LÓGICA MATEMÁTICA

Conceptos Básicos

¿Qué es Lógica Matemática?

- Investiga…
  - *¿Qué es?*
  - *¿Cómo se clasifica?*
  - *¿Para que sirve? (Áreas de aplicación)*

Lógica Matemática

- Es parte de la matemática.
- Estudia:
  - *Principios de la demostración*
  - *Inferencia válida: proceso de derivar conclusiones a partir de premisas.*
- Aplicaciones en ciencias de la computación y la lógica filosófica.
- Clasificación:
  - ***Lógica Clásica***
    - Lógica proposicional
    - Lógica de 1er orden
    - Lógica de 2º orden
  - *Lógica No Clásica*
  - *Lógica Modal*

CONCEPTOS BÁSICOS

Sentencia Declarativa

- Una **sentencia declarativa** es una oración que *afirma* algo.
- Ejemplos
  - *Estoy en la clase de Matemáticas Discretas.*
  - *La clase de Matemáticas Discretas es fácil.*
  - *El caballo blanco es verde.*
  - *Si la luna está llena y no llueve, entonces saldré a correr.*
  - *El último Teorema de Fermat es cierto.*
  - *Esta frase es falsa.*
  - *x+3 es impar.*

Sentencia Declarativa

- No son sentencias declarativas
  - *¿Está lloviendo?*
  - *¡Hola!, ¿Cómo estás?*
  - *Tierno saúz, casi ámbar, casi luz...*
  - *¿Qué es en el fondo actuar, sino mentir? ¿Y qué es actuar bien, sino mentir convenciendo?*

Proposición

- Una **proposición** es una *sentencia declarativa* que debe ser *verdadera* o *falsa* pero no ambas.
- Ejemplos
  - *Estoy en la clase de Matemáticas Discretas.*
  - *La clase de Matemáticas Discretas es fácil.*
  - *Si la luna está llena y no llueve, entonces saldré a correr.*
  - *El último Teorema de Fermat es cierto.*

Proposición

- No son proposiciones
- Esta frase es falsa
  - *Si la frase es cierta, lo que en ella se dice debe ser cierto, así debe ser falsa.*
  - *Si la frase es falsa, lo contrario a lo que en ella se afirma es cierto, por consiguiente es cierta.*
- x+3 es un número impar
  - *Si $x = 2$ la afirmación es cierta.*
  - *Si $x = 3$ la afirmación es falsa*

Variable Proposicional

- En nuestro manejo de proposiciones utilizaremos símbolos para proposiciones.
- Estos símbolos se llamaran variables proposicionales.

p : El curso de Matemáticas Discretas esta fácil.

- Esto indica que la variable proposicional p representa la proposición “El curso de Matemáticas Discretas está fácil.”

Tipos de Proposiciones

- ***Proposiciones Primitivas*** es una proposición que no se puede descomponer en hechos más simples.
- Ejemplos
  - *El curso de matemáticas discretas está fácil.*
  - *El caballo blanco es verde.*
- ***Proposiciones Compuestas*** están formadas de varias proposiciones primitivas.
- Ejemplos
  - *Si la luna está llena y no llueve, salgo a caminar.*
  - *Yo contraté el cable básico, como tú.*

Valor de Verdad

- A las proposiciones se les asigna lo que llamamos *valor de verdad*
- Este valor puede ser **verdadero** o **falso**.
- Este valor dependerá de lo que en la misma proposición se afirme.
  - *Si es cierto diremos que tiene valor de verdad verdadero.*
  - *Si es falso diremos que tiene valor de verdad falso.*

Operadores Lógicos

- Estos son operadores que nos permiten construir proposiciones compuestas.
  - *Negación: $\neg p$ (Léase "no p")*
  - *Disyunción: $p \lor q$ (Léase "p o q")*
  - *Conjunción: $p \land q$ (Léase "p y q")*
- Estos operadores como todos los que ya conoces, pueden usarse una o varias veces con ayuda de paréntesis para generar proposiciones tan complejas como queramos:

$$p \lor (q \land (r \lor (\neg p)))$$

Jerarquía de Operadores

- Cualquier operador debe de tener una jerarquía asociada.
- Esto nos sirve, para a falta de paréntesis, poder decidir que operación se realiza primero.
- En los Operadores Lógicos la jerarquía es:

$$(+) \quad \neg \; \wedge \; \vee \quad (-)$$

Jerarquía de Operadores

- Ejemplos

La expresión	Se interpreta como
$p \vee q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
$\neg p \wedge q$	$(\neg p) \wedge q$
$p \wedge \neg s \vee \neg q \wedge r$	$(p \wedge (\neg s)) \vee ((\neg q) \wedge r)$

Ejemplo

Supongamos que

- p: Esta caluroso
- q: Esta soleado
- r: Esta lluvioso
- s: Esta húmedo

Ejemplo

Entonces la representación de las siguientes afirmaciones queda:

- Esta lluvioso y soleado : $r \wedge q$
- Esta soleado o esta lluvioso : $q \vee r$
- Esta soleado y no esta caluroso : $q \wedge \neg p$
- Ni esta soleado ni esta caluroso : $\neg q \wedge \neg p$
- Esta soleado pero esta lluvioso : $q \wedge r$
- Esta lluvioso pero no esta caluroso : $r \wedge \neg p$

Fórmula Bien Formada

- Una **formula bien formada** (FBF ó por sus siglas en ingles WFF) es una expresión que contiene *variables proposicionales*, las *constantes* **T**(verdadero) o **F** (falso), *operadores lógicos* y *paréntesis*.
- Los paréntesis debes estar balanceados, los operadores lógicos deben estar presentes y con el numero de argumentos correctos.
- FBF
  – p, $p \vee q$, $p \vee (q \wedge ((\neg r) \wedge s))$
- NO FBF
  – pq, $r \vee (q \wedge \neg)$, $(s \wedge r) \vee (q \neg p)$

Tablas de Verdad

- Una **tabla de verdad** de una proposición es una descripción organizada de los valores de verdad de la proposición para todos los valores posibles de la variables proposicionales que aparecen en ella.

Tablas de Verdad - Negación

p	¬ p
T	F
F	T

Tablas de Verdad - Disyunción

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Tablas de Verdad - Conjunción

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Equivalencia Lógica

- Dos formas proposicionales α y β se dicen **lógicamente equivalentes** si y solo si tienen valores de verdad idénticos para cualquier sustitución de valores de verdad de sus variables proposicionales. Esto se simbolizará

$$\alpha \equiv \beta$$

- Esto significa que la tabla de verdad de α y la de β son idénticas.

Equivalencia Lógica

- ¿Cómo saber si dos proposiciones son equivalentes?
  - *A través de las tablas de verdad.*
  - *Si los valores de todos los renglones son idénticos entonces son equivalentes.*
  - *Si no, no lo son.*

Nombre		
Ley Conmutativa	$p \land q \equiv q \land p$	$p \lor q \equiv q \lor p$
Ley Asociativa	$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$	$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$
Ley Distributiva	$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$	$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
Ley de De Morgan	$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$	$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$
Ley de Absorción	$p \land (p \lor q) \equiv p$	$p \lor (p \land q) \equiv p$
Ley de la Doble Negación	$\neg(\neg p) \equiv p$	
Ley de la Negación o Inversa	$p \land \neg p \equiv F$	$p \lor \neg p \equiv T$
Ley de idempotencia	$p \land p \equiv p$	$p \lor p \equiv p$
Ley de Identidad	$p \land T \equiv p$	$p \lor F \equiv p$

Simplificaciones

- Propiedad transitiva de la equivalencia

  Si $\alpha \equiv \beta$ y $\beta \equiv \gamma$, entonces $\alpha \equiv \gamma$.

- Propiedad de sustitución

  Si $\alpha \equiv \beta$ y $F(\alpha)$ es una expresión lógica donde aparece α, entonces $F(\alpha) \equiv F(\beta)$.

  Aquí $F(\beta)$ es la expresión que se obtuvo de sustituir β donde aparecía α en $F(\alpha)$

Tipos de FBF

- **Tautología** es una fórmula bien formada que resulta verdadera para cualquier interpretación. Esto es, si se evalúa en verdadero para todos los valores de verdad posibles. (siempre es verdadera).
- **Contradicción** es una fórmula bien formada que resulta falsa para cualquier interpretación. (siempre es falsa)
- **Contingencia** es una fórmula bien formada que resulta a veces verdadera y a veces falsa.

Tipos de FBF

- En términos formales:
  - *α es una tautología si y solo si $\alpha \equiv T$;*
  - *α es una contradicción si y solo si $\alpha \equiv F$;*
  - *α es una contingencia si y solo si α no es equivalente ni a T ni a F.*

La Condicional

- La forma proposicional más importante es la **condicional**.
- Es otro operador además de los ya vistos.
- Es la que motiva más errores en su interpretación.
- Esta forma condicional es la relacionada con la inferencia lógica.

Definición

- Una forma condicional o simplemente una condicional es una proposición de la forma:

Si P, entonces Q

- Donde P y Q son proposiciones.
- A P se le llamara la **hipótesis** de la condicional o **antecedente** de la proposicional
- A Q se le llamara **conclusión** de la condicional o **consecuente** de la proposicional.
- En notación matemática la condicional es representada por:
  - $P \longrightarrow Q$

Ejemplos

- Si n=m, entonces n+m es par.
- Si n=0, entonces n+m=m.
- Si n es múltiplo de 4, entonces n es par.
- Si Juan pasa con 85 todos los exámenes de Discretas, entonces Juan pasa Discretas.
- Si tu programa es correcto, entonces al ejecutarlo con los datos del profesor producirá la salida esperada.
- Si resuelves correctamente el problema de tarea, entonces obtendrás la respuesta correcta.

