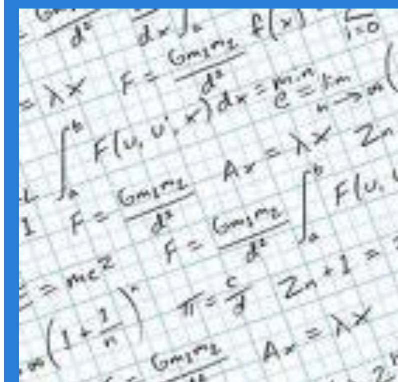
PUCMM

Economía Matemática

Septiembre – Diciembre, 2017



Optimización

Optimización: Preliminares

Conceptos preliminares

- **Optimizar:** tr. *Buscar la mejor manera de realizar una actividad* [«*La mano invisible*» vs Objetivo]
  - Procesos
  - Productos
  - Algoritmos
  - Funciones

+ Conceptos preliminares

- **Optimización** (Programación) **Matemática:**
  - Ingeniería y Mecánica
  - Investigación de Operaciones
  - Economía:
    - Micro: Utilidad, Beneficios, Costos, Portafolios…
    - Macro: DSGE Models

+ Conceptos preliminares

- **Optimización** (Programación) **Matemática:**
  - Lineal o No Lineal
  - Restringida o No Restringida
  - Univariada o Multivariada
  - Convexa (Cóncava) o no
  - Estática o Dinámica
  - Multi-objetivo, Multi-modal, Estocástica

Conceptos preliminares

Lineal

- Restringida

No Lineal

- No restringida
- Restringida

+ Conceptos preliminares

- Optimización lineal restringida:

$$\min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

$$s.a.$$

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \ \ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

+ Conceptos preliminares

- Optimización no lineal restringida:

$$
\begin{aligned}
&\min \; f(x) \\
&s.a. \\
&g_i(x) \leq 0 \\
&h_j(x) = 0
\end{aligned}
$$

Función objetivo

Variable(s) de elección (decisión, política...)

Conceptos preliminares

- Optimización no lineal restringida:

$$
\begin{aligned}
&\min\ f(x) \\
&s.a. \\
&g_i(x) \leq 0 \\
&h_j(x) = 0
\end{aligned}
$$

> ***"Under differentiability and constraint qualifications, the Karush–Kuhn–Tucker (KKT) conditions provide necessary conditions for a solution to be optimal. Under convexity, these conditions are also sufficient."***

Conceptos preliminares

- Optimización no lineal:
  - Casos particulares:

1. $g_i(x) \equiv 0$ y $h_j(x) \equiv 0$ **[No Restringida]**
2. $g_i(x) \equiv 0$
3. $h_j(x) \equiv 0$
4. $g_i(x)$ y $f(x)$ **convexas**

Derivación y Optimización

+ Derivación y Optimización

- Función creciente: Se dice que $y = f(x)$ es creciente en un punto 'a' si se cumple que:

$$\frac{dy}{dx}(a) = f'(a) > 0$$

¿Por qué?

- Función decreciente $\frac{dy}{dx}(a) = f'(a) < 0$

Derivación y Optimización

- La gran pregunta es:

¿Qué pasa cuando $\frac{dy}{dx}(a) = f'(a) = 0$?

Derivación y Optimización

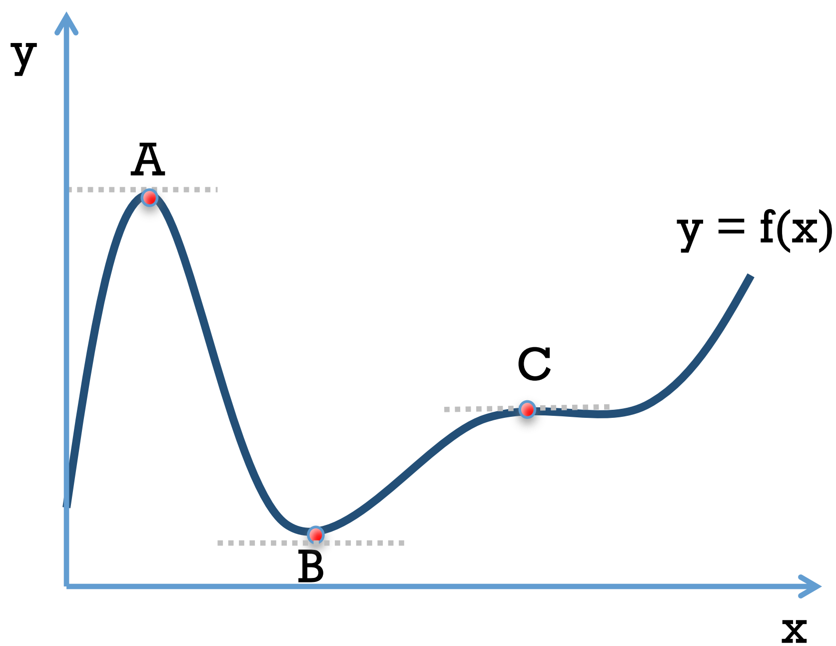
- La gran pregunta es:

¿Qué pasa cuando $\frac{dy}{dx}(a) = f'(a) = 0$?

