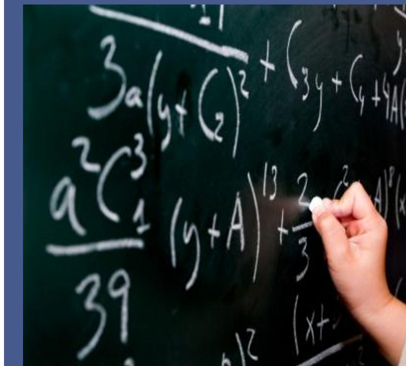
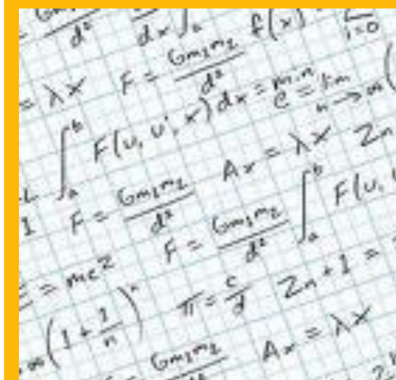
PUCMM

Maestría en Economía Aplicada

Economía Matemática I

Septiembre – Diciembre, 2017





Matrices y Determinantes

Contenido

- **Economía Matemática I [«Estática»]:**
  - Unidad I: Preliminares y Modelos Económicos
  - Unidad II: Matrices y Determinantes
    - Modelos de Ingreso Nacional
    - Modelos I/O de Leontief
    - Procesos (cadenas) de Markov
  - Unidad III: Aplicaciones del Cálculo Diferencial
    - Estática Comparativa
  - Unidad IV: Optimización no restringida*
  - Unidad V: Optimización restringida*
  - Unidad VI: Programación Lineal

+ Álgebra Lineal y Matricial

- Rama de las Matemáticas que se encarga del estudio de matrices y vectores (espacios vectoriales), sus propiedades, operaciones y aplicaciones
- Muchos modelos Económicos no-lineales pueden ser aproximados mediante [o convertidos a] ecuaciones lineales
- Dependiendo la extensión del modelo en cuestión, puede ser necesario utilizar Álgebra de Matrices para facilitar el manejo

Sistemas de Ecuaciones Lineales

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Cómo resolver para 3 ecuaciones?
Para 4?
Para *n*?

Matrices

- Se llama matriz de orden **mxn** a cualquier arreglo rectangular de <u>elementos</u> $\mathbf{a_{ij}}$ dispuestos en **m** líneas horizontales (filas) y **n** verticales (columnas):

$$A=\left.\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}\text{ columnas}}\right\}\mathbf{m}\text{ filas}$$

- Esta representación se puede abreviar $A=[a_{ij}]$

Tipos de Matrices

- Existen algunos tipos de matrices que aparecen con frecuencia, y por tanto es recomendable recordarlas:

  - Según la forma:

    - Matriz Columna: Sólo una columna (**n**=1)
    - Matriz Fila: Sólo una fila (**m**=1)

    Vectores

    - Matriz Transpuesta
    - Matriz Cuadrada: Igual cantidad de filas y columnas (**m**=**n**)
      - Matriz Simétrica
      - Matriz Antisimétrica

Tipos de Matrices

- Existen algunos tipos de matrices que aparecen con frecuencia, y por tanto es recomendable recordarlas:
  - Según los elementos:
    - Matriz Nula: $a_{ij}=0$
    - Matriz Diagonal: $a_{ij}=0$ para $i \neq j$
    - Matriz Escalar: $a_{ij}=0$ para $i \neq j$ y a_{ij} idénticos para $i=j$
    - Matriz Identidad: $a_{ij}=0$ para $i \neq j$ y $a_{ij}=1$ para $i=j$
    - Matriz Triangular: Todos los elementos por debajo o por encima de la diagonal son nulos
      - Superior
      - Inferior

Operaciones con Matrices

- Transpuesta:
  - Si $A_{mxn}=[a_{ij}]$, entonces $A^t = B_{nxm}= [b_{ij}]$ será una matriz tal que $b_{ij} = a_{ji}$
    - Para toda matriz A, A^t siempre existe y esta es única
    - $(A^t)^t=A$

