Universidad de Cádiz

Grado en Matemáticas

Resolución numérica de ecuaciones diferenciales difusas

Trabajo fin de grado

Curso académico: 2017/2018

José Carlos García Ortega

Dr. Rafael Rodríguez Galván   Dr. Jesús Medina Moreno

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

GRADO EN MATEMÁTICAS

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSAS

TRABAJO FIN DE GRADO
CURSO ACADÉMICO: 2017/2018

JOSÉ CARLOS GARCÍA ORTEGA

Dr. Rafael Rodríguez Galván   Dr. Jesús Medina Moreno

FIRMA DEL ALUMNO   FIRMA DEL TUTOR   FIRMA DEL TUTOR

Jerez de la Frontera, Cádiz, septiembre 2018

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Pa mi

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

CONJUNTOS DIFUSOS

El contenido de este capítulo se basa en las definiciones que podemos encontrar en la referencia [1]

1.1. Subconjuntos difusos

La teoría clásica de conjuntos sólo abarca la posibilidad de que un elemento pertenezca o no, a un conjunto. Pero la realidad no es así, y pueden existir ciertos casos en lo que la **pertenencia** o no, a un conjunto haya que definirlo mediante un **grado de pertenencia.**

1.1.1. Subconjuntos difusos

En primer lugar, introduciremos el concepto de conjunto difusos que nos servirá para formalizar el concepto de conjuntos con grados de pertenencia.

Definición 1 (Subconjunto difuso). *Un **subconjunto difuso** A es un par ordenado $(\mu_A, \mathbb{U})$ con:*

$$\mu_A : \mathbb{U} \longrightarrow [0, 1]$$

*Denominamos μ_A **función de pertenencia.***

Tenemos que notar que esta función de pertenencia no define necesariamente una probabilidad, y no hace referencia por ejemplo a la probabilidad de que una persona sea alta o baja, si no que nos da una medida de cuanto de alta o baja es.

Por tanto, es natural definir la igualdad de conjuntos de la siguiente forma:

Definición 2 (Igualdad de conjuntos difusos). *Decimos que dos conjuntos difusos A y B en $\mathbb{U}$ son iguales si para todo $x \in \mathbb{U}$, se cumple $\mu_A(x) = \mu_B(x)$*

Si se que cumpliese que $\mu_A(\mathbb{U}) = \{0, 1\}$ **tendríamos que** A **es un conjunto clásico**, y llamamos a μ_A función característica de A. En este caso, tenemos que si $x \in A$, entonces $\mu_A(x) = 1$, y por el contrario si $x \notin A$ entonces, $\mu_A(x) = 0$
Por tanto, **la función** μ_A **representa una generalización del concepto de función característica clásica** dónde μ_A representa el grado de pertenencia a un conjunto.

1.1.2. α-corte

Ahora introducimos un concepto fundamental en la teoría de conjuntos difusos, y es el concepto de α-corte, que nos permitirá crear particiones de los conjuntos separados por los valores de la función de pertenencia.

Definición 3 (α-corte)**.** *Dado un conjunto difuso A, los α-corte son los subconjuntos clásicos dados por:*

$$[A]_\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{U} : \mu_A(x) \geq \alpha\} & si \quad \alpha \in (0, 1] \\ cl\{x \in \mathbb{U} : \mu_A(x) > 0\} & si \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

Además, se define:

$$soporte\, A = \{x \in \mathbb{U} : \mu_A(x) > 0\}$$

$$nucleo\, A = \{x \in \mathbb{U} : \mu_A(x) = 1\}$$

De esta definición, se puede extraer que un conjunto difuso también puede estar definido por sus α-corte, de manera que **dos conjuntos difusos** A **y** B **son iguales, si todos sus** α**-corte son iguales.**
Dado unos α-corte podemos construir una función de pertenencia de la siguiente forma: [2]

$$\mu_A = \max\{\alpha A_\alpha(x) : \alpha \in [0, 1]\}$$

$$A_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [A]_\alpha \\ 0 & si \quad x \notin [A]_\alpha \end{cases}$$

Desde aquí, centraremos nuestro estudio en los α-corte de los conjuntos difusos.

