Teoría de Conjuntos e Inducción Matemática

Teoría de Conjuntos

Introducción

- Aquí aprenderemos acerca de la teoría elemental de conjuntos.
- Esto incluye conceptos de cómo se definen y cuáles son las operaciones básicas.
- Un aspecto que deseamos enfatizar es cómo elaborar la teoría de conjuntos haciendo uso de la lógica matemática.

Definición

- Un **conjunto** es una colección o familia de objetos.
- Las llaves **{ }** tendrán un uso muy especial y único: servirán para definir un conjunto.
- Una collection de objetos (miembros) sin repetición.
- Se denotan con letras mayúsculas A, B, C.

Conjuntos

- Se pueden especificar de dos maneras:
  - Enumerando (Forma Extensional)

$$A = \{a, b, c, \ldots, z\}$$

  - Describiendo (Forma intencional)

$$A = \{x \in Letras \quad | \quad x \text{ es minúscula}\}$$

Definición por Extensión

- Construir o definir un conjunto por extensión consiste en declarar todos lo elementos que lo forman.
- Ejemplo

{Rosana, Sakura, María del Carmen, Vito Corleone, Pedro }

Definición por Intención

- Construir o definir un conjunto por intención consiste en declarar cuáles elementos de un cierto conjunto son seleccionados. Esto se lleva a cabo por una propiedad o predicado $P(x)$.
- Ejemplo

$$\{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x\}$$

- *"Todos aquellos números reales que son mayores que -2."*

Pertenecia a un conjunto

- Un objeto *x* se dice pertenecer o ser elemento o estar en un conjunto *A* si
  - Cuando el conjunto *A* está definido por extensión: cuando el elemento *x* aparece en la lista de elementos del conjunto *A*
  - Cuando el conjunto *A* está definido por intención: cuando el elemento *x* es tomado del universo del discurso y cumple la propiedad establecida para *A*
- Si el objeto x pertenece al conjunto A se denota como:

$$x \in A$$

- Si no lo esta se denota como:

$$x \notin A$$

Ejemplo

- Indique cuáles opciones contienen elementos del conjunto:
- A = { Rosana, Sakura, María del Carmen, Vito Corleone, Pedro}

1. Jonas
2. Tomás
3. Luis
4. Lucía
5. Pedro
6. Pablo Morales

Ejemplo

- Indique cuáles opciones contienen elementos del conjunto:

$$\{x \in \mathbf{Z} | -2 < x < 5\}$$

1. 3
2. 6
3. -3
4. 1.5

Subconjunto

- Diremos que un conjunto *A* es un subconjunto de el conjunto *B* y lo simbolizaremos

$$A \subseteq B$$

- Si todo elemento de *A* es también elemento de *B*.
- Observe que de la definición se tiene la siguiente equivalencia:

$$A \subseteq B \equiv \forall x, x \in A \rightarrow x \in B$$

- Y negando lo anterior:

$$A \not\subseteq B \equiv \exists x, x \in A \wedge x \notin B$$

Ejemplo

- En referencia a los conjuntos
  - **N** El conjunto de los números enteros positivos
  - **Z** El conjunto de los enteros
  - **R** El conjunto de los números reales
  - **Q** El conjunto de los números racionales o fraccionarios
- Se tiene:
  - 1. $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$
  - 2. $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$
  - 3. $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$
  - 4. $\mathbf{Z} \nsubseteq \mathbf{N}$
  - 5. $\mathbf{Q} \nsubseteq \mathbf{Z}$
  - 6. $\mathbf{R} \nsubseteq \mathbf{Q}$

Subconjunto Propio

- Diremos que un conjunto *A* es un subconjunto propio de el conjunto *B* y lo simbolizaremos

$$A \subset B$$

- si todo elemento de *A* es también elemento de *B* y además existe un elemento de *B* que no es elemento de *A*.

$$A \subset B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \not\subseteq A)$$

Ejemplo

- En referencia a los conjuntos **N**, **Z**, **Q**, **R**

1. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$
2. $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$
3. $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

