Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2018/19 - Ficha nr.° 4

1. O combinador

   $$\begin{array}{l}\mathsf{const} :: a \to b \to a \\ \mathsf{const}\ a\ b = a\end{array}$$

   está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\mathsf{const}\ k$ por $\underline{k}$, qualquer que seja k. Demonstre a igualdade

   $$\underline{(b, a)} \quad = \quad \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{F1}$$

   a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes que constam do formulário.

2. Considere a função $\mathsf{iso} = \langle ! + !, [id, id] \rangle$.
   (a) Identifique o isomorfismo que ela testemunha, desenhando-a sob a forma de um diagrama de tipos.
   (b) Derive a partir desse diagrama a propriedade (dita *grátis*) de iso,

   $$(id \times f) \cdot \mathsf{iso} \quad = \quad \mathsf{iso} \cdot (f + f) \tag{F2}$$

   (c) Confirme, por cálculo analítico, essa propriedade.
   (d) Derive uma definição em Haskell *pointwise* de iso.

3. Deduza o tipo mais geral da função $f = (id + \pi_1) \cdot i_2 \cdot \pi_2$ e infira a respectiva propriedade *grátis* (*natural*) através de um diagrama.

4. Identifique, apoiando a sua resolução num diagrama, qual é a definição da função polimórfica α cuja propriedade natural ("grátis") é

   $$(f + h) \cdot \alpha \quad = \quad \alpha \cdot (f + g \times h)$$

5. Para o caso de um *isomorfismo* f, têm-se as equivalências:

   $$f \cdot g = h \quad \equiv \quad g = f^{\circ} \cdot h \tag{F3}$$
   $$g \cdot f = h \quad \equiv \quad g = h \cdot f^{\circ} \tag{F4}$$

   Recorra a essas propriedades para mostrar que a igualdade

   $$h \cdot \mathsf{distr} \cdot (g \times (id + f)) = k$$

   é equivalente à igualdade

   $$h \cdot (g \times id + g \times f) = k \cdot \mathsf{undistr}$$

   (**Sugestão:** não ignore a propriedade natural (i.e. *grátis*) do isomorfismo distr.)

6. Seja dada uma função ∇ da qual só sabe duas propriedades: $\nabla \cdot i_1 = id$ e $\nabla \cdot i_2 = id$. Mostre que, necessariamente, ∇ satisfaz também a propriedade natural $f \cdot \nabla = \nabla \cdot (f + f)$.

7. A *lei da troca* (identifique-a no formulário) permite-nos exprimir determinadas funções sob duas formas alternativas, conforme desenhado no respectivo diagrama:

$$[\langle f, g\rangle , \langle h, k\rangle] = \langle [f\,, h], [g\,, k]\rangle$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "g"] & A+B & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, "k"] \arrow[dll, "h"'] \\
C & C \times D \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & D
\end{tikzcd}$$

Demonstre esta lei recorrendo às propriedades (e.g. universais) dos produtos e dos coprodutos.

8. Use a lei da troca para exprimir o isomorfismo $\mathsf{undistl} = [i_1 \times id, i_2 \times id]$ sob a forma de um 'split' de alternativas.

9. No Cálculo de Programas, as definições condicionais do tipo $h\ x = \mathbf{if}\ p\ x\ \mathbf{then}\ f\ x\ \mathbf{else}\ g\ x$ são escritas usando o combinador ternário $p \to f\ ,\ g$ conhecido pelo nome de *condicional de McCarthy*, cuja definição

$$p \to f\ ,\ g \quad = \quad [f\,, g] \cdot p?$$

vem no formulário. Baseando-se em leis deste combinador que constam também do formulário, demostre:

$$(p \to f\ ,\ g) \cdot h \quad = \quad (p \cdot h) \to (f \cdot h), (g \cdot h)$$

10. Sabendo que as igualdades

$$p \to k\ ,\ k \ = \ k \tag{F5}$$
$$(p? + p?) \cdot p? \ = \ (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{F6}$$

se verificam, demonstre as seguintes propriedades do mesmo combinador:

$$\langle (p \to f\ ,\ h), (p \to g\ ,\ i)\rangle \ = \ p \to \langle f, g\rangle\ ,\ \langle h, i\rangle \tag{F7}$$
$$\langle f, (p \to g\ ,\ h)\rangle \ = \ p \to \langle f, g\rangle\ ,\ \langle f, h\rangle \tag{F8}$$
$$p \to (p \to a\ ,\ b)\ ,\ (p \to c\ ,\ d) \ = \ p \to a\ ,\ d \tag{F9}$$

11. Mostre que a função $\mathsf{for}\ b\ i$, onde

$$\begin{array}{l} \mathsf{for}\ b\ i\ 0 = i \\ \mathsf{for}\ b\ i\ (n+1) = b\ \mathsf{for}\ b\ i\ n \end{array}$$

é solução da equação seguinte, em x

$$x \cdot \mathsf{in} = [\underline{i}, b] \cdot (id + x) \tag{F10}$$

onde $\mathsf{in} = [\underline{0}, \mathsf{succ}]$, $\mathsf{succ}\ n = n + 1$.