

Trabajo Práctico N°1

Diseño y construcción de un filtro pasabajos

86.04 Análisis de Circuitos - FIUBA
2^{do} Cuatrimestre - 2018

José F. González - 100063 - <jfgonzalez@fi.uba.ar>

1. Especificaciones

Nos interesa diseñar, construir y medir un circuito que implemente una función de transferencia $H(s)$, que describe el funcionamiento de un filtro pasabajos activo de segundo orden, utilizando amplificadores operacionales TL081.

2. Función de Transferencia

Se tiene una función de transferencia $H(s)$ que describe el comportamiento de un filtro dada por la ecuación (2.1). Observamos que evaluando $H(s)$ en el dominio de Fourier $s = jw$ y tomando valores grandes de w la función de transferencia se anula, análogamente, al acercarnos a $w = 0$ la función tiende a la unidad. Este comportamiento sugiere que el filtro que describe $H(s)$ sea un **filtro pasabajos**.

$$H(s) = \frac{4,564 \cdot 10^8}{s^2 + 3,021 \cdot 10^4 \cdot s + 4,564 \cdot 10^8} \quad (2.1)$$

$$H(jw = 0) = 1, \quad H(jw \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

El denominador de la transferencia es un polinomio de segundo grado, esto es, el circuito a implementar debe ser de **segundo orden** (deberá tener asociada una ecuación diferencial de segundo orden) y por lo tanto puede tener a lo sumo dos almacenadores de energía desacoplados. Además este polinomio provee los polos p_1, p_2 , complejos conjugados, de la función de transferencia.

$$s^2 + 3,021 \cdot 10^4 \cdot s + 4,564 \cdot 10^8 = 0 \Rightarrow p_1, p_2 = -15105 \pm j5\sqrt{9129559} \quad (2.2)$$

El numerador no presenta ceros, lo que indica que no hay valores finitos de w para los cuales la transferencia tienda a anularse. Notemos ahora que la función de transferencia puede ser escrita en función de una frecuencia $w_n = \sqrt{4,564 \cdot 10^8}$ y un factor $Q = 1/\sqrt{2}$, tal que buscar la condición de frecuencia de corte con el criterio $20\log(H(jw)) = -3dB$ se tiene como resultado que la frecuencia de corte es efectivamente $w_o = w_n$.

$$H(s) = \frac{(w_n)^2}{s^2 + \frac{w_n}{Q}s + (w_n)^2} \quad (2.3)$$

$$|H(jw_o)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow w_o = w_n \quad (2.4)$$

Analizamos la función de transferencia $H(jw)$ para las distintas regiones de frecuencia:

- Si $w \ll w_o \Rightarrow H(jw) \approx 1$, es decir pasan las frecuencias bajas con ganancia 1.
- Si $w = w_o \Rightarrow H(jw) = -j \cdot Q$, la señal se invierte $\pi/2$ rad y se modifica en un factor Q ($-3dB$).
- Si $w \gg w_o \Rightarrow H(jw) \approx -(w_o/w)^2$, la señal se invirtió π rad y se atenúa según el cuadrado de la frecuencia.

En las figuras 1 y 2 se muestran los gráficos de módulo y fase de esta transferencia teórica junto con sus aproximaciones asintóticas y con las curvas del circuito normalizado que se obtienen en la sección *Diseño del filtro*.

