Universidade do Minho

Departamento de Informática

MDIO - Trabalho 1

Grupo Nº 3

João Teixeira (A85504)

José Ferreira (A83683)

Miguel Solino (A86435)

16 de Outubro de 2019

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Um dos problemas *NP-Completo* mais conhecido é o *Travelling Salesman Problem.*
Neste problema, um vendedor tem um conjunto de cidades que pretende visitar. As estradas entre essas cidades e e a distancia destas também são conhecidas. O objetivo deste problema é calcular o caminho mais curto que visite todas as cidades.
Quando transferido para um grafo orientado, este problema resume-se encontrar o caminho mais curto que visite todos os nodos do grafo.
Um problema derivado do *Travelling Salesman Problem* é o *Chinese Postman Problem.*
Neste, um carteiro pretende entregar todas as cartas que tem, e para isso tem de passar em todas as ruas pelo menos uma vez. Com o objetivo de percorrer a menor distância possível.
Quando transferido para um problema de grafos, a única diferença entre este problema e o problema do caixeiro viajante é que se pretende obter o caminho mais curto que visite todas as arestas de um grafo orientado.
O objetivo deste trabalho prático é resolver este problema utilizando programação linear.

Capítulo 2

Problema

Observando os números de inscrição dos membros do grupo, constatamos que o maior pertencia ao aluno Miguel Solino (86435). Fazendo *pattern matching* para o padrão ABCDE e seguindo as regras definidas no enunciado, concluímos que a orientação das ruas é:

1. A é igual a 8;
2. B é igual a 6, logo é par, e por isso aponta para baixo;
3. C é igual a 4, logo é par, e por isso aponta para a direita;
4. D é igual a 3, logo é ímpar, e por isso aponta para cima;
5. E é igual a 5, logo é ímpar, e por isso aponta para a esquerda;

Assim, conclui-se que o problema a resolver é representado pela seguinte imagem:

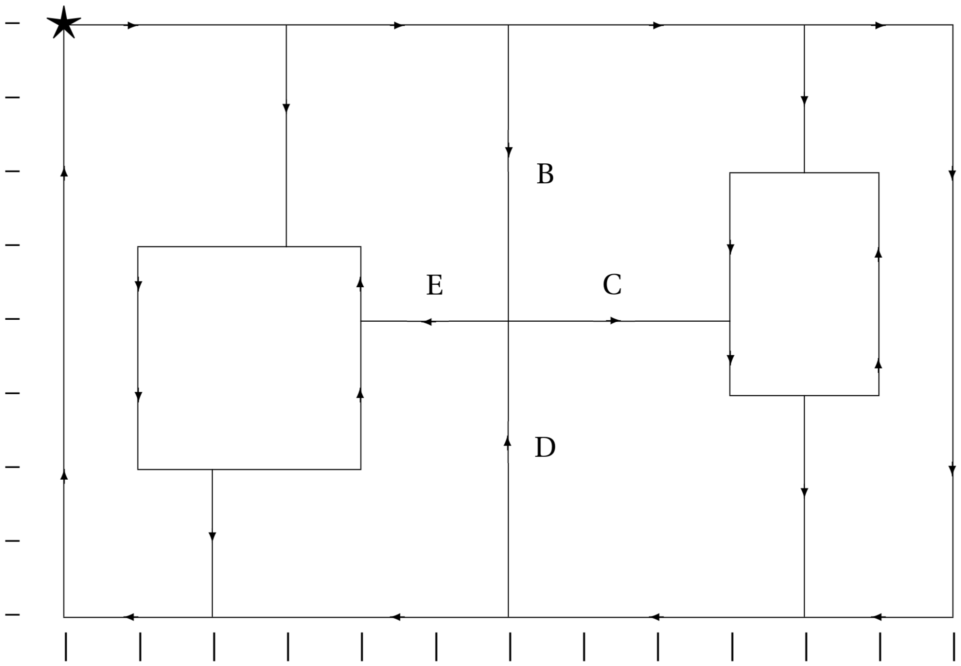

Figura 2.1: representação do problema

Após obter esta imagem decidi-mos nomear cada vértice do problema com uma letra maiúscula. Assim, o aspeto do desafio final utilizada é:

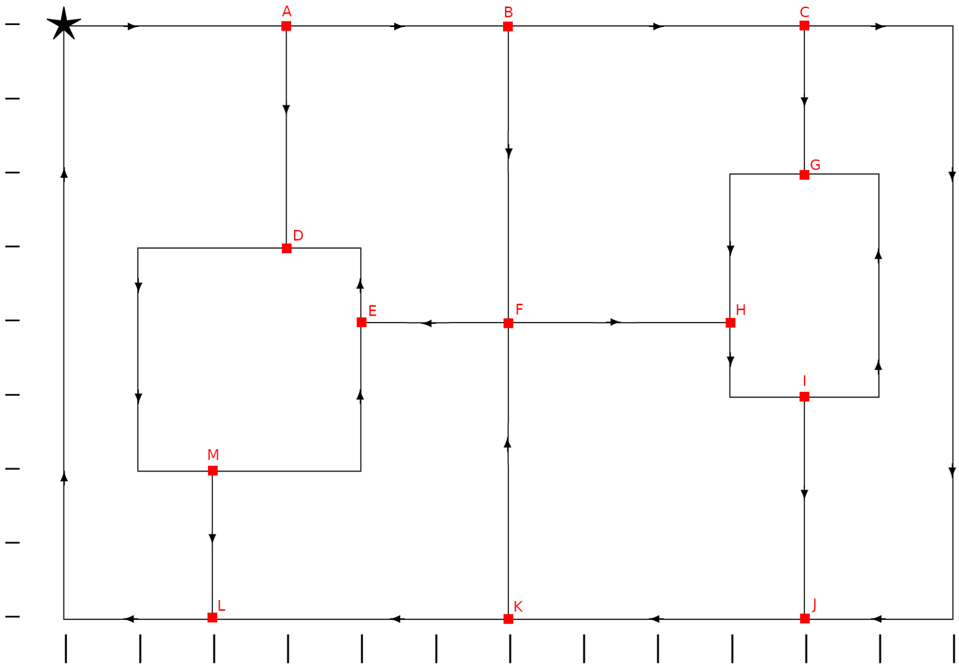

Figura 2.2: vértices nomeados

Capítulo 3

Formulação do Problema

3.1 Variáveis de decisão

As variáveis de decisão representam o número de vezes que um dado arco é percorrido. Por isso, é necessário que exista uma variável de decisão por cada aresta.
A nomenclatura adaptada pelo grupo seguiu as seguintes regras. As arestas têm o nome xij em que o i é a aresta onde essa aresta começa e j é o vértice onde essa aresta acaba.
Assim, por exemplo, a aresta xab é a aresta que vai do vértice A para o vértice B.
Visto que cada variável representa o número de vezes que essa aresta foi percorrida e é necessário garantir que cada aresta é visitada pelo menos uma vez, um dos blocos de condições a que o modelo está sujeito afirma que cada variável de decisão tem de ser maior ou igual a 1.

3.2 Nodos

Para cada nodo no mapa, a soma de todas as vezes que se entra neste tem de ser igual à soma de todas as vezes que se sai.
Assim, por exemplo, para o nodo A, o número de vezes que a aresta xla é percorrida tem de ser igual ao número de vezes que as arestas xad e xab são percorridas. Logo, de forma a criar uma restrição para cada nodo, esta condição pode ser formulada como:

$$xla - xad - xab = 0 \tag{3.1}$$

Capítulo 4

Texto de input

```
min: 13 xla + 3 xab + 4 xbc + 12 xcj + 4 xjk + 4 xkl + 4 xkf +
2 xfe + 2 xed + 6 xdm + 2 xml + 3 xad + 4 xbf + 3 xfh + 2 xcg +
 3 xgh + 2 xhi + 3 xij + 5 xig + 4 xme;

A: xla - xad - xab = 0;
B: xab - xbf - xbc = 0;
C: xbc - xcg - xcj = 0;
D: xad + xed - xdm = 0;
E: xfe + xme - xed = 0;
F: xbf + xkf - xfe - xfh = 0;
G: xcg + xig - xgh = 0;
H: xgh + xfh - xhi = 0;
I: xhi - xig - xij = 0;
J: xij + xcj - xjk = 0;
K: xjk - xkf - xkl = 0;
L: xml + xkl - xla = 0;
M: xdm - xml - xme = 0;

//Garantir que cada aresta é visitada
xla >= 1; xab >= 1; xbc >= 1;
xcj >= 1; xjk >= 1; xkl >= 1;
xkf >= 1; xfe >= 1; xed >= 1;
xdm >= 1; xml >= 1; xad >= 1;
xbf >= 1; xfh >= 1; xcg >= 1;
xgh >= 1; xhi >= 1; xij >= 1;
xig >= 1; xme >= 1;

int xla, xab, xbc, xcj, xjk, xkf, xfe, xed, xdm, xml;
int xad, xbf, xfh, xcg, xgh, xhi, xij, xig, xme;
```

Capítulo 5

Ficheiro de output

```
Value of objective function: 172.00000000

Actual values of the variables:
xla                             4
xab                             3
xbc                             2
xcj                             1
xjk                             3
xkl                             2
xkf                             1
xfe                             1
xed                             2
xdm                             3
xml                             2
xad                             1
xbf                             1
xfh                             1
xcg                             1
xgh                             2
xhi                             3
xij                             2
xig                             1
xme                             1
```

Capítulo 6

Interpretação do resultado

O valor da função objetivo é 172 logo, o que corresponde ao custo do percurso obtido.
Visto que a solução ótima é um circuito fechado, independentemente do ponto que se considere como o ponto inicial, este será sempre o mesmo.
Assim, de forma a facilitar a interpretação dos resultados consideramos como ponto inicial o ponto A. Esta decisão em nada altera o problema.
Como é mostrado no ficheiro .lp (Capitulo 4), foram criadas variáveis que representam as arestas entre cada nodo, existindo apenas variáveis com a direção que foi indicada no enunciado.
A fim de facilitar a visualização dos resultados obtidos decidimos criar uma imagem 6.1 que indica para cada aresta o número de vezes que esta foi visitada.

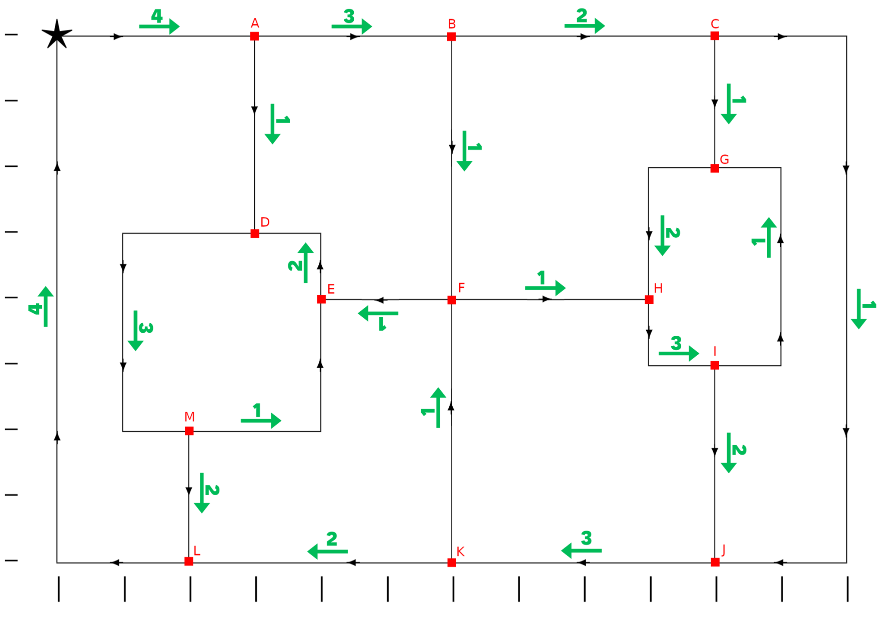

Figura 6.1: representação da solução

Na nossa solução (capitulo 5) a variável *xla* é igual a 4, o que quer dizer que esta aresta foi percorrida 4 vezes e na ultima vez todos os outros tem de ter sido no mínimo percorridos uma vez.
Sabendo isto desenvolvemos a imagem 6.2 que contém o caminho ótimo calculado. Este, está dividido em quatro percursos distintos que começam e acabam em A. Um dos problemas encontrados no cálculo destes caminhos é que, o facto de uma aresta ter sido visitada uma vez durante o percurso não implica que não volte a ser visitada nesse mesmo percurso.