¡Valor Crítico!

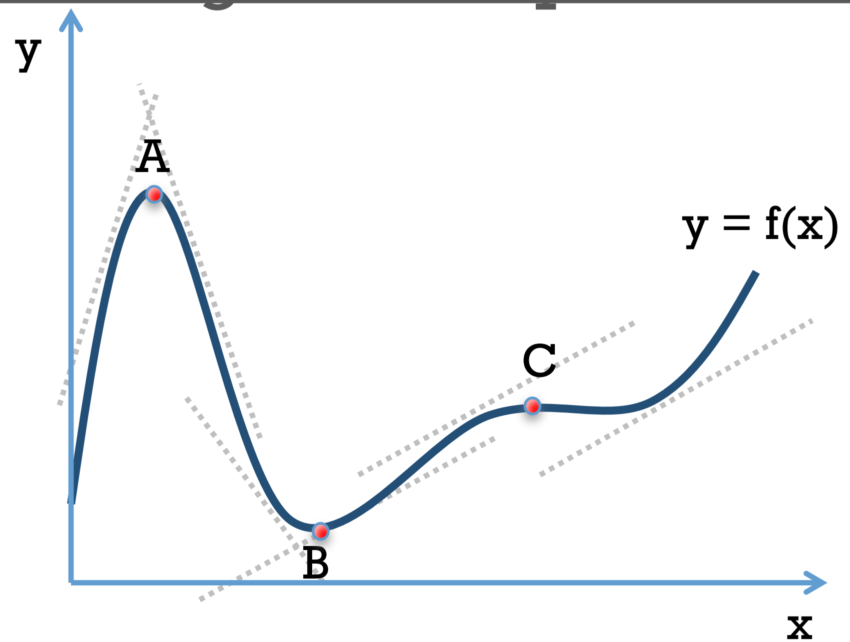
Derivación y Optimización

- Valor crítico: $\dfrac{dy}{dx}(a) = f'(a) = 0$



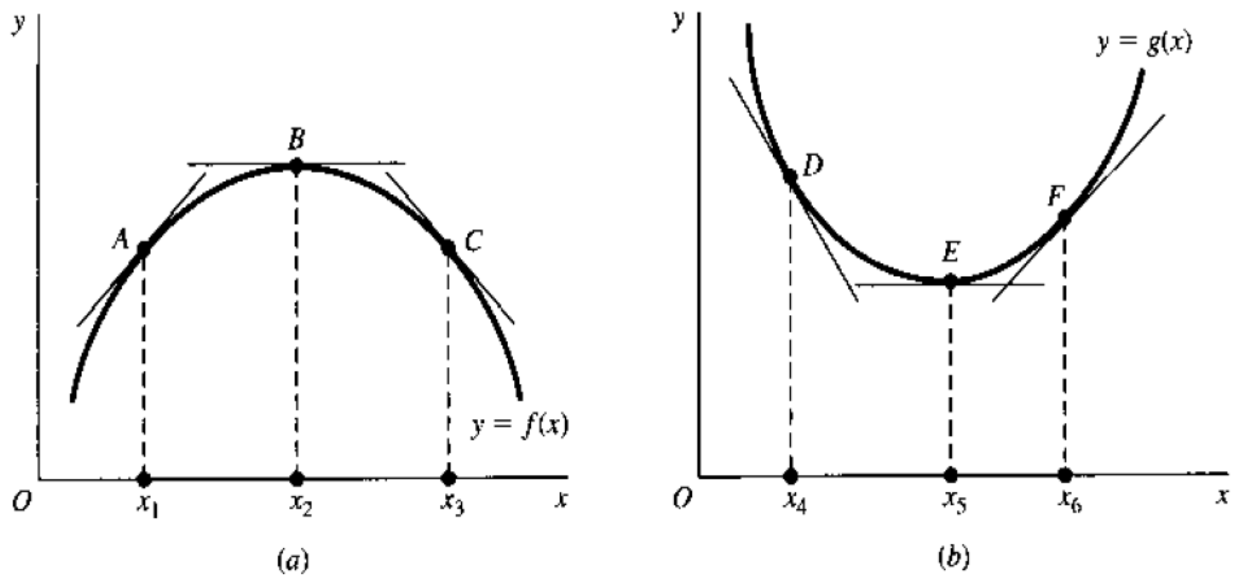
Derivación y Optimización

- ¿Cómo determinamos si un valor crítico corresponde a un máximo o mínimo? Cambio en el signo de la pendiente



+ Derivación y Optimización

- [El criterio de] la segunda derivada
  - ¿Qué significa $\dfrac{d^2y}{dx^2}(a) = f''(a)$?