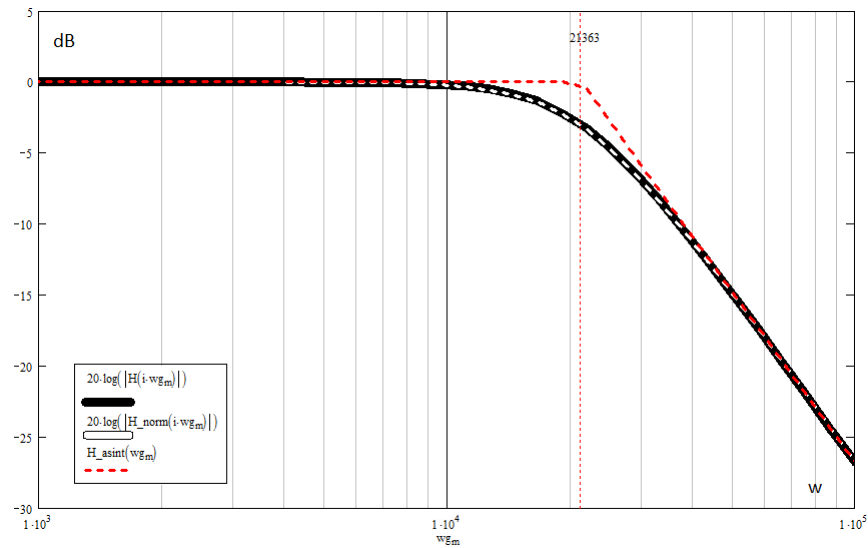


Figura 1: Diagrama de Bode - Módulo Teórico y Módulo Normalizado

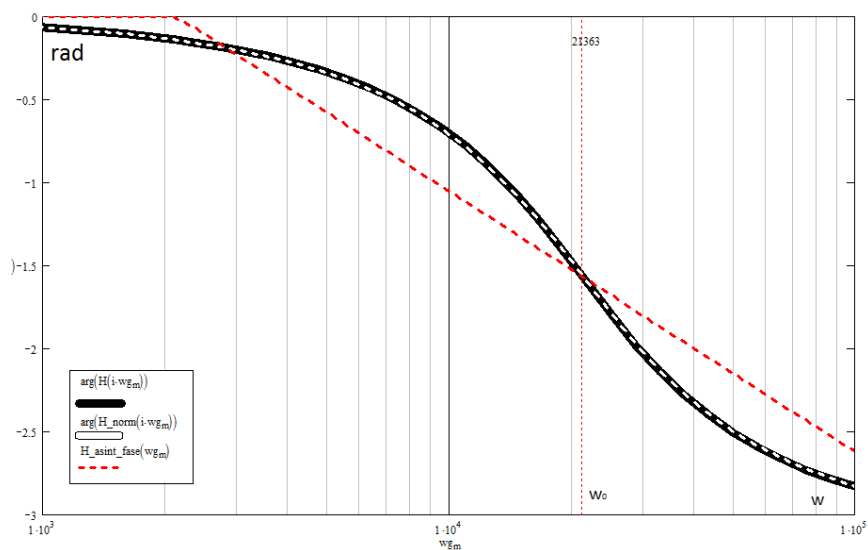


Figura 2: Diagrama de Bode - Fase Teórica y Fase Normalizada

2.1. Respuesta impulsiva

Nos interesa encontrar la respuesta temporal $h(t)$ al impulso unitario, cuya transformada de Laplace es $L(\delta) = 1$. Luego realizamos el producto en el dominio de Laplace y lo antitransformamos al dominio temporal obteniendo $h(t)$ cuyo gráfico se muestra en la figura 3.

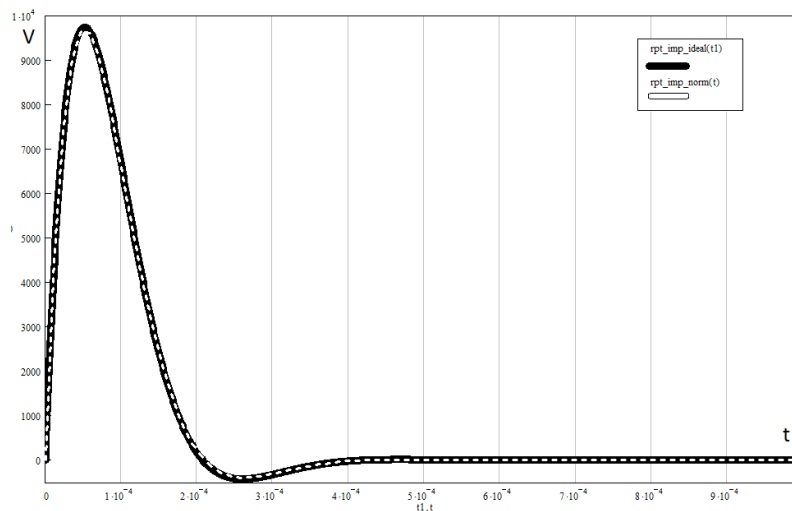


Figura 3: Respuesta Impulsiva Teórica y Normalizada.

Para explicar esta respuesta notamos que el desarrollo en serie de Fourier del impulso puede escribirse como:

$$\delta(t) \approx \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}(\cos(\omega t) + \cos(2\omega t) + \cos(3\omega t) + \dots) \quad (2.5)$$

La salida del impulso es acotada y con flancos poco definidos. Esto se debe a que **los términos de alta frecuencia del desarrollo en serie de Fourier del impulso son eliminados a la salida del filtro**. Los términos de alta frecuencia contribuyen tanto a la amplitud del impulso como a definir los flancos, como se puede ver en la figura 4. Además reducir términos disminuye la resta de componentes senoidales a los lados del impulso produciendo el pequeño bulto en la figura 3.

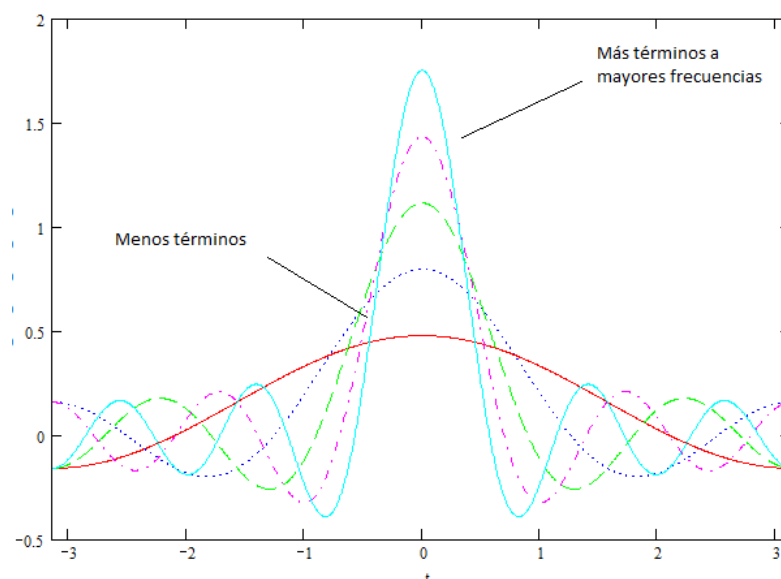


Figura 4: Efecto de quitar terminos de la serie del impulso.

2.2. Respuesta al escalón unitario

Estudiamos la respuesta de la transferencia al escalón unitario cuya transformada de Laplace es $1/s$. Luego la respuesta temporal se obtiene antitransformando el producto $H(s) \cdot 1/s$, cuyo resultado se muestra en la figura 5.

