

## 0.1 Distancia de árboles

### 0.1.1 Descripción del problema

Un árbol se define como un grafo conectado y no dirigido con  $n$  vértices y  $n - 1$  aristas. La distancia entre dos vértices en un árbol es igual al número de aristas en el camino simple único entre ellos.

Te dan dos enteros  $x$  y  $y$ . Construye un árbol con las siguientes propiedades:

- El número de pares de vértices con una distancia par entre ellos es igual a  $x$ .
- El número de pares de vértices con una distancia impar entre ellos es igual a  $y$ .

Por un par de vértices, nos referimos a un par ordenado de dos vértices (posiblemente, el mismo o diferente).

### 0.1.2 Propuesta de solución

En el ejercicio nos piden que construyamos un árbol con las propiedades que nos dan:

- Que el número de pares de vértices con distancia par sea  $x$ .
- Que el número de pares de vértices con distancia impar sea  $y$ .

Al final del ejercicio nos hacen una especificación de lo que es un par de vértices y nos dicen que el par puede estar conformado por el mismo vértice. Por lo que todos los vértices tienen distancia par con ellos mismos.

### 0.1.3 Estrategia para resolver el problema

La distancia entre dos vértices es par si están en el mismo nivel o en niveles distintos con una distancia par entre los niveles.

Y es impar si uno está en un nivel par y el otro en un nivel impar.

Si  $x$  es el número de pares con distancia par y  $y$  es el número de pares con distancia impar, entonces podemos deducir que:

Los vértices se pueden dividir en dos grupos: aquellos en niveles pares y aquellos en niveles impares. Si  $a$  es el número de vértices en niveles pares y  $b$  es el número de vértices en niveles impares, entonces:

- El número de pares de vértices con distancia par es  $a^2 + b^2$ .
- El número de pares de vértices con distancia impar es  $2ab$ .

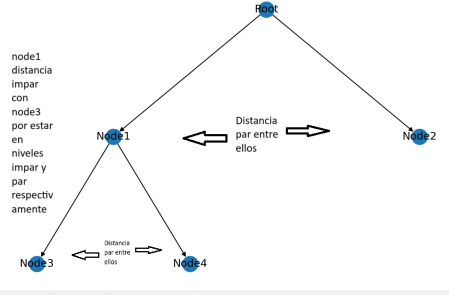


Figure 1: Representación gráfica del problema

A partir de las ecuaciones:

$$a^2 + b^2 = x, \quad (1)$$

$$2ab = y, \quad (2)$$

podemos resolver estas ecuaciones para encontrar  $a$  y  $b$ .

Lo que hicimos para resolver este ejercicio fue aplicar conocimientos de combinatoria.

Sabemos que en un árbol de  $n$  vértices hay  $n^2$  pares de vértices, luego tenemos que ver los que tienen distancia par y los que tienen distancia impar.

Separamos los vértices por niveles, los que están en niveles pares,  $a$ , y los que están en niveles impares,  $b$ . Ahora los de distancia par están en los mismos niveles por lo que nos queda  $a^2 + b^2$ . Y para los impares por cada uno de nivel par tenemos los que están en niveles impares, de ahí que sea  $2ab$ .

La complejidad temporal de este algoritmo es  $\mathcal{O}(\sqrt{x+y})$ , pues lo que hacemos para calcular  $a$  y  $b$  es un ciclo for que va hasta  $\sqrt{x+y}$  y ver si  $x - a^2 = b^2$  nos da los valores que cumplen con las ecuaciones anteriores.

Al tener esos valores de  $a$  y  $b$ , sabemos cuántos nodos están en niveles pares y cuántos nodos están en niveles impares, y ya de ahí es fácil construir un árbol.