Derivación y Optimización

- Optimización no lineal:

Condiciones de optimalidad (Caso univariado):

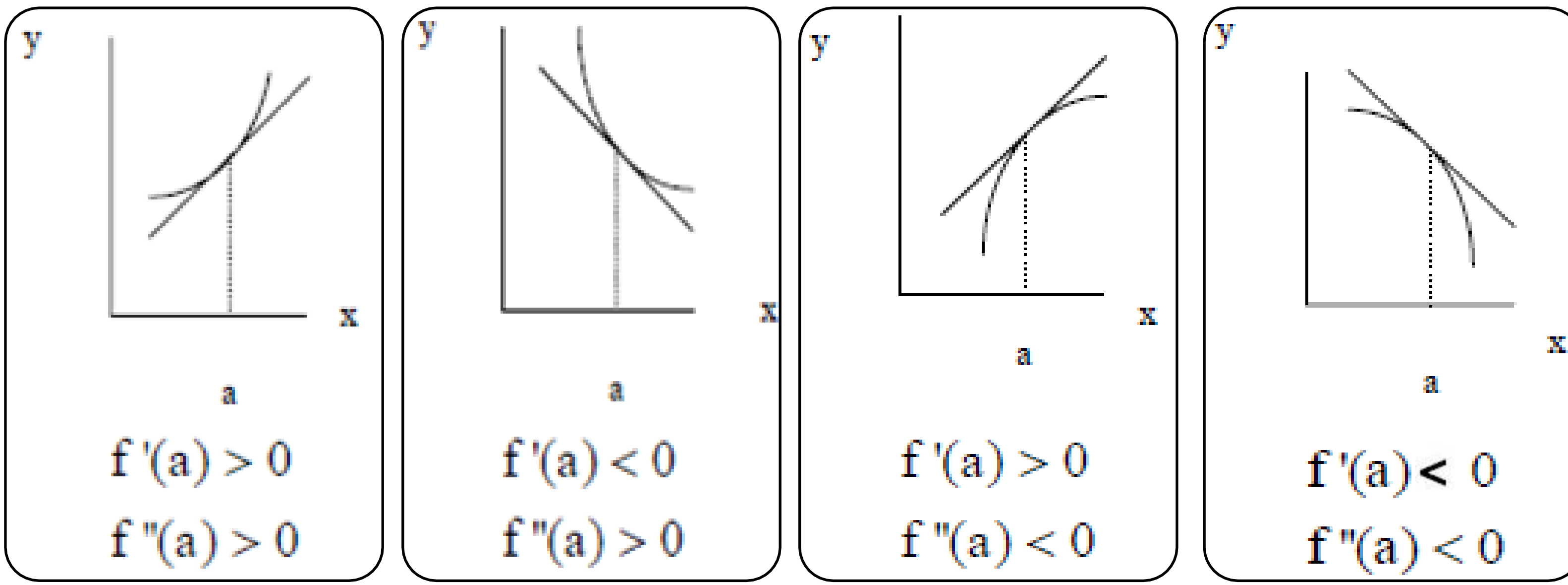
Condición	Máximo	Mínimo
Necesaria 1er orden:	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0$
Suficiente 2do orden:	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$

¿Y si f''(x) = 0?

A-C: Ejemplo 9.3, ejercicio 9.4.3 (excepto a)