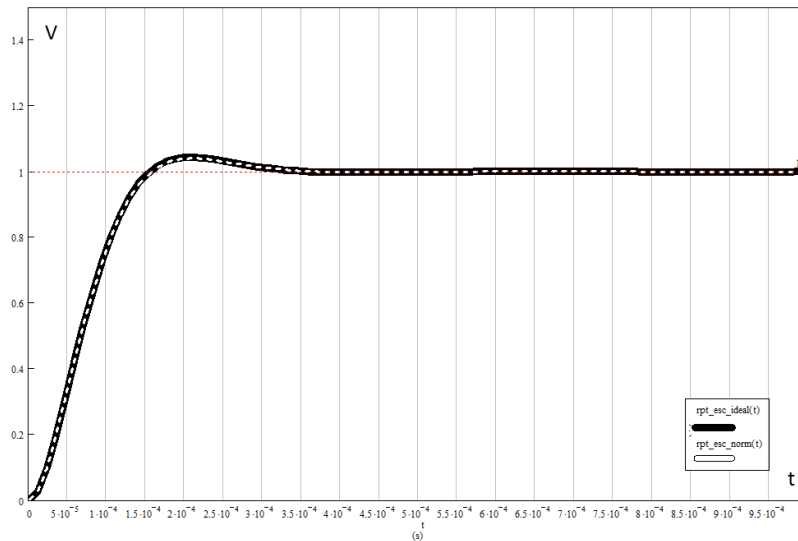


Figura 5: Respuesta al escalón Teórica y Normalizada.

Nuevamente se observan un flanco poco definido, esto se debe a que se atenuaron componentes de alta frecuencia de la señal de entrada que componen el flanco en el desarrollo en serie de Fourier del escalón, dado por:

$$u(t) \approx \frac{4}{\pi} (\text{sen}(w\pi \cdot t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3w\pi \cdot t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5w\pi \cdot t) + \dots) \quad (2.6)$$

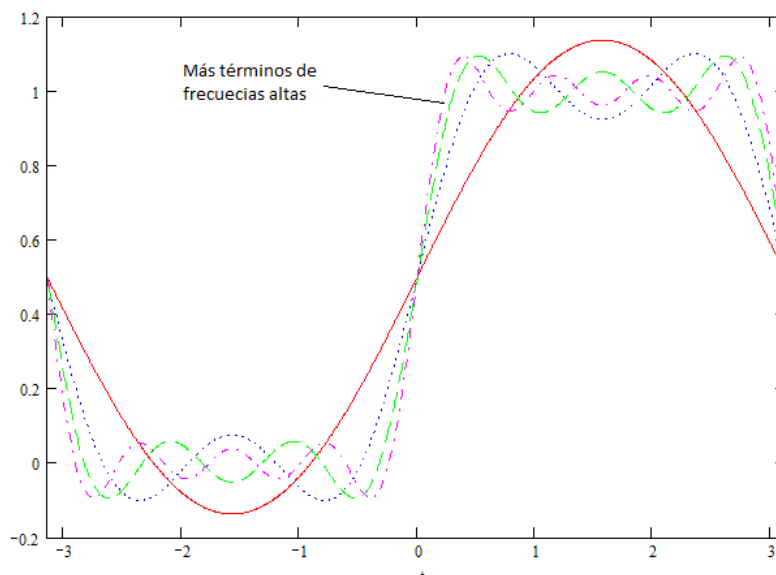


Figura 6: Efecto de quitar terminos de la serie del escalón unitario.

2.3. Respuesta a señales cuadradas

Estudiamos la respuesta teórica ante señales cuadradas de frecuencias $[f_0/10; f_0; 10f_0]$ lo cual nos permite observar los efectos de atenuación antes, sobre y después de la frecuencia de corte. Los resultados se obtienen multiplicando la transferencia por la transformada de Laplace de la cuadrada con la frecuencia deseada y antitransformando para obtener la respuesta temporal que se muestran en las figuras 7,8 y 9. En los mismos gráficos se muestran las curvas normalizadas obtenidas en la sección *Diseño del filtro*.

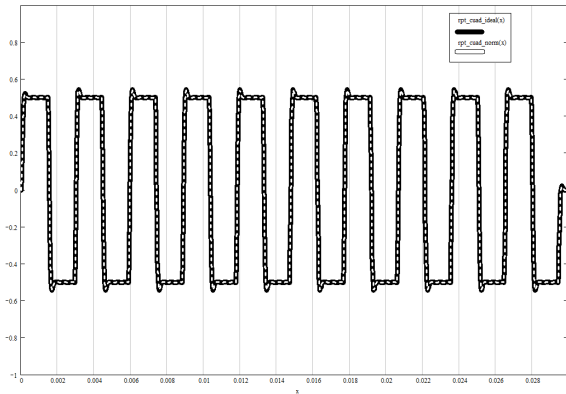


Figura 7: Respuesta a cuadrada de frecuencia $f_0/10$

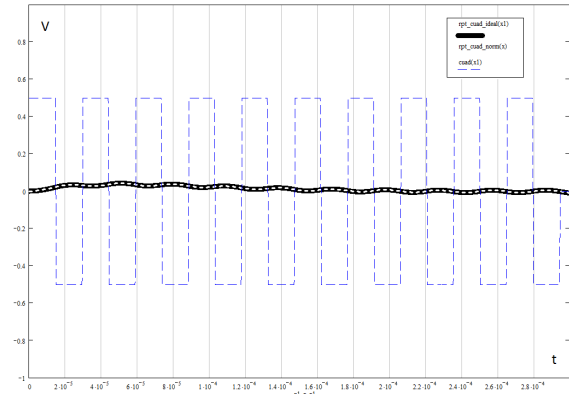


Figura 8: Respuesta a cuadrada de frecuencia $10f_0$

El análisis de estos resultados es similar al de la respuesta al escalón: la diferencia entre las señales es que cambia la frecuencia fundamental, es decir, la mínima frecuencia en la suma de Fourier. Produciendo que en frecuencia $f_0/10$ la señal tiene mayoritariamente componentes de frecuencia anteriores a la de corte que no serán atenuadas. En $10f_0$ todos los armónicos son mayores a la frecuencia de corte y se atenúa la totalidad de las componentes.

