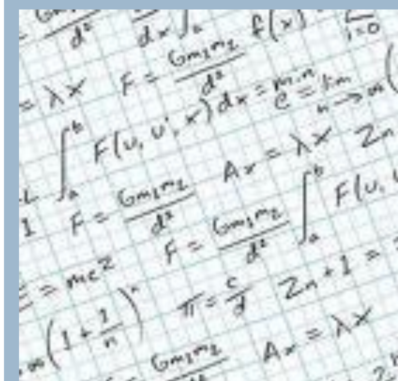
PUCMM

Economía Matemática

Septiembre – Diciembre, 2017



Diferenciación

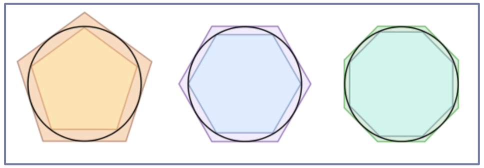
Contenido

- **Economía Matemática I [«Estática»]:**
  - Unidad I: Preliminares y Modelos Económicos
  - Unidad II: Matrices y Determinantes
    - Modelos de Ingreso Nacional
    - Modelos I/O de Leontief
    - Procesos (cadenas) de Markov
  - <u>Unidad III: Aplicaciones del Cálculo Diferencial</u>
    - <u>Estática Comparativa</u>
  - Unidad IV: Optimización no restringida*
  - Unidad V: Optimización restringida*
  - Unidad VI: Programación Lineal

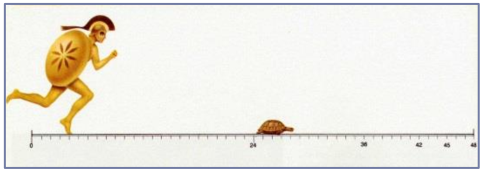
Diferenciación [Cálculo Diferencial]

Cálculo Infinitesimal

- Reseña Histórica
  - Antigua Grecia
    - Método Exhaustivo



    - Paradojas de Zenón



  - Newton y Leibniz

Cálculo Infinitesimal

Reseña Histórica

"*When one compares the talents one has with those of a Leibniz, one is tempted to throw away one's books and go die quietly in the dark of some forgotten corner*".

-Denis Diderot

"*Isaac Newton. No question about it. The smartest person ever to walk the face of this earth. The man was connected to the universe in spooky ways. He discovered the laws of motion, the laws of gravity, the laws of optics. Then he turned 26*".

-Neil deGrasse Tyson [When asked about which scientist he'd like to meet**]**

Diferenciales

- Sea y una función de x
  - ¿Cómo cambia y = f(x) ante cambios en x?