Otras maneras…

- Si P, entonces Q.
- Si P, también Q.
- Si P, Q.
- P implica Q.
- P es suficiente para Q.
- Q cuando P.
- Q cada vez que P.
- Q, si P.
- A fin de que Q, basta que P.
- Q es requerido para que P.
- P sólo si Q.
- Sólo si se cumple Q, se cumple P

“Q si P” vs “P sólo si Q”

- La palabra sólo cambia la posición de los elementos de la implicación $P \rightarrow Q$.
- Si P : Tener a tiempo el dinero
- Q: Ir a comprar el nuevo iPhone
- Iré a comprar el nuevo iPhone si tengo a tiempo el depósito ($P \rightarrow Q$).
  – *P es una condición **suficiente** para Q. Existen otras maneras de comprar el nuevo iPhone.*
- Iré a comprar el nuevo iPhone sólo si tengo a tiempo el depósito ($Q \rightarrow P$).
  – *P es una condición **necesaria** para Q. Es la única manera de comprar el nuevo iPhone.*

Jerarquía

- Incluyamos en nuestra jerarquía el operador condicional.

$$(+)\ \neg\ \wedge\ \vee\ \rightarrow\ (-)$$

Tabla de Verdad

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Si la hipótesis es falsa, la implicación es verdadera.
- Si la hipótesis es verdadera, la única posibilidad de que la implicación sea verdadera es que la conclusión sea verdadera

Equivalencias

- Equivalencia básica de la condicional
  - $p \longrightarrow q \equiv \neg p \lor q$
- Negación de la condicional
  - $\neg(p \longrightarrow q) \equiv p \land \neg q$
  - $p \lor q \longrightarrow r \equiv (p \longrightarrow r) \land (q \longrightarrow r)$

Variantes

- Suponga una condicional $P \rightarrow Q$.
- Otras condicionales importantes construidas a partir de ella son:
  - *La **recíproca:*** $Q \rightarrow P$
  - *La **contrapositiva:*** $\neg Q \rightarrow \neg P$
  - *La **inversa:*** $\neg P \rightarrow \neg Q$

Propiedades

- La condicional y su contrapositiva **<u>sí</u>** son equivalentes:
  - $p \longrightarrow q \equiv \neg q \longrightarrow \neg p$
- La condicional y su recíproca **<u>no</u>** son equivalentes:
  - $p \longrightarrow q \quad q \longrightarrow p$

$$\neq$$

Analizando…

- Cuando se dice que A es un **requisito** para B, se esta diciendo que:
  - *Si no se cumple A, entonces no se cumple B, es decir,*
  - $\neg A \longrightarrow \neg B$
- Esta es la contrapositiva de B⟶A
- Por ello es que A es un requisito para B se convierte en
  - $B \longrightarrow A$

Analizando…

- Cuando se dice A sólo si B se esta diciendo que:
  - *Si no se cumple B, entonces no se cumple A, es decir,*
  - $\neg B \longrightarrow \neg A$
- Esta es la contrapositiva de A⟶B
- Por ello es que A sólo si B se convierte en
  - $A \longrightarrow B$

La Bicondicional

- Una forma bicondicional es una proposición de la forma:

P si y solamente si Q

- donde P y Q son proposiciones.
- Esta proposición es representada con la notación:

$$P \leftrightarrow Q$$

- Esta proposición es verdadera si P y Q tienen los mismos valores de verdad (verdadero o falso).

La Bicondicional

- Ya vimos que $P \rightarrow Q$ no es lo mismo que $Q \rightarrow P$.
- Puede ocurrir que ambos $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$ son verdaderas.
- Por ejemplo, si p: "0 = 1" y q: "1 = 2," entonces $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$ ambas son verdaderas porque p y q ambas son falsas.
- La proposición $P \leftrightarrow Q$ se define como la proposición $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

Otras formas…

- Si P entonces Q, y recíprocamente, si Q entonces P.
- Si P entonces Q, y recíprocamente.
- Si P, y sólo entonces, Q.
- P si Q, y sólo entonces.
- P si y sólo si Q.
- A fin de que P es necesario y suficiente que Q.

Tabla de Verdad

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Equivalencias

- $P \longleftrightarrow Q \equiv (P \longrightarrow Q) \land (Q \longrightarrow P)$

En resumen...

- Ahora sabemos:
  - *Proposiciones*
  - *Operadores* ($\neg\ \land\ \lor \rightarrow \leftrightarrow$)
  - *FBF*
  - *Tablas de Verdad*
  - *Equivalencias*