Análisis de varianza: heterocedasticidad

José Eduardo Valencia Espinosa

3/11/2022

1. Considera un modelo lineal que explica el consumo de cerveza mensual:

$$\begin{aligned}\text{beer} &= \beta_0+\beta_1\text{inc}+\beta_2\text{price}+\beta_3\text{educ}+\beta_4\text{female}+u\\ E(u|\text{inc, price, educ, female}) &= 0\\ Var(u|\text{inc, price, educ, female}) &= \sigma^2\text{inc}^2\end{aligned}$$

a. **Escribe una ecuación transformada que tenga error homocedástico. Muestra que es homocedástico.**

$$\begin{aligned}\frac{\text{beer}}{\text{inc}} &= \beta_0\frac{1}{\text{inc}}+\beta_1+\beta_2\frac{\text{price}}{\text{inc}}+\beta_3\frac{\text{educ}}{\text{inc}}+\beta_4\frac{\text{female}}{\text{inc}}+\frac{u}{\text{inc}}\\ Var\left(\frac{u}{\text{inc}}|\text{inc, price, educ, female}\right) &= Var(u|\text{inc, price, educ, female})\frac{1}{\text{inc}^2}\\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

2. Usando los datos de *GPA3*, la siguiente ecuación fue estimada para los estudiantes de segundo semestre de Otoño:

$$\begin{aligned}\widehat{\text{trmgpa}} = &-2.12 && +0.900\cdot\text{crsgpa} && +0.193\cdot\text{cumgpa} && +0.0014\cdot\text{tothrs}\\ &(0.55) && (0.175) && (0.064) && (0.0012)\\ &[0.55] && [0.166] && [0.074] && [0.0012]\\ &+0.0018\cdot\text{sat} && -0.0039\cdot\text{hsperc} && +0.351\cdot\text{female} && -0.157\cdot\text{season}\\ &(0.0002) && (0.0018) && (0.085) && (0.098)\\ &[0.0002] && [0.0019] && [0.079] && [0.080]\\ n = &269,\ R^2 = 0.465\end{aligned}$$

a. **¿Las variables *crsgpa*, *cumgpa* y *tothrs* tienen el efecto estimado esperado? ¿Cuál de estas variables es significativa al 5%? ¿Importa que errores estándar usas?**

Para *crsgpa*, sí esperas que mientras mayor haya sido el promedio de *GPA* de todos sus cursos, mayor será el *GPA* esperado de ese semestre (*ceteris paribus*). Lo mismo para *cumgpa*. En cuanto a *tothrs*, bien podría ser una variable irrelevante, pues cuántas horas acreditadas de semestres pasados tenga un alumno no explica la capacidad que tiene de obtener un puntaje más alto o bajo. Por ejemplo, si ambos tienen el mismo *crsgpa* y *cumgpa* pero que un alumno haya tomado más cursos (probablemente por que sea de mayor semestre) no evidencia alguna capacidad adicional para un *GPA* más alto.

	E. No Rob.	E. Rob.	V. Crit.
t_{crsgpa}	5.1428	5.4216	± 1.9688
t_{cumgpa}	3.0156	2.6081	± 1.9688
t_{tothrs}	1.1666	1.1666	± 1.9688

Por lo tanto, *crsgpa* y *cumgpa* son significativas al 5%. En este caso, la conclusión es la misma utilizando errores no robustos o robustos, por lo que no es importante. Sin embargo, puede que la *n* no sea lo suficientemente grande para utilizar errores robustos (por sus propiedades asintóticas). Si importara qué erores estándar usas para la conclusión, entonces lo más apropiado sería obtener Mínimos Cuadrados Ponderados (si es que hay heterocedasticidad).

b. **¿Por qué la hipótesis $H_0:\beta_{\text{crsgpa}}=1$ hace sentido? Prueba esta hipóteisis contra la alternativa de dos colsas al 5% de significancia (usando ambos errores estándar). Describe tus conclusiones**

