

# Actividad 11

José Daniel Gaytán Villarreal  
Grupo 3

28 de mayo de 2019

## Resumen

Se explica burdamente la teoría del caos y se plantean como ejemplo los retratos fases de un oscilador de Duffing de ciertos parámetros cuyos resultados tienden al caos.

## 1. Introducción

El presente trabajo busca explicar de manera breve en qué consiste la teoría del caos, con el fin de plantear una introducción a un tema tan complejo pero de igual manera tan relevante para la física actual. Lo anterior se hace mediante una breve explicación teórica y se ejemplifica a través de algunos retratos de fase.

El objetivo de la actividad fue el realizar retratos de fase para retratar de manera visual el concepto del caos.

En la sección 2, se explica la teoría del caos y algunos conceptos relacionados a ella o relevantes para la comprensión del tema; a su vez, se mostrarán algunos retratos de fase que muestran claramente la presencia de caos. Por último, en la sección 3, se emite una breve conclusión referente a la metodología utilizada y sus subsecuentes resultados.

## 2. Desarrollo

### 2.1. Marco Teórico

#### 2.1.1. Sobres inicios del caos como teoría

En 1961, Edward Lorenz trabajaba desarrollando modelos climáticos a través de cálculos en una computadora. Al intentar reproducir nuevamente una simulación desde un punto diferente a la inicial (como si la simulación empezara desde la mitad), se dio cuenta de que al introducir condiciones iniciales con diferencias mínimas en su modelo se generaban resultados ampliamente divergentes. Es así como Lorenz fue el primero en reconocer un comportamiento caótico en el modelado de sistemas meteorológicos [1].

Un año más tarde, en 1963, Lorenz introdujo un concepto denominado *atractor de Lorenz*, el cual es un sistema dinámico determinista tridimensional no lineal obtenido de las ecuaciones simplificadas de rolos de convección producidos en las ecuaciones dinámicas que modelan la atmósfera terrestre. En esas ecuaciones, Lorenz identificó ciertos patrones en sistemas aparentemente estocásticos: fueron los inicios matemáticos del caos [2].

#### 2.1.2. Teoría del caos

La teoría del caos es una rama de las matemáticas que se centra en el estudio de sistemas dinámicos sumamente sensibles a las condiciones iniciales [3].

Existen en la naturaleza muchos sistemas que exhiben un comportamiento caótico, como el clima, las turbulencias y las finanzas. En ellos, pequeñas diferencias en las condiciones iniciales llevan a resultados completamente diferentes, haciendo imposible una predicción a largo plazo de su comportamiento [4].

#### 2.1.3. Teoría de las bifurcaciones

Una de las teorías que abarca la teoría del caos es la **teoría de las bifurcaciones**. Esta teoría sostiene que, en un sistema dinámico, una bifurcación ocurre cuando una pequeña variación los parámetros de un sistema causa un abrupto cambio cualitativo.<sup>en</sup> su comportamiento; pretende explicar como se modifica el comportamiento de los sistemas en determinadas circunstancias, de manera que en lugar de seguir un comportamiento determinado éste cambia a otro de forma brusca. Así, si el sistema seguía una desarrollo dado, en cierto punto lo modifica por otro que lo dirige hacia un objetivo completamente diferente [5].

## 2.2. Metodología

Se buscó modelar un oscilador de Duffing con los siguientes parámetros constantes:

$$\alpha = -1,0, \beta = 1,0, \delta = 0,3, \omega = 1,2$$

El parámetro  $\gamma$  fue modificado para cada solución del sistema, tomando uno de los siguientes valores en cada iteración:

$$[0,20, 0,28, 0,29, 0,37, 0,50, 0,65]$$

Para cada solución obtenida, se realizó un *retrato de fase*, el cuál es una gráfica de posición contra velocidad que nos permite representar geoméricamente las trayectorias y puntos de equilibrio de un sistema dinámico [6]. Se realizó también una gráfica de posición contra tiempo que nos permite visualizar fácilmente la trayectoria seguida por el resorte.