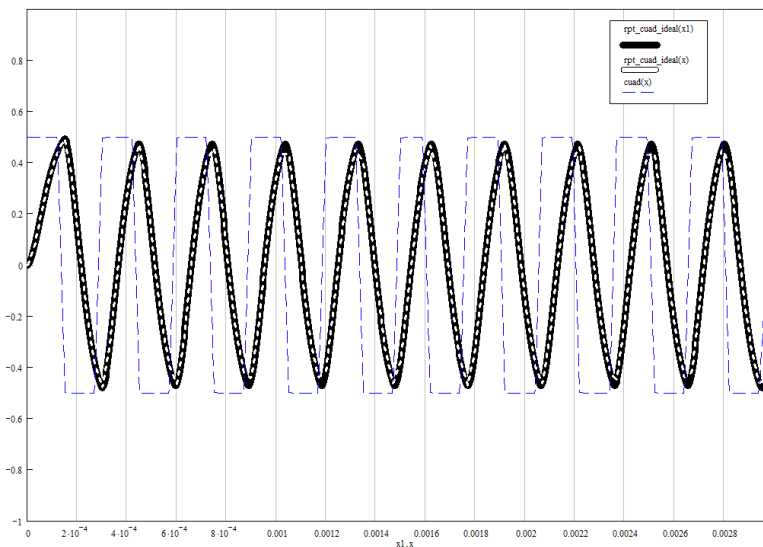


Figura 9: Respuesta a señal cuadrada de frecuencia f_0

3. Diseño del filtro

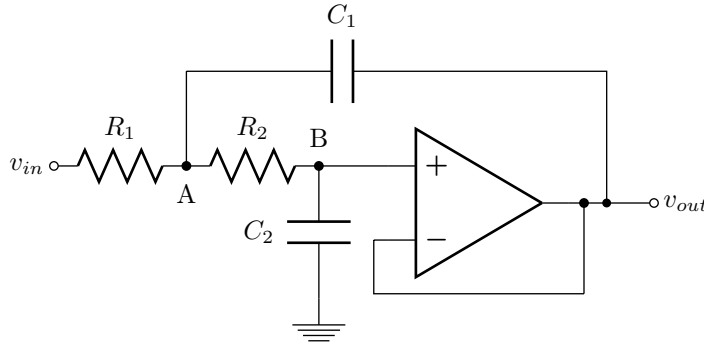


Figura 10: Circuito propuesto, Sallen-Key pasabajos.

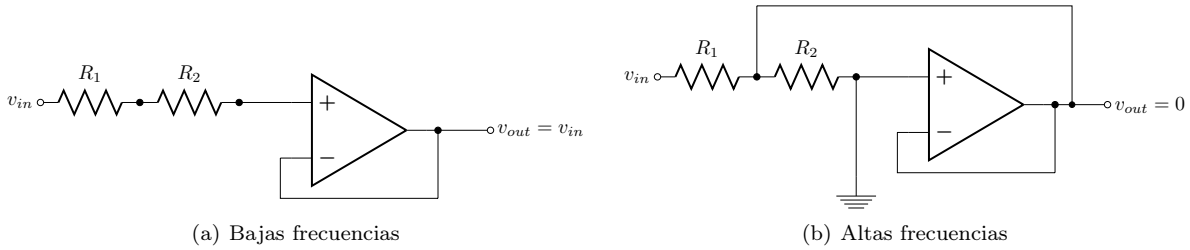


Figura 11: Respuesta en frecuencia

En base a los resultados obtenidos en el análisis de la función de transferencia se elige el circuito **Sallen-Key pasabajos** de la figura 10 que **verifica las condiciones básicas de orden y respuesta en los extremos de frecuencia** (Figura 11). A continuación mostramos como la función de transferencia se ajusta a la deseada tomando valores apropiados de los componentes. Suponiendo condiciones iniciales nulas, vamos a plantear el método de nodos sobre la red transformada de Laplace, teniendo en cuenta que $V_{out} = V_B$, y se despeja V_{out}/V_{in} :

$$A: \frac{V_{in}}{R_1} + \frac{V_{out}}{1/sC_1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1\right)V_A - \frac{1}{R_2}V_{out} \quad (3.1)$$

$$B: 0 = -\frac{1}{R_2}V_A + \left(\frac{1}{R_2} + sC_2\right)V_{out} \quad (3.2)$$

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1/(C_1C_2R_1R_2)}{s^2 + (1/R_1 + 1/R_2)(1/C_1) \cdot s + 1/(C_1C_2R_1R_2)} \quad (3.3)$$

Notamos que en esta expresión **la ganancia unitaria no tiene sensibilidad con respecto a la variación de los componentes**. Igualamos esta expresión con los valores de la función de transferencia original para obtener dos ecuaciones con cuatro incógnitas. Debemos establecer algún tipo de criterio para la elección de componentes que nos permita despejar estas ecuaciones, **adoptamos el criterio de definir las relaciones entre capacitores y resistores**, dadas por las siguientes ecuaciones:

$$R_1 = nR \quad R_2 = R/n \quad C_1 = mC \quad C_2 = C/m \quad (3.4)$$

$$R_1/R_2 = n^2 \quad C_1/C_2 = m^2 \quad (3.5)$$

Luego se simplifica la transferencia y resulta que la frecuencia de corte y el factor de selectividad son dados por las ecuaciones (3.6) y (3.7). **Notamos que para que $Q = 1/\sqrt{2}$, m debe ser mayor o igual a $\sqrt{2}$ para que n sea positivo. Esto tiene como consecuencia que los capacitores deben cumplir $C_1/C_2 \geq 2$.**

$$(w_o)^2 = 1/(CR)^2 = 4,564 \cdot 10^8 \quad (3.6)$$

$$Q = \frac{nm}{n^2 + 1} = 1/\sqrt{2} \quad (m \geq \sqrt{2}) \quad (3.7)$$

Con el propósito de elegir valores comerciales normalizados se construyó una lista de valores comerciales de capacitores para C_1 y C_2 (ver Anexo 1). Se calculo para cada posible combinación el valor de m utilizando la ecuación (3.5), luego se despeja n de (3.7) y finalmente se obtienen valores teóricos R_1 y R_2 con (3.6) y (3.4) que deben ser normalizados. Dentro de estas posibles combinaciones (C_1, C_2) se busca una que satisfaga $C_1/C_2 \geq 2$ y genere $4,7 \text{ k}\Omega < [R_1, R_2] < 1 \text{ M}\Omega$ para **evitar corrientes muy grandes en un extremo y eludir ruidos térmicos en el otro** (Con el mismo fin se limita los valores de capacitancia a $1 \text{ nF} < [C_1, C_2] < 470 \text{ nF}$).