Por que el promedio del *GPA* es el equivalente muestral al valor esperado. Así, manteniendo todo lo demás constante, el *GPA* del semestre se espera que sea el promedio de los cursos anteriores.

$$\begin{aligned}H_0&:\beta_{\text{crsgpa}}=1\\ H_a&:\beta_{\text{crsgpa}}\neq 1\end{aligned}$$

	E. No Rob.	E. Rob.	V. Crit.
t_{crsgpa}	-0.5714	-0.6024	± 1.9688

No podemos rechazar la hipótesis nula al 5% de significancia. Este resultado va en la misma dirección que la justificación anterior (del promedio como estimador *ceteris paribus* del *GPA*).

c. **Prueba si hay un efecto de temporada en el *GPA* del semestre (usando ambos errores estándar). ¿El nivel de significancia al que se puede rechazar la hipótesis nula depende de los errores estándar utilizados?**

	E. No Rob.	E. Rob.	V.C. 1%	V.C. 5%	V.C. 10%
t_{season}	-1.6020	-1.9625	± 2.5942	± 1.9688	± 1.6505

Sí, si utiliza errores estándar no robustos, rechazamos la hipótesis nula para los 3 niveles de significancia. Si utiliza errores estándar robustos, rechazamos la hipótesis nula al 1 y 5% de significancia pero no la rechazamos al 10% de significancia.

3. Considera un modelo a nivel de empleado, donde la variable no observada f_i es un "efecto de la firma" de cada empleado de una firma dada. El término de error $v_{i,e}$ es específico al empleado e en la fima i. El error compuesto es $u_{i,e}=f_i+v_{i,e}$, como en la ecuación (8.28) *Wooldridge* 7ma ed.

i. **Asume que $Var(f_i)=\sigma_f^2$, $Var(v_{i,e})=\sigma_v^2$, y f_i y $v_{i,e}$ no correlacionados. Muestra que $Var(u_{i,e})=\sigma_f^2+\sigma_v^2$; llama a esto σ^2**

$$Var(u_{i,e})=Var(f_i+v_{i,e})=Var(f_i)+Var(v_{i,e})+2Cov(f_i,v_{i,e})$$

Si no hay correlación entre f_i y $v_{i,e}$, entonces $\sigma_{f,v}=0$ (f y v son ortogonales). Esto es lo mismo que decir $Cov(f_i,v_{i,e})=0$. Entonces,

$$Var(u_{i,e})=Var(f_i)+Var(v_{i,e})+2\cdot 0=\sigma_f^2+\sigma_v^2$$

ii. **Ahora, supón que para $e\neq g$, $v_{i,e}$ y $v_{i,g}$ no correlacionados. Muestra que $Cov(u_{i,e},u_{i,g})=\sigma_f^2$**

$$\begin{aligned}u_{i,e}&=f_i+v_{i,e}\\ u_{i,g}&=f_i+v_{i,g}\end{aligned}$$

$$Cov(u_{i,e},u_{i,g})=Cov(f_i+v_{i,e},f_i+v_{i,g})$$

Por propiedades del producto punto,

$$Cov(f_i+v_{i,e},f_i+v_{i,g})=Cov(f_i,f_i)+Cov(v_{i,e},f_i)+Cov(f_i,v_{i,g})+Cov(v_{i,e},v_{i,g})$$

Ya que $v_{i,e}$ y $v_{i,g}$ no correlacionados, $Cov(v_{i,e},v_{i,g})=0$.

$$Cov(u_{i,e},u_{i,g})=Var(f_i)+Cov(v_{i,e},f_i)+Cov(f_i,v_{i,g})$$

Con v y f no correlacionados, $Cov(v_{i,e},f_i),Cov(f_i,v_{i,g})=0$.

