# Universidad de Cádiz

Grado en Matemáticas


# Resolución numérica de ecuaciones diferenciales difusas

Trabajo fin de grado

Curso académico: 2017/2018


José Carlos García Ortega

Dr. Rafael Rodríguez Galván     Dr. Jesús Medina Moreno

# UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

GRADO EN MATEMÁTICAS

# RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSAS

TRABAJO FIN DE GRADO
CURSO ACADÉMICO: 2017/2018

JOSÉ CARLOS GARCÍA ORTEGA

Dr. Rafael Rodríguez Galván    Dr. Jesús Medina Moreno

FIRMA DEL ALUMNO    FIRMA DEL TUTOR    FIRMA DEL TUTOR

Jerez de la Frontera, Cádiz, julio 2018

**Abstract**

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

**Resumen**

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

*Pa mi*

# ÍNDICE GENERAL

# CAPÍTULO 1

# CONJUNTOS DIFUSOS

El contenido de este capítulo se basa en las definiciones que podemos encontrar en la referencia [1]

## 1.1. Subconjuntos difusos

La teoría clásica de conjuntos sólo abarca la posibilidad de que un elemento pertenezca o no, a un conjunto. Pero la realidad no es así, y pueden existir ciertos casos en lo que la **pertenencia** o no, a un conjunto haya que definirlo mediante un **grado de pertenencia.**

### 1.1.1. Subconjuntos difusos

En primer lugar, introduciremos el concepto de conjunto difusos que nos servirá para formalizar el concepto de conjuntos con grados de pertenencia.

**Definición 1** (Subconjunto difuso)**.** *Un **subconjunto difuso** $A$ es un par ordenado $(\mu_A, \mathbb{U})$ con:*

$$\mu_A : \mathbb{U} \longrightarrow [0,1]$$

*Denominamos $\mu_A$ **función de pertenencia.***

Por tanto, es natural definir la igualdad de conjuntos de la siguiente forma:

**Definición 2** (Igualdad de conjuntos difusos)**.** *Decimos que dos conjuntos difusos $A$ y $B$ en $\mathbb{U}$ son iguales si para todo $x \in \mathbb{U}$, se cumple $\mu_A(x) = \mu_B(x)$*

Si se que cumpliese que $\mu_A(\mathbb{U}) = \{0,1\}$ **tendríamos que $A$ es un conjunto clásico**, y llamamos a $\mu_A$ función característica de $A$. En este caso, tenemos que si $x \in A$, entonces $\mu_A(x) = 1$, y por el contrario si $x \notin A$ entonces, $\mu_A(x) = 0$
Por tanto, **la función $\mu_A$ representa una generalización del concepto de función característica clásica** dónde $\mu_A$ representa el grado de pertenencia a un conjunto.

### 1.1.2. $\alpha$-corte

Ahora introducimos un concepto fundamental en la teoría de conjuntos difusos, y es el concepto de $\alpha$-corte, que nos permitirá crear particiones de los conjuntos separados por los valores de la función de pertenencia.

**Definición 3** ($\alpha$-corte). *Dado un conjunto difuso $A$, los $\alpha$-corte son los subconjuntos clásicos dados por:*

$$[A]_\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{U} : \mu_A(x) \geq \alpha\} & si \quad \alpha \in (0,1] \\ cl\{x \in \mathbb{U} : \mu_A(x) > 0\} & si \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

*Además, se define:*

$$soporte\ A = \{x \in \mathbb{U} : \mu_A(x) > 0\}$$

$$nucleo\ A = \{x \in \mathbb{U} : \mu_A(x) = 1\}$$

De esta definición, se puede extraer que un conjunto difuso también puede estar definido por sus $\alpha$-corte, de manera que **dos conjuntos difusos $A$ y $B$ son iguales, si todos sus $\alpha$-corte son iguales.**
Dado unos $\alpha$-corte podemos construir una función de pertenencia de la siguiente forma: [2]

$$\mu_A = \max\{\alpha A_\alpha(x) : \alpha \in [0,1]\}$$

$$A_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [A]_\alpha \\ 0 & si \quad x \notin [A]_\alpha \end{cases}$$

Desde aquí, centraremos nuestro estudio en los $\alpha$-corte de los conjuntos difusos.

## 1.2. Números difusos

Para poder trabajar con sistemas de ecuaciones diferenciales difusos, es interesante introducir el concepto de números difusos, que podrían ser valores iniciales de nuestro sistema, o números que aparecen directamente en nuestro sistema de ecuaciones diferenciales.
Necesitamos en primer lugar dos definiciones antes de definir el concepto de número difuso.

**Definición 4** (Conjunto difuso normal). *Un conjunto difuso $A$ decimos que es normal si $nucleo\ A \neq \emptyset$*

**Definición 5** (Conjunto difuso convexo). *Dado un conjunto difuso $A$ decimos que es convexo si su función de pertenencia es cuasicóncava, esto es:*

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}, \lambda \in [0,1], x, y \in \mathbb{U}$$

En este caso, si $\mathbb{U} = \mathbb{R}$ tendríamos que si $A$ es un conjunto difuso convexo, entonces los $\alpha$-corte son intervalos.
Finalmente, introducimos el concepto de número difuso:

**Definición 6** (Número difuso)**.** *Decimos que $A$ es un número difuso si $\mathbb{U} = \mathbb{R}$, $A$ es normal y convexo, y además su función de pertencia es continua por la derecha.*

Observamos que si $x \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x\}$ es un número difuso, con la función de pertenencia.

### 1.2.1. Caracterización números difusos

A continuación, introducimos dos teoremas que nos permitirán caracterizar los números difusos. Las demostraciones de estos dos resultados se pueden encontrar [2].

**Teorema 1** (Teorema de Stacking)**.** *Sea $A$ un número difuso, entonces:*

1. *Sus $\alpha$-cortes son intervalos cerrados no vacíos para todo $\alpha \in [0, 1]$*
2. *Si $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ entonces $[A]_{\alpha_1} \subset [A]_{\alpha_2}$*
3. *Para toda sucesión no decreciente de $\alpha_n \in [0, 1]$ tal que $a_n \longrightarrow \alpha$ se tiene que:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A]_{\alpha_n} = [A]_\alpha$$

4. *Para toda sucesión no creciente $\alpha_n \in [0, 1]$ convergente a $0$ se tiene:*

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A]_{\alpha_n} = [A]_0\right)$$

# BIBLIOGRAFÍA

[1] L. C. d. B. . B. B. Luciana Takata Gomes, “Fuzzy differential equations in various approaches,” *Maths*, vol. 1, pp. 11–38, 2015.

[2] J. M. M. . E. M. Reus, “Apuntes de modelización matemática,” *Maths*, vol. 3, pp. 1–20, 2018.