1.2. Números difusos

Para poder trabajar con sistemas de ecuaciones diferenciales difusos, es interesante introducir el concepto de números difusos, que podrían ser valores iniciales de nuestro sistema, o números que aparecen directamente en nuestro sistema de ecuaciones diferenciales.
Necesitamos en primer lugar dos definiciones antes de definir el concepto de número difuso.

Definición 4 (Conjunto difuso normal)**.** *Un conjunto difuso A decimos que es normal si $nucleo\, A \neq \emptyset$*

Definición 5 (Conjunto difuso convexo)**.** *Dado un conjunto difuso A decimos que es convexo si su función de pertenencia es cuasicóncava, esto es:*

$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}, \lambda \in [0, 1], x, y \in \mathbb{U}$$

En este caso, si $\mathbb{U} = \mathbb{R}$ tendríamos que si A es un conjunto difuso convexo, entonces los α-corte son intervalos.
Finalmente, introducimos el concepto de número difuso:

Definición 6 (Número difuso)**.** *Decimos que A es un número difuso si $\mathbb{U} = \mathbb{R}$, A es normal y convexo, y además su función de pertenencia es continua por la derecha.*

Observamos que si $x \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x\}$ es un número difuso, con la función de pertenencia.

1.2.1. Caracterización números difusos

A continuación, introducimos dos teoremas que nos permitirán caracterizar los números difusos. Las demostraciones de estos dos resultados se pueden encontrar [2].

Teorema 1 (Teorema de Stacking)**.** *Sea A un número difuso, entonces:*

1. *Sus α-cortes son intervalos cerrados no vacíos para todo $\alpha \in [0, 1]$*
2. *Si $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ entonces $[A]_{\alpha_1} \subset [A]_{\alpha_2}$*
3. *Para toda sucesión no decreciente de $\alpha_n \in [0, 1]$ tal que $a_n \longrightarrow \alpha$ se tiene que:*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A]_{\alpha_n} = [A]_{\alpha}$$
4. *Para toda sucesión no creciente $\alpha_n \in [0, 1]$ convergente a 0 se tiene:*
$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A]_{\alpha_n} = [A]_0\right)$$

Teorema 2 (Teorema de caracterización)**.** *Sea $A = \{A_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que:*

1. *Sus α-cortes son intervalos cerrados no vacíos para todo $\alpha \in [0, 1]$*
2. *Si $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ entonces $[A]_{\alpha_1} \subset [A]_{\alpha_2}$*
3. *Para toda sucesión no decreciente $\alpha_n \in [0, 1]$ tal que $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ se tiene que*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A]_{\alpha_n} = [A]_{\alpha}$$
4. *Para toda sucesión no creciente $\alpha_n \in [0, 1]$ convergente a 0 se tiene:*
$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A]_{\alpha_n}\right) = [A]_0$$

Entonces, A es un número difuso.

1.3. Principio de extensión de Zadeh

Nos gustaría ahora que dado un conjunto difuso, y una función clásica, pudiéramos obtener una función difusa, para esto, tenemos el principio de extensión de Zadeh.

Definición 7 (Principio de extensión de Zadeh)**.** *Sean $\mathbb{U}$ y $\mathbb{V}$ dos conjuntos de universos, y sea $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$ una función clásica. Definimos el principio de extensión de Zadeh para todo conjunto difuso A en $\mathbb{U}$ con μ_A su función de pertenencia, de manera que $\hat{f}(A)$ en $\mathbb{V}$ y su función de pertenencia viene dada por:*

$$\mu_{\hat{f}(A)} = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & si \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & si \quad f^{-1} = \emptyset \end{cases}$$

Notemos, que si la función es inyectiva, la función de pertenencia se simplificaría:

$$\mu_{\hat{f}(A)} = \begin{cases} \mu_A(f^{-1}(y)) & si \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & si \quad f^{-1} = \emptyset \end{cases}$$

En el apéndice, se pueden encontrar ejemplos de funciones de pertenencias dadas por el principio de extensión de Zadeh.