$$Cov(u_{i,e},u_{i,g})=Var(f_i)=\sigma_f^2$$

iii. **Define $\bar{u}_i=m_i^{-1}\Sigma_{e=1}^{m_i}u_{i,e}$ como el promedio del error compuesto de la firma i. Muestra que $Var(\bar{u}_i)=\sigma_f^2+\frac{\sigma_v^2}{m_i}$**

$$Var(\bar{u}_i)=Var(m_i^{-1}\Sigma_{e=1}^{m_i}u_{i,e})=\frac{1}{m_i^2}Var(\Sigma_{e=1}^{m_i}u_{i,e})$$

Sin correlación serial,

$$Var(\bar{u}_i)=\frac{1}{m_i^2}\Sigma_{e=1}^{m_i}Var(u_{i,e})=\frac{1}{m_i^2}\Sigma_{e=1}^{m_i}Var(m_if_i+v_{i,e})$$

Sin correlación entre f_i y $v_{i,e}$,

$$Var(\bar{u}_i)=\frac{1}{m_i^2}\Sigma_{e=1}^{m_i}(m_i\sigma_f^2+\sigma_v^2)=\frac{1}{m_i^2}\cdot m_i\cdot(m_i\sigma_f^2+\sigma_v^2)=\sigma_f^2+\frac{\sigma_v^2}{m_i}$$

4. Use los datos de *wage1*

```
library(pacman)
p_load(wooldridge, ggplot2, ggthemes, lmtest, fixest)
```

a. **Use MCO para estimar un modelo que relacione el salario con la educación, experiencia y permanencia.**

```
lmwage <- lm(wage ~ educ + exper + tenure, data=wage1)
```

b. **Computa manualmente el test *Breusch-Pagan*, incluyendo al estadístico *F* y *LM*.**

$$\hat{u}^2=\delta_0+\delta_1\cdot\text{educ}+\delta_2\cdot\text{exper}+\delta_3\cdot\text{tenure}+\text{error}$$

$$H_0:\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$$

Así, el modelo restringido es $H_a:\hat{u}^2=\delta_0$.

Con estadístico F:

$$F=\frac{R^2_{\hat{u}^2}/3}{(1-R^2_{\hat{u}})/526-3-1}$$

```
wage1$u_sqr <- resid(lmwage)^2
lmuBP <- lm(u_sqr ~ educ + exper + tenure, data=wage1)
F_BP <- (summary(lmuBP)$r.squared/3)/((1-summary(lmuBP)$r.squared)/522)
VC.F <- qf(0.05, 522, 525, lower.tail=F)
```

$$\begin{array}{ccc} F_{BP} & & VC.5\% \\ 15.5282 & > & 1.1547\end{array}$$

$\therefore$. Se rechaza hipótesis nula. El test Bresuch-Pagan con el estadístico F concluye heterocedasticidad.

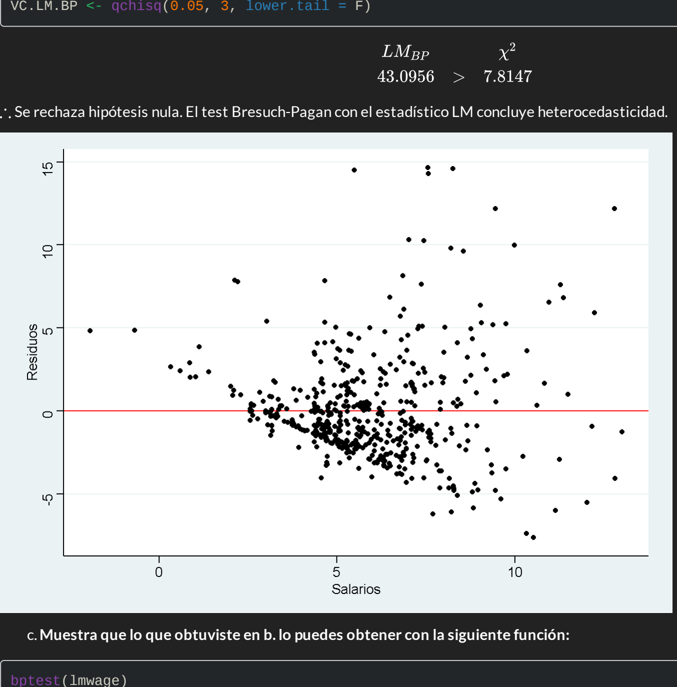
Con estadístico LM:

$$LM=526\cdot R^2_{\hat{u}^2}$$

```
LM_BP <- round(526*summary(lmuBP)$r.squared,4)
VC.LM.BP <- qchisq(0.05, 3, lower.tail = F)
```

$$\begin{array}{ccc} LM_{BP} & & \chi^2 \\ 43.0956 & > & 7.8147\end{array}$$

$\therefore$. Se rechaza hipótesis nula. El test Bresuch-Pagan con el estadístico LM concluye heterocedasticidad.



c. **Muestra que lo que obtuviste en b. lo puedes obtener con la siguiente función:**

```
bptest(lmwage)
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  lmwage
## BP = 43.096, df = 3, p-value = 2.349e-09
```

```
BPlmwage <- round(bptest(lmwage)$statistic[["BP"]],4)
BPlmwage == LM_BP
```

```
## [1] TRUE
```

d. **Computa manualmente el test de White en la regresión de $\hat{u}^2$ en los valores predichos y en sus cuadrados (utilizando regresión de a.).**

$$\hat{u}^2=\delta_0+\delta_1\cdot\widehat{wage}+\delta_2\cdot\widehat{wage}^2$$

$$H_0:\delta_1=d_2=0$$

```
lmuW <- lm(u_sqr ~ I(fitted(lmwage)) + I(fitted(lmwage)^2), data=wage1)
LM_W  <- round(526*summary(lmuW)$r.squared,4)
VC.LM.W <- qchisq(0.05, 6, lower.tail = F)
```

$$\begin{array}{ccc} LM_{W} & & \chi^2 \\ 51.7765 & > & 12.5916\end{array}$$

$\therefore$. Se rechaza hipótesis nula. El test White con el estadístico LM concluye heterocedasticidad.

e. **Muestra que el resultado es el mismo utilizando *lmtest.***

```
bptest(lmwage, varformula= ~ I(fitted(lmwage)) + I(fitted(lmwage)^2),
                        data=wage1)
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  lmwage
## BP = 51.777, df = 2, p-value = 5.713e-12
```

```
Wlmwage <- round(bptest(lmwage, varformula= ~ I(fitted(lmwage)) + I(fitted(lmwage)^2),
                        data=wage1)$statistic[["BP"]],4)
Wlmwage == LM_W
```