Teniendo todo esto en cuenta se obtienen varios conjuntos de valores normalizados que producen los **parámetros del filtro normalizados** dados en el cuadro 3.1 y satisfacen todas las condiciones de diseño. Entre estos conjuntos **se elige el que produce el menor error relativo con respecto a los parámetros del filtro teóricos**, dado por la combinación [$C_1 = 10 \text{ nF}, C_2 = 4,7 \text{ nF}, R_1 = 5,1 \text{ k}\Omega, R_2 = 9,1 \text{ k}\Omega$]. La transferencia normalizada para estos valores se graficó junto a la teórica en las figuras 1 y 2. Las respuestas temporales normalizadas se encuentran junto a las teóricas en los gráficos 3,5,7,8 y 9.

Capacitancias propuestas		Relaciones inducidas		Resistencias teóricas		Resistencias normalizadas	
$C_1(F)$	$C_2(F)$	$m = \sqrt{C_1/C_2}$	n	$R_1 (\Omega)$	$R_2 (\Omega)$	$R_1 (\Omega)$	$R_2 (\Omega)$
10n	4.7n	1.459	0.779	5317.29	8767.30	5k1	9k1
6.8n	1.5n	2.129	0.380	5570.638	38561.089	5k6	39k
6.8n	1n	2.608	0.295	5290.245	60907.345	5k1	62k
4.7n	1.5n	1.770	0.499	8795.083	35336.644	9k1	36k
4.7n	1n	2.168	0.371	21591.273	58185.588	8k2	56k

Cuadro 3.1: Posibles valores teóricos y normalizados. En rojo: valores elegidos.

Transferencia	Frec. Corte $f_o (Hz)$	Fact. Selectividad Q
$\frac{4,5640000 \cdot 10^8}{s^2 + 3,021258 \cdot 10^4 \cdot s + 4,5640000 \cdot 10^8}$	3400.11	$1/\sqrt{2}$

Cuadro 3.2: Parámetros del filtro teóricos

Transferencia	Frec. Corte $f_o (Hz)$	Fact. Selectividad Q
$\frac{4,5845 \cdot 10^8}{s^2 + 3,0597 \cdot 10^4 \cdot s + 4,5845 \cdot 10^8}$	3407.73	0,7073264

Cuadro 3.3: Parámetros del filtro normalizados

3.1. Simulación

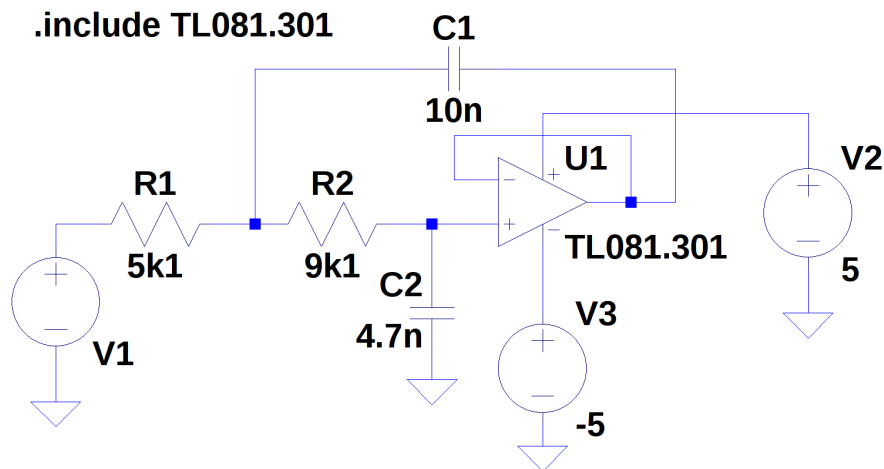


Figura 12: Esquemático de simulación en *LTSpice*.

Previamente a la implementación del amplificador se realiza una simulación en *LTSpice* de la figura 12 para corroborar las cuentas teóricas y los valores de componentes normalizados, elegidos en la sección anterior. Al simular la transferencia y las respuestas temporales se obtienen exactamente los mismos resultados que las curvas teóricas de las figuras 1 a 9, corroborando la elección del filtro y de componentes normalizados. **La frecuencia de corte simulada es de 3.372 kHz.**

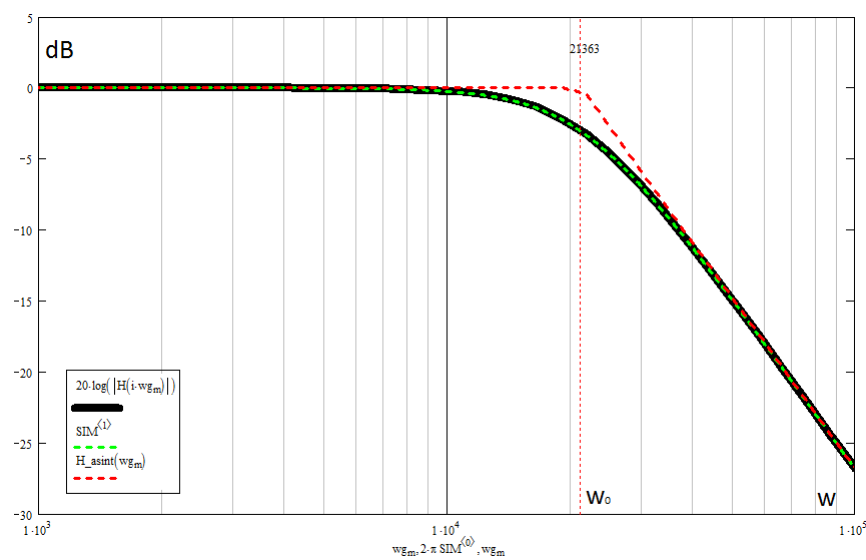


Figura 13: Modulo de Transferencia simulada con valores normalizados.

