

# Cálculo de Programas

2.º ano

Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática  
UNIVERSIDADE DO MINHO

2018/19 - Ficha nr.º 4

## 1. O combinador

$\text{const} :: a \rightarrow b \rightarrow a$   
 $\text{const } a \ b = a$

está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos  $\text{const } k$  por  $\underline{k}$ , qualquer que seja  $k$ . Demonstre a igualdade

$$(\underline{b}, a) = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \quad (\text{F1})$$

a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes que constam do formulário.

## 2. Considere a função $\text{iso} = \langle ! + !, [id, id] \rangle$ .

(a) Identifique o isomorfismo que ela testemunha, desenhando-a sob a forma de um diagrama de tipos.

(b) Derive a partir desse diagrama a propriedade (dita *grátis*) de  $\text{iso}$ ,

$$(id \times f) \cdot \text{iso} = \text{iso} \cdot (f + f) \quad (\text{F2})$$

(c) Confirme, por cálculo analítico, essa propriedade.

(d) Derive uma definição em Haskell *pointwise* de  $\text{iso}$ .

## 3. Deduza o tipo mais geral da função $f = (id + \pi_1) \cdot i_2 \cdot \pi_2$ e infira a respectiva propriedade *grátis* (*natural*) através de um diagrama.

## 4. Identifique, apoiando a sua resolução num diagrama, qual é a definição da função polimórfica $\alpha$ cuja propriedade natural (“grátis”) é

$$(f + h) \cdot \alpha = \alpha \cdot (f + g \times h)$$

## 5. Para o caso de um *isomorfismo* $f$ , têm-se as equivalências:

$$f \cdot g = h \equiv g = f^\circ \cdot h \quad (\text{F3})$$

$$g \cdot f = h \equiv g = h \cdot f^\circ \quad (\text{F4})$$

Recorra a essas propriedades para mostrar que a igualdade

$$h \cdot \text{distr} \cdot (g \times (id + f)) = k$$

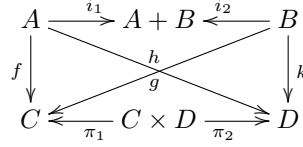
é equivalente à igualdade

$$h \cdot (g \times id + g \times f) = k \cdot \text{undistr}$$

(**Sugestão:** não ignore a propriedade natural (i.e. *grátis*) do isomorfismo  $\text{distr}$ .)

6. Seja dada uma função  $\nabla$  da qual só sabe duas propriedades:  $\nabla \cdot i_1 = id$  e  $\nabla \cdot i_2 = id$ . Mostre que, necessariamente,  $\nabla$  satisfaz também a propriedade natural  $f \cdot \nabla = \nabla \cdot (f + f)$ .
7. A *lei da troca* (identifique-a no formulário) permite-nos exprimir determinadas funções sob duas formas alternativas, conforme desenhado no respectivo diagrama:

$$[\langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle] = \langle [f, h], [g, k] \rangle$$



Demonstre esta lei recorrendo às propriedades (e.g. universais) dos produtos e dos coprodutos.

8. Use a lei da troca para exprimir o isomorfismo  $undistl = [i_1 \times id, i_2 \times id]$  sob a forma de um ‘split’ de alternativas.
9. No Cálculo de Programas, as definições condicionais do tipo  $h\ x = \text{if } p\ x\ \text{then } f\ x\ \text{else } g\ x$  são escritas usando o combinador ternário  $p \rightarrow f, g$  conhecido pelo nome de *condicional de McCarthy*, cuja definição

$$p \rightarrow f, g = [f, g] \cdot p?$$

vem no formulário. Baseando-se em leis deste combinador que constam também do formulário, demonstre:

$$(p \rightarrow f, g) \cdot h = (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h)$$

10. Sabendo que as igualdades

$$p \rightarrow k, k = k \tag{F5}$$

$$(p? + p?) \cdot p? = (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{F6}$$

se verificam, demonstre as seguintes propriedades do mesmo combinador:

$$\langle (p \rightarrow f, h), (p \rightarrow g, i) \rangle = p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle h, i \rangle \tag{F7}$$

$$\langle f, (p \rightarrow g, h) \rangle = p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle \tag{F8}$$

$$p \rightarrow (p \rightarrow a, b), (p \rightarrow c, d) = p \rightarrow a, d \tag{F9}$$

11. Mostre que a função  $\text{for } b\ i$ , onde

$$\text{for } b\ i\ 0 = i$$

$$\text{for } b\ i\ (n + 1) = b\ \text{for } b\ i\ n$$

é solução da equação seguinte, em  $x$

$$x \cdot \text{in} = [\underline{i}, b] \cdot (id + x) \tag{F10}$$

onde  $\text{in} = [\underline{0}, \text{succ}]$ ,  $\text{succ } n = n + 1$ .