1.3.1. Teoremas de continuidad

Sería ideal que no importase el orden el que obtenemos los α-corte de la imagen de una función mediante el principio de extensión de Zadeh, y esto lo asegura el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función.*

1. *Si f es sobreyectiva, entonces $[\hat{f}(A)]_\alpha = f([A]_\alpha)$ si y sólo si $\sup\{\mu_A(x) : x \in f^{-1}(y)\}$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$*

2. *Si f es continua, entonces $\hat{f} : \mathcal{F}_\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}_\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ está bien definido, y además,*

$$[\hat{f}(A)]_\alpha = f([A]_\alpha)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$

La primera implicación es clara por la definición de principio de extensión de Zadeh, para la segunda implicación veamos un caso más general:

Teorema 4. *Sean $\mathbb{U}$ y $\mathbb{V}$ unos espacios de Haussdorf, y sea $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$ una función. Si f es continua, entonces $\hat{f} : \mathcal{F}_\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}_\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ está bien definida y*

$$[\hat{f}(A)]_\alpha = f([A]_\alpha)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$

Demostración. Por la definición del principio de Zadeh, tenemos que $\hat{f}(A)$ es un subconjunto difuso de $\mathbb{V}$.
Para probar que $\hat{f}: \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n)$ hay que ver que todos los $\alpha - corte$ $[\hat{f}(A)]_\alpha$ son no vacíos, compactos en $\mathbb{V}$.
Dado que f es continua por hipótesis, la imagen de compactos, son compactos, por tanto, sólo debemos probar $[\hat{f}(A)]_\alpha = f([A]_\alpha)$.
Probémoslo por doble inclusión.

- $[\hat{f}(A)]_\alpha \subset f([A]_\alpha)$. Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\mathbb{U})$ y $y \in f([A]_\alpha)$. Por tanto, existe al menos un $x \in [A]_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Por el principio de extensión de Zadeh, tenemos $\mu_{\hat{f}(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \geq \alpha$. De donde, $y \in [\hat{f}(\mathcal{A})_\alpha]$
- Por otro lado, veamos que $[\hat{f}(A)]_\alpha \supset f([A]_\alpha)$. Dado que $\mathbb{V}$ y $\mathbb{U}$ son espacios de Haussdorf, un punto $y \in \mathbb{V}$ es cerrado. Y además, dado que f es continua, $f^{-1}(y)$ es cerrado. Dado que $[A]_0$ es compacto, ya que es la clausura, la intersección de compactos también es compactos, por tanto $f^{-1}(y) \cap [A]_0$ es compacto. Para $\alpha > 0$, consideramos $y \in [\hat{f}(A)]_\alpha$. Entonces $\mu_{\hat{f}(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \geq \alpha > 0$, y además, existe un $x \in f^{-1}(y)$ tal que $f^{-1}(y) \cap [A]_0 \neq \emptyset$

Finalmente, debido a que $\mu_A(x)$ es continúa por la derecha, y $f^{-1}(y) \cap [A]_0$ es compacto, existe un $x \in f^{-1}(y) \cap [A]_0$ con $\mu_{\hat{f}(\mathcal{A})}(y) = \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha$. Esto es porque $y = f(x)$ para algún $x \in [A]_\alpha$.
Para $\alpha = 0$, obtenemos:

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [\hat{f}(\mathcal{A})]_\alpha = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} f([\mathcal{A}]_\alpha) \subset f([\mathcal{A}]_0).$$

Dado que $f([\mathcal{A}]_0)$ es cerrado:

$$[\hat{f}(\mathcal{A})]_0 = cl\left(\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [\hat{f}(\mathcal{A})]_\alpha\right) = cl\left(\bigcup_{\alpha \in (0,1]} f([\mathcal{A}]_\alpha)\right) \subset f([\mathcal{A}]_0).$$

Y por la doble inclusión anterior, tenemos que $[\hat{f}(\mathcal{A})]_\alpha \subset f([\mathcal{A}]_\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ □

1.4. Aritmética difusa

El siguiente paso **para poder construir métodos numéricos es necesario definir las operaciones aritméticas básicas** entre conjuntos difusos.
La definiciones de **estas operaciones son bastante naturales**, pero pueden ocasionarnos algunos problemas en ciertos escenarios.
Debido a la equivalencia entre trabajar con conjuntos difusos, y sus $\alpha - corte$, daremos todas las operaciones en términos de $\alpha - cortes$.
En primer lugar, **recordemos la definición habitual de aritmética en teoría de conjuntos clásicos.**

