Teoría de Conjuntos e Inducción Matemática

Teoría de Conjuntos

Introducción

- Aquí aprenderemos acerca de la teoría elemental de conjuntos.
- Esto incluye conceptos de cómo se definen y cuáles son las operaciones básicas.
- Un aspecto que deseamos enfatizar es cómo elaborar la teoría de conjuntos haciendo uso de la lógica matemática.

Definición

- Un conjunto es una colección o familia de objetos.
- Las llaves { } tendrán un uso muy especial y único: servirán para definir un conjunto.
- Una collection de objetos (miembros) sin repetición.
- Se denotan con letras mayúsculas A, B, C.

Conjuntos

- Se pueden especificar de dos maneras:
 - Enumerando (Forma Extensional)

$$A = \{a, b, c, \dots, z\}$$

Describiendo (Forma intencional)

$$A = \{x \in Letras \mid x \text{ es minúscula}\}$$

Definición por Extensión

- Construir o definir un conjunto por extensión consiste en declarar todos lo elementos que lo forman.
- Ejemplo

{Rosana, Sakura, María del Carmen, Vito Corleone, Pedro }

Definición por Intención

- Construir o definir un conjunto por intención consiste en declarar cuáles elementos de un cierto conjunto son seleccionados. Esto se lleva a cabo por una propiedad o predicado P(x).
- Ejemplo

$$\{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x\}$$

• "Todos aquellos números reales que son mayores que -2."

Pertenecia a un conjunto

- Un objeto x se dice pertenecer o ser elemento o estar en un conjunto
 A si
 - Cuando el conjunto A está definido por extensión: cuando el elemento x
 aparece en la lista de elementos del conjunto A
 - Cuando el conjunto A está definido por intención: cuando el elemento x es tomado del universo del discurso y cumple la propiedad establecida para A
- Si el objeto x pertenece al conjunto A se denota como:

$$x \in A$$

Si no lo esta se denota como:

$$x \notin A$$

- Indique cuáles opciones contienen elementos del conjunto:
- A = { Rosana, Sakura, María del Carmen, Vito Corleone, Pedro}
 - 1. Jonas
 - 2. Tomás
 - 3. Luis
 - 4. Lucía
 - 5. Pedro
 - 6. Pablo Morales

 Indique cuáles opciones contienen elementos del conjunto:

$${x \in \mathbf{Z} | -2 < x < 5}$$

- **1.** 3
- 2.6
- 3.-3
- **4.**1.5

Subconjunto

 Diremos que un conjunto A es un subconjunto de el conjunto B y lo simbolizaremos

$$A \subseteq B$$

- Si todo elemento de A es también elemento de B.
- Observe que de la definición se tiene la siguiente equivalencia:

$$A \subseteq B \equiv \forall x, x \in A \longrightarrow x \in B$$

Y negando lo anterior:

$$A \not\subseteq B \equiv \exists x, x \in A \land x \notin B$$

- En referencia a los conjuntos
 - N El conjunto de los números enteros positivos
 - Z El conjunto de los enteros
 - R El conjunto de los números reales
 - Q El conjunto de los números racionales o fraccionarios
- Se tiene:
 - 1. **N** ⊆ **Z**
 - 2. **Z** ⊆ **Q**
 - 3. **Q** ⊆ **R**
 - 4. Z ⊈ N
 - 5. **Q**⊈**Z**
 - 6. **R**⊈**Q**

Subconjunto Propio

 Diremos que un conjunto A es un subconjunto propio de el conjunto B y lo simbolizaremos

$$A \subset B$$

 si todo elemento de A es también elemento de B y además existe un elemento de B que no es elemento de A.

$$A \subset B \equiv (A \subseteq B) \land (B \not\subseteq A)$$

En referencia a los conjuntos N, Z, Q, R

$$1.N \subset Z$$

$$2.Z \subset Q$$

- Si $A = \{c, d, f, i\} B = \{a, f\} C = \{c, i\}$
- Indique cuáles afirmaciones son verdaderas:
- α) $B \subseteq B$
- b) $B \subset B$
- $C) C \subseteq B$
- $d) \subset A$
- (a) cierto pues todo elemento de B es elemento de B. (b)
 Falso, pues
 ⊂ no tolera la igualdad. (c) Falso, pues existe
 un elemento en C, a saber i, que no es elemento de B. (d)
 Cierto, pues todo elemento de C, tanto c como i, son
 elementos de A.