Operaciones con Matrices

- Suma:
  - Si $A_{mxn}=[a_{ij}]$ y $B_{mxn}= [b_{ij}]$, $S = A+B$ será una matriz tal que $s_{ij} = b_{ij} + a_{ji}$
    - $A+(B+C)=(A+B)+C$
    - $A+B=B+A$
    - $A+\mathbf{0}=A$
    - $A+(-A)=\mathbf{0}$

Operaciones con Matrices

- Producto por un escalar:
  - Si $A_{mxn}=[a_{ij}]$ y k es un escalar, entonces $kA = ka_{ij}$
    - $k(A+B)=kA+kB$
    - $(k+h)A=kA+hA$
    - $k(hA)=(kh)A$
    - $\mathbf{1}\cdot A=A$

Operaciones con Matrices

- Producto de Matrices:
  - Si $A_{mxn}=[a_{ij}]$ y $B_{nxl}=[b_{ij}]$, $S_{mxl} = AxB$, entonces:

$$s_{ij} = \sum a_{ik} \cdot b_{kj}$$

    - Ax(BxC)=(AxB)xC
    - AxB no necesariamente es igual a B•A
    - $AxI_n = I_n\mathbf{x}A=A$
    - Ax(B+C)=AxB+AxC
    - No siempre existe B tal que $AxB=BxA=I_n$, y si existe, decimos que B es la inversa de A $x(A^{-1})$

+ Operaciones con Matrices

- Invertibilidad:
  - Si una matriz cuadrada A posee inversa (A^{-1}), se dice que es invertible o regular, en caso contrario se denomina singular
    - Si A^{-1} existe, esta es única
    - $AxA^{-1}= A^{-1}xA=I_n$
    - $(AxB)^{-1}=A^{-1}xB^{-1}$
    - $(A^{-1})^{-1}=A$
    - $(kA)^{-1}=(1/k)A^{-1}$
    - $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

+ Operaciones con Matrices

- Métodos para calcular la inversa:
  - Directamente (Sistema de ecuaciones)
  - <u>Usando Determinantes</u>
  - Gauss-Jordan

Operaciones con Matrices

- Determinante: Es un número asociado a una matriz. Su cálculo depende del orden de la matriz cuadrada en cuestión

  - Matriz de orden 1: Si A = a_{ij} $\rightarrow$ det(A)=a_{ij}

  - Matriz de orden 2:

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Operaciones con Matrices

- Matriz de orden 3: Regla de Sarrus

$$\text{Si } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ entonces}$$

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

$$\text{Calcule } |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -8 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & x \\ -z & 4 & 2 \end{vmatrix}; \qquad |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Operaciones con Matrices

- Matriz de orden **nxn**: Desarrollo por menores

$$\text{Si } \boldsymbol{A}_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ entonces}$$

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{Calcule } |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -8 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & x \\ -z & 4 & 2 \end{vmatrix}; \qquad |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

+ Operaciones con Matrices

- Matriz de orden **nxn**: Desarrollo por menores

$$\text{En general, si } \boldsymbol{A} \textit{ es} \text{ de orden } \boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n} \text{ entonces } \det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}) \underbrace{(-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|}_{\text{Cofactor } C_{ij}}$$

donde M_{ij} es la submatriz (n-1)(n-1) obtenida al suprimir la fila *i* y la columna *j* de la matriz original y $|M_{ij}|$ se denomina Menor correspondiente al elemento a_{ij}

$$\text{Calcule } |\mathbf{F}| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \\ -z & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & z & -5 \end{vmatrix}; \qquad |\mathbf{D}| = \begin{vmatrix} -11 & 0 & 6 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & z & -1 \end{vmatrix}$$

Operaciones con Matrices

- Propiedades de los Determinantes:
  - Si se permutan dos filas de una matriz cuadrada, el determinante cambia de signo
  - Si $\det(A) = U \rightarrow \det(kA) = k^nU$
  - La suma (resta) de un múltiplo de una fila a otra fila dejará el valor del determinante inalterado. Esta propiedad también es válida en el caso de columnas.
  - $\det(A)=\det(A^t)$