1.4.1. Aritmética en conjuntos clásicos

Sean A, B dos conjuntos entonces:

- $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$
- $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$
- $A * B = \{ab : a \in A, b \in B\}$
- $A/B = \{a/b : a \in A, b \in B\}$

Recordados los conceptos básicos de aritmética en conjuntos clásicos, pasamos a generalizarlo para conjuntos difusos.

1.4.2. Aritmética en conjuntos difusos

Sean μ_A, μ_B dos funciones de pertenencia y sea $\odot \in \{+, -, \cdot, \div\}$ se define la función de pertenencia de la operación aritmética como:

$$\mu_{A \odot B}(x) = \sup_{a \odot b = c} \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}$$

Y dado que **las operaciones aritméticas son funciones continuas**, es equivalente trabajar con los $\alpha - corte$, **aplicando el principio de extensión de Zadeh tenemos:**
Sean A y B dos números difusos con $\alpha{-}corte$ dados por $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ y $[B]_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$, podemos definir entonces las operaciones aritméticas como:

$$[A + B]_\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$$

$$[A - B]_\alpha = [a_\alpha^- - a_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]$$

$$[A \cdot B]_\alpha = \left[\min_{s,r \in \{-,+\}} a_\alpha^s \cdot b_\alpha^r, \max_{s,r \in \{-,+\}} a_\alpha^s \cdot b_\alpha^r \right]$$

$$[A \div B]_\alpha = \left[\min_{s,r \in \{-,+\}} \frac{a_\alpha^s}{b_\alpha^r}, \max_{s,r \in \{-,+\}} \frac{a_\alpha^s}{b_\alpha^r} \right]$$

Problemas al definir estas operaciones aritméticas

Nuestro objetivo final es **definir la diferencial de una función**, para funciones escalares de una sola variable podemos definir la diferencial como:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Consideremos ahora una función $f(x) = A \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\mathbb{U})$, donde A es un número difuso constante.

$$f(x+h) - f(x) = [A - A]$$

Sean $[A]_\alpha$ los $\alpha - cortes$ de A entonces:

$$[A - A]_\alpha = [a_\alpha^- - a_\alpha^+, a_\alpha^+ - a_\alpha^-]$$

Si $A \neq 0$ tenemos que $[A - A]_\alpha \neq 0$, por tanto al dividir por $h \longrightarrow 0$, tenemos una indeterminación, de donde, tal y **como hemos definido las operaciones aritméticas para los conjuntos difusos no tendríamos definidas las derivadas de funciones constantes**, y esto, es un problema.
Necesitamos definir **un nuevo concepto de diferencia**, que para ello, **utilizaremos la diferencia de Hukuhara.**

1.4.3. Hukuhara y diferencia generalizada

Debido al problema especificado en la sección anterior, **necesitamos definir una operación resta que cumpla que** $A - A = \{0\}$, Hukuhara dio una definición de resta que cumplía esta propiedad.

Definición 8. *Dados dos números difusos $A, B \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}\mathbb{R}$ la **diferencia de Hukuhara (H-Diferencia)** se define como $A \ominus_H B = C$ donde C es el número difuso que cumple $A = B + C$, si existe.*

Observación 1. *Sean $A, B, C \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}\mathbb{R}$ consideremos sus $\alpha - cortes$, por tanto $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $[B]_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$ y $[C]_\alpha = [c_\alpha^-, c_\alpha^+]$.*
De donde,

$$[a_\alpha^-, a_\alpha^+] = [b_\alpha^- + c_\alpha^-, b_\alpha^+ + c_\alpha^+]$$

Por tanto,

$$[A \ominus_H B]_\alpha = [a_\alpha^- - b_\alpha^-, a_\alpha^+ - b_\alpha^+]$$

Con esta observación es fácil ver que la H-Diferencia cumple que $A - A = \{0\}$

1.5. Interactividad

El principio de extensión de Zadeh se puede aplicar a funciones de distinto número de argumentos. Los ejemplos más simples podrían ser la suma, la resta, la multiplicación y la división de números difusos. Esta situación es más compleja, debido a que tenemos que tener en cuenta las estructuras entre los distintos argumentos. Esta dependencia mutua entre los distintos conjuntos difusos, viene dada por una función de pertenencia común que llamaremos **función de pertenencia conjunta**. En términos de conjuntos difusos, esta dependencia se llama interactividad.