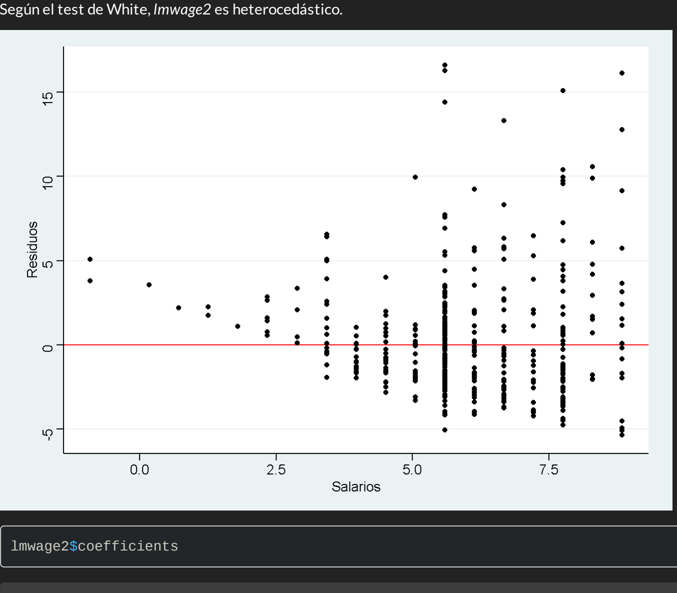
```
## [1] TRUE
```

f. **Use solo educación como predictor e interprete $\hat{\beta}$ ¿Es heterocedástica la relación? Interprete el coeficiente de $educ$.**

```
lmwage2 <- lm(wage ~ educ, data=wage1)
bptest(lmwage2, varformula = ~ educ + I(educ^2), data=wage1)
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  lmwage2
## BP = 23.241, df = 2, p-value = 8.982e-06
```

Según el test de White, *lmwage2* es heterocedástico.




```
lmwage2$coefficients
```

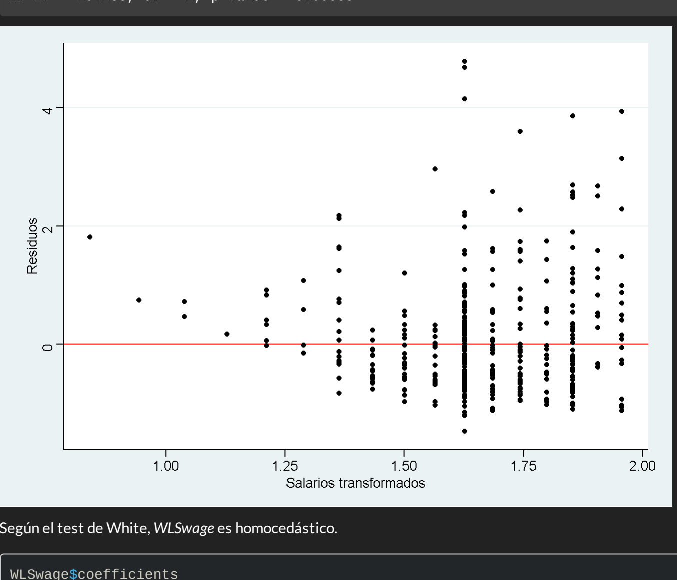
```
## (Intercept)        educ
##  -0.9048516   0.5413593
```

Cada año adicional de educación aumenta en 0.54 el valor estimado del salario por hora de una persona.

g. **Suponga que $Var(u_i|x_k)=\sigma^2\cdot\text{educ}_i$. Obtenga los estimadores de β_k con WLS ¿Se soluciona el problema de heterocedasticidad encontrado en f. al 95% de confianza? Interprete el coeficiente de educación.**

```
#Utilizando WLS de lm:
weighting <- 1/wage1$educ
weighting[is.infinite(weighting)] <- NA
WLSwage <- lm(wage ~ educ, data=wage1, weights = weighting)

#Manualmente:
wage_t <- (wage1$wage/sqrt(wage1$educ))
wage_t[is.infinite(wage_t)] <- NA
WLSwage <- lm(wage_t ~ 0 + I(1/sqrt(educ)) + I(sqrt(educ)), data=wage1, na.action = na.exclude)

bptest(WLSwage, varformula = ~ educ + I(educ^2), data=wage1)
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  WLSwage
## BP = 10.283, df = 2, p-value = 0.00585
```



Según el test de White, *WLSwage* es homocedástico.

```
WLSwage$coefficients
```

```
## I(1/sqrt(educ))   I(sqrt(educ))
##       0.3004759       0.4444371
```

```
confint(lmwage2)
```

```
##                  2.5 %    97.5 %
## (Intercept) -2.2504719 0.4407687
## educ         0.4367534 0.6459651
```

```
confint(WLSwage)
```

```
##                      2.5 %    97.5 %
## I(1/sqrt(educ)) -0.7923691 1.3933209
## I(sqrt(educ))    0.3549298 0.5339445
```