Operaciones con Matrices

- Matriz de Cofactores y Matriz Adjunta
  - Se llama Matriz de Cofactores [Cof(A)] a la matriz que resulta de sustituir cada elemento a_{ij} por su cofactor $C_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$
  - La transpuesta de la Matriz de Cofactores se denomina Matriz Adjunta

Operaciones con Matrices

- Aplicaciones de los Determinantes:
  - Cálculo de la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A})$$

- Sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

Operaciones con Matrices

- Sistemas de ecuaciones lineales:
  - Regla de Cramer (sólo para n = m):
  - Sea $Ax = d \rightarrow x = A^{-1}d$

$$x_i = \frac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|}$$

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 12 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 13 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Operaciones con Matrices

- Herramientas informáticas:
  - MATLAB/Octave
  - MS Excel
    - TRANSPOSE
    - MMULT
    - MINVERSE
  - Wolfram Alpha
    - (inv {{10, -9, -12}, {7, -12, 11}, {-10, 10, 3}})

Ejemplos/Ejercicios

- Considere el modelo de mercado gobernado por las expresiones

$$Q_d = a + bP$$

$$Q_S = \alpha + \beta(P - t);$$ con t = impuesto unitario a la producción

$$Q_d = Q_s$$

  - Exprese en forma matricial
  - ¿Cómo resolvería?
    - Inversa
    - Cramer

Modelos Matemáticos

- Considere el modelo de mercado gobernado por las expresiones

$$Q_d = a + b(P + t)$$; con t = impuesto unitario al consumo

$$Q_S = \alpha + \beta P$$

$$Q_d = Q_s$$

  - Exprese en forma matricial
  - Resuelva

Ejemplos/Ejercicios

- Modelo IS-LM
  - Un mercado de bienes:

$$Y = C + I + G;$$

$$C = C_0 + \beta Y_d$$

$$Y_d = (1 - t)Y$$ ¿Qué pasa si $Y_d = Y - T$? Piense

$$I = d - ei$$

$$G = G_0$$

Ejemplos/Ejercicios

- Modelo IS-LM
  - Un mercado de dinero:

$$M_d = M_s$$

$$M_d = kY - li$$

$$M_s = M_0$$

  - Juntos forman el sistema:

$$Y - C - I = G_0$$

$$\beta(1-t)Y - C = -C_0$$

$$I + ei = d$$

$$kY - li = M_0$$

Ejemplos/Ejercicios

- Modelo IS-LM
  - Juntos forman el sistema:

$$\left.\begin{aligned}
&Y - C - I = G_0 \\
&\beta(1-t)Y - C = -C_0 \\
&I + ei = d \\
&kY - li = M_0
\end{aligned}\right\} \quad
\begin{aligned}
&[1-\beta(1-t)]Y + ei = C_0 + G_0 + d \\
&kY - li = M_0
\end{aligned}$$

- Exprese en forma matricial
- ¿Cómo resolvería?
- ¿Economía abierta?

Ejemplos/Ejercicios

- Modelo Lineal Multi-Mercado
  - Los cambios en precio de los bienes complementarios y suplementarios tienen un efectos sobre la oferta y demanda de los demás bienes
  - Equilibrio general sólo es posible si todos los mercados están en equilibrio simultáneamente

Ejemplos/Ejercicios

- Modelo Lineal Multi-Mercado
  - $p_1, \ldots, p_n$ son los precios de n bienes
  - $q_{s1}, \ldots, q_{sn}$ cantidades ofertadas
  - $q_{d1}, \ldots, q_{dn}$ cantidades demandadas

$$q_{s1} = \alpha_1 + \beta_{11} p_1 + \ldots + \beta_{1n} p_n$$
$$\ldots$$
$$q_{sn} = \alpha_n + \beta_{n1} p_1 + \ldots + \beta_{nn} p_n$$

$$q_{d1} = a_1 + b_{11} p_1 + \ldots + b_{1n} p_n$$
$$\ldots$$
$$q_{dn} = a_n + b_{n1} p_1 + \ldots + b_{nn} p_n$$

$$b_{ii} < 0; \quad \beta_{ii} > 0; \quad ¿b_{ij} <> 0?; \quad ¿\beta_{ij} <> 0?$$