4. Implementación y Mediciones

4.1. Buffer de Entrada

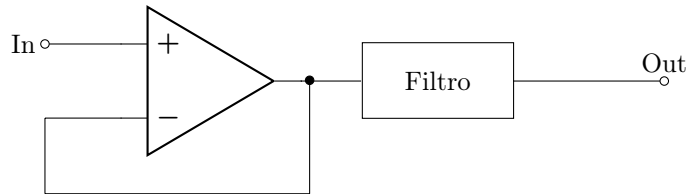


Figura 14: Buffer de Entrada

En la entrada del filtro se debe colocar un **amplificador en modo seguidor de ganancia unitaria** para evitar que la corriente entrante al filtro atenué la señal de entrada. La alta impedancia de entrada y la baja impedancia de salida tienen el efecto de aislar el circuito de los instrumentos que se utilizarán para medirlo, sin afectar su transferencia. Se utilizó un amplificador TL081 para el seguidor.

4.2. Medición de Transferencias

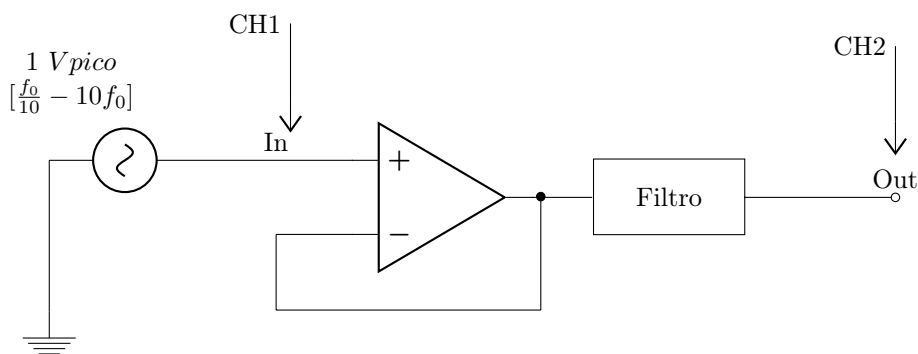


Figura 15: Banco de mediciones

Para medir el módulo de la transferencia se implementó el circuito de la figura 15 donde se fue variando la tensión de entrada entre $f_0/10$ y $10f_0$ en tercios de octava. Luego se obtiene la transferencia como el cociente entre las tensiones de salida y la entrada. Los resultados de estas mediciones se encuentran en la figura 16. Para medir la frecuencia de corte con el criterio $-3dB$ se hizo un barrido en frecuencias cercanas a la f_0 esperada hasta medir a la salida una tensión pico de $0,707 V$, debido a que $20\log(0,707) \approx -3dB$, siendo la señal de entrada de $1 Vpico$. En la figura 17 se muestra una captura de esta medición y el resultado se encuentra en el cuadro 4.1 comparado con las frecuencias de corte teórica, simulada y normalizada. Las aproximaciones asintóticas se obtuvieron realizando dos ajustes de mínimos cuadrados sobre dos conjuntos de puntos: aquellos que mostraban una tendencia constante y aquellos decrecientes, obteniendo las rectas asintóticas de la figura 16.

Frecuencia de Corte (Hz)			
Teórica	Normalizada	Simulada	Medida
3400.11	3407.73	3372	≈ 3571

Cuadro 4.1: Frecuencias de Corte

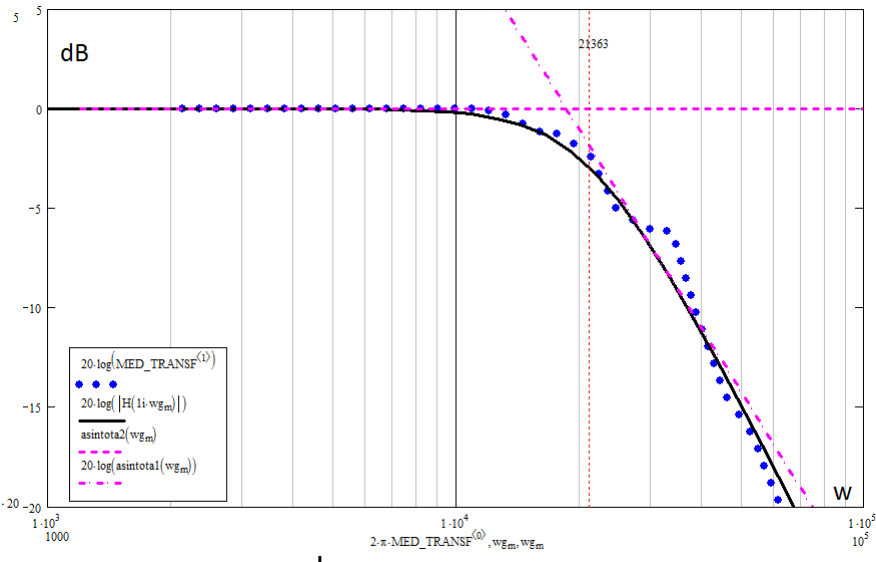


Figura 16: Modulo de Transferencia medida.