 Indique cuáles opciones contienen afirmaciones falsas:

- **1.** $c \subset \{c\}$
- **2.** {*c*}⊆{a,b,{c}}
- $3. \{c\} \in \{a,b,\{c\}\}\$
- **4.** {*c*}∈{{*c*}}
- $5. \{c\} ⊆ \{\{c\}\}$

Igualdad entre conjuntos

• Dos conjuntos A y B se dicen iguales si poseen los mismos elementos. Es decir, todos los elementos de A son elementos de B y todos los elementos de B son también elementos de A. En términos formales:

$$A = B \equiv (A \subseteq B) \land (B \subseteq A)$$

- Indique cuáles opciones contienen afirmaciones ciertas para los conjuntos:
- $D = \{a, b, e, f\}$
- $A = \{a, a, f, g, e, g\}$
- $C = \{f, g, a, e\}$
- $B = \{f, b, a, e\}$
- Entre:
- **1.**D=C
- 2. C = A
- 3. D=B-P(A)
- Δ . D = A

Conjunto vacío

- El conjunto que no tiene ningún elemento se llamará el conjunto vacío.
- Se simboliza por:



Ojo

- Para cualquier conjunto A, $\emptyset \subset A$
- $\emptyset \in \{\emptyset\}$ Cierto: aparece como elemento.
- Ø ⊆ {Ø} Cierto: el vacío es subconjunto de cualquiera
- $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ Cierto
- $\emptyset \subset \emptyset$ Falso

Universo Discurso

- Es el conjunto de cosas acerca de las cuales se habla en un determinado contexto. No es un conjunto universal.
- ullet Lo representaremos como ${\mathcal U}$
- Indica el contexto de nuestro problema.

Cardinalidad

- La cardinalidad de un conjunto indica el número de elementos de un conjunto.
- Se representa por

- Siempre será un número entero
- En el caso del conjunto vacío

$$|\emptyset| = 0$$

Operaciones entre conjuntos

Operaciones con Conjuntos

- Se definen las siguientes operaciones sobre conjuntos.
 - Unión
 - Intersección
 - Diferencia
 - Complemento
 - Conjunto Potencia
 - Producto Cartesiano

Unión

- Sean A y B dos conjuntos. La unión de A con B es el conjunto de aquellos elementos que están en A o que están en B.
- Este conjunto se simbolizará por

AUB

Formalmente

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ \'o } x \in B\}$$

Intersección

- Sean A y B dos conjuntos. La intersección de A con B es el conjunto de aquellos elementos que están en A y que están en B.
- Este conjunto se simbolizará por

$$A \cap B$$

Formalmente

$$A \cap B = \{x | x \in A \ y \ x \in B\}$$

Diferencia

- Sean A y B dos conjuntos. La diferencia de A con B es el conjunto de aquellos elementos que están en A y que no están en B.
- Este conjunto se simbolizará por

$$A - B$$

Formalmente

$$A - B = \{x | x \in A \text{ pero } x \notin B\}$$

OJO: El orden sí importa

Complemento

- Sea A un subconjunto de un universo discurso U. El complemento de A son todos aquellos elementos de U que no están en A.
- Este conjunto se simbolizará por
- $\bullet A^{C} \circ A'$
- Formalmente

$$A^C = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

Conjunto Potencia

- El conjunto potencia de A se define como el conjuno de todos los posibles subconjuntos de A.
- Este conjunto se simbolizará por

Formalmente

$$2^A = \{X | X \subseteq A\}$$

Producto Cartesiano

- Sean A y B dos conjuntos (posiblemente iguales pero no vacíos). El producto cartesiano de A con B es el conjunto de todas las parejas ordenadas (a, b) donde $a \in A y b \in B$.
- Este conjunto se simbolizará por

$$A \times B$$

Formalmente

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ y } x \in B\}$$

OJO: El orden sí importa

• Sea $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3,4,5\}$ calcula las siguientes operaciones. Nuestro universo discurso son todos los x naturales entre 1 y 10.