Ejemplos/Ejercicios

- Modelo Lineal Multi-Mercado
  - Equilibrio general:

$$a_1 + b_{11}p_1 + \ldots + b_{1n}p_n - \alpha_1 - \beta_{11}p_1 - \ldots - \beta_{1n}p_n = 0$$

$$\ldots$$

$$a_n + b_{n1}p_1 + \ldots + b_{nn}p_n - \alpha_n - \beta_{n1}p_1 - \ldots - \beta_{nn}p_n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} - \beta_{11} & \ldots & b_{1n} - \beta_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} - \beta_{n1} & \ldots & b_{nn} - \beta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \ldots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - a_1 \\ \ldots \\ \alpha_n - a_n \end{bmatrix}$$

¿n=2?

Ejemplos/Ejercicios

- Modelo Lineal Multi-Mercado

$$\begin{bmatrix} b_{11}-\beta_{11} & \dots & b_{1n}-\beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}-\beta_{n1} & \dots & b_{nn}-\beta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - a_1 \\ \dots \\ \alpha_n - a_n \end{bmatrix}$$

  - Escriba y resuelva para n = 2
  - *¿Cuándo dos bienes son sustitutos <u>de mercado</u>?
  - *¿Cuándo son complementos <u>de mercado</u>?
  - Impuesto a la demanda, oferta, uno, ambos bienes...

+ Ejercicios

- 4.1:
  - 1, 2, 4
- 4.4:
  - 1, 5
- 4.5:
  - 1, 2
- 4.6:
  - 1, 2, 4,
- 5.2:
  - 1, 3, 4, 7
- 5.4:
  - 2, 4, 6
- 5.5:
  - 1, 2, 3,
- 5.6:
  - 1, 2, 3

Intente hacer estos, los anteriores son para eso

Cadenas finitas de Markov

- Los «Procesos» o «Cadenas» de Markov se utilizan para estudiar movimientos a lo largo del tiempo
- Suponen que el estado **futuro** de un sistema no depende del **pasado**, dado su estado **presente**
- En el centro de este tipo de análisis se encuentra los conceptos:
  - **Matriz de transición**, en la cual cada valor representa la **probabilidad** de pasar de un estado a otro
  - **Vector de distribución inicial** que contiene la distribución inicial de los diferentes estados

Cadenas finitas de Markov

- Ejemplo: los empleados de «Seguros Seguro» tienen la posibilidad de moverse de una sucursal a otra (Sto. Dgo. y Bávaro)
- ¿Cómo calcularía usted la cantidad de empleados en Bávaro el mes que viene, dadas la cantidad de empleados hoy en ambas sucursales y la probabilidad de los empleados de quedarse o cambiar de sucursal?

Cadenas finitas de Markov

- ¿Cómo calcularía la cantidad de empleados en Santo Domingo el mes que viene?

$$x_t = \begin{bmatrix} SD_t & B_t \end{bmatrix}; \quad \mathrm{M} = \begin{bmatrix} P_{SDSD} & P_{SDB} \\ P_{BSD} & P_{BB} \end{bmatrix}$$

$$x_{t+1} = x_t M \Rightarrow x_{t+1} = \begin{bmatrix} SD_t & B_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{SDSD} & P_{SDB} \\ P_{BSD} & P_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SD_{t+1} & B_{t+1} \end{bmatrix}$$

Cadenas finitas de Markov

- ¿Dos meses después? ¿En cinco meses? ¿En t meses?

$$x_{t+2} = x_{t+1}M \Rightarrow x_{t+2} = \begin{bmatrix} SD_{t+1} & B_{t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{SDSD} & P_{SDB} \\ P_{BSD} & P_{BB} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{t+2} = \begin{bmatrix} SD_t & B_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{SDSD} & P_{SDB} \\ P_{BSD} & P_{BB} \end{bmatrix}^2 \ldots$$

$$\ldots x_{t+n} = \begin{bmatrix} SD_t & B_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{SDSD} & P_{SDB} \\ P_{BSD} & P_{BB} \end{bmatrix}^n$$

Cadenas finitas de Markov

- Ejemplo: suponga que las inicialmente hay 100 empleados en cada sucursal y que la matriz de transición está dada por:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} P_{SDSD} & P_{SDB} \\ P_{BSD} & P_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