Los intervalos de confianza para ambas $\hat{\beta}$'s se interceptan, por lo que son estadísticamente iguales (lo esperado, según la transformación de WLS). Entonces, la interpretación de $\hat{\beta}_{\text{educ}}$ es la misma: cada año adicional de educación aumenta en 0.44 el valor estimado del salario por hora de una persona.

h. **Verifica que los valores ajustados (*fitted*) en d. son todos positivos y obten el WLS estimando h_i (FGLS).**

```
#Son positivos
sum(fitted(lmuW) < 0)
```

```
## [1] 0
```

```
lmuh <- lm(I(log(u_sqr)) ~ educ + exper + tenure, data= wage1)
h_i <- exp(fitted(lmuh))
#Son positivos
sum(h_i < 0)
```

```
## [1] 0
```

```
#WLS con h_i estimado
FGLSwage <- lm(wage ~ educ + exper + tenure, data= wage1, weights = 1/h_i)
```

```
##                             lmwage           FGLSwage
## Dependent Var.:               wage               wage
##
## (Intercept)     -2.873*** (0.7290)    0.5955 (0.4141)
## educ            0.5990*** (0.0513) 0.2969*** (0.0316)
## exper             0.0223. (0.0121) 0.0319*** (0.0093)
## tenure          0.1693*** (0.0216) 0.1502*** (0.0244)
## _______________ __________________ __________________
## S.E. type                      IID                IID
## Observations                   526                526
## R2                         0.30642            0.21005
## Adj. R2                    0.30244            0.20551
## ---
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

i. **Realiza un test de White para los resultados del FGLS.**

```
bptest(FGLSwage, varformula= ~ I(fitted(FGLSwage)) + I(fitted(FGLSwage)^2), data=wage1)
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  FGLSwage
## BP = 11.677, df = 2, p-value = 0.002913
```

Rechazamos hipótesis nula con 95% de confianza ($p-value<5$). El test de White para *FGLSwage* concluye heterocedasticidad.

j. **Estima FGLS con errores robustos de White-Huber. Reporta tus resultados y discute por que te gustaría estimar esto ¿Los errores estándar son muy diferentes a los obtenidos en h., por qué?**

```
library(sandwich)
coeftest(FGLSwage, vcov. = vcovHC(FGLSwage, type="HC0"))
```

```
##
## t test of coefficients:
##
##              Estimate Std. Error t value  Pr(>|t|)
## (Intercept) 0.5955445  0.6159974  0.9668 0.3340932
## educ        0.2968899  0.0461869  6.4280 2.920e-10 ***
## exper       0.0318644  0.0091421  3.4855 0.0005327 ***
## tenure      0.1502191  0.0279000  5.3842 1.102e-07 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Calcular *FGLS* con errores robustos permite ajustar los errores en dado caso de un mala especificación en la forma de la varianza, es decir, del vector de ponderación h_i. Si es así, $\frac{u_i}{\sqrt{h_i}}$ aún es heterocedástico, por lo que el ajuste con errores robustos permite que los errores estandar sean válidos.

```
##             FGLS robusto   FGLS
## (Intercept)       0.6160 0.4141
## educ              0.0462 0.0316
## exper             0.0091 0.0093
## tenure            0.0279 0.0244
```