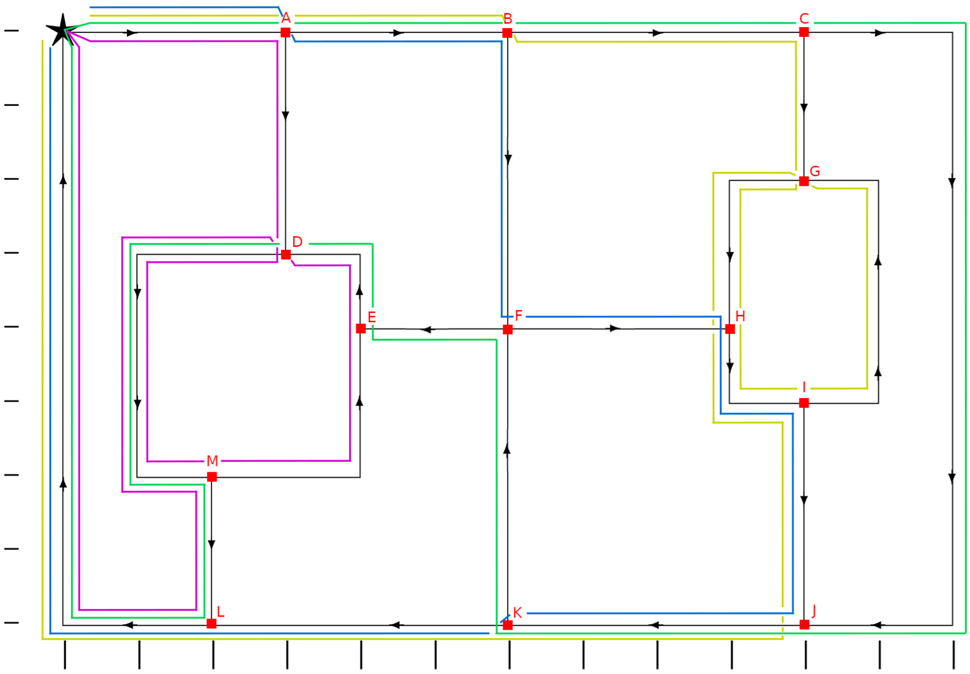

Figura 6.2: representação do caminho

A fim de facilitar a interpretação da imagem, elaboramos uma legenda para cada um dos caminhos tomados:

1. Verde:
   xAB → xBC → xCJ → xJK → xKF → xFE → xED → xDM → xML → xLA

2. Amarelo:
   xAB → xBC → xCG → xGH → xHI → xIG → xGH → xHI → xIJ → xJK → xKL → xLA

3. Azul:
   xAB → xBF → xFH→ xHI → xIJ → xJK → xKL → xLA

4. Rosa:
   xAD → xDM → xME → xED → xDM → xML → xLA

Visto que estes 4 segmentos da solução ótima começam e acabam no nodo A podem ser organizados por qualquer ordem que irá criar um percurso válido e sempre com o mesmo custo. Assim, qualquer combinação destes 4 percurso produz uma solução ótima válida para o problema apresentado.
De forma a apresentar uma solução concreta, escolhemos o percurso que consiste em percorrer os segmentos da solução ótima pela ordem Verde → Amarelo → Azul → Rosa. Este corresponde ao percurso:
xAB → xBC → xCJ → xJK → xKF → xFE → xED → xDM → xML → xLA → xAB → xBC → xCG → xGH → xHI → xIG → xGH → xHI → xIJ → xJK → xKL → xLA → xAB → xBF → xFH→ xHI → xIJ → xJK → xKL → xLA → xAD → xDM → xME → xED → xDM → xML → xLA

Capítulo 7

Validação do modelo

7.1 Tipo de variáveis

As variáveis têm de ser todas do tipo inteiro pois representam o número de vezes que essa aresta é atravessada. De facto, após analisar os resultados obtidos, todos os resultados são valores inteiros. Visto que é necessário que cada aresta seja visitada pelo menos uma vez, todas as variáveis têm de ter um valor maior ou igual a um, o que de facto se verifica.