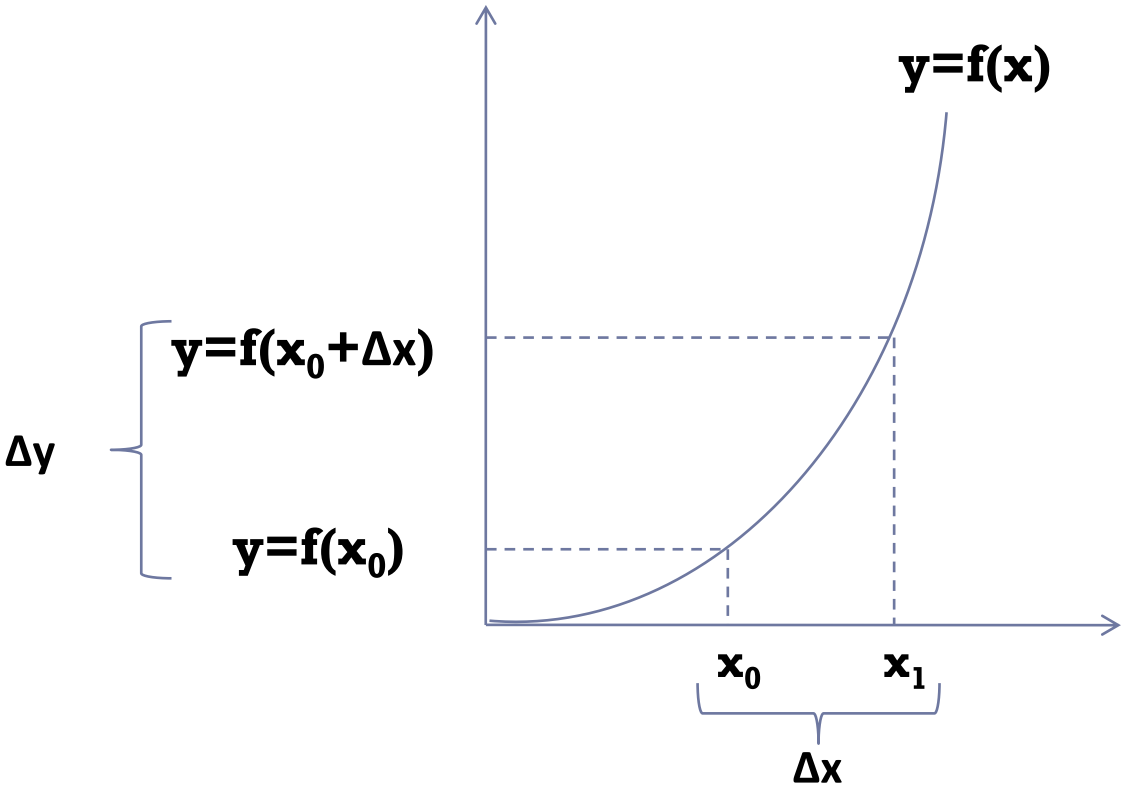
$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

  - El cambio medio en y con respecto a x será:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Diferenciales

- Gráficamente



+ Diferenciales

- Ejemplos:
  - Dada $y = f(x) = 2x^2 - 8$, calcule la tasa media de cambio de y respecto a x ($\Delta y/\Delta x$) usando $x_0 = 3$ y:
    - $\Delta x=4$
    - $\Delta x=1$
    - $\Delta x=0.05$
    - $\Delta x=0.001$

La Derivada

- Si Δx se acerca a cero sin tocarlo ('tiende a'), entonces Δy/Δx se aproxima a una función llamada la <u>función derivada</u> de *y* que devuelve la magnitud de la función tangente de *y* en x_0:

- Para todo x_0:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

- Ejemplo: Calcule $f'(x_0)$ con $x_0 = 3$

- Ejercicio: Sea $f(x) = \frac{1}{x+1}$ halle $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Reglas de Derivación

- Básicas:
  - Regla de la Suma algebraica: $\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)$
  - Regla del Producto: $\frac{d}{dx}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f(x)\frac{d}{dx} g(x) + g(x)\frac{d}{dx} f(x)$
  - Regla del Cociente: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx} f(x) - f(x)\frac{d}{dx} g(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

Reglas de Derivación

- Regla del exponente:

$$Si\ y = f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \qquad \text{[Demostrar]}$$

- Regla de la Cadena: Sea z = f(y) y a su vez y = f(x),

entonces: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

- Regla de la función inversa:

$$Si\ y{=}f(x) \text{ de forma que } x = f^{-1}(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = f^{-1}{}'(y) = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)}$$

Reglas de Derivación

- Funciones trascendentes:
  - Exponencial:

$$\frac{d}{dt}e^{f(t)} = f'(t)e^{f(t)} \Rightarrow \frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$$

  - Logarítmica:

$$\frac{d}{dt}\ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \Rightarrow \frac{d}{dt}\ln(at) = \frac{a}{t}$$

Funciones trascendentes

- Función exponencial y tasa de crecimiento:
  - r puede interpretarse como la tasa de crecimiento instantánea de la función Ae^{rt}.
  - Sea $V = Ae^{rt}$, entonces $\dfrac{dV}{dt} = rAe^{rt} = rV$ es la tasa de cambio
  - Ahora, la tasa de crecimiento de V es $\dfrac{dV}{dt}\Big/V = \dfrac{rV}{V} = r$

