puntos críticos:

$$f''(x) = 24x^2 - 96x + 64$$

$$f''(0) = 24(0)^2 - 96(0) + 64 = 64 > 0 \text{ convexo, mínimo relativo}$$

$$f''(2) = 24(2)^2 - 96(2) + 64 = -32 < 0 \text{ cóncavo, máximo relativo}$$

$$f''(4) = 24(4)^2 - 96(4) + 64 = 64 > 0 \text{ convexo, mínimo relativo}$$

Ejemplo 4-3. Sea $f(x) = -(x - 8)^4$, obtener el extremo relativo de tal función.

Solución.

- Calculando la primera derivada e igualándola a 0:

$$f'(x) = -4(x - 8)^3 = 0$$

$$x = 8 \text{ (punto crítico)}$$

- Tomando la segunda derivada y evaluando el punto crítico:

$$f''(x) = -12(x - 8)^2$$

$$f''(8) = -12(8 - 8)^2 = 0, \text{ se requiere el test de derivadas sucesivas.}$$

$$f'''(8) = -24(x - 8)$$

$$f'''(8) = 24(8 - 8) = 0 \text{ test inconcluso}$$

$$f''''(x) = -24$$

$$f''''(8) = -24 < 0 \text{ cóncavo, máximo relativo}$$

4.2.2 Funciones objetivo de dos variables

Para que una función como $z = f(x, y)$ tenga un mínimo o máximo relativo, tres condiciones deben ser satisfechas:

1. Las derivadas parciales de primer orden deben simultáneamente ser iguales a cero. Ello indica que en un punto dado (a,b) llamado “punto critico”, la función no esta creciendo ni decreciendo con respecto a los ejes principales sino a una superficie relativa.
2. Las derivadas parciales de segundo orden deben ser negativas cuando ellas son evaluadas en el punto critico (a,b) para un máximo relativo y positivas para un mínimo relativo. Ello asegura que la función es cóncava y moviéndose hacia abajo en relación a los ejes principales en el caso de un máximo relativo y convexo y moviéndose hacia arriba en relación a los ejes principales en el caso de un mínimo relativo.
3. El producto de las derivadas parciales de segundo orden evaluadas en el punto critico deben exceder el producto de las derivadas parciales cruzadas también evaluadas en dicho punto. Esta condición adicional es necesaria para evitar un punto de inflexión o punto de silla. En resumen:

Condición necesaria de:	Máximo	Mínimo
Primer orden	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
Segundo orden*	$f_{xx}, f_{yy} < 0$ y $f_{xx}f_{yy} > (f_{xy})^2$	$f_{xx}, f_{yy} > 0$ y $f_{xx}f_{yy} > (f_{xy})^2$

Nota: las derivadas parciales de segundo orden son evaluadas en el punto critico (a,b) o los puntos críticos que hubieren.

En la situación que $f_{xx}f_{yy} < (f_{xy})^2$, cuando f_{xx} y f_{yy} tienen el mismo signo, la función esta en un punto de inflexión. Caso contrario, la función estará en un punto de silla. Si $f_{xx}f_{yy} = (f_{xy})^2$ entonces se requeriría mayor información.

Ejemplo 4-4. En la siguiente función encontrar los puntos críticos y determinar si éstos son máximos o mínimos relativos, puntos de inflexión o puntos de silla:
 $f(x, y) = 3x^3 - 5y^2 - 225x + 70y + 23$.

Solución.

- Calculando la primera derivada e igualándola a 0:

$$f_x = 9x^2 - 225 = 0; f_y = -10y + 70 = 0$$

Resulta: $x = \pm 5$, $y = 7$. Entonces los puntos críticos serán: (5,7) y (-5,7)

- Calculando la segundas derivadas (sin evaluarlas o testearlas)

$$f_{xx} = 18x, f_{yy} = -10 \text{ y } f_{xy} = f_{yx} = 0$$

- Evaluando el punto crítico (5,7):

$$f_{xx}(5,7) = 18(5) = 90$$

$$f_{yy}(5,7) = -10$$

$$\text{¿Cumple } f_{xx}(5,7) \cdot f_{yy}(5,7) > [f_{xy}(5,7)]^2 ?$$

$$90 \cdot -10 < [0]^2 \text{ (no cumple!)}$$

Entonces este punto crítico no es ni máximo ni mínimo. Puesto que f_{xx} y f_{yy} (evaluadas en este punto crítico) tienen signo diferente, se concluye que este punto es un *punto de silla*.