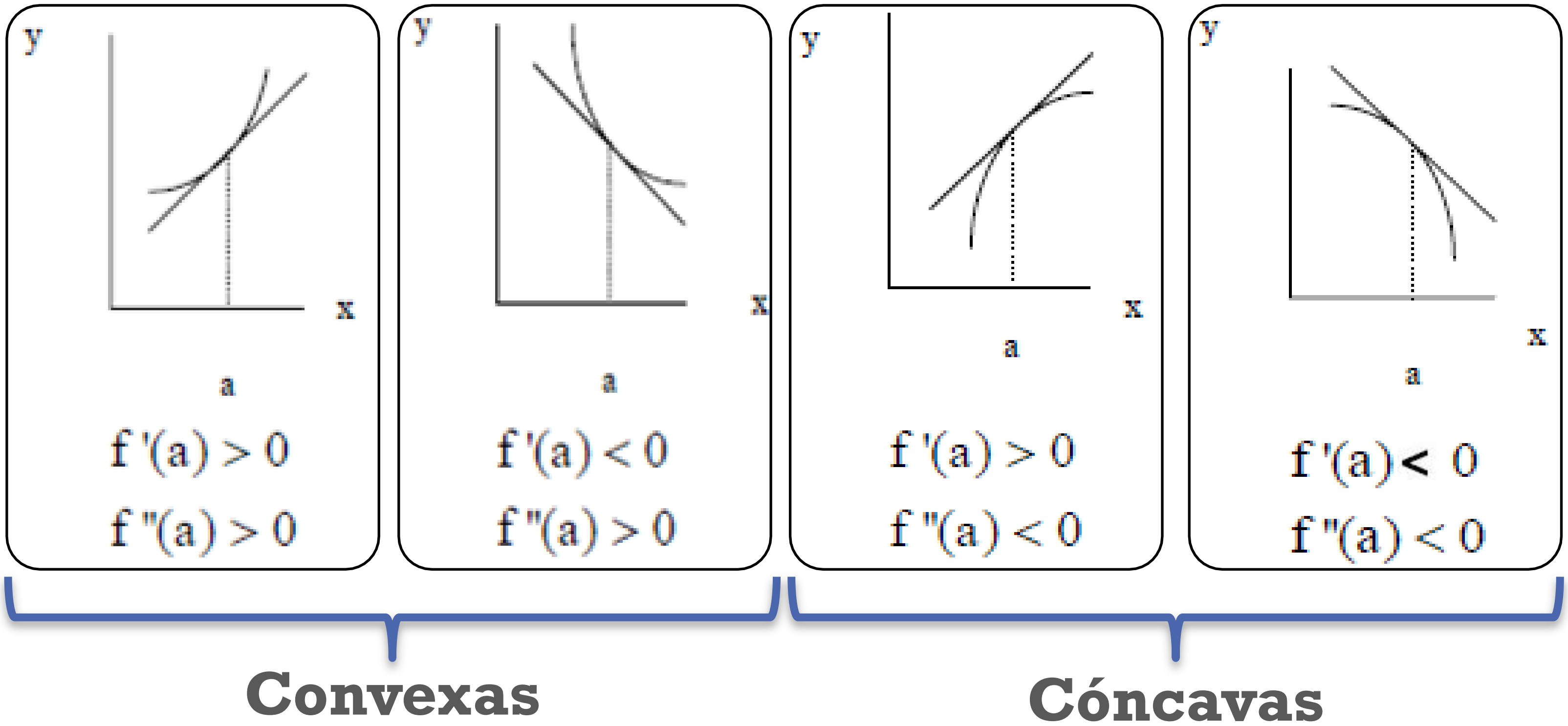
Derivación y Optimización

- Convexidad y Concavidad en un punto:



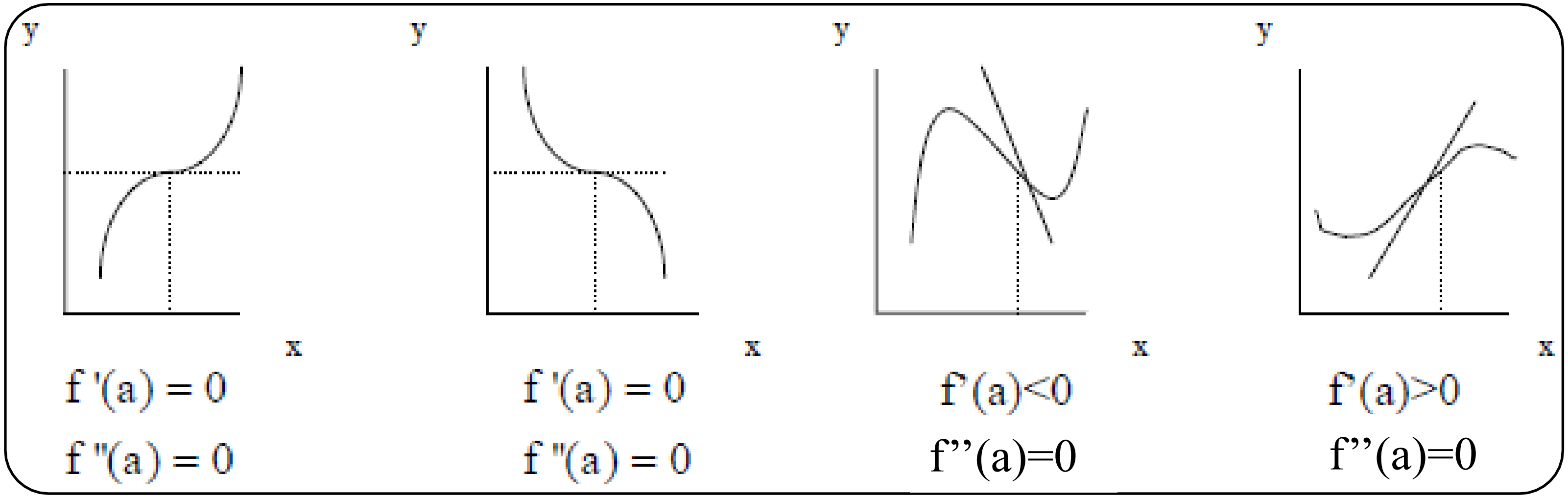
Derivación y Optimización

- Convexidad y Concavidad en un punto:



Derivación y Optimización

- Puntos de Inflexión:



+ Derivación y Optimización

- Ejemplos/ejercicios:
  - Chiang-Wainwright 9.4.1, 9.4.3, 9.4.5

$$f(x) = -3x^3 + x^2$$

$$A = x\sqrt{100 - x^2}$$

$$y = f(x) = 4 + 3x - x^3$$

$$y = (x-1)^2(x+1)^3$$

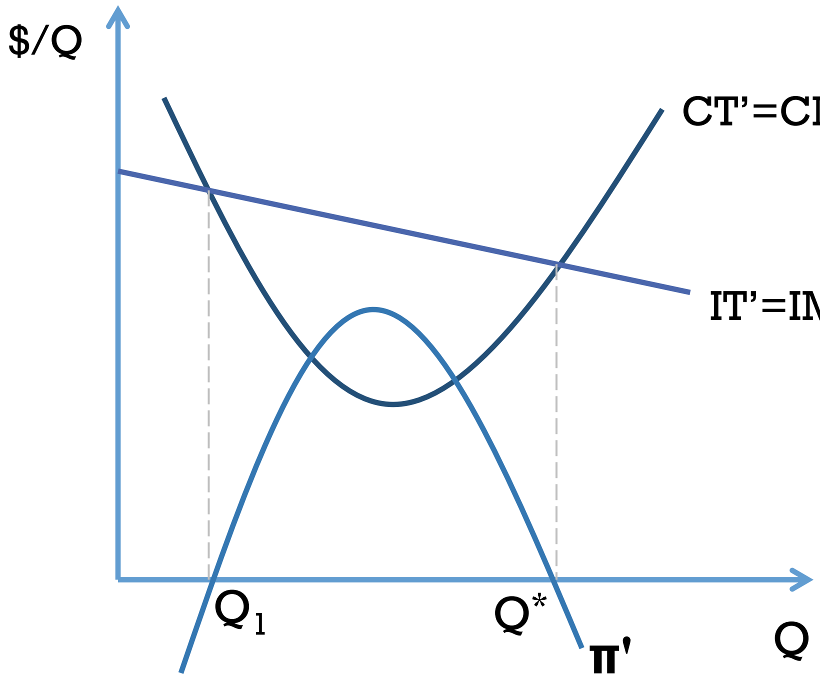
Aplicaciones

Optimización: Aplicaciones

- Maximización de Beneficios: Caso General
  - Formas funcionales desconocidas para Ingresos y Costos
  - Objetivo: $\pi(Q) = IT(Q) - CT(Q)$
  - CPO: $\pi'(Q) = \dfrac{d\pi}{dQ} = IT'(Q) - CT'(Q) = 0 \Rightarrow IMg(Q) = CMg(Q)$
  - CSO: $\pi''(Q) = \dfrac{d^2\pi}{dQ^2} = IT''(Q) - CT''(Q) < 0 \Rightarrow IMg'(Q) < CMg'(Q)$

Optimización: Aplicaciones

- Maximización de Beneficios: Caso General

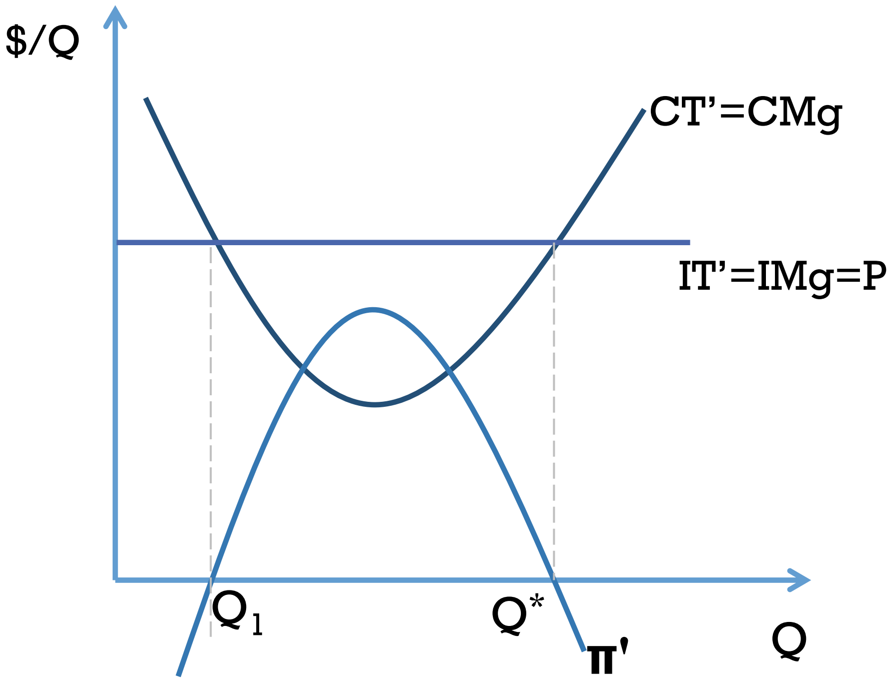


Optimización: Aplicaciones

- Max. de Beneficios: Competencia Perfecta
  - Firmas <u>tomadoras</u> de precio (P exógeno)
  - IT = PQ
  - Objetivo: $\pi(Q) = PQ - CT(Q)$
  - CPO: $\pi'(Q) = P - CT'(Q) = 0 \Rightarrow P = CMg(Q)$
  - CSO: $\pi''(Q) = -CT''(Q) < 0 \Rightarrow CMg'(Q) > 0$