  - ¿Cuál será la distribución de los empleados luego de un período?
  - ¿Luego de 10?
  - **Estado estacionario**

+ Cadenas finitas de Markov

- Suponga ahora que existe un estado «Salir de la compañía» [S] y que: $P_{SSD} = 0; P_{SB}=0$ y $P_{SS}=1$ con $P_{SDSD}=0.6; P_{SDB}=0.25; P_{BSD}=0.20$ y $P_{BB}=0.55$
  - ¿Qué significado económico tienen estas condiciones?
  - ¿Cuál será la nueva matriz de transición?
  - ¿Cuál será el nuevo estado estacionario?

mpower({{.6, .25, .15}, {.20, .55, .25}, {0, 0, 1}},20)

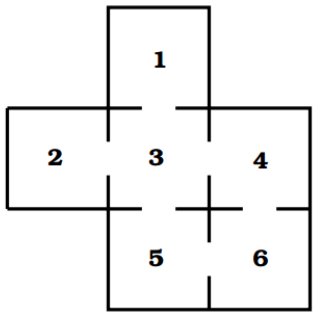
A-C: 4.7

Cadenas finitas de Markov

- El 80% de los hijos de egresados de Intec van a Intec y el resto a la PUCMM; 80% de los hijos de egresados de PUCMM van a PUCMM un 15% a la UASD y 5% a Intec; de los hijos de UASDianos 90% van a la UASD, 5% a la PUCMM y 5% a Intec
  - Halle la probabilidad de que un nieto de un Inteciano vaya a Intec
  - Originalmente se tiene siguiente distribución de egresados Intec = 1,000; PUCMM = 2,500; UASD = 5,000. ¿Cuál es la distribución de los estudiantes después de 't' períodos?

Cadenas finitas de Markov

- Considere una rata en un laberinto como el siguiente:



  - La rata empieza en la casilla 1 y elige quedarse en esta o cruzar una puerta aleatoriamente en cada ‘t’.
  - ¿Cuál es la matriz de transición correspondiente?
  - Calcule la probabilidad de hallarse en cada celda luego de ‘n’ pasos

Modelo Insumo-Producto de Leontief

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- Wassily Leontief (Nobel Economía 1973)
- Profesor de Samuelson (1970) y Solow (1987)
- En 1949, usando una de las primeras computadoras analizó la economía estadounidense dividiéndola en 500 sectores
- Paradoja de Leontief: Ventajas comparativas indicarían que las exportaciones de EEUU deberían ser más intensivas en capital que sus importaciones, pero los datos arrojan lo contrario… ¿Intuye usted por qué?

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- **Pregunta principal:**

¿Qué nivel de producción en cada una de las **n** industrias de una economía satisfará la demanda de total de cada producto?

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- **Útil para:**
  1. Economías planificadas (USSR)
  2. Estimar efectos de cambios en la demanda
  3. Efectos del comercio inter-regional/internacional
  4. Modelos extendidos incorporando efectos medioambientales
  5. Efectos de Políticas Públicas

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- **Supuestos:**

  i. Cada industria produce un artículo homogéneo

  ii. Cada industria utiliza una proporción fija de insumos

  iii. Producción con rendimientos constantes a escala

Modelo Insumo-Producto de Leontief

Estructura:

- Matriz de coeficientes de insumo: a_{ij} "*cuánto del i-ésimo artículo se usa para producir una unidad del j-ésimo artículo*"

- Coeficientes de insumo en función de "*cantidad con valor de un dólar*" $a_{13} = 0.42$ quiere decir para producir el valor de un dólar del artículo 3 se requieren 42 centavos del artículo 1.

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- **Estructura:**

$$
\begin{array}{c c c}
 & & \text{Productos} \\
 & & \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \ldots & \mathrm{N} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{n} \\ \text{s} \\ \text{u} \\ \text{m} \\ \text{o} \\ \text{s} \end{array} &
\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \ldots \\ \mathrm{N} \end{array} &
\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- **Modelo abierto y cerrado:**

- Podemos considerar los consumidores como demandantes finales de los bienes y servicios producidos o… como un sector productivo (industria) más. ¿Qué produce ese sector de consumidores?