- Evaluando el punto crítico (-5,7)

$$f_{xx}(-5,7) = 18(-5) = -90$$

$$f_{yy}(-5,7) = -10$$

$$\text{¿Cumple } f_{xx}(-5,7) \cdot f_{yy}(-5,7) > [f_{xy}(-5,7)]^2 ?$$

$$-90 \cdot -10 > 0 \text{ (Si cumple!)}$$

Dado que se cumple $f_{xx}(-5,7) \cdot f_{yy}(-5,7) > [f_{xy}(-5,7)]^2$ y además, $f_{xx}, f_{yy} < 0$ entonces el punto en análisis es un *máximo*.

Ejemplo 4-5. En la siguiente función encontrar los puntos críticos y determinar si éstos son máximos o mínimos relativos, puntos de inflexión o puntos de silla: $f(x,y) = 3x^3 + 1.5y^2 - 18xy + 17$. Solución.

- Calculando la primera derivada e igualándola a 0 (condición de primer orden):

$$f_x = 9x^2 - 18y = 0$$

$$f_y = 3y - 18x = 0$$

$$\text{Entonces } y = \frac{1}{2}x^2, y = 6x, \text{ de donde, } x = 0, x = 12.$$

En consecuencia, $y = 0, y = 72$. Así, los puntos críticos son: (0,0) y (12,72)

- Calculando las segundas derivadas:

$$f_{xx} = 18x, f_{yy} = 3 \text{ y } f_{xy} = f_{yx} = -18$$

- Evaluando el punto crítico (0,0)

$$f_{xx}(0,0) = 18(0) = 0$$

$$f_{yy}(0,0) = 3$$

¿Cumple que $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) > [f_{xy}(0,0)]^2$?

$0 \cdot 3 < (-18)^2$ (No cumple!).

Entonces este punto crítico no es ni máximo ni mínimo. Puesto que f_{xx} y f_{yy} (evaluadas en este punto crítico) tienen signos iguales entonces es un *punto de inflexión*.

- Evaluando el punto crítico (12,72)

$$f_{xx}(12,72) = 18(12) = 216$$

$$f_{yy}(12,72) = 3$$

¿Cumple que $f_{xx}(12,72) \cdot f_{yy}(12,72) > [f_{xy}(12,72)]^2$?

$216 \cdot 3 > (-18)^2$ (si cumple!)

Dado que se cumple $f_{xx}(12,72) \cdot f_{yy}(12,72) > [f_{xy}(12,72)]^2$ y además, $f_{xx}, f_{yy} > 0$ entonces el punto en análisis es un *mínimo relativo*.

4.2.3 Funciones objetivo con más de dos variables

Considerando una función de tres variables $z = f(x_1, x_2, x_3)$ cuyas derivadas parciales primeras son f_1, f_2 y f_3 y las derivadas parciales segundas $f_{ij} (\equiv \partial^2 z / \partial x_i \partial x_j)$; con $i, j = 1, 2, 3$. Conforme al teorema de Young se sabe que $f_{ij} = f_{ji}$. Como en los casos anteriores, para tener un máximo o un mínimo de z es necesario que $dz = 0$ para valores arbitrarios de dx_1, dx_2 y dx_3 , no todos nulos. Ya que el valor de dz es ahora $dz = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$. Ya que dx_1, dx_2 y dx_3 son no nulos, la única forma de garantizar que $dz = 0$ es $f_1 = f_2 = f_3 = 0$. En otras palabras, lo mismo que en el caso de dos variables. Generalizando para 3 o más variables, el test de determinante para un extremo relativo en este caso será:

Condición necesaria de:	Máximo	Mínimo
Primer orden	$f_1 = f_2 = f_3 = \dots = f_n = 0$	$f_1 = f_2 = f_3 = \dots = f_n = 0$
Segundo orden*	$ H_1 < 0; H_2 > 0; H_3 < 0; \dots; (-1)^n H_n > 0$	$ H_1 , H_2 , \dots, H_n > 0$

donde $|H_n|$ es el determinante de la matriz Hessiana (simétrica).