+ Reglas de Derivación

- Derivemos:

$$y = 4e^{-\frac{x}{4}}$$

$$k = \ln(5m^2 + 2m + 1)$$

$$u = (g^2 + 1)^3 + (g^2 + 1)^2 - 1$$

$$h = 10^{\sqrt{j}}$$

$$y = \frac{\ln(x)}{\ln(2x+1)}$$

$$y = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$z = \ln\left(\frac{w+1}{w+2}\right)$$

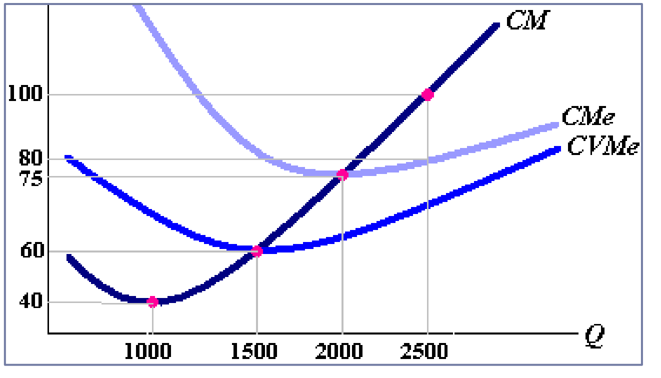
- *Pruebe que la regla de cociente puede obtenerse a partir de la regla de la cadena, del producto y del exponente

Reglas de Derivación

- Derivemos:
  - Alpha - Chiang:
    - 7.1.1
    - 7.1.2
    - 7.2.3
    - 7.2.7
    - 7.2.8
    - 7.3.1 - 7.3.4

Reglas de Derivación

- Aplicaciones (antes de estática comparativa y optimización):
  - Teoría de Costos:
    - CT = CF + CV; CF = k y CV = CV(Q)
    - CT(Q) = k + CV(Q)
    - CMg = CT'(Q) = CV'(Q)
    - CTMe = CT(Q)/Q
    - CVMe = CV(Q)/Q
    - *CTMe' = (CMg - CTMe)/Q
    - *CVMe' = (CMg - CVMe)/Q



Reglas de Derivación

- Aplicaciones:
  - Teoría de Costos:
    - Suponga $CV = 100Q - 15Q^2 + Q^3$; $CF = 50$
    - Halle CT; CMg; CTMe; CVMe; CTMe' y CVMe' y verifique que se cumplen
      - $CTMe' = (CMg - CTMe)/Q$
      - $CVMe' = (CMg - CVMe)/Q$
    - Halle los puntos donde CMg = CVMe y CMg = CTMe

Reglas de Derivación

- Aplicaciones:
  - Demanda e Ingreso:
    - $Q = f(P) \rightarrow P = f^{-1}(Q) = IMe(Q)$ ¿Por qué?
    - $IMe = P = IMe(Q)$
    - $IT = PQ = IMe(Q) * Q$
    - $IMg = IT' = IMe + Q*IMe'$
    - $IMg – IMe = Q*IMe'$
  - Dos posibles casos:
    - Competencia perfecta: $IMe' = 0 \rightarrow IMe = IMg = P$
    - Competencia imperfecta $IMe' < 0 \rightarrow IMe > IMg \rightarrow P > IMg$
    - Como $IMg = CMg$, tenemos $P = CMg$ y $P > CMg$

Reglas de Derivación

- Aplicaciones:
  - Producción de CP:
    - $Q = f(K, L)$; Corto Plazo implica un factor de producción fijo, digamos K: $Q = f(K_0, L) = PT(L)$
    - La productividad marginal de la mano de obra está dada por $PMg_L = TP'(L)$
    - La ley de rendimientos decrecientes establece que los incrementos en el producto correspondientes a aumentos en los insumos deberán ser menores a medida que se agrega más insumos → La pendiente de la productividad marginal es negativa: $PMg_L' = TP''(L) < 0$
    - Pruebe para $Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$; $0 < \alpha < 1$; $A > 0$ y $K = K_0$
    - Pruebe para $Q = 100L^{1/2}$; $Q = 100L$ y $Q = 100L^2$