Ejemplo

- Si $A = \{c,d,f,i\}$ $B = \{a,f\}$ $C = \{c,i\}$
- Indique cuáles afirmaciones son verdaderas:

a) $B \subseteq B$

b) $B \subset B$

c) $C \subseteq B$

d) $C \subseteq A$

- (a) cierto pues todo elemento de B es elemento de B. (b) Falso, pues $\subset$ no tolera la igualdad. (c) Falso, pues existe un elemento en C, a saber i, que no es elemento de B. (d) Cierto, pues todo elemento de C, tanto c como i, son elementos de A.

Ejemplo

- Indique cuáles opciones contienen afirmaciones falsas:

1. $c \subset \{c\}$
2. $\{c\} \subseteq \{a, b, \{c\}\}$
3. $\{c\} \in \{a, b, \{c\}\}$
4. $\{c\} \in \{\{c\}\}$
5. $\{c\} \subseteq \{\{c\}\}$

Igualdad entre conjuntos

- Dos conjuntos A y B se dicen iguales si poseen los mismos elementos. Es decir, todos los elementos de A son elementos de B y todos los elementos de B son también elementos de A. En términos formales:

$$A = B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Ejemplo

- Indique cuáles opciones contienen afirmaciones ciertas para los conjuntos:
- $D = \{a, b, e, f\}$
- $A = \{a, a, f, g, e, g\}$
- $C = \{f, g, a, e\}$
- $B = \{f, b, a, e\}$
- Entre:

1. $D = C$
2. $C = A$
3. $D = B - P(A)$
4. $D = A$

Conjunto vacío

- El conjunto que no tiene ningún elemento se llamará el conjunto vacío.
- Se simboliza por:

$$\emptyset$$

Ojo

- Para cualquier conjunto A, $\emptyset \subset A$
- $\emptyset \in \{\emptyset\}$ Cierto: aparece como elemento.
- $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ Cierto: el vacío es subconjunto de cualquiera
- $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ Cierto
- $\emptyset \subset \emptyset$ Falso

Universo Discurso

- Es el conjunto de cosas acerca de las cuales se habla en un determinado contexto. No es un conjunto universal.
- Lo representaremos como $\mathcal{U}$
- Indica el contexto de nuestro problema.

Cardinalidad

- La **cardinalidad** de un conjunto indica el número de elementos de un conjunto.
- Se representa por

$$|A|$$

- Siempre será un número entero
- En el caso del conjunto vacío

$$|\emptyset| = 0$$

Operaciones entre conjuntos

Operaciones con Conjuntos

- Se definen las siguientes operaciones sobre conjuntos.
  - Unión
  - Intersección
  - Diferencia
  - Complemento
  - Conjunto Potencia
  - Producto Cartesiano

Unión

- Sean *A* y *B* dos conjuntos. La **unión** de *A* con *B* es el conjunto de aquellos elementos que están en *A* o que están en *B*.
- Este conjunto se simbolizará por

$$A \cup B$$

- Formalmente

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

Intersección

- Sean A y B dos conjuntos. La intersección de A con B es el conjunto de aquellos elementos que están en A y que están en B.
- Este conjunto se simbolizará por

$$A \cap B$$

- Formalmente

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Diferencia

- Sean *A* y *B* dos conjuntos. La diferencia de *A* con *B* es el conjunto de aquellos elementos que están en *A* y que no están en B.
- Este conjunto se simbolizará por

A – B

- Formalmente

$$A - B = \{x | x \in A \text{ pero } x \notin B\}$$

- <u>**OJO**: El orden sí importa</u>

Complemento

- Sea *A* un subconjunto de un universo discurso *U*. El complemento de *A* son todos aquellos elementos de *U* que no están en *A*.
- Este conjunto se simbolizará por
- A^C o A'
- Formalmente

$$A^C = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

Conjunto Potencia

- El conjunto potencia de A se define como el conjuno de todos los posibles subconjuntos de A.
- Este conjunto se simbolizará por

$$2^A$$

- Formalmente

$$2^A = \{X | X \subseteq A\}$$

Producto Cartesiano

- Sean A y B dos conjuntos (posiblemente iguales pero no vacíos). El producto cartesiano de A con B es el conjunto de todas las parejas ordenadas (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.
- Este conjunto se simbolizará por