Hessiano (simétrico)

Es simplemente una matriz conformada por derivadas de segundo grado. Esta matriz es utilizada para testear máximos o mínimos en funciones con n variables. En general, el hessiano será:

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}, \text{ donde los menores serán:}$$

$$|H_1| = f_{11}, |H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, |H_3| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \text{ y así sucesivamente.}$$

Para el caso de una matriz hessiana del orden 3×3 , $|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$, los menores pueden denotarse como:

$$|H_1| = f_{11}, |H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \text{ y } |H_3| = |H|.$$

Ejemplo 4-6. Hallar los valores extremos de $z = -x_1^3 + 3x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 3x_3^2$.

Solución. Dado

- Las derivadas parciales son:

$$f_1 = -3x_1^2 + 3x_3; f_2 = 2 - 2x_2; f_3 = 3x_1 - 6x_3.$$

Ahora, haciendo $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, los puntos críticos serán: $(0,1,0)$ y $(1/2,1,1/4)$

Reemplazando tales puntos en la función original, z , se tiene que $\bar{z} = 1$, y $\bar{z} = 17/16$, respectivamente.

- Las derivadas parciales de segundo orden dispuesta ordenadamente en el hessiano:

$$|H| = \begin{vmatrix} -6x_1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\text{Usando } (0,1,0), \text{ el hessiano es: } |H| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix}, \text{ de donde } |H_1| = 0, |H_2| = 0, \text{ y}$$

$$|H_3| = 18.$$

No concuerda con ninguna de las dos test. Entonces es necesaria mayor información.

Usando $(1/2, 1, 1/4)$ el hessiano es:

$$|H| = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix}, \text{ de donde } |H_1| = -3, |H_2| = 6 \text{ y } |H_3| = -18.$$

Cumple el test, entonces, el punto $\bar{z} = 17/16$ es máximo.

Ejemplo 4-7. Utilizar el criterio del Hessiano con el ejemplo 4-5.

- Los puntos críticos son: $(0,0)$ y $(12,72)$
- Las segundas derivadas: $f_{xx} = 18x$, $f_{yy} = 3$ y $f_{xy} = f_{yx} = -18$

El hessiano será:

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \text{ o lo que es igual: } |H| = \begin{vmatrix} 18x & -18 \\ -18 & 3 \end{vmatrix}$$

- Evaluando el hessiano para el punto $(0,0)$:

$$|H| = \begin{vmatrix} 18(0) & -18 \\ -18 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|H_1| = 18(0) = 0$$

$$|H_2| = 18(0) \times 3 - (-18)(-18)$$

$$|H_2| = -324$$

Puesto que $|H_1| = 0$ y $|H_2| < 0$ entonces el punto no es máximo ni mínimo. Es un punto de silla o de inflexión (revisar los criterios).

- Evaluando el hessiano en el punto $(12,72)$:

$$|H| = \begin{vmatrix} 18(12) & -18 \\ -18 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|H_1| = 18(12) = 216$$

$$|H_2| = 18(12) \times 3 - (-18)(-18)$$

$$|H_2| = 324$$

Dado que $|H_1| > 0$ y $|H_2| > 0$, el punto es un mínimo.

Cuando se utiliza el criterio del hessiano para funciones de dos variables es necesario resaltar lo siguiente:

La matriz hessiana será de orden 2:

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Para el caso de un *máximo*, el hessiano requiere inicialmente que:

$|H_1| < 0$, o lo que es igual

$$f_{xx} < 0 \quad (i)$$

Además, se requiere que $|H_2| > 0$, o lo que es igual:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{yx}f_{xy} > 0 \quad (ii)$$

Recordando que $f_{xy} = f_{yx}$, tal expresión puede quedar como:

$$f_{xx}f_{yy} > (f_{xy})^2 \quad (iii)$$

Dado que $f_{xx} < 0$, para que la expresión (iii) sea válida es necesario que:

$$f_{yy} < 0 \quad (iv)$$

Entonces, para que el punto crítico sea un máximo se requiere que se cumpla (i), (iii) y (iv), condiciones de suficiencia conforme a la sección 4.2.2. Note que la multiplicación de las segundas derivadas parciales debe ser positiva ($f_{xx}f_{yy} > 0$) ya que cada segunda derivada debe ser negativa.

