Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ingeniería
Año 2018 - 1° cuatrimestre

Análisis numérico I (95.04)

Trabajo Práctico N.° 1

TEMA: Propagación de errores
FECHA: 25-04-18
CURSO: 4
INTEGRANTES:

González, José Francisco - 100063
<josef-gonzalez@outlook.com>
Arribas, Guido Joel - 98287
<guidoarri96@gmail.com>

Índice

1. Objetivos

El objetivo de este trabajo práctico es estudiar la propagación de errores en distintas fórmulas equivalentes para la solución de una ecuación cuadrática.

2. Introducción

Se tiene que las raíces de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ y $b^2 - 4ac > 0$ se pueden encontrar utilizando alguna de las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

Se pueden obtener otras dos expresiones algebraicamente equivalentes operando de la siguiente manera, si las soluciones de $ax^2+bx+c = 0$ son las descriptas por (1) y (2), podemos tomar $y = 1/x$ para obtener la ecuación $cy^2 + by + a = 0$ cuyas soluciones serán:

$$y_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 \pm 4ac}}{2c}$$

$$x_1 = \frac{1}{y_1} = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \tag{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{y_2} = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \tag{4}$$

Entonces, las fórmulas (3) y (4) son formas alternativas de (1) y (2). Nos interesa analizar como se propagon los errores de representación en cada una.

3. Propagación de errores

Estudiamos la incidencia que tienen los errores de redondeo en los resultados que entrega cada uno de los algoritmos. Para ello estudiamos el término de estabilidad del algoritmo, que nos permitirá establecer si los errores de redondeo tienen mucha incidencia en el error del resultado. Utilizamos la definición del error propagado total:

$$\epsilon(f) = \sum_{i=1}^{n} (Fa_i(\bar{x}) \cdot \epsilon_i) + \epsilon_{rep}, \quad Fa_i = \frac{\bar{x}_i}{f(\bar{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}_{\bar{x}} \tag{5}$$

Tomando una cota para el error de representación propagado (μ) se obtienen las siguientes cotas para los términos de estabilidad:

$$Te(x_1) = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot (\frac{1}{2}(\frac{b^2}{b^2 - 4ac} - \frac{4ac}{b^2 - 4ac}) + \frac{3}{2}) + 2 \tag{6}$$

$$Te(x_2) = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot (\frac{1}{2}(\frac{b^2}{b^2 - 4ac} - \frac{4ac}{b^2 - 4ac}) + \frac{3}{2}) + 2 \tag{7}$$

$$Te(x_{1(alt.)}) = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot (\frac{1}{2}(\frac{b^2}{b^2 - 4ac} - \frac{4ac}{b^2 - 4ac}) + \frac{3}{2}) \tag{8}$$

$$Te(x_{2(alt.)}) = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot (\frac{1}{2}(\frac{b^2}{b^2 - 4ac} - \frac{4ac}{b^2 - 4ac}) + \frac{3}{2}) \tag{9}$$

3.1. Análisis de términos de estabilidad

Las expresiones (6) y (7) se pueden reescribir como:

$$Te(x_1) = \frac{\alpha}{-b+\sqrt{b^2-4ac}} \cdot (\frac{\beta}{2}+\frac{3}{2}) + 2$$

$$Te(x_{1(alt.)}) = \frac{\alpha}{b+\sqrt{b^2-4ac}} \cdot (\frac{\beta}{2}+\frac{3}{2})$$

Vemos que si $|b| >> 4ac$ entonces se pueden aproximar como:

$$Te(x_1) \approx \frac{\alpha}{-b+|b|} \cdot (\frac{\beta}{2}+\frac{3}{2}) + 2$$

$$Te(x_{1(alt.)}) \approx \frac{\alpha}{b+|b|} \cdot (\frac{\beta}{2}+\frac{3}{2})$$

Si b es un valor muy negativo ($b << 0$) vemos que $Te(x_1)$ tiene un denominador muy grande, con lo cual se esperaria que el algoritmo se comporte establemente para $b << 0$. En cambio para $Te(x_{1(alt.)})$ tal valor de b producirá un denominador muy pequeño resultando un término de estabilidad mayor al de x_1 con una amplificación del error mayor. Es decir que en la simulación de valores de $b (b << 0)$ esperariamos que al mismo valor de dígitos significativos el primer algoritmo de resultados más precisos, y que su alternativa se desvia cada vez más del valor real cuanto más negativo sea b.

De forma análoga se obtinen para las fórmulas (8) y (9) las siguientes aproximaciones:

$$Te(x_2) \approx \frac{\alpha}{b+|b|} \cdot (\frac{\beta}{2}+\frac{3}{2}) + 2$$

$$Te(x_{2(alt.)}) \approx \frac{\alpha}{b-|b|} \cdot (\frac{\beta}{2}+\frac{3}{2})$$

Donde concluimos que para valores de $b (b << 0)$ el término $Te(x_2)$ tiene a aumentar respecto al de $Te(x_{2(alt.)})$ que es cada vez más chico. Entonces para dichos valores de b esperaríamos que la forma original (x_2) se desvie de la alternativa cada vez más cuanto más negativo sea b.

¿A qué se deben estos comportamientos? Si analizamos las fórmulas (1),(2),(3) y (4) vemos que para $b << 0$, $x_{1(alt.)}$ está realizando en su denominador una resta de dos números grandes y muy parecidos (suponiendo $|b| >> 4ac$) produciendo un error de *cancelación*. Lo mismo sucede en las mismas condiciones para x_2.