Optimización: Aplicaciones

- Max. de Beneficios: Competencia Perfecta



$CT = 40Q - 15Q^2 + 2Q^3$

$P = 16$

Halle Q* y π máximo

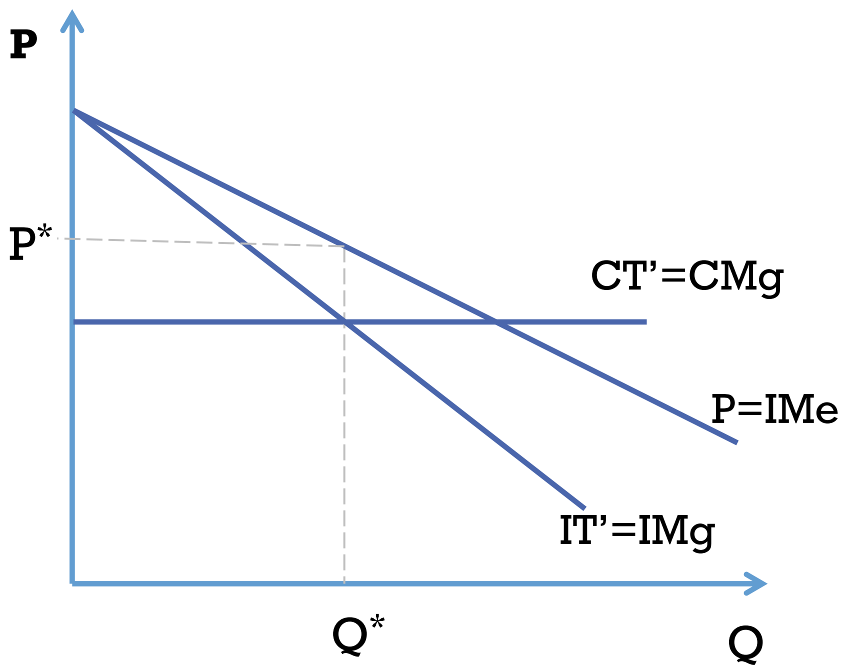
¿Puede $CMg^{*\prime} < 0$?
¿Por qué?

+ Optimización: Aplicaciones

- Max. de Beneficios: Monopolio
  - Firmas fijadoras de precio [P = f(Q)]
  - IT = P(Q)*Q
  - Objetivo: $\pi(Q) = QP(Q) - CT(Q)$
  - CPO: $\pi'(Q) = P(Q) + P'(Q)Q - CT'(Q) = 0$
  - CSO: $\pi''(Q) = QP''(Q) + 2P'(Q) - CT''(Q) < 0$

Optimización: Aplicaciones

- Max. de Beneficios: Monopolio



$CT = 20Q - 5Q^2 + 1/3Q^3$

$IMe = P = 6 - Q/2$

Halle Q* y π máximo

¿Puede CMg*' < 0?
¿Por qué?

+ Optimización: Aplicaciones

- Max. de Beneficios: Oligopolio
  - Modelo de Cournot:
    - Dos firmas compiten en cantidades con funciones de demanda inversa $P(q_1 + q_2)$ y funciones de costos $C_i(q_i)$
    - Escriba la función de beneficios para cada firma
    - Suponga
      - $P(q_1 + q_2) = a - (q_1 + q_2)$
      - $C_i(q_i) = c_i q_i$
    - Halle $\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i}$ (Optimización multivariada)

Optimización: Aplicaciones

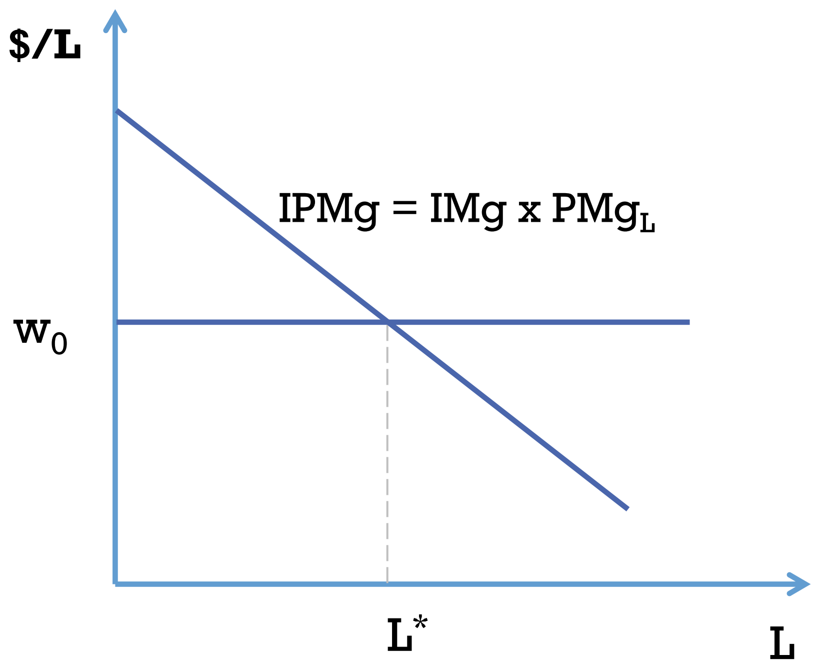
- Max. de Beneficios: Mercado de Insumos
  - La función de producción incorpora información de sobre insumos utilizados
  - De momento, un insumo: Mano de obra (L)
  - Objetivo: $\pi(L) = IT(Q(L)) - wL$
  - CPO: ¿?
  - CSO: ¿?