### 2.3. Resultados

Para cada solución de gamma, se obtuvieron dos gráficas:

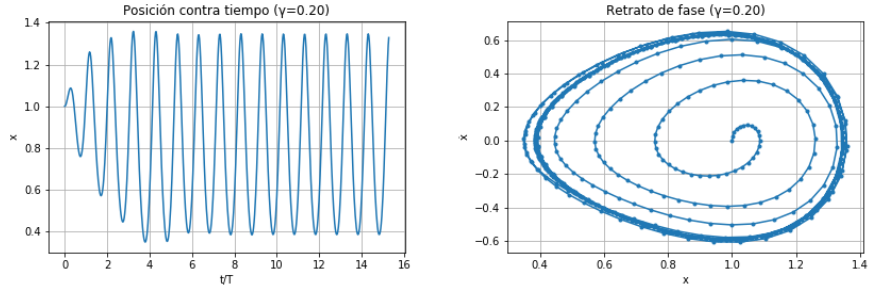


Figura 1: Trayectoria y retrato de fase para  $\gamma = 0,20$ .

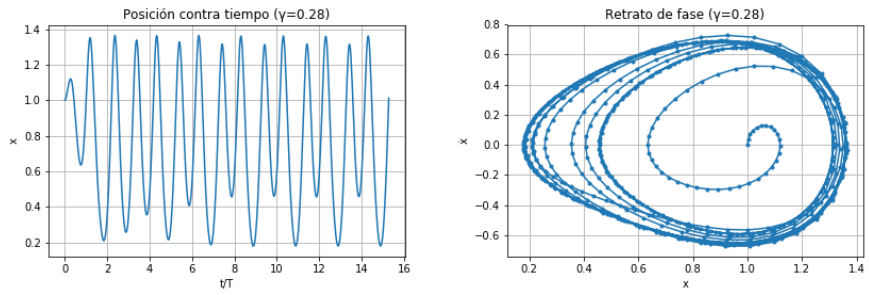


Figura 2: Trayectoria y retrato de fase para  $\gamma = 0,28$ .

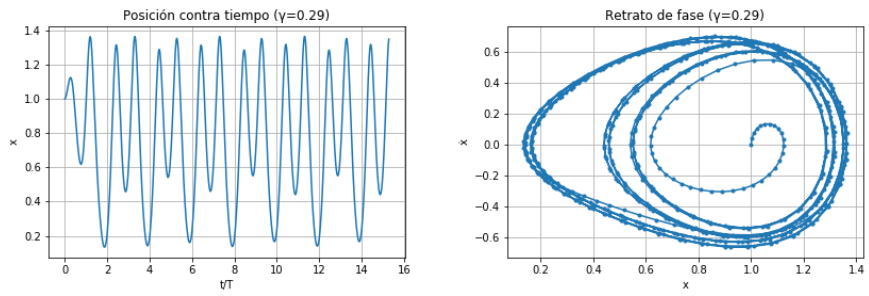


Figura 3: Trayectoria y retrato de fase para  $\gamma = 0,29$ .

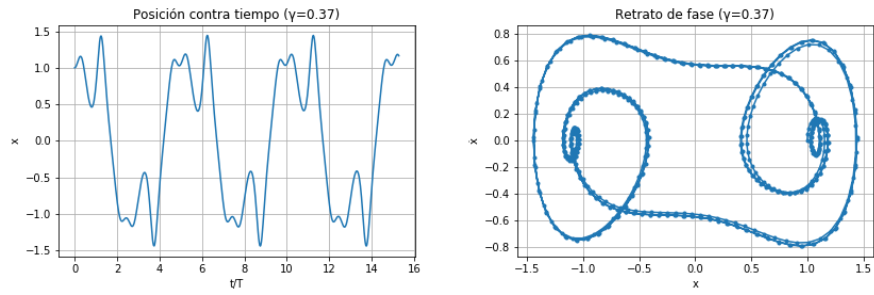


Figura 4: Trayectoria y retrato de fase para  $\gamma = 0,37$ .