4. Simulación

Se utilizan las fórmulas (1,2,3 y 4) para obtener las raíces de las siguientes ecuaciones y corroborar las prediciones obtenidas en el apartado anterior con los terminos de estabilidad

$$(a): \quad x^2 - 1000,001x + 1 = 0$$

$$(b): \quad x^2 - 10000,0001x + 1 = 0$$

$$(c): \quad x^2 - 100000,00001x + 1 = 0$$

$$(d): \quad x^2 - 1000000,000001x + 1 = 0$$

Para ello se implementa un *script* en Octave donde se le pasan los parámetros (a,b,c) a cada función previamente procesados por una función grilla (my_grid.m) que aplica un redondeo simétrico con tres valores distintos de dígitos significativos.

En los cuadros 1, 2 y 3 se muestran los resultados obtenidos con Octave para 2, 4 y 6 dígitos significativos respectivamente.

```
function ret_val = my_grid(number, significative_digits)

% Validacion de datos de entrada
validateattributes(number,{'numeric'},{'nonempty'});
validateattributes(significative_digits,{'numeric'},{'scalar','integer','>=',0});

ret_val = number;

if(number < 0)
ret_val = -number;
endif

aux = 10.^(significative_digits-ceil(log10(ret_val)));
ret_val = round(ret_val.*aux)./aux;

if(number < 0)
ret_val = -ret_val;
endif

endfunction
```

Figura 1: Codigo en Octave para aplicar una grilla.

Ecuación	x_1	$\mathrm{x}_{1(alt.)}$	x_2	$\mathrm{x}_{2(alt.)}$
(a)	999.998999999000	999.998999978379	1.00000100002262e-03	1.00000100000200e-03
(b)	9999.999899999999	9999.999888823369	1.00000001111766e-04	1.00000001000000e-04
(c)	99999.999989999997	99999.966146435880	1.00000033853576e-05	1.00000000010000e-05
(d)	999999.999998999876	999992.385564610013	1.00000761449337e-06	1.00000000000100e-06

Cuadro 1: Resultados para dos dígitos significativos

Ecuación	x_1	$\mathrm{x}_{1(alt.)}$	x_2	$\mathrm{x}_{2(alt.)}$
(a)	999.998999999000	999.998999978379	1.00000100002262e-03	1.00000100000200e-03
(b)	9999.999899999999	9999.999888823369	1.00000001111766e-04	1.00000001000000e-04
(c)	99999.999989999997	99999.966146435880	1.00000033853576e-05	1.00000000010000e-05
(d)	999999.999998999992	999992.385564610013	1.00000761449337e-06	1.00000000000100e-06

Cuadro 2: Resultados para cuatro dígitos significativos

Ecuación	x_1	$\mathrm{x}_{1(alt.)}$	x_2	$\mathrm{x}_{2(alt.)}$
(a)	999.998999999000	999.998999978379	1.00000100002262e-03	1.00000100000200e-03
(b)	9999.999899999999	9999.999888823369	1.00000001111766e-04	1.00000001000000e-04
(c)	99999.999989999997	99999.966146435880	1.00000033853576e-05	1.00000000010000e-05
(d)	999999.999998999992	999992.385564610013	1.00000761449337e-06	1.00000000000100e-06

Cuadro 3: Resultados para seis dígitos significativos

4.1. Análisis de simulación

Comparando las columnas 1 y 2 de cada tabla vemos que:

- $x_{1(alt.)}$ se desvia cada vez más de x_1 entre (a) y (b).
- El único factor que cambia en cada ecuación es el coeficiente lineal b que se hace cada vez más negativo.
- En (d) ya llegan a diferir en la unidad.
- Aumentar la precisión en los cálculos pareciera no mejorar la exactitud de los resultados (dentro del rango de precisión elegido).
- Corroboramos que x_1 es más estable para calcular estas raíces.

Comparando las columnas 3 y 4 de cada tabla vemos que:

- x_2 se desvia cada vez más de $x_{2(alt.)}$ entre (a) y (b).
- El único factor que cambia en cada ecuación es el coeficiente lineal b que se hace cada vez más negativo.
- Aumentar la precisión pareciera no mejorar ningún resultado (dentro del rango de precisión elegido).
- Corroboramos que $x_{2(alt.)}$ es más estable para calcular estas raíces.

Estos resultados son coherentes con las predicciones establecidas en base a los términos de estabilidad.

5. Conclusiones

Se mostró como se puede predecir el comportamiento de un algoritmo para resolver un problema numérico y se corroboró dicha predicción con los resultados de simulación. Verificamos como varía la estabilidad entre dos formas equivalentes de una ecuación aplicadas a los mismos parámetros de entrada y como se ve afectada la exactitud de los resultados. La aplicación de estos resultados en el ámbito de la ingeniería deben ser tenidos en cuenta donde se desarrollen algoritmos largos y complejos para determinar si los efectos de acumulación de error de redondeo pueden producir resultados indeseados.

6. Referencias

[1] Resumen de clases teóricas - Ing. Rodolfo Schwarz - 2011.

[2] Análisis numérico - Hernan González - 2da edición.

7. Anexo

7.1. Ejecución en Octave

Para obtener los resultados de los cuadros (1), (2) y (3) se debe abrir Octave en la carpeta donde están contenidos los scripts *my_grid.m* y *sim.m*. Se ejecuta la simulación invocando al script *sim.m*:

```
>> sim.m
```

Los datos se muestran de la siguiente manera: por cada valor para los dígitos significativos se producen 4 valores para cada algoritmo, uno por cada ecuación, es decir, en total se muestran 16 valores por cada dígito significativo. Los resultados se muestran en forma de vector, por ejemplo:

```
x1 =
999.998999999000  9999.999899999999  99999.999989999997  999999.999998999992
```

Son las soluciones del algoritmo x_1 para cada una de las ecuaciones (a), (b), (c) y (d) en ese orden.