+ Optimización: Aplicaciones

- Max. de Beneficios: Mercado de Insumos (I)
  - La función de producción incorpora información de sobre insumos utilizados
  - De momento, un insumo: Mano de obra (L) a precio w
  - Objetivo: $\pi(L) = IT(Q(L)) - wL$
  - CPO: $\pi'(L) = IT'(Q)\dfrac{dQ}{dL} - w = 0 \Rightarrow IT'(Q)\dfrac{dQ}{dL} = IPMg = w$
  - CSO: $\pi''(L) = IT''(Q)\left(\dfrac{dQ}{dL}\right)^2 + IT'(Q)\dfrac{d^2Q}{dL^2} = IPMg' < 0$

Optimización: Aplicaciones

- Max. de Beneficios: Mercado de Insumos



P = 16; w = 4

$Q = L^{1/2}$

a. Halle L* y π máximo

b. Halle CPO y CSO de forma general si P es exógeno

Optimización: Aplicaciones

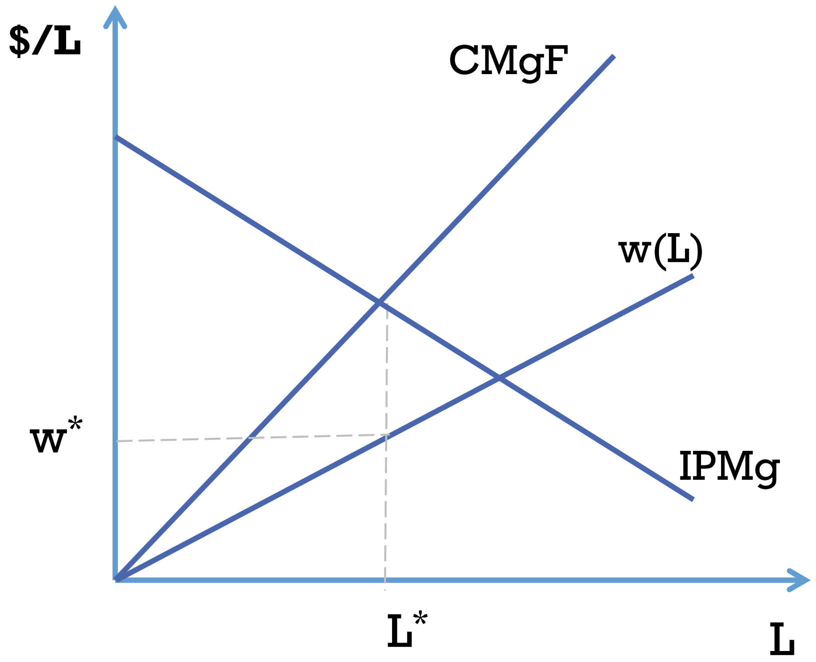
- Max. de Beneficios: Mercado de Insumos (II)
  - La función de producción incorpora información de sobre insumos utilizados
  - De momento, un insumo: Mano de obra (L), a precio w (<u>función de L</u>) ¿Con pendiente?
  - Objetivo: $\pi(L) = IT(Q(L)) - w(L)L$
  - CPO: ¿?
  - CSO: ¿?

Optimización: Aplicaciones

- Max. de Beneficios: Mercado de Insumos (II)
  - La función de producción incorpora información de sobre insumos utilizados
  - De momento, un insumo: Mano de obra (L), a precio w (función de L) ¿Con pendiente?
  - Objetivo: $\pi(L) = IT(Q(L)) - w(L)L$
  - CPO: $\pi'(L) = IT'(Q)\dfrac{dQ}{dL} = w(L) + L\dfrac{dw}{dL}$
  - CSO: $\pi''(L) = IT''(Q)\left(\dfrac{dQ}{dL}\right)^2 + IT'(Q)\dfrac{d^2Q}{dL^2} - \left(L\dfrac{d^2w}{dL^2} + 2\dfrac{dw}{dL}\right) < 0$

Optimización: Aplicaciones

Max. de Beneficios: Mercado de Insumos



$P = 16; w = 4L^{1/2}$

$Q = 2L^{1/2}$

a. Halle L* y π máximo

Optimización:
Funciones Multivariadas

Conceptos preliminares

- Optimización no lineal restringida:

$$\min f(x)$$
$$s.a.$$
$$g_i(x) \leq 0$$
$$h_j(x) = 0$$

Función objetivo

Variable(s) de elección (decisión, política...)

+ Conceptos preliminares

- Optimización no lineal:
  - Casos particulares:

1. $g_i(x) \equiv 0$ y $h_j(x) \equiv 0$ **[No Restringida]**
2. $g_i(x) \equiv 0$
3. $h_j(x) \equiv 0$
4. $g_i(x)$ y $f(x)$ **convexas**

Optimización Multivariada

- Generalización del caso univariado
  - Caso más común bi-variado:
    - Representación gráfica en 3D
  - Lógica subyacente idéntica
  - Derivada Parcial
  - Diferenciales

+ Optimización Multivariada

- El caso univariado en diferenciales:
  - Sea $y = f(x)$, definimos $dy = f'(x)dx$
  - C.P.O.: $\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow dy = 0$
  - C.S.O. (máx.): $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0 \Rightarrow d^2y < 0$