Reglas de Derivación

- Aplicaciones:
  - Elasticidad-Precio de la Demanda:
    - La Elasticidad (arco o punto) [ε] es una medida adimensional de la respuesta de la variable dependiente ante cambios en la variable independiente: $\varepsilon = (dQ/Q)/(dP/P) = (dQ/dP)*(P/Q)$
    - Ejemplo: $Q = 100 - 12P - 2P^2$ en $P = 2$ y $Q = 68$
      - ¿Qué pasa con el ingreso de las firmas ante aumentos en el precio?
    - ¿$Q = 5P^{-2}$?
      - ¿Qué pasa con el ingreso de las firmas ante aumentos en el precio en este caso?

Derivada en un punto y función derivada

- Derivada en un punto

  Sea $y = f(x)$, la derivada en x_0 es $f'(x_0)$ y representa la *pendiente* de f(x) en x_0

- Función derivada

  Sea $y = f(x)$, la *función* derivada de y es $f'(x)$

La Derivada Parcial

- Definición:

$$Sea\ y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_1}$$

$$\text{y} \quad f_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1}$$

- Ejemplos/Ejercicios:
  - Alpha Chiang: 7.4.1 - 7.4.5*
  - Toumanoff: Sección 5.4

La Derivada Parcial

- Derive parcialmente respecto a cada una de las variables independientes:

$$y = x_1^{1/2} + x_1 \ln x_2$$

$$y = e^x \ln z$$

$$y = x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$Q = 25K^{1/5} L^{1/5} M^{3/5}$$

$$y = \frac{x_1 - 2x_1 x_2^{1.5}}{3 + (x_1 x_2)^2}$$

$$U = 10x_1 x_2^2 - 3(x_1 x_2)^{0.5}$$

La Derivada Parcial

- Aplicaciones:
  - Modelo de mercado:

$$Q = a - bP \qquad (\mathrm{a}, \mathrm{b} > 0)$$

$$Q = -c + dP \qquad (\mathrm{c}, \mathrm{d} > 0)$$

  - ¿P*? ¿Q*?
  - $$\frac{\partial P^*}{\partial a}; \frac{\partial P^*}{\partial b}; \frac{\partial P^*}{\partial c}; \frac{\partial P^*}{\partial d}$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial a}; \frac{\partial Q^*}{\partial b}; \frac{\partial Q^*}{\partial c}; \frac{\partial Q^*}{\partial d}$$

¿Gráficamente?

La Derivada Parcial

- Aplicaciones:
  - Modelo de Ingreso Nacional:

$$Y = C + I_0 + G_0$$

$$C = \alpha + \beta(Y - T) \quad (\alpha > 0; 0 < \beta < 1)$$

$$T = \gamma + \delta Y \quad (\gamma > 0; 0 < \delta < 1)$$

  - ¿Y*?
  - Multiplicadores: $\dfrac{\partial Y^*}{\partial G_0}; \dfrac{\partial Y^*}{\partial \gamma}; \dfrac{\partial Y^*}{\partial \delta}$

La Derivada Parcial

- Aplicaciones:
  - Modelo Insumo Producto:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

  - ¿Cómo hallaría usted $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial d_k}$?
  - Sol.: $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial d_k} = v_{jk}$

A-C: 7.5.2 y 7.5.3

La Derivada Parcial

- Aplicaciones:
  - Modelo de Cournot:
    - Dos firmas compiten en cantidades con funciones de demanda inversa $P(q_1 + q_2)$ y funciones de costos $C_i(q_i)$
    - Escriba la función de beneficios para cada firma
    - Suponga
      - $P(q_1 + q_2) = a - (q_1 + q_2)$
      - $C_i(q_i) = c_i q_i$
    - Halle $\dfrac{\partial \Pi_i}{\partial q_i}$