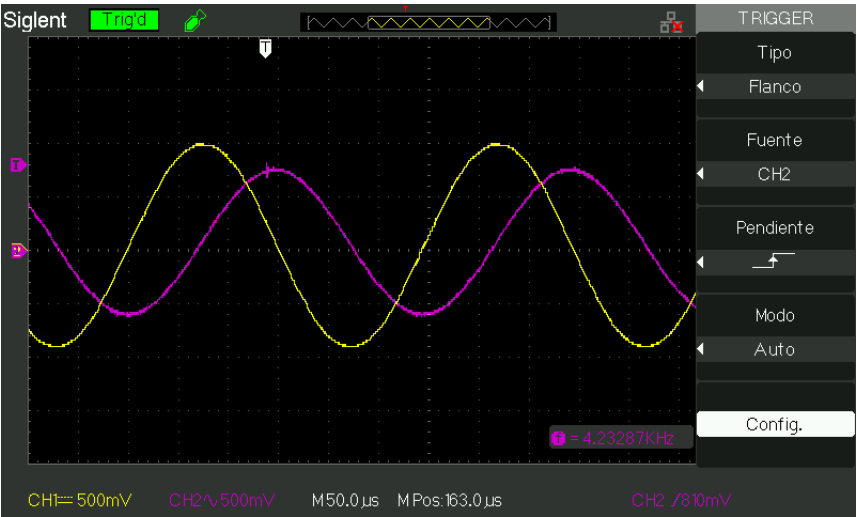


Figura 17: Medición de Frecuencia de Corte.

4.3. Respuestas a señales cuadradas medidas

En las figuras 18,19 y 20 se muestran las respuestas del circuito ante las entradas cuadradas de frecuencias $f_0/10$; f_0 ; $10f_0$.

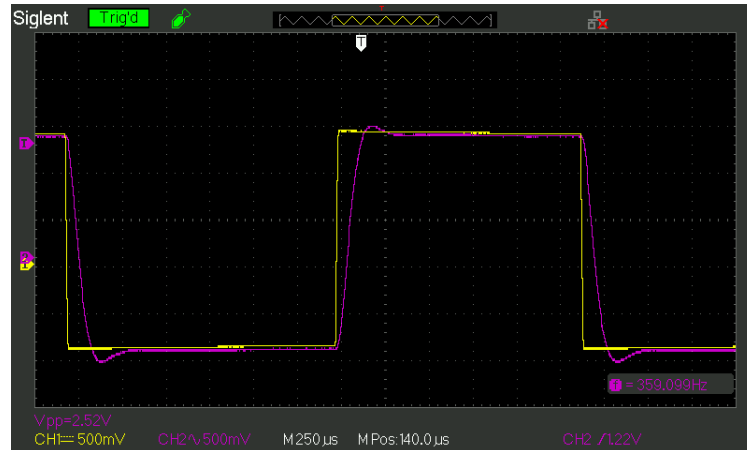


Figura 18: Respuesta medida a señal cuadrada de frecuencia $f_0/10$.

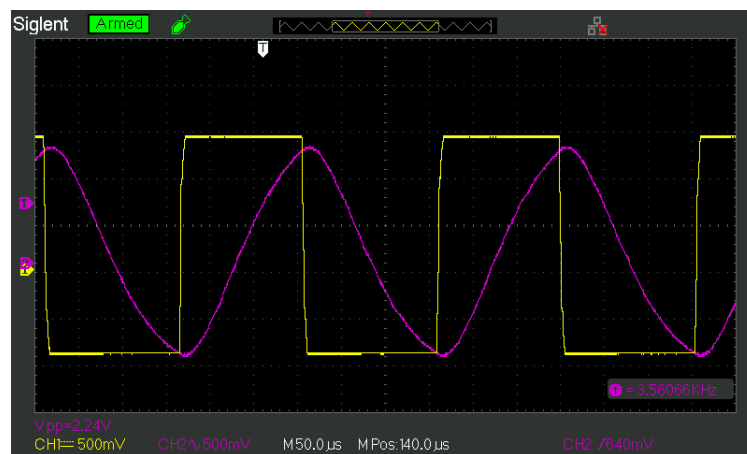


Figura 19: Respuesta medida a señal cuadrada de frecuencia f_0 .

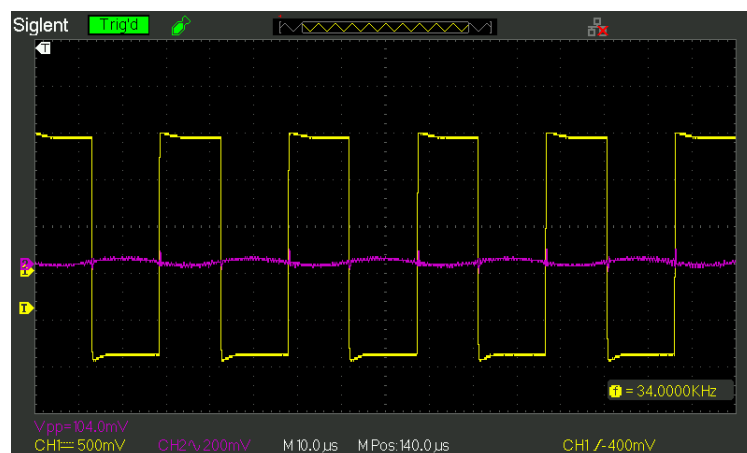


Figura 20: Respuesta medida a señal cuadrada de frecuencia $10f_0$.

5. Análisis de los resultados

Inicialmente se planteó una función de transferencia $H(s)$ que define el comportamiento de un filtro pasabajos con frecuencia de corte 3400 Hz y ganancia unitaria en bajas frecuencias. Dada esta transferencia existen muchos posibles circuitos que la implementen. La primera etapa del diseño consistió en elegir el circuito, un Sallen-Key pasabajos, cuya función de transferencia coincide con $H(s)$ para ciertos valores teóricos de componentes. **La siguiente etapa del diseño consistió en determinar los valores normalizados de componentes que disminuyan el error entre la transferencia teórica y la normalizada**, llegandose a encontrar una combinación para la cuál los parámetros normalizados tienen un error relativo de 0,004 con respecto a los teóricos como se muestra en los cuadros 3.2 y 3.3. Las figuras 1,2,3,5 y 7 muestran como las curvas teóricas coinciden con las normalizadas para esta elección de componentes. **La simulación del circuito también corrobora la elección de componentes** dado que las predicciones de la simulación coinciden exactamente con las curvas teóricas.