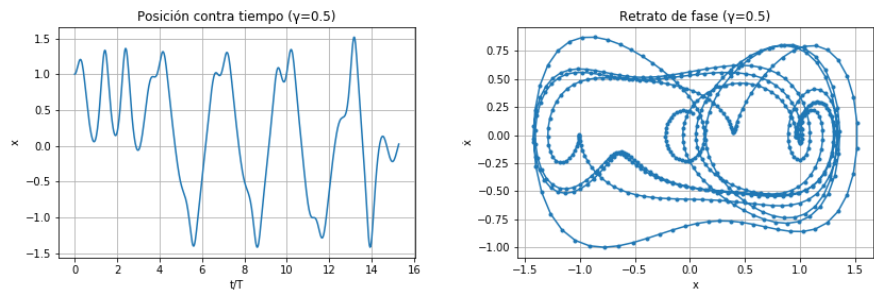


Figura 5: Trayectoria y retrato de fase para  $\gamma = 0,5$ .

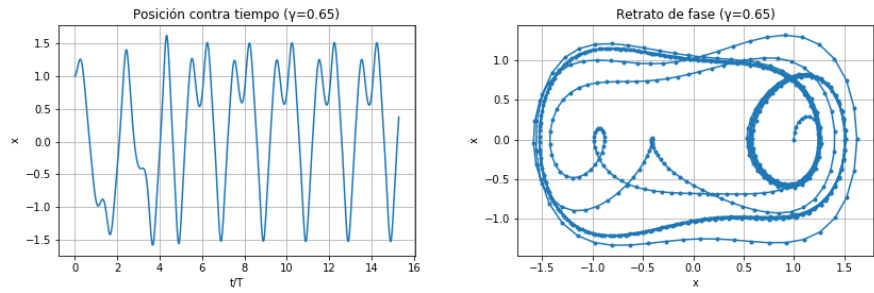


Figura 6: Trayectoria y retrato de fase para  $\gamma = 0,65$ .

### 3. Conclusión

Hay un patrón evidente que une de manera directa a todas las soluciones entre sí: conforme se aumenta el valor de  $\gamma$ , la gráfica tiende a ser cada vez más .aleatoria.º, apegándonos al lenguaje propio del tema, caótica. Este comportamiento era esperado de la ecuación de Duffing, ya que la ecuación es, en realidad, un claro ejemplo de la presencia del caos en la naturaleza.

### Referencias

- [1] *Edward Lorenz* (2016) Universidad de Murcia. Recuperado el 25 de mayo de 2019 de: <https://www.um.es/docencia/barzana/BIOGRAFIAS/Biografia-Edward-Lorenz.php>
- [2] Pickover, C. (2018) *1963 : la théorie du chaos et l'effet papillon*. Futura sciences. Recuperado el 26 de mayo de 2019 de: <https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/mathematiques-histoire-mathematiques-10-dates-cles-1057/page/8/>
- [3] *Chaos Theory* (s.f) Wikipedia. Recuperado el 26 de mayo de 2019 de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory)
- [4] Oestreicher, C. (2007) *A history of chaos theory*. Dialogues in clinical neuroscience. Recuperado el 27 de mayo de 2019 de: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3202497/>
- [5] *Bifurcation theory* (s.f) Wikipedia. Recuperado el 27 de mayo de 2019 de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Bifurcation\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Bifurcation_theory)
- [6] *Retrato de fase*. (s.f) Wikipedia. Recuperado el 27 de mayo de 2019 de: [https://es.wikipedia.org/wiki/Retrato\\_de\\_fase](https://es.wikipedia.org/wiki/Retrato_de_fase)