Para el caso de un mínimo, el lector puede fácilmente demostrar que las condiciones señaladas en el punto 4.2.2 igualmente coinciden con el criterio del hessiano (simétrico). ¿Por qué?. En realidad, el hessiano (simétrico) es el caso general para optimización funciones de cualquier orden.

4.3 OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIÓN

4.3.1 Funciones con igualdades

Para optimizar una función $f(x_1, x_2)$ sujeta a una restricción $g(x_1, x_2) = k$ (una constante), una nueva función F puede ser formada por (1) estableciendo la restricción igual a cero, (2) multiplicándolo por λ (el *multiplicador de Lagrange*) y (3) sumando el producto a la función original:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[k - g(x_1, x_2)]$$

Aquí, $F(x_1, x_2, \lambda)$ es la función Lagrangiana, $f(x_1, x_2)$ es la *función objetivo* u original, y $g(x_1, x_2)$ es la restricción. Puesto que la restricción es siempre igualada a cero, el producto $\lambda[k - g(x_1, x_2)]$ también iguala a cero y la suma de tal término no cambia el valor de la función objetivo. Los valores críticos x_0 , y_0 , y λ_0 (para los cuales la función es optimizada) son obtenidos tomando las derivadas parciales de F (con respecto a todas las tres variables independientes) e igualándolas a cero. Es decir, simultáneamente:

$$F_1(x_1, x_2, \lambda) = 0, F_2(x_1, x_2, \lambda) = 0 \text{ y } F_\lambda(x_1, x_2, \lambda) = 0$$

Hessiano Orlado

Ahora, para determinar si los valores críticos corresponden a un máximo o mínimo, es necesario utilizar el criterio del Hessiano Orlado. Este tipo de hessiano se aplica para el caso de optimización de funciones con restricciones. En general, cuando la función objetivo toma la forma de $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sujeta a $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$, el Hessiano Orlado será de la forma siguiente:

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ g_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ g_2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

sus sucesivos menores principales orlados pueden definirse como

$$|\bar{H}_2| \equiv \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & F_{11} & F_{12} \\ g_2 & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \text{ y } |\bar{H}_3| \equiv \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ g_2 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ g_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

Condición necesaria de:	Máximo	Mínimo
Primer orden	$F_\lambda = F_1 = F_2 = \dots = F_n = 0$	$F_\lambda = F_1 = F_2 = \dots = F_n = 0$
Segundo orden	$ \bar{H}_2 > 0; \bar{H}_3 < 0; \bar{H}_4 > 0; \dots; (-1)^n \bar{H}_n > 0$	$ \bar{H}_2 , \bar{H}_3 , \dots, \bar{H}_n < 0$

Ejemplo 4-7. Optimizar la función $z = 4x^2 + 3xy + 6y^2$ sujeto a la restricción $x + y = 56$.

Solución. Con fines prácticos, establecer la restricción igual a cero, sustrayendo las variables de la constante:

$$56 - x - y$$

Multiplicar esta diferencia por λ y sumar el producto de ambos a la función objetivo a fin de formar la función Lagrangiana Z .

$$Z = 4x^2 + 3xy + 6y^2 + \lambda(56 - x - y)$$

Calcular las derivadas parciales de primer orden, igualarlas a cero y resolverlas simultáneamente

$$Z_x = 8x + 3y - \lambda = 0$$

$$Z_y = 3x + 12y - \lambda = 0$$

$$Z_\lambda = 56 - x - y \quad \text{resolviendo se tiene que } x_0 = 36, y_0 = 20 \text{ y } \lambda_0 = 348$$

Substituyendo tales valores críticos en la función objetivo

$$Z = 4(36)^2 + 3(36)(20) + 6(20)^2 + (348)(56 - 36 - 20)$$

$$Z = 9744$$

Ahora es necesario corroborar si el punto crítico obtenido es máximo o mínimo local. Para ello, se formulará el Hessiano Orlado y luego se procederá a analizar los test respectivos.

El Hessiano Orlado requiere derivadas de segundo orden: $Z_{xx} = 8$, $Z_{yy} = 12$, $Z_{xy} = 3$. Ordenando estos valores apropiadamente en el Hessiano Orlado:

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 12 \end{vmatrix}$$

$$|\bar{H}| = |\bar{H}_2| = 0(-1)^2 \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -14$$

4.3.2 Funciones con desigualdades

Algunos problemas económicos requieren condiciones de desigualdades, por ejemplo cuando se desea maximizar la utilidad sujeta a gastar *no mas* que x soles o minimizar costos sujeta a producir *no menos* que x unidades de producción. En estos casos se utiliza la programación “cóncava” (llamada así porque tanto la función objetivo como la restricción son funciones asumidas cóncavas) es una forma de programación no lineal diseñada para optimizar funciones sujetas a restricciones de desigualdad.