Derivación Implícita

Derivación Implícita

Pregunta:

$$\text{Cómo hallamos } \frac{dy}{dx} \quad \text{si} \quad \frac{x}{y} - x^2 y = 6\,?$$

Respuesta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

Halle y':

$$f(x, y) = xy^2 e^y = 0$$

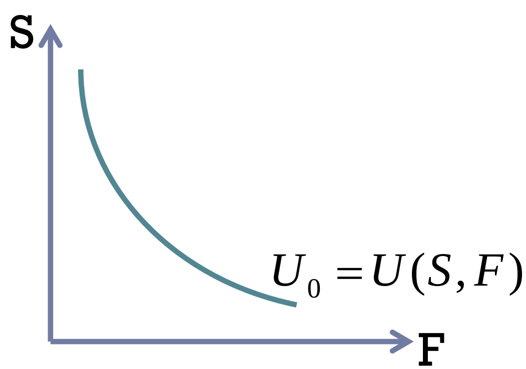
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + (xy)^{0.5} = 0$$

A-C: 8.5.1 y 8.5.2

Derivación Implícita

- Curvas de Indiferencia e Isocuantas:
  - Suponga que el nivel de utilidad de un individuo está dado por $U_0 = U(S, F)$, que puede ser escrito implícitamente: $H(S, F) = U_0 - U(S, F) = 0$
  - Por tanto

$$\frac{dS}{dF} = -\frac{U_F}{U_S} = -TMgS_{F,S}$$



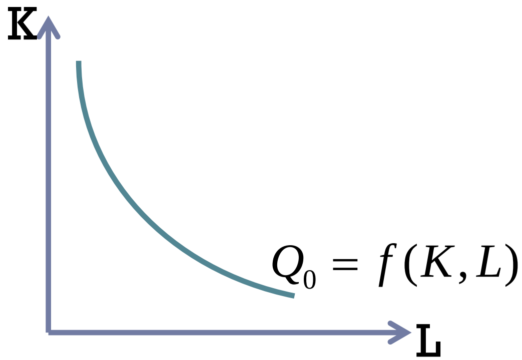
$$U = 10S^{0.2}F^{0.8}$$

$$U = 10(0.8X^{-2} + 0.2Y^{-2})^{-0.5}$$

Derivación Implícita

- Curvas de Indiferencia e Isocuantas:
  - Suponga un nivel de producto dado por $Q_0 = f(K, L)$, que puede ser escrito: $G(K, L) = Q_0 - f(K, L) = 0$
  - Por tanto

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{G_L}{G_K} = -\frac{f_L}{f_K} = -TMgST_{L,K}$$



$$Q = K^{0.3}L^{0.4}$$

$$Q = 100/(KL)$$

Ejercicios varios

1. Pruebe que la regla del logaritmo puede obtenerse a partir de las reglas de la función exponencial y de la función inversa
2. Use $CT(Q) = k + CV(Q)$ y $CMg = CT'(Q)$ para probar que $CTMe' = -c/Q^2+(CMg - CVMe)/Q$
3. Considere una función de demanda $Q = f(P)$ con $f'(P)<0$; muestre que $IMg = dIT/dQ = P(1 + 1/\varepsilon_{QP})$
   i. Muestre que $dIT/dP = Q(1 + 1/\varepsilon_{QP})$
   ii. ¿Qué concluye acerca de la relación entre elasticidad precio de la demanda, Ingreso Total y cambios en el precio y la cantidad?

Ejercicios varios

4. Halle la utilidad marginal de la comida (F) y la ropa (C) de un individuo con función de Utilidad U = FCS; donde S es techo y está fijo en 20 unidades
   i. Halle la tasa marginal de sustitución entre C y F
5. Asuma $Q_d = f(P)$ con $f'(P) < 0 \rightarrow IMe = P = f^{-1}(Q_d)$
   i. Halle IT; IMg e IMg'
   ii. Pruebe que IMg < IMe
   iii. Pruebe que si IMe es lineal en Q_d, la pendiente de IMg es dos veces la de Ime
6. Considere una firma con funciones de Ingreso Medio y Costos Totales $IMe = 20 – 5Q – Q^2$, $CT = 4 + 14Q - 5Q^2 + Q^3$
   i. Halle IMg y CMg
   ii. Si se maximizan beneficios en IMg = CMg; halle P* y Q*
   iii. Halle la elasticidad precio de la demanda para P* y Q*
   iv. ¿Opera esta firma bajo competencia perfecta? ¿Por qué?