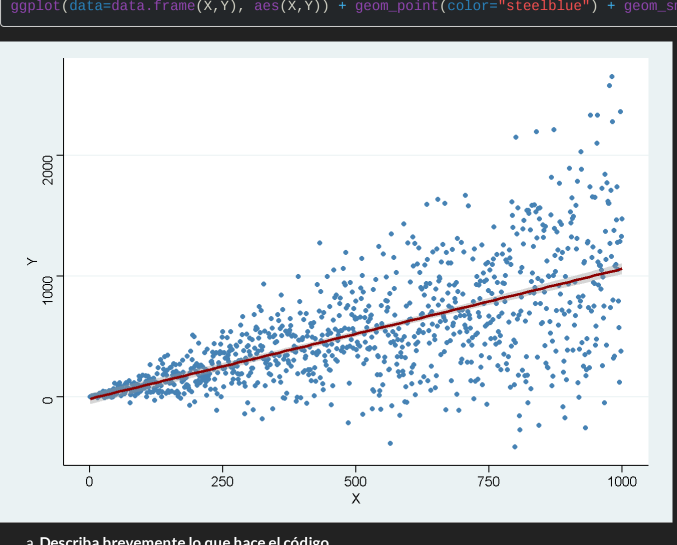
Los errores estándar no son muy diferentes. Lo anterior, ya que la ponderación h_i resuelve parcialmente la heterocedasticidad y los errores robustos terminan de ajustarlos.

5. Ejecute el siguiente código de R

```
#Código

t <- c()
t.rob <- c()
# loop sampling and estimation
library(car)
for (i in 1:10000) {

 # sample data
 X <- 1:1000
 Y <- rnorm(n = 1000, mean = X, sd = 0.6 * X)

 # estimate regression model
 reg <- lm(Y ~ X)

 # homoskedasdicity-only significance test
 t[i] <- linearHypothesis(reg, "X = 1")$'Pr(>F)'[2] < 0.05

 # robust significance test
 t.rob[i] <- linearHypothesis(reg, "X = 1", white.adjust = "hc1")$'Pr(>F)'[2] < 0.05

}
# compute the fraction of false rejections
round(cbind(t = mean(t), t.rob = mean(t.rob)), 3)
```

```
##          t t.rob
## [1,] 0.072 0.051
```

```
#Hint

# generate heteroskedastic data
X <- 1:1000
Y <- rnorm(n = 1000, mean = X, sd = 0.6 * X)
# plot the data
ggplot(data=data.frame(X,Y), aes(X,Y)) + geom_point(color="steelblue") + geom_smooth(method=lm, color="dark
```



a. **Describa brevemente lo que hace el código.**

Realiza un Monte Carlo de una regresión con heterocedasticidad teórica. Luego, un test de hipótesis para β_X sin y con errores robustos para cada uno de ellos. Finalmente, guarda los resultados agregados del test F como una proporción.

b. **Cambie n a 100 ¿cuál es el resultado en la fracción de rechazos falsos, aún con SE robustos? ¿Qué puede concluir sobre los errores estándar robustos?**

```
t <- c()
t.rob <- c()
# loop sampling and estimation
library(car)
for (i in 1:10000) {

 # sample data
 X <- 1:100
 Y <- rnorm(n = 100, mean = X, sd = 0.6 * X)

 # estimate regression model
 reg <- lm(Y ~ X)

 # homoskedasdicity-only significance test
 t[i] <- linearHypothesis(reg, "X = 1")$'Pr(>F)'[2] < 0.05

 # robust significance test
 t.rob[i] <- linearHypothesis(reg, "X = 1", white.adjust = "hc1")$'Pr(>F)'[2] < 0.05

}
# compute the fraction of false rejections
round(cbind(t = mean(t), t.rob = mean(t.rob)), 3)
```

```
##          t t.rob
## [1,] 0.075 0.058
```

Con una muestra más pequeña, no rechaza la hipótesis nula en mayor proporción. Lo cual, dada la relación teórica, es un falso positivo. El cambio en la proporción es mayor para los errores robustos debido a sus propiedades asintóticas (aunque ambos menores que los no robustos). Es menos consistente.