Las funciones convexas no son excluidas ya que el negativo de una función convexa es una función cóncava. Normalmente, el problema de optimización se establece en el formato de problema de maximización, no obstante, la programación cóncava puede además minimizar una función mediante la maximización del negativo de la función convexa.

Dado un problema de maximización sujeta a una restricción de desigualdad con las siguientes funciones objetivo cóncavas diferenciables,

$$\text{maximizar } f(x_1, x_2) \text{ sujeta a } g(x_1, x_2), \text{ siendo } x_1, x_2 \geq 0$$

Así, la función Lagrangiana correspondiente será:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

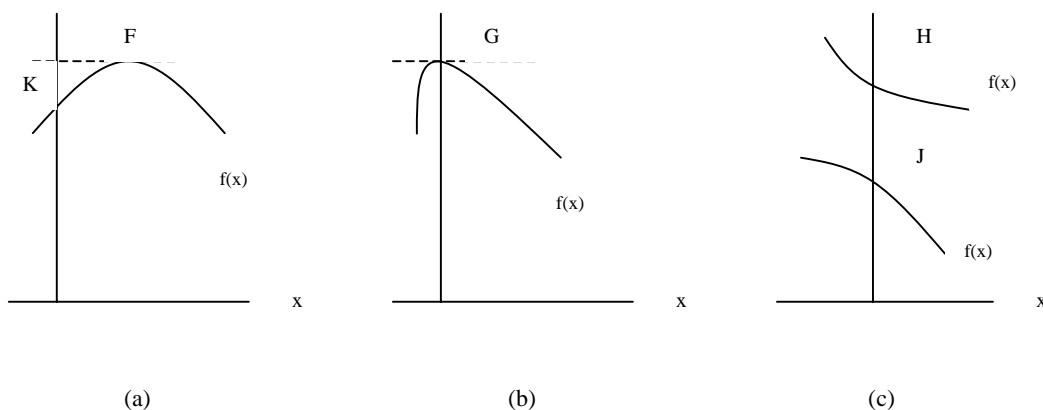
las condiciones suficientes y necesarias de primer orden para la maximización, llamadas condiciones de *Kuhn-Tucker* son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \bar{\lambda} g_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq 0 \\ \bar{x}_i &\geq 0 \\ \bar{x}_i \frac{\partial F}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \geq 0 \\ \bar{\lambda} &\geq 0 \\ \bar{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned}$$

donde las condiciones en (c) son llamadas condiciones complementarias, significando que tanto \bar{x} como $f'(\bar{x})$ no pueden ser -simultáneamente- cero. Puesto que una función lineal es cóncava y convexa, aunque no estrictamente cóncava o estrictamente convexa, un problema de programación-cóncava consiste únicamente de funciones lineales que cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker siempre satisfacerán las condiciones necesarias y suficientes para un máximo.

En las condiciones de Kuhn-Tucker la restricción es siempre expresada como mas grande o igual que cero. Esto significa que a diferencia de las restricciones de igualdad

que son establecidas igual a cero, el orden de la sustracción es importante en programación cóncava.



(a) Para el máximo en F, una solución interior,

$$f'(x) = 0 \quad \text{y} \quad x > 0$$

(b) Para el máximo en G, una solución de frontera,

$$f'(x) = 0 \quad \text{y} \quad x = 0$$

(c) Para el máximo en H o J, ambas soluciones de frontera,

$$f'(x) < 0 \quad \text{y} \quad x = 0$$

Todas las posibilidades para un máximo en el primer cuadrante pueden ser resumidas como:

$$f'(x) \leq 0 \quad x \geq 0 \quad \text{y} \quad xf'(x) = 0$$

los cuales son reconocibles como parte de las condiciones de Kuhn-Tucker. Notar que tales condiciones automáticamente excluyen un punto como K en (a) el cual no es un máximo, porque $f'(K) > 0$ (porque?).