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B}$$

- Formalmente

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ y } x \in B\}$$

OJO: El orden sí importa

Ejemplos

- Sea $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{3,4,5\}$ calcula las siguientes operaciones. Nuestro universo discurso son todos los x naturales entre 1 y 10.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - B$

d) $A \times B$

e) 2^A

f) A^C

g) B^C

Propiedades de las Operaciones con Conjuntos

Conmutatividad

- Sean A y B dos conjuntos cualquiera, entonces:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Asociatividad

- Sean A, B y C conjuntos cualquiera, entonces:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributividad

- Sean A, B y C conjuntos cualquiera, entonces:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes de Identidad

- Sean A un conjunto cualquiera, entonces:

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \mathcal{U} = A$$

Leyes de Complemento

- Sean A un conjunto cualquiera, entonces:

$$A \cup A^{c} = \mathcal{U}$$

$$A \cap A^{c} = \emptyset$$

Idempotencia

- Sean A un conjunto cualquiera, entonces:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Leyes de Dominación

- Sean A un conjunto cualquiera, entonces:

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Leyes de De Morgan

- Sean A y B dos conjuntos cualquiera, entonces:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Leyes de Absorción

- Sean A y B dos conjuntos cualquiera, entonces:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Complemento Base

- $\mathcal{U}^C = \emptyset$
- $\emptyset^C = \mathcal{U}$

Ley de Diferencia

- Sean A y B dos conjuntos cualquiera, entonces:

$$(A - B) = A \cap B^C$$

Ejemplo

- Indique en orden la opción que contiene la ley cuyo uso se lleva a cabo en:
- $(((D - E)^C)^C)^C = (D - E)^C$
- $(B \cap C) \cap (B \cap C)^C = \emptyset$
- $E^C \cap (D \cap B) = (E^C \cap D) \cap B$
- $E^C \cup E^C = E^C$
- $B \cap (B \cup (C \cup D)) = B$

Sucesiones y sumatorias

Sucesiones – Idea intuitiva

- Imagine que una persona decide contar sus ancestros.
- Él tiene dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, dieciseis bisabuelos, y así sucesivamente. Estos números podrían escribirse en una lista ordenada:

$$2,4,8,16,32,64,128,\ldots$$

- El símbolo ". . . " se llama puntos suspensivos y son una abreviatura para "y así sucesivamente".

Sucesiones – Idea intuitiva

- Para expresar el patrón de los números, suponga que cada uno etiqutado por un entero indicando su posición en el renglón:

Posición en el renglón	1	2	3	4	5	6	7	. . .
Número de ancestros	2	4	8	16	32	64	128	. . .

Definición

- Una **sucesión** es una lista ordenada de elementos:

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$$

- Cada elemento a_k se llama término.
- La letra k en a_k se conoce como subíndice o índice.
  - m es el subíndice del término inicial.
  - n es el súbíndice del término final.

Sucesión Infinita

- Una **sucesión infinita** es un conjunto ordenados de elementos que se pueden describir mediante una lista:

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$$

- Una fórmula explícita o fórmula general para una sucesión es una fórmula en función de *k* que evaluada en *k* da el término a_k.

Actividad

- En equipos investiga el significado de los siguientes símbolos. Incluye todos sus elementos y su forma de resolverlos.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k$$

Suma

- La notación:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

- representa la suma desarrollada

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$$

- En la notación de sumatoria, *k* se llama índice, *m* se llama el índice inferior de la suma, *n* se llama el índice superior de la suma.