La Derivada Parcial

- Definición:

$$Sea\ y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_1}$$

$$\text{y} \quad f_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1}$$

La Derivada Parcial

- Segunda derivada parcial:

$$f_{11} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial x_1{}^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)$$

$$f_{22} \equiv \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial x_2{}^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)$$

$$f_{12} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_2} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 x_1} \equiv f_{21}$$

$\leftarrow$ **Teorema de Young**

+ Optimización Multivariada

- El caso multivariado en diferenciales:
  - Sea $z = f(x, y)$, definimos $dz = f_x dx + f_y dy$
  - C.P.O.: $dz = 0 \Leftrightarrow f_x = f_y = 0$
  - C.S.O. (máx.): $$\underline{d^2 z = f_{xx} dx^2 + 2 f_{xy} dxdy + f_{yy} dy^2 < 0}$$ $$\Leftrightarrow f_{xx} < 0;\ f_{yy} < 0;\ \underline{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0}$$

+ Optimización

- Optimización no lineal:

1. $g_i(x) \equiv 0$ y $h_j(x) \equiv 0$ **[No Restringida]**

Condiciones de optimalidad (bivariado):

Condición	Máximo	Mínimo
Necesaria 1er orden:	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
Suficiente 2do orden:	$f_{xx}, f_{yy} < 0; y$ $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2$	$f_{xx}, f_{yy} > 0; y$ $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2$

+ Optimización Multivariada

- El caso multivariado (n variables):
  - Sea $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ definimos:

$$dy = f_{x1}dx_1 + f_{x2}dx_2 + ... + f_{xn}dx_n$$

  - C.P.O.: $dy = 0 \Leftrightarrow f_{x1} = f_{x2} = ... = f_{xn} = 0$
  - C.S.O. (máx.): …

+ Optimización Multivariada

- El caso multivariado (n variables):
  - C.S.O. (máx.):
    - Con n = 2:

$$d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 = \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

- El signo de d^2z está dado por el signo de los menores principales direccionales de su <u>discriminante</u> |H|:
  - Máx.: signos alternos, con $|H_n| > 0$;
  - Min.: todos > 0

Optimización Multivariada

- El caso multivariado (n variables):
  - C.S.O. (máx.):
    - Con n:

El signo de d^2z depende de $|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$

Condición	Máximo	Mínimo
Necesaria 1^er^ orden:	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$
Suficiente 2^do^ orden:	$\lvert H_1\rvert < 0,\ \lvert H_2\rvert > 0,$ $\lvert H_3\rvert < 0, \ldots; (-1)^n \lvert H_n\rvert > 0$	$\lvert H_1\rvert,\ \lvert H_2\rvert, \ldots, \lvert H_n\rvert > 0$

+ Optimización

- Ejemplos/Ejercicios:
  - Una firma, dos productos:

$$IT = P_1 Q_1 + P_2 Q_2$$

$$CT = 2Q_1^2 + Q_1 Q_2 + 2Q_2^2$$

  - Halle Q_1 y Q_2 óptimos en función de P_1 y P_2
  - Suponga $P_1 = 12$ y $P_2 = 18$, halle π^* y verifique la C.S.O. para un beneficio máximo

Optimización

- Ejemplos/Ejercicios:
  - Una firma, dos productos, monopolio:

$$Q_1 = 40 - 2P_1 + P_2 \qquad IT = P_1Q_1 + P_2Q_2$$

$$Q_2 = 15 + P_1 - P_2 \qquad CT = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$$

  - Halle Q_1, Q_2, P_1, P_2 y π óptimos y verifique la C.S.O. para un beneficio máximo

Optimización

- Ejemplos/Ejercicios:
  - Una firma, dos plantas de producción:

$$P = 40 - Q_T; \qquad C_1 = Q_1 + Q_1^2;$$
$$Q_T = Q_1 + Q_2 \qquad C_2 = 4Q_2 + 0.5Q_2^2$$
$$C_T = C_1 + C_2$$

  - Halle Q_1, Q_2, P, y π óptimos y verifique la C.S.O. para un beneficio máximo

Optimización

- Ejemplos/Ejercicios:
  - Una firma, dos insumos:

$$P = 10; \;\; w = 25; r = 6.25$$

$$Q = f(K, L) = 10L^{1/4}K^{1/4}$$

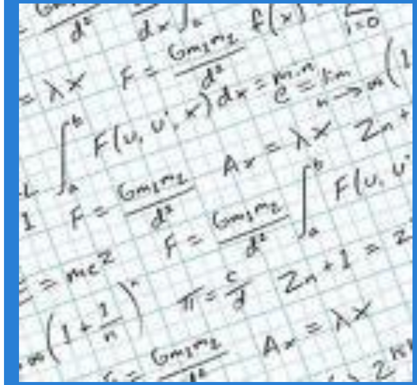
$$\pi = PQ - wL - rK$$

- Halle L, K y π^* óptimos y verifique la C.S.O. para un beneficio máximo

PUCMM

Economía Matemática

Septiembre – Diciembre, 2017



Optimización