En las mediciones de transferencia sobre el circuito implementado (figura 19) se puede notar que **en bajas frecuencias el modulo de transferencia medido coincide exactamente con la curva teórica**. Esta es una de las ventajas de haber elegido este circuito, debido a que su función de transferencia, en bajas frecuencias, tiene muy poca sensibilidad a los valores de los componentes. Durante y después de la zona de corte el error entre curvas no es tan preciso pero tiene la respuesta esperada.

En cuanto a las respuestas a señales cuadradas medidas de las figuras 18,19 y 20, estas verifican el análisis de las secciones 2.2 y 2.3 sobre los efectos de la atenuación de armónicos de las distintas señales.

6. Referencias

- [1] 86.04/66.25 Análisis de Circuitos, FIUBA, Apuntes de cátedra.
- [2] Teoría de Circuitos, Huelsman, Segunda Edición, Prentice Hall.
- [3] Analysis of Sallen-Key Architecture, Application Report, Texas Instruments, 1999.

7. Anexo I - Posibles combinaciones de Componentes Normalizados

Las columnas C1 y C2 son combinaciones normalizadas para las cuales se determinan las resistencias R1 y R2 teóricas. Las filas con columna $m < 2$ son combinaciones C1,C2 que no tienen solución para las condiciones planteadas en el diseño del filtro. La columna $(w_0^2/10E8)$ da el parámetro normalizado que se compara con el teórico de valor 4,564.

C1[F]	C2[F]	m	n	C(F)	R(Ohms)	R1(Ohms)	R2(Ohms)	R1Norm(Ohms)	R2Norm(Ohms)	$w_0/10E8$
$1 \cdot 10^{-8}$	$4,7 \cdot 10^{-9}$	1,46	0,78	$6,86 \cdot 10^{-9}$	6,827,76	5,317,29	8,767,3	5,100	9,100	4,58
$1 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-9}$	2,58	0,3	$3,87 \cdot 10^{-9}$	12,085,97	3,604,24	40,527,49			
$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-9}$	3,16	0,24	$3,16 \cdot 10^{-9}$	14,802,23	3,494,33	62,703,26			
$6,8 \cdot 10^{-9}$	$4,7 \cdot 10^{-7}$	0,12		$5,65 \cdot 10^{-8}$	827,99					
$6,8 \cdot 10^{-9}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$	0,14		$4,74 \cdot 10^{-8}$	988,13					
$6,8 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	0,18		$3,87 \cdot 10^{-8}$	1,210,21					
$6,8 \cdot 10^{-9}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	0,21		$3,19 \cdot 10^{-8}$	1,465,64					
$6,8 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-7}$	0,26		$2,61 \cdot 10^{-8}$	1,795,03					
$6,8 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	0,56		$1,22 \cdot 10^{-8}$	3,827,03					
$6,8 \cdot 10^{-9}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	0,67		$1,01 \cdot 10^{-8}$	4,634,76					
$6,8 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-8}$	0,82		$8,25 \cdot 10^{-9}$	5,676,4					
$6,8 \cdot 10^{-9}$	$6,8 \cdot 10^{-9}$	1		$6,8 \cdot 10^{-9}$	6,883,64					
$6,8 \cdot 10^{-9}$	$4,7 \cdot 10^{-9}$	1,2		$5,65 \cdot 10^{-9}$	8,279,88					
$6,8 \cdot 10^{-9}$	$1,5 \cdot 10^{-9}$	2,13	0,38	$3,19 \cdot 10^{-9}$	14,656,39	5,570,64	38,561,09	5,600	39,000	4,49
$6,8 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-9}$	2,61	0,29	$2,61 \cdot 10^{-9}$	17,950,34	5,290,24	60,907,35	5,100	62,000	4,65
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$4,7 \cdot 10^{-7}$	0,1		$4,7 \cdot 10^{-8}$	995,93					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$	0,12		$3,94 \cdot 10^{-8}$	1,188,56					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	0,15		$3,22 \cdot 10^{-8}$	1,455,68					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	0,18		$2,66 \cdot 10^{-8}$	1,762,92					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-7}$	0,22		$2,17 \cdot 10^{-8}$	2,159,13					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$8,2 \cdot 10^{-8}$	0,24		$1,96 \cdot 10^{-8}$	2,384,36					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$6,8 \cdot 10^{-8}$	0,26		$1,79 \cdot 10^{-8}$	2,618,33					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$4,7 \cdot 10^{-8}$	0,32		$1,49 \cdot 10^{-8}$	3,149,41					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	0,46		$1,02 \cdot 10^{-8}$	4,603,27					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	0,56		$8,4 \cdot 10^{-9}$	5,574,84					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-8}$	0,69		$6,86 \cdot 10^{-9}$	6,827,76					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$6,8 \cdot 10^{-9}$	0,83		$5,65 \cdot 10^{-9}$	8,279,88					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$4,7 \cdot 10^{-9}$	1		$4,7 \cdot 10^{-9}$	9,959,31					
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$1,5 \cdot 10^{-9}$	1,77	0,5	$2,66 \cdot 10^{-9}$	17,629,2	8,795,08	35,336,64	9,100	36,000	4,33
$4,7 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-9}$	2,17	0,37	$2,17 \cdot 10^{-9}$	21,591,27	8,012	58,185,59	8,200	56,000	4,63