c. **Cambie SD a 1.6 ¿esto qué significa en términos de ajuste del modelo? ¿Qué efecto tiene en la fracción de rechazos falsos, aún con SE robustos?**

```
t <- c()
t.rob <- c()
# loop sampling and estimation
library(car)
for (i in 1:10000) {

 # sample data
 X <- 1:100
 Y <- rnorm(n = 100, mean = X, sd = 1.6 * X)

 # estimate regression model
 reg <- lm(Y ~ X)

 # homoskedasdicity-only significance test
 t[i] <- linearHypothesis(reg, "X = 1")$'Pr(>F)'[2] < 0.05

 # robust significance test
 t.rob[i] <- linearHypothesis(reg, "X = 1", white.adjust = "hc1")$'Pr(>F)'[2] < 0.05

}
# compute the fraction of false rejections
round(cbind(t = mean(t), t.rob = mean(t.rob)), 3)
```

```
##          t t.rob
## [1,] 0.077 0.061
```

Una mayor varianza aumenta la proporción de falsos positivos. El estimador es menos consistente. Aunque, en los tres casos, es conveniente no ignorar la heterocedasticidad y aplicar errores robustos, pues la proporción de falsos positivos será menor.

d. **Describa formalmente el procedimiento para obtener WLS con estos datos.**

$$u_i=1.6x_i\rightarrow Var=sd.^2=1.6^2x_i^2=\sigma^2x_i^2$$

Así,

$$h_i=x_i^2\rightarrow w_i=1/x_i^2$$

$\therefore$, el Mínimo Cuadrado Monderado es el siguiente:

$$\frac{y_i}{x_i}=\beta_0\frac{1}{x_i}+\beta_1+\frac{u_i}{x_i}$$

Con $\frac{u_i}{x_i}$ homocedástico ($=1.6$).

6. Estimamos un modelo de probabilidad lineal para arrestos de hombres jóvenes durante 1986.

$$arr86=\beta_0+\beta_1\cdot\text{pcnv}+\beta_2\cdot\text{avgsen}+\beta_3\cdot\text{tottime}+\beta_4\cdot\text{ptime86}+\beta_5\cdot\text{qemp86}+u$$

a. **Usando los datos de $crime1$, estima este modelo por MCO y verifica que todos los valores ajustados están estrictamente entre 0 y 1 ¿Cuáles son los valores más chicos y grandes del estimado?**

```
lmcrime <- lm(narr86 ~ pcnv + avgsen + tottime + ptime86 + qemp86, data=crime1)
sum(fitted(lmcrime) > 0) && sum(fitted(lmcrime) < 1)
```

```
## [1] TRUE
```

```
min(fitted(lmcrime))
```

```
## [1] 0.08373395
```

```
max(fitted(lmcrime))
```

```
## [1] 0.9868572
```

b. **Estima la ecuación por WLS como en la Sección 8-5.**

$$\hat{h}_i=\hat{y}_i(1-\hat{y}_i)$$

```
h_crime <- fitted.values(lmcrime)*(1-fitted.values(lmcrime))
FGLScrime <- lm(narr86 ~ pcnv + avgsen + tottime + ptime86 + qemp86, data=crime1, weights= 1/h_crime)
```

c. **Utiliza los estimados de FGLS para determinar si *avgsen* y *tottime* son significativos en conjunto al 5%.**

```
FGLScrime2 <- lm(narr86 ~ pcnv + ptime86 + qemp86, data=crime1, weights= 1/h_crime)
F_FGLScrime <- ((sum(resid(FGLScrime2)^2)-sum(resid(FGLScrime)^2))/2)/(sum(resid(FGLScrime)^2)/2719)
pf(F_FGLScrime, 2719, 2721) > 0.05
```

```
## [1] TRUE
```

```
linearHypothesis(FGLScrime, c("avgsen","tottime"))
```

```
## Linear hypothesis test
##
## Hypothesis:
## avgsen = 0
## tottime = 0
##
## Model 1: restricted model
## Model 2: narr86 ~ pcnv + avgsen + tottime + ptime86 + qemp86
##
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
## 1   2721 8882.0
## 2   2719 8879.7  2    2.2973 0.3517 0.7035
```

Por lo tanto, no rechazamos hipótesis nula. Así, *avgsen* y *tottime* no son significativos en conjunto.