Cabe mencionar que la expresión $xf'(x) = 0$ significa que al menos una de las dos cantidades (que conforman tal expresión) debe tomar el valor cero.

Ejemplo 4-8. Maximizar la función de beneficio $B = 64x - 2x^2 + 96y - 4y^2 - 13$ sujeto a la una restricción de producción $x + y \leq 36$.

Solución. La función Lagrangiana y las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$\pi = 64x - 2x^2 + 96y - 4y^2 - 13 + \lambda(36 - x - y)$$

$$\begin{array}{ll}
1.a & \pi_x = 64 - 4\bar{x} - \bar{\lambda} \leq 0 & \pi_y = 96 - 8\bar{y} - \bar{\lambda} \leq 0 \\
1.b & \bar{x} \geq 0 & \bar{y} \geq 0 \\
1.c & \bar{x}(64 - 4\bar{x} - \bar{\lambda}) = 0 & \bar{y}(96 - 8\bar{y} - \bar{\lambda}) = 0 \\
2.a & & \pi_{\lambda} = 36 - \bar{x} - \bar{y} \geq 0 \\
2.b & & \bar{\lambda} \geq 0 \\
2.c & & \bar{\lambda}(36 - \bar{x} - \bar{y}) = 0
\end{array}$$

Entonces se testean o revisan las condiciones de Kuhn Tucker,

1. Testeando la posibilidad de $\bar{\lambda} = 0$ ó $\bar{\lambda} > 0$

Si $\bar{\lambda} = 0$, entonces de 1(a),

$$\begin{array}{ll}
64 - 4\bar{x} \leq 0 & 96 - 8\bar{y} \leq 0 \\
\bar{x} \geq 16 & \bar{y} \geq 12
\end{array}$$

Por lo tanto, puesto que $\bar{x} + \bar{y} = 28 < 36$, ninguna condición es violada. Por lo tanto, es posible que $\bar{\lambda} = 0$ ó $\bar{\lambda} > 0$.

2. Ahora testear si alguna de las variables \bar{x} o \bar{y} puede ser igual a 0.

- Si $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 36$, la segunda condición en 1(c) es violada.

$$36[96 - 8(36) - (\bar{\lambda} \geq 0)] \neq 0$$

- Si $\bar{y} = 0$, $\bar{x} = 36$, la segunda condición en 1(c) es violada

$$36[64 - 4(36) - (\bar{\lambda} \geq 0)] \neq 0$$

Por lo tanto, ninguna variable puede ser igual a cero, y de 1(b),

$$\bar{x} > 0 \quad \bar{y} > 0$$

3. Testear las soluciones cuando (a) $\bar{\lambda} > 0$ y (b) $\bar{\lambda} = 0$

(a) Si $\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{y} > 0$ entonces de las condiciones de Kuhn-Tucker,

$$\begin{array}{l}
64 - 4\bar{x} - \bar{\lambda} = 0 \\
96 - 8\bar{y} - \bar{\lambda} = 0 \\
36 - \bar{x} - \bar{y} = 0
\end{array}$$

En forma de matriz,

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -64 \\ -96 \\ -36 \end{bmatrix}$$

Usando la Regla de Cramer donde $|A|=12$, $|A_x|=256$, $|A_y|=176$, y $|A_\lambda|=-256$ se obtiene que $\bar{x}=21.33$, $\bar{y}=14.67$, y $\bar{\lambda}=-21.33$. lo cual no puede ser óptimo ya que $\bar{\lambda} < 0$ (de 2(c)).

(b) Si $\bar{\lambda} = 0$ y $\bar{x}, \bar{y} > 0$ entonces de 1(c),

$$\begin{aligned} 64 - 4\bar{x} &= 0, \quad \bar{x} = 16 \\ 96 - 8\bar{y} &= 0, \quad \bar{y} = 12 \end{aligned}$$

Esto da la solución correcta: $\bar{x} = 16$, $\bar{y} = 12$ y $\bar{\lambda} = 0$, lo cual es óptimo ya que no viola ninguna condición de Kuhn-Tucker.

Ejemplo 4-9. Minimizar la función de costo, $K = 5x^2 - 80x + y^2 - 32y$ sujeto a $x + y \geq 30$.