7.2 Função objetivo

O resultado da função objetivo utilizada no modelo quando o valor das variáveis é manualmente substituindo pela solução ótima tem de coincidir com o resultado obtido. Assim:

$$13 \times xla + 3 \times xab + 4 \times xbc + 12 \times xcj + 4 \times xjk + 4 \times xkl + 4 \times xkf + 2 \times xfe + 2 \times xed \\ +6\times xdm+2\times xml+3\times xad+4\times xbf+3\times xfh+2\times xcg+3\times xgh+2\times xhi+3\times xij+5\times xig+4\times xme \tag{7.1}$$

E substituindo os valores das variáveis de decisão:

$$13 \times 4 + 3 \times 3 + 4 \times 2 + 12 \times 1 + 4 \times 3 + 4 \times 2 + 4 \times 1 + 1 + 2 \times 2 + 6 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1 \\ + 4 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 5 \times 1 + 4 \times 1 = 172 \tag{7.2}$$

7.3 Restrições

$$A : xla - xad - xab = 0 \Rightarrow 4 - 1 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.3}$$

$$B : xab - xbf - xbc = 0 \Rightarrow 3 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.4}$$

$$C : xbc - xcg - xcj = 0 \Rightarrow 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.5}$$

$$D : xad + xed - xdm = 0 \Rightarrow 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.6}$$

$$E \quad : \quad xfe + xme - xed = 0 \Rightarrow 1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.7}$$

$$F \quad : \quad xbf + xkf - xfe - xfh = 0 \Rightarrow 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.8}$$

$$G \quad : \quad xcg + xig - xgh = 0 \Rightarrow 1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.9}$$

$$H \quad : \quad xgh + xfh - xhi = 0 \Rightarrow 2 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.10}$$

$$I \quad : \quad xhi - xig - xij = 0 \Rightarrow 3 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.11}$$

$$J \quad : \quad xij + xcj - xjk = 0 \Rightarrow 2 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.12}$$

$$K \quad : \quad xjk - xkf - xkl = 0 \Rightarrow 3 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.13}$$

$$L \quad : \quad xml + xkl - xla = 0 \Rightarrow 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.14}$$

$$M \quad : \quad xdm - xml - xme = 0 \Rightarrow 3 - 21 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{7.15}$$

Capítulo 8

Conclusão

Concluindo, com este trabalho implementamos uma solução para o problema do Carteiro Chinês utilizando programação linear.
A solução ótima obtida tem uma distância total de 172 centímetros e um dos percursos obtidos é (Capitulo 6):
xAB $\rightarrow$ xBC $\rightarrow$ xCJ $\rightarrow$ xJK $\rightarrow$ xKF $\rightarrow$ xFE $\rightarrow$ xED $\rightarrow$ xDM $\rightarrow$ xML $\rightarrow$ xLA $\rightarrow$ xAB $\rightarrow$ xBC $\rightarrow$ xCG $\rightarrow$ xGH $\rightarrow$ xHI $\rightarrow$ xIG $\rightarrow$ xGH $\rightarrow$ xHI $\rightarrow$ xIJ $\rightarrow$ xJK $\rightarrow$ xKL $\rightarrow$ xLA $\rightarrow$ xAB $\rightarrow$ xBF $\rightarrow$ xFH$\rightarrow$ xHI $\rightarrow$ xIJ $\rightarrow$ xJK $\rightarrow$ xKL $\rightarrow$ xLA $\rightarrow$ xAD $\rightarrow$ xDM $\rightarrow$ xME $\rightarrow$ xED $\rightarrow$ xDM $\rightarrow$ xML $\rightarrow$ xLA