Definición 9 (Interactividad, función de pertenencia conjunta)**.** *Sea $\hat{a} \in \mathcal{F}(V)$ y sea $\hat{b} \in \mathcal{F}(W)$. Entonces la interactividad de $\hat{a}$ y $\hat{b}$ se define por la función de pertenencia conjunta: $\mu_{\hat{a},\hat{b}} : V \times W \to [0, 1]$*

Para calcular las funciones de pertenencia marginales, simplemente tenemos que aplicar el principio de extensión de Zadeh:

Definición 10 (Función marginal de una función de pertencia conjunta)**.** *Definimos la función de pertenencia marginal respecto a como:*

$$\mu_a(a) = \sup \lim_{b \in W} \mu_{\hat{a},\hat{b}}(a, b)$$

Se suele suponer no interactividad al trabajar con varios conjuntos difusos, esto es;

Definición 11 (No interactivos o independientes)**.** *Dos conjuntos difusos $\hat{a} \in \mathcal{F}(V)$ y $\hat{b} \in \mathcal{F}(W)$ se dicen que son no interactivos, o independientes si $\mu_{\hat{a},\hat{b}} = \min(\mu_{\hat{a}}(a), \mu_{\hat{b}}(b))$*

Ejemplo 1. *En el caso de conjuntos no interactivos, podemos escribir las operaciones aritméticas de los conjuntos difusos de la siguiente manera:*

$$[\hat{a} + \hat{b}]_\alpha = [[\hat{a}^-_\alpha + [\hat{b}]^-_\alpha, [\hat{a}]^+_\alpha + [\hat{b}]^+_\alpha]$$

$$[\hat{a} - \hat{b}]_\alpha = [[\hat{a}^-_\alpha - [\hat{b}]^-_\alpha, [\hat{a}]^+_\alpha - [\hat{b}]^+_\alpha]$$

$$[\hat{a} * \hat{b}]_\alpha = \max\{[\hat{a}]^i_\alpha[\hat{b}]^j_\alpha\}, i, j \in \{+, -\}$$

$$[\hat{a}/\hat{b}]_\alpha = \max\{[\hat{a}]^i_\alpha/[\hat{b}]^j_\alpha\}, i, j \in \{+, -\}$$

1.6. Métrica en conjuntos difusos

En esta sección vamos a generalizar la definición de espacio métrico a conjuntos difusos, y vamos a dar algunos resultados importantes. Todas las demostraciones de esta sección pueden encontrarse en [2].
En primer lugar, nos acercaremos al concepto de métrica:

Definición 12 (Pseudométrica)**.** *Sean A y B dos subconjuntos de un espacio métrico $\mathbb{U}$ compactos. Entonces definimos la pseudométrica como:*

$$\rho(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$$

Donde:

$$d(a, B) = \inf_{b \in B} ||a - b||$$

es la separación de Haussdorf

Definición 13 (Métrica de Pompeiu-Hausdorff). *Sean A y B dos conjuntos difusos en $\mathbb{U}$, un espacio métrico. La métrica de Pompeiu-Hausdorff, denotada por d_∞ se define:*

$$d_\infty(A,B) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \text{máx}\{\rho([A]_\alpha,[B]_\alpha),\rho([B]_\alpha,[A]_\alpha)\}$$

Si A y B fueran números difusos, tendríamos:

$$d_\infty(A,B) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \text{máx}\{|a_\alpha^- - b_\alpha^-|,|a_\alpha^+ - b_\alpha^+|\}$$

Teorema 5 ([3]). *El espacio de los números difusos, con la métrica d_∞ es un espacio de Banach.*

CAPÍTULO 2

ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSAS

En el capítulo anterior **hemos introducido todas las herramientas necesarias** para introducir el concepto de ecuación diferencial difusa.
En este capitulo introduciremos los conceptos necesarios para plantear y resolver ecuaciones diferenciales difusas de forma analítica y numérica.
También motivaremos al lector con ejemplos y modelos que utilizan ecuaciones diferenciales difusas.