Estática Comparativa de Modelos de Funciones Generales

Estática Comparativa de Modelos de Funciones Generales

- Estática Comparativa: niveles de generalidad

Parámetros y variables exógenas **numéricas**

Parámetros y variables exógenas **simbólicas**

Parámetros y variables exógenas **generales**

Estática Comparativa de Modelos de Funciones Generales

- Suponga: $Y = C + I_0 + G_0$; $C = C(Y, T_0)$ (T_0 exógeno)
- Reducible a: $Y = C(Y, T_0) + I_0 + G_0$;
- ¿Cómo hallaría las derivadas de estática comparativa en este caso?
  - Suponga que existe $Y^* = Y^*(I_0, G_0, T_0)$, y esta cumple con $Y^* = C(Y^*, T_0) + I_0 + G_0$

    ¿Cómo se llama?
  - ¿$\frac{\partial Y^*}{\partial T_0}$? ¡No! T_0 y Y^* no son independientes
  - Necesitamos $\frac{dY^*}{dT_0}$ ¿Cómo?...

Estática Comparativa de Modelos de Funciones Generales

- La derivada total de una función multivariada:
  - Sea $y = f(x, w)$ con $x = g(w) \rightarrow y = f[g(w), w]$
  - Un cambio en w tiene un efecto <u>directo</u> y un efecto <u>indirecto</u> sobre y:

$$\underbrace{\frac{dy}{dw} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dw} + \frac{\partial y}{\partial w}}_{\text{Derivada Total}} \Rightarrow \underbrace{dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial w}dw}_{\text{Diferencial Total}} = f_x dx + f_w dw$$

  - ¿Qué pasa si $y = f(x_1, x_2, w)$ con $x_1 = g(w)$ y $x_2 = h(w)$?

Estática Comparativa de Modelos de Funciones Generales

- La derivada total de una función multivariada:
  - Si $y = f(x, w) = 3x - w^2$ con $x = g(w) = 2w^2 + w + 4$; Halle dy/dw
  - Suponga $Q = Q(K, L, t)$ con $K = K(t)$ y $L = L(t)$; Halle dQ/dt
  - Halle dy para $y = f(x, z) = e^x \ln z$
  - A-C 8.4.3
  - Halle dQ para $Q = 25K^{1/5}L^{1/5}M^{1/5}$

A-C 8.4.1 y 8.4.2

Estática Comparativa de Modelos de Funciones Generales

- Suponga: $Y = C + I_0 + G_0$; $C = C(Y, T_0)$ (T_0 exógeno)
- Entonces, halle $\dfrac{dY^*}{dT_0}$ para $Y^* = C(Y^*, T_0) + I_0 + G_0$

  - Use derivada Total : $\dfrac{dy}{dw} = \dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{dx}{dw} + \dfrac{\partial y}{\partial w}$

  - Use Regla de la Función Implícita: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y}$

Estática Comparativa de Modelos de Funciones Generales

- **Suponga:** $Y = C + I_0 + G_0$; $C = C(Y, T_0)$ (T_0 exógeno)
- Entonces, halle $\dfrac{dY^*}{dT_0}$ para $Y^* = C(Y^*, T_0) + I_0 + G_0$

  - R: $\dfrac{dY^*}{dT_0} = \dfrac{\partial C / \partial T_0}{1 - \partial C / \partial Y^*}$
  - ¿Signos?
  - Compruebe para $C(Y, T_0) = a + bY - T_0$
  - Compruebe para $C(Y, T_0) = a + b(Y - \varphi T_0)$

PUCMM

Economía Matemática

Septiembre – Diciembre, 2017

Diferenciación