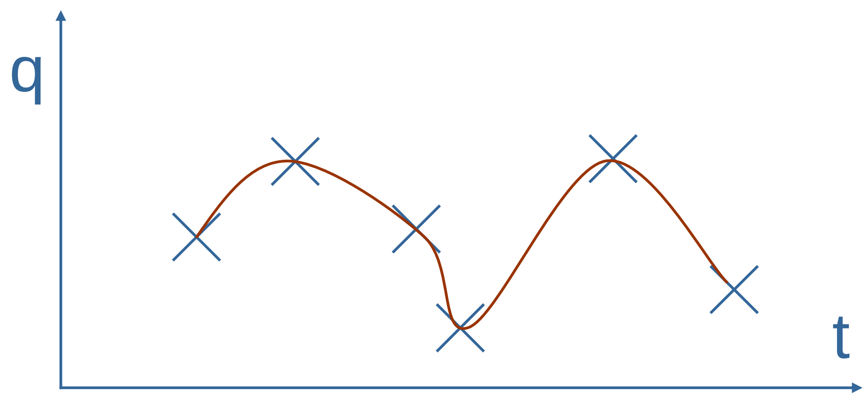
Interpoladores polinómicos

- Para unir n puntos (t_i,q_i) se puede utilizar un polinomio de grado n-1.
- En la práctica esto conduce a polinomios en t de grado (n-1) elevado, originándose problemas computacionales.

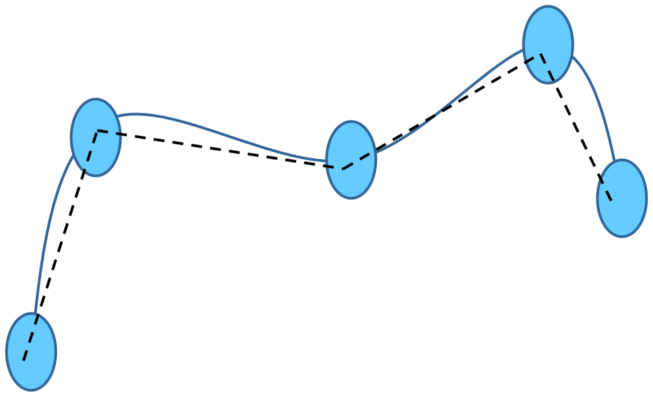


- Como alternativa se recurre a polinomios de grado bajo (3 a 5) que unen unos pocos puntos consecutivos y a los que se impone adicionalmente la continuidad en las primeras derivadas (posición, velocidad, etc.)
- Los interpoladores lineales, antes planteados, son el caso particular de n=2

Interpoladores cúbicos

- **Se une cada pareja de puntos con un polinomios de grado 3 (4 parámetros)**

$q(t)=a+b.t+c.t^2+d.t^3$ (para cada tramo)



- **4 parámetos → 4 condiciones de contorno**

  posición y velocidad al comienzo y fin

- **Trayectoria = serie de polinomios cúbicos concatenados escogidos de forma que exista continuidad en posición y velocidad, denominados *splines***

$$q(t) = a + b\left(t - t^i\right) + c\left(t - t^i\right)^2 + d\left(t - t^i\right)^3 \qquad t^i < t < t^{i+1}$$

$$a = q^i$$

$$b = \dot{q}^i$$

$$c = \frac{3}{T^2}\left(q^{i+1} - q^i\right) - \frac{1}{T}\left(\dot{q}^{i+1} + 2\dot{q}^i\right)$$

$$d = -\frac{2}{T^3}\left(q^{i+1} - q^i\right) + \frac{1}{T^2}\left(\dot{q}^{i+1} + \dot{q}^i\right)$$

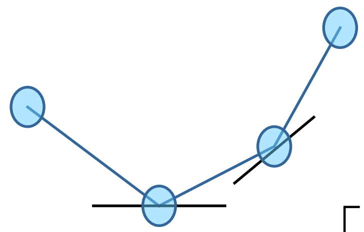
$$T = t^{i+1} - t^i$$

Selección de las velocidades de paso

Para definir las velocidades de paso por los puntos hay diferentes alternativas:

1.- Criterio Heurístico: Dándolas el valor <u>0</u> o valor <u>medio</u> de las velocidades lineales

$$\dot{q}^{i}=\begin{cases}0 & \text{si signo }\left(q^{i}-q^{i-1}\right)\neq\text{signo }\left(q^{i+1}-q^{i}\right)\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{q^{i+1}-q^{i}}{t^{i+1}-t^{i}}+\dfrac{q^{i}-q^{i-1}}{t^{i}-t^{i-1}}\right] & \text{si}\begin{cases}\text{signo }\left(q^{i}-q^{i-1}\right)=\text{signo }\left(q^{i+1}-q^{i}\right)\\ \text{o} \qquad q^{i-1}=q^{i}\\ \text{o} \qquad q^{i}=q^{i+1}\end{cases}\end{cases}$$



2.- A partir de las velocidades en el espacio de la tarea (mediante la Jacobiana)

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix}=\mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\\ w_x\\ w_y\\ w_z\end{bmatrix}$$

3.- Obligando a una **continuidad en las aceleraciones**, lo que obliga a resolver un sistema de ecuaciones con todas las velocidades de la trayectoria de manera simultánea.

$$\begin{bmatrix}t^3 & 2\left(t^2+t^3\right) & t^2 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & t^4 & 2\left(t^3+t^4\right) & t^3 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & t^5 & 2\left(t^4+t^5\right) & t^4 & \dots\\ \dots & \dots & 0 & t^6 & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{q}^1\\ \dot{q}^2\\ \dot{q}^3\\ \vdots\\ \dot{q}^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{t^2t^3}\left[\left(t^2\right)^2\left(q^3-q^2\right)+\left(t^3\right)^2\left(q^2-q^1\right)\right]\\ \dfrac{3}{t^3t^4}\left[\left(t^3\right)^2\left(q^4-q^3\right)+\left(t^4\right)^2\left(q^3-q^2\right)\right]\\ \vdots\\ \dfrac{3}{t^{k-1}t^k}\left[\left(t^{k-1}\right)^2\left(q^k-q^{k-1}\right)+\left(t^k\right)^2\left(q^{k-1}-q^{k-2}\right)\right]\end{bmatrix}$$

$$\dot{q}^1=\dot{q}^k=0$$

Interpoladores quíntico

Permite la continuidad de velocidades y aceleraciones, pudiendo dar a estas los valores que se deseen.

Las condiciones de contorno son:

$$q(t^{i-1}),\dot{q}(t^{i-1}),\ddot{q}(t^{i-1}),q(t^{i}),\dot{q}(t^{i}),\ddot{q}(t^{i})$$

Expresión del polinomio por tramos:

$$q(\mathrm{t})=\mathrm{a}+\mathrm{b}\left(\mathrm{t}-\mathrm{t}^{\mathrm{i}-1}\right)+\mathrm{c}\left(\mathrm{t}-\mathrm{t}^{\mathrm{i}-1}\right)^{2}+\mathrm{d}\left(\mathrm{t}-\mathrm{t}^{\mathrm{i}-1}\right)^{3}+\mathrm{e}\left(\mathrm{t}-\mathrm{t}^{\mathrm{i}-1}\right)^{4}+f\left(\mathrm{t}-\mathrm{t}^{\mathrm{i}-1}\right)^{5}$$

$$\mathrm{t}^{\mathrm{i}-1}<\mathrm{t}<\mathrm{t}^{\mathrm{i}}$$