a)
$$A$$
 \cup
 B

 b) A
 \cap
 B

 c) A
 B

 d) A
 \times
 \times

f)
$$A^C$$
 g) B^C

Propiedades de las Operaciones con Conjuntos

Conmutatividad

Sean A y B dos conjuntos cualquiera, entonces:

 $A \cup B = B \cup A$

 $A \cap B = B \cap A$

Asociatividad

Sean A, B y C conjuntos cualquiera, entonces:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Distributividad

• Sean A, B y C conjuntos cualquiera, entonces:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes de Identidad

Sean A un conjunto cualquiera, entonces:

$$AUØ=A$$

$$A \cap \mathcal{U} = A$$

Leyes de Complemento

Sean A un conjunto cualquiera, entonces:

$$A \cup A^{C} = \mathcal{U}$$

$$A \cap A^{c} = \emptyset$$

Idempotencia

Sean A un conjunto cualquiera, entonces:

 $A \cup A = A$

 $A \cap A = A$

Leyes de Dominación

Sean A un conjunto cualquiera, entonces:

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Leyes de De Morgan

Sean A y B dos conjuntos cualquiera, entonces:

$$(A \cup B)^{c} = A^{c} \cap B^{c}$$
$$(A \cap B)^{c} = A^{c} \cup B^{c}$$

Leyes de Absorción

Sean A y B dos conjuntos cualquiera, entonces:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Complemento Base

$$\mathcal{U} = \emptyset$$

$$\phi^{c} = \mathcal{U}$$

Ley de Diferencia

Sean A y B dos conjuntos cualquiera, entonces:

$$(A - B) = A \cap B^C$$

- Indique en orden la opción que contiene la ley cuyo uso se lleva a cabo en:
- $(((D E)^{c})^{c})^{c} = (D E)^{c}$
- $(B \cap C) \cap (B \cap C)^C = \emptyset$
- $E^{c} \cap (D \cap B) = (E^{c} \cap D) \cap B$
- $E^C \cup E^C = E^C$
- \bullet $B \cap (B \cup (C \cup D)) = B$

Sucesiones y sumatorias

Sucesiones – Idea intuitiva

- Imagine que una persona decide contar sus ancestros.
- Él tiene dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, dieciseis bisabuelos, y así sucesivamente. Estos números podrían escribirse en una lista ordenada:

 El símbolo ". . . " se llama puntos suspensivos y son una abreviatura para "y así sucesivamente".

Sucesiones – Idea intuitiva

 Para expresar el patrón de los números, suponga que cada uno etiqutado por un entero indicando su posición en el renglón:

Posición en el renglón	1	2	3	4	5	6	7	
Número de ancestros	2	4	8	16	32	64	128	

Definición

Una sucesión es una lista ordenada de elementos:

$$a_{m}, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$$

- Cada elemento a_k se llama término.
- La letra k en a_k se conoce como subíndice o índice.
 - *m* es el subíndice del término inicial.
 - n es el súbíndice del término final.

Sucesión Infinita

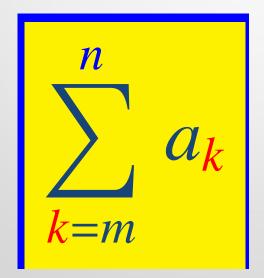
 Una sucesión infinita es un conjunto ordenados de elementos que se pueden describir mediante una lista:

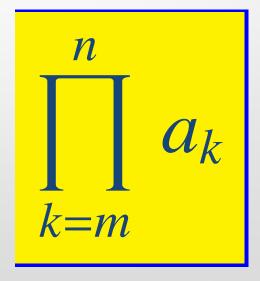
$$a_{m}, a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{n}$$

• Una fórmula explícita o fórmula general para una sucesión es una fórmula en función de k que evaluada en k da el término a_k .

Actividad

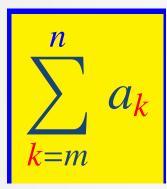
 En equipos investiga el significado de los siguientes símbolos. Incluye todos sus elementos y su forma de resolverlos.