2.1. Definición de ecuación diferencial difusas y su solución

No existe consenso aún sobre la definición correcta de lo que es una ecuación diferencial difusa, y es por ello que existen muchas definiciones para ese mismo concepto. Podemos encontrar estas discusiones en las distintas bibliografías que hace referencia [4].

2.1.1. Definiciones equivalentes

Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales difusas:

$$\frac{d\hat{u}}{dt}(t) = \hat{f}(t, \hat{u}(t)), \quad \hat{u}(0) = \hat{u}_0$$

Donde $t \in [0, \infty]$ representa una variable temporal, la función $\hat{u} : [0, \infty) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es una función dependiente del tiempo, y $\hat{f} : [0, \infty) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Pero, de esta definición nos surge otra duda. ¿Qué significa derivar una función difusa respecto una variable? Para ello acudamos a la definición clásica:

$$\frac{d\hat{u}}{dt}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\hat{u}(t_0 + t) - \hat{u}(t_0)}{t}$$

Y es claro que es necesario aplicar el principio de extensión de Zadeh para conocer $\hat{u}(t_0 + t) - \hat{u}(t_0)$, lo que nos advierte que el conocimiento de la función de pertenencia $\mu_{\hat{u}(t_0+t)-\hat{u}(t_0)}$ va a ser necesario a escala infinitesimal.
Introducimos ahora distintas formas de entender el concepto de derivada difusa:

Inclusión diferencial difusa

También conocidas como *FDI*, por su nombre en inglés *Fuzzy Differential Inclusions*, se definen como:

$$\frac{du}{dt}(t) \in [\hat{f}(t, u(t))]_\alpha,\ u(0) \in [\hat{u}_0]_\alpha,\ \alpha \in [0, 1]$$

De esta manera, una vez que tenemos las soluciones para todos los $\alpha-$corte podemos construir la solución difusa gracias a [2].
Esta forma también se conoce solución de una ecuación diferencial difusa interpretado como una familia de inclusiones. Este proceso es bastante potente a la hora trabajar con él numéricamente, pues podemos aplicar los procedimientos clásicos.

Derivada de Hukuhara

Como introducimos en el primer capítulo, podemos usar esa misma idea para definir la derivada de Hukuhara

Definición 14 (Derivada de Hukuhara)**.** *Una función $\hat{u} : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es diferenciable según Hukuhara en $t_0 \in \mathbb{R}$ si los límites:*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\hat{u}(t + t_0) \ominus \hat{u}(t_0)}{t}\ ,\ \lim_{t\to 0^+} \frac{\hat{u}(t_0) \ominus \hat{u}(t + t_0)}{t}$$

Existen, y son iguales. Al límite se le llama derivada de Hukuhara.

CAPÍTULO 3

MODELOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSOS

3.1. Aplicaciones a las ciencias naturales

3.1.1. Aplicaciones a la mecánica clásica

3.1.2. Aplicaciones a la mecánica cuántica

3.1.3. Aplicaciones a reacciones químicas

3.1.4. Aplicaciones a la biología

3.2. Aplicaciones a las ciencias sociales

3.2.1. Aplicaciones a la economía

3.2.2. Aplicaciones a crecimientos de población

CAPÍTULO 4

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSAS

BIBLIOGRAFÍA

[1] L. C. d. B. . B. B. Luciana Takata Gomes, "Fuzzy differential equations in various approaches," *Maths*, vol. 1, pp. 11–38, 2015.

[2] J. M. M. . E. M. Reus, "Apuntes de modelización matemática," *Maths*, vol. 3, pp. 1–20, 2018.

[3] D. R. M. Puri, "Fuzzy random variables," *Maths*, vol. 1, pp. 409–422, 1986.

[4] S. Corveleyn, "The numerical solution of elliptic partial differential equations with fuzzy coefficients," 2014.