Solución. Multiplicando la función objetivo por -1 y estableciendo el Lagrangiano,

$$\text{Max} C = -5x^2 + 80x - y^2 + 32y + \lambda(x + y - 30)$$

donde las condiciones de Kuhn-Tucker son,

$$\begin{array}{ll} 1.a & C_x = -10\bar{x} + 80 + \bar{\lambda} \leq 0 & C_y = -2\bar{y} + 32 + \bar{\lambda} \leq 0 \\ 1.b & \bar{x} \geq 0 & \bar{y} \geq 0 \\ 1.c & \bar{x}(-10\bar{x} + 80 + \bar{\lambda}) = 0 & \bar{y}(-2\bar{y} + 32 + \bar{\lambda}) = 0 \\ 2.a & C_\lambda = \bar{x} + \bar{y} - 30 \geq 0 & \\ 2.b & \bar{\lambda} \geq 0 & \\ 2.c & \bar{\lambda}(\bar{x} + \bar{y} - 30) = 0 & \end{array}$$

1. Verificando la posibilidad de $\bar{\lambda} = 0$

Si $\bar{\lambda} = 0$, entonces de 1(a),

$$\begin{aligned} -10\bar{x} + 80 &\leq 0 & -2\bar{y} + 32 &\leq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bar{x} &\geq 8 & \bar{y} &\geq 16 \end{aligned}$$

pero esto es una violación porque $\bar{x} + \bar{y} \geq 24$, lo cual no satisface la restricción inicial $\bar{x} + \bar{y} \geq 30$, así que $\bar{\lambda} > 0$.

2. Verificar si \bar{x} o \bar{y} pueden ser igual a cero.

De 1(a), si $\bar{x} = 0$, $\bar{\lambda} \leq -80$, y si $\bar{y} = 0$, $\bar{\lambda} \leq -32$, las cuales violan la restricción de no negatividad en las variables. Así que $\bar{x}, \bar{y} > 0$.

3. Ahora, revisar las condiciones de Kuhn-Tucker cuando $\bar{x}, \bar{y} > 0$ y $\bar{\lambda} > 0$. Si $\bar{\lambda} > 0$ y $\bar{x}, \bar{y} > 0$, todas las primeras derivadas parciales son estrictas igualdades:

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 \\ -32 \\ 30 \end{bmatrix}$$

donde $|A| = 12$, $|A_1| = 109$, $|A_2| = 252$ y $|A_3| = 440$, lo cual dan la solución óptima ($\bar{x} = 9$, $\bar{y} = 21$, $\bar{\lambda} = 36.67$) ya que ninguna condición de Kuhn-Tucker es violada.

4.4 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Maximize la función de ingreso total $IT = 32q - q^2$

Solución.

Paso 1. CPO: (condiciones de primer orden)

$$\begin{aligned} IT' &= 32 - 2q = 0 \\ q &= 16 \quad (\text{valor crítico}) \\ q &= 16 \end{aligned}$$

Paso 2. Evaluar la segunda derivada

$$IT'' = -2 < 0 \quad (\text{cóncavo, máximo relativo})$$

$$\text{Así, el ingreso total máximo será: } IT(16) = 32(16) - (16)^2 = 256$$

2. Maximize la siguiente función de beneficio: $\pi = -\frac{1}{3}q^3 - 5q^2 + 200q - 326$

Solución.

Paso 1. CPO: (condiciones de primer orden)

$$\begin{aligned} \pi' &= -q^2 - 10q + 200 = 0 \\ (q + 50)(q - 40) &= 0 \end{aligned}$$

De donde los valores críticos son: $q = -50$ y $q = 40$

Paso 2. Evaluar la segunda derivada

$$\pi'' = -2q - 10$$

$$\pi''(40) = -2(40) - 10 = -90 < 0 \text{ (cóncavo, mínimo relativo)}$$

$$\pi''(-50) = -2(-50) - 10 = 90 > 0 \text{ (convexo, máximo relativo)}$$

Puesto que q negativo no tiene significado económico, el valor crítico negativo es descartado. Entonces el beneficio máximo será:

$$\pi(40) = -\frac{1}{3}(40)^3 - 5(40)^2 + 2000(40) - 326 = 50340.37$$

3. Una firma que produce dos bienes x e y tiene la siguiente función de beneficio:

$$\pi = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$$

Encontrar el nivel de producción de cada bien a fin de maximizar el beneficio.

Solución.