Producto

- La notación: $$\prod_{k=m}^{n} a_k$$

- representa la producto desarrollada

$$am \,.\, a_{m+1} \,.\, a_{m+2} \,.\, \dots \,.\, a_n$$

- En la notación de producto, *k* se llama índice, *m* se llama el índice inferior del producto, *n* se llama el índice superior del producto.

Ejemplo

- Determine en orden la evaluación de cada fórmula:

1. $\prod_{n=1}^{3} n^2$
2. $\sum_{n=1}^{4} n\,(1+n)$
3. $\sum_{n=-1}^{0} 2^n\,(3+n)$

Ejemplo

- Dada la siguiente sucesión indique su representación abreviada.

a) $1 - r + r^2 - r^3 + r^4$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3$

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2$

Ejemplo

- Determine en orden la evaluación de cada fórmula:

a) $\prod_{n=1}^{4}(n^3 - 1)$

b) $\prod_{n=2}^{4}(n^2 - 1)$

c) $\prod_{n=1}^{4}(1 - t^4)$

Propiedades

Propiedades de las sumatorias

- Si $a_m, a_{m+1}, \ldots$ y $b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ son sucesiones de números reales y c es un número real cualquiera entonces para enteros $n \geq m$ se cumple:

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)}$$

$$\boxed{c \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c\, a_k}$$

$$\boxed{\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right) = \prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k)}$$

Corrimiento de índice

- Queremos que

$$\sum_{n=1}^{12}(2+5\,n)=\sum_{j=11}^{\cdots}\cdots$$

Por tanto $n-1=j-11$. Si despejamos $n = j - 10$. El límite superior se obtiene para $n = 12$, así el límite superior de la segunda sumatoria se obtiene para $12 = j-10$, es decir para $j = 22$:

$$\sum_{n=1}^{12}(2+5\,n)=\sum_{j=11}^{22}(2+5(j-10))=\sum_{j=11}^{22}(-48+5\,j)$$

Ejemplo

- Determine en orden los valores de *A*, *B* y *C* para que

$$\sum_{k=0}^{A} (C + B\,k)$$

- sea igual a la suma :

$$-2\sum_{j=3}^{12} (3 - 5\,j) + \sum_{j=-3}^{6} (4 + j)$$

Ejercicios

- Reduce las siguientes sumatorias de la misma manera que en los ejemplos anteriores:

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k - 3) + \sum_{k=1}^{n} (4 - 5k)$$

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 4) + 5 \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k^2 - 1)$$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2} \right)$$

Inducción matemática

Introducción

- Ve el siguiente video

http://youtu.be/FJrd7Jdtch8

Idea intuitiva

- Suponga una fila interminable de fichas de dominó.
- Suponga que las fichas están estratégicamente colocadas de tal forma que si cualquiera cayera hacia adelante tiraría la siguiente ficha hacia adelante. (Paso Inductivo)
- Suponga también que la primera ficha cae hacia adelante.(Paso Base)
- ¿Qué pasará con las fichas de dominó?

Inducción Matemática

- Suponga que una propiedad (fórmula, desigualdad, condición, etc) $P(n)$ que está definida para los enteros a partir de un entero fijo a (Para $n=a$, para $n=a+1$,para $n=a+2,\ldots$)
- Suponga que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:
  - $P(a)$ es verdadero.
  - Para cualquier entero k mayor o igual que a:
    - Si $P(k)$ es cierto, entonces $P(k+1)$ es cierto.
- Entonces la afirmación:
  - Para todos los enteros $n \geq a$, $P(n)$ es verdadera.

Método

- Para demostrar que es verdadera una afirmación:

Para todos los enteros $n \geq a$, $P(n)$ cualquier entero $k \geq a$ . . .

- Pruebe que:

1. **Paso Base** - P(a) es verdadero.
2. **Paso Inductivo** – Muestre que para cualquier entero k≥a
   - **suponiendo** que $P(k)$ es verdadera (Hipótesis inductiva)
   - **entonces muestre** que $P(k + 1)$ también es verdadera.