Suma

La notación:



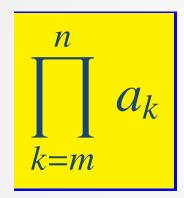
representa la suma desarrollada

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

• En la notación de sumatoria, k se llama índice, m se llama el índice inferior de la suma, n se llama el índice superior de la suma.

Producto

• La notación:



representa la producto desarrollada

$$am \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_n$$

• En la notación de producto, k se llama índice, m se llama el índice inferior del producto, n se llama el índice superior del producto.

 Determine en orden la evaluación de cada fórmula:

1.
$$\prod_{n=1}^{3} n^2$$

2.
$$\sum_{n=1}^{4} n (1+n)$$

3.
$$\sum_{n=-1}^{0} 2^n (3+n)$$

 Dada la siguiente sucesión indique su representación abreviada.

a)
$$1 - r + r^2 - r^3 + r^4$$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3$
c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2$

 Determine en orden la evaluación de cada fórmula:

a)
$$\prod_{n=1}^{4} (n^3 - 1)$$

b)
$$\prod_{n=2}^{4} (n^2 - 1)$$

c)
$$\prod_{n=1}^{4} (1-t^4)$$

Propiedades

Propiedades de las sumatorias

• Si a_m, a_{m+1}, \dots y $b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \dots$ son sucesiones de números reales y c es un número real cualquiera entonces para enteros $n \ge m$ se cumple:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$$

$$c \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c a_k$$

$$\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right) = \prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k)$$

Corrimiento de índice

Queremos que

$$\sum_{n=1}^{12} (2+5n) = \sum_{j=11}^{\dots} \dots$$

Por tanto n-1=j-11. Si despejamos n=j-10. El límite superior se obtiene para n=12, así el límite superior de la segunda sumatoria se obtiene para 12=j-10, es decir para j=22:

$$\sum_{n=1}^{12} (2+5n) = \sum_{j=11}^{22} (2+5(j-10)) = \sum_{j=11}^{22} (-48+5j)$$

Determine en orden los valores de A, B y C
 para que

$$\sum_{k=0}^{A} (C + B k)$$

• sea igual a la suma :

$$-2\sum_{j=3}^{12} (3-5j) + \sum_{j=-3}^{6} (4+j)$$

Ejercicios

 Reduce las siguientes sumatorias de la misma manera que en los ejemplos anteriores:

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k - 3) + \sum_{k=1}^{n} (4 - 5k)$$

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 4) + 5 \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k^2 - 1)$$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2}\right)$$

Inducción matemática

Introducción

Ve el siguiente video

http://youtu.be/FJrd7Jdtch8

Idea intuitiva

- Suponga una fila interminable de fichas de dominó.
- Suponga que las fichas están estratégicamente colocadas de tal forma que si cualquiera cayera hacia adelante tiraría la siguiente ficha hacia adelante. (Paso Inductivo)
- Suponga también que la primera ficha cae hacia adelante.(Paso Base)
- ¿Qué pasará con las fichas de dominó?

Inducción Matemática

- Suponga que una propiedad (fórmula, desigualdad, condición, etc) P(n) que está definida para los enteros a partir de un entero fijo α (Para $n=\alpha$, para $n=\alpha+1$, para $n=\alpha+2,...$)
- Suponga que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:
 - P(a) es verdadero.
 - Para cualquier entero k mayor o igual que α :
 - Si P(k) es cierto, entonces P(k + 1) es cierto.
- Entonces la afirmación:
 - Para todos los enteros $n \ge a$, P(n) es verdadera.

Método

- Para demostrar que es verdadera una afirmación: Para todos los enteros n > a. P(n) cualquier entero k
- Para todos los enteros $n \ge a$, P(n) cualquier entero $k \ge a \dots$
- Pruebe que:
- 1. Paso Base P(a) es verdadero.
- 2. Paso Inductivo Muestre que para cualquier entero k≥a
 - suponiendo que P(k) es verdadera (Hipótesis inductiva)
 - entonces muestre que P(k + 1) también es verdadera.