Paso 1. CPO: (condiciones de primer orden)

$$\pi_x = 64 - 4x + 4y = 0$$

$$\pi_y = 4x - 8y + 32 = 0$$

Paso 2. Resolver el sistema

$$\bar{x} = 40 \text{ e } \bar{y} = 24$$

Paso 3. Calcular las segundas derivadas y asegurarse que ambas son negativas, como se requiere para un máximo relativo.

$$\pi_{xx} = -4 \text{ y } \pi_{yy} = -8 \text{ (cumple!)}$$

Paso 4. Tomar las derivadas cruzadas para asegurarse que $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$.

Sabiendo que $\pi_{xy} = \pi_{yx} = 4$,

$$\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$$

$$(-4)(-8) > (4)^2$$

$$36 > 16$$

Así, los beneficios son maximizados cuando $\bar{x} = 40$ e $\bar{y} = 24$. En ese punto, $\pi = 1650$.

4. La función de producción Cobb-Douglas para un nuevo producto esta dada por:

$$N(x, y) = 16x^{0.25}y^{0.75}$$

donde x es el número de unidades de trabajo e y es el numero de unidades de capital requeridas para producir $N(x, y)$ unidades del producto. Cada unidad de trabajo cuesta S/. 50 mientras que cada unidad de capital cuesta S/. 100. Si S/.500000 han sido presupuestados para la producción de este bien, ¿cuanto debería ser la cantidad asignada para el trabajo y capital a fin de maximizar la producción?. ¿Cuál es el máximo número de unidades que pueden ser producidos?.

Solución. El costo total de usar x unidades de trabajo e y unidades de capital es $50x + 100y$. Entonces la restricción impuesta por el presupuesto de S/. 500000 es $50x + 100y = 500000$.

Paso 1. Maximizar $N(x, y) = 16x^{0.25}y^{0.75}$
 sujeto a $50x + 100y = 500000$ ó $50x + 100y - 500000 = 0$

Paso 2. $F(x, y, \lambda) = 16x^{0.25}y^{0.75} + \lambda(50x + 100y - 500000)$

Paso 3. $F_x = 4x^{-0.75}y^{0.75} + 50\lambda = 0$
 $F_y = 12x^{0.25}y^{-0.25} + 100\lambda = 0$
 $F_\lambda = 50x + 100y - 500000 = 0$

Paso 4. Resolver el sistema.

De las dos primeras ecuaciones,

$$\lambda = -\frac{2}{25}x^{-0.75}y^{0.75} \text{ y } \lambda = -\frac{3}{25}x^{0.25}y^{-0.25}$$

Entonces,

$$-\frac{2}{25}y = -\frac{3}{25}x$$

$$y = \frac{3}{2}x \text{ (se puede asumir que tanto } x \text{ como } y \text{ son diferentes de cero)}$$

Ahora sustituyendo este resultado en la tercera ecuación y resolviendo para x :

$$50x + 100\left(\frac{3}{2}x\right) - 500000 = 0$$

$$x = 2500, \text{ y entonces}$$

$$y = \frac{3}{2}(2500) = 3750$$

$$\lambda = -\frac{2}{25}(2500)^{-0.75}(3750)^{0.75} = -0.1084$$

Entonces, el único punto crítico de F es (2500, 3750, -0.1084)

Paso 5. Puesto que F tiene solo un punto crítico se concluye que la máxima productividad ocurre cuando 2500 unidades de trabajo y 3750 unidades de capital son utilizadas en la producción.

$$\begin{aligned}\text{Max}N(x, y) &= N(2500, 3750) \\ &= 16(2500)^{0.25}(3750)^{0.75} \\ &= 54.216 \text{ unidades (es decir, 54)}\end{aligned}$$

El valor negativo del multiplicador de Lagrange es llamado (en este caso): productividad marginal del dinero y da el incremento aproximado en producción por cada sol (S/.) gastado en la producción. Por ejemplo, incrementando el presupuesto de S/. 500000 a S/. 600000 resultaría en un incremento aproximado en la producción de:

$$0.1084(100000) = 10840 \text{ unidades.}$$

Note que simplificando la ecuación de restricción

$50x + 100y - 500000 = 0$ a $x + 2y - 10000 = 0$ daría un resultado incorrecto. Por ello, no debe simplificarse esta ecuación.