- El primer caso se conoce como modelo abierto y el segundo como modelo cerrado

Modelo Insumo-Producto de Leontief

El modelo abierto:

- Todos los insumos utilizados se clasifican como insumos intermedios.
- Un sector adicional incorpora la demanda final e insumos primarios (hogares, gobierno, no residentes…)
- En este modelo $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$ (¿por qué?) y el valor de los insumos primarios es $1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- **El modelo abierto**:

- Si cada industria produce lo necesario para satisfacer la demanda intermedia y demanda final, entonces:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + d_1 \\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + d_2 \\
&\ldots \\
x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + d_n
\end{aligned}
$$

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- **El modelo abierto:**
- Reorganizando términos:

$$
\begin{aligned}
&(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = d_1 \\
&-a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = d_2 \\
&\ldots \\
&-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1-a_{nn})x_n = d_n
\end{aligned}
$$

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- **El modelo abierto:**
- Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & (1-a_{nn}) \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de Leontief}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \ldots \\ d_n \end{bmatrix}$$

¿Solución?

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- **El modelo abierto:**
- Solución:

$$(I - A)x = d \Rightarrow x^* = (I - A)^{-1} d$$

¿Solución?

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- **El modelo abierto**:
- Ejemplo: $$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}; \quad \mathrm{d} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$
  - ¿Cuál es la cantidad de insumos primarios necesarios para producir cada bien?
  - Construya la matriz de Leontief
  - Halle el vector de producción «óptimo»
  - ¿Cuánto insumo primario total se necesitaría para alcanzar esos niveles de producción?

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- **El modelo abierto**:
- Ejemplo: $$A = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.25 & 0.34 \\ 0.33 & 0.10 & 0.12 \\ 0.19 & 0.38 & 0.00 \end{bmatrix}; \quad \text{d} = \begin{bmatrix} 1800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$$
  - Explique el significado económico de la suma de la columna 3
  - Explique el significado económico de la suma de la fila 3
  - ¿Cuál es la cantidad de insumos primarios necesarios para producir cada bien?
  - Construya la matriz de Leontief

Modelo Insumo-Producto de Leontief

- **El modelo abierto**:

- Más ejemplos [de COU a matrices de coeficientes de insumo]:
  - Data real de Leontief [MS Excel/MATLAB]
  - Data real del BEA [MS Excel]

Modelo Insumo-Producto de Leontief

Soluciones no negativas:

- Los x^*_j [solución del sistema] deberán ser no negativos… ¿Cómo lo garantizamos?

- **Condición [teorema] de Hawkins – Simon**: Dadas (a) una matriz B_{nxn} con $b_{ij} \leq 0$ ($i \neq j$) y (b) un vector $d_{nx1} \geq 0$; existe un vector $x^*_{nx1} \geq 0$ tal que $Bx^*=d$, si y sólo si $|B_m| > 0$, ($m=1, 2, \ldots, n$); donde $|B_m|$ son los menores principales direccionales de B

- Ojo: la condición es sobre **la matriz de Leontief**

Ejemplos

Modelo Insumo-Producto de Leontief

Modelo cerrado:

- Si no hay demanda final ni insumos primarios (el sector que consume es otra "industria") todos los bienes serán intermedios.
- Matemáticamente: el sistema de ecuaciones es homogéneo
- ¿Soluciones?
- ¿Cuándo un sistema homogéneo tiene infinitas soluciones? ¿Se cumple esa condición en este modelo? Pruébelo
- ¿Qué quiere decir esto Económicamente?

Modelo Insumo-Producto de Leontief

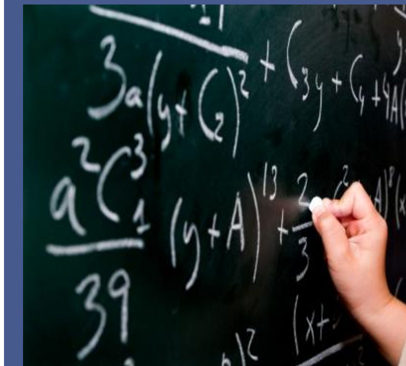
- **Más:**
  - Estática comparativa
  - Multiplicadores

PUCMM

Maestría en Economía Aplicada

Economía Matemática I

Septiembre – Diciembre, 2017



Matrices y Determinantes