

## 1. Objetivos

El objetivo de este trabajo práctico es aplicar métodos numéricos para la resolución de un problema de valores iniciales planteado en el modelo matemático para circuitos osciladores RLC con elementos resistivos no lineales.

## 2. Introducción

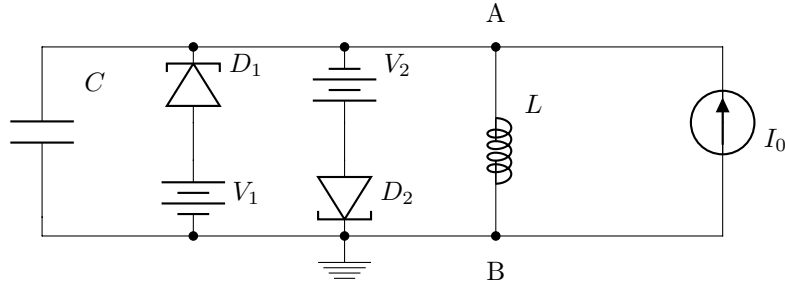


Figura 1: Implementación del oscilador de Van der Pol

Se tiene un circuito RLC paralelo donde la resistencia total  $R$  está compuesta por dos diodos de efecto tunel como se muestra en la Figura 1. Los diodos son elementos no lineales, con lo cual no se pueden relacionar la corriente y tensión en un instante  $t_0$  mediante una expresión del tipo  $I_d = \alpha \cdot V_d^1$ . La solución del circuito describe la tensión en función de una variable adimensional  $t$ , asociada al tiempo, entre los nodos A y B como una ecuación diferencial denominada de *Van der Pol*, donde el parámetro  $\epsilon$  representa la oposición del circuito a la oscilación. Nos interesa aproximar la solución de esta ecuación diferencial ordinaria de segundo orden utilizando métodos numéricos para unas condiciones iniciales en particular.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \epsilon \cdot (1 - v^2) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + v &= 0 \\ v(0) &= 1, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

<sup>1</sup>En rigor se puede llegar a expresiones de este tipo para señales de baja amplitud, llamadas **modelos de pequeña señal**

### 3. Método de Euler

La estructura del método de Euler para ecuaciones ordinarias de primer orden  $y' = f(x, y)$  consiste en el uso recursivo de aproximaciones por "rectas tangentes"<sup>2</sup> de la curva solución en los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n = x_0 + nh$  donde  $h$  es el tamaño del paso entre  $x_n$  y  $x_{n+1}$  produciendo las ordenadas  $y_1, y_2, \dots$  que aproximan los valores de la solución  $y(x)$  en  $x_n$ .

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (2)$$

Si podemos encontrar un cambio de variables  $v' = y$  que convierta a la ecuación diferencial de segundo orden (1) en dos ecuaciones diferenciales de primer orden, podemos despejar  $f(x, y)$  y aplicar el método de Euler simultáneamente a las dos ecuaciones. Tomando  $v' = y$  se obtienen las ecuaciones:

$$v' = y, \quad v(0) = 0$$

$$y' - \epsilon(1 - v^2)y + v = 0, \quad y(0) = v'(0) = 1$$

$$v_{n+1} = v_n + hy_n \quad (3)$$

$$y_{n+1} = y_n - h[-x_n + \epsilon(1 - x_n^2)y_n] \quad (4)$$

Un límite del valor absoluto del error se puede obtener del tercer término del desarrollo de Taylor de  $y(x_{n+1})$  en un punto  $a$ , llamado **error de truncamiento local** y dependiente de  $h$ :

$$\frac{Mh^2}{2!}, \quad M = \max|y''(x)| \text{ en } x_n < c < x_{n+1} \quad (5)$$

#### 3.1. Simulación

Tomando un  $h$  se discretiza un intervalo entre  $[t_0, 3T]$ , donde  $T$  representa un periodo de la oscilación de Van der Pol y  $t_0$  un punto inicial. Tomando  $t_0 = 0$  y  $h = 0,01$  se implementa un *script* en *Octave* para computar la aproximación numérica detallado en la figura TTTT.

---

```

1  eps = [1:1:5]      % Epsilon
2  h = 0.1             % Paso
3  n = 1               % Contador
4
5  xn = 0              % Condiciones
6  yn = 1
7  vn = 0
8
9  for n = [1:1:200]
10     yn1 = yn + h.*(-vn+eps.*(1-((vn).^2)).*yn);
11     yn = yn1;
12     xn(n) = n*h;
13     vn1 = vn + h.*yn;
14     vn = vn1;
15
16     n = n+1;
17 endfor

```

---

<sup>2</sup>No son tangentes a la curva solución

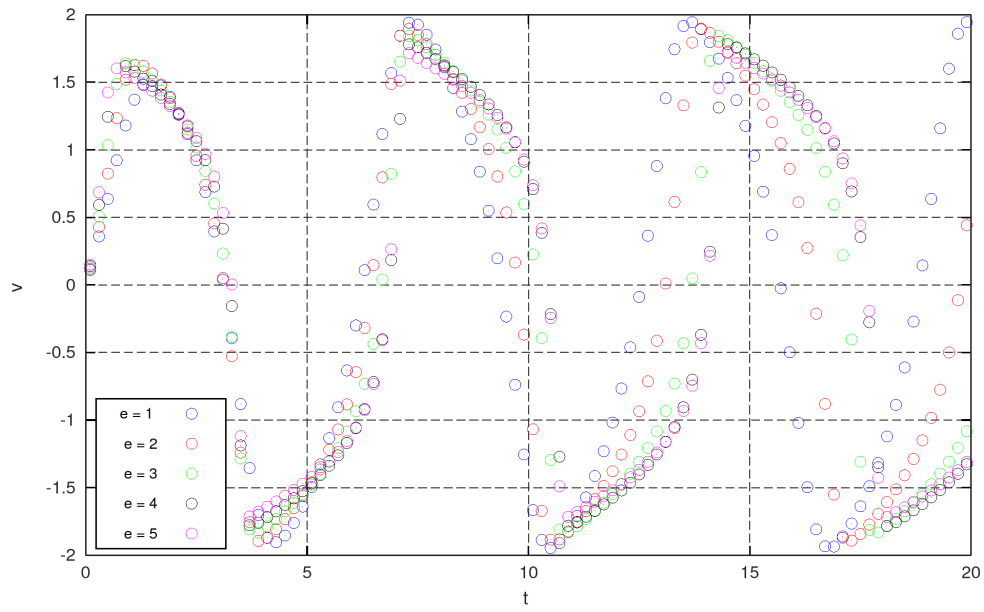


Figura 2: Aproximación por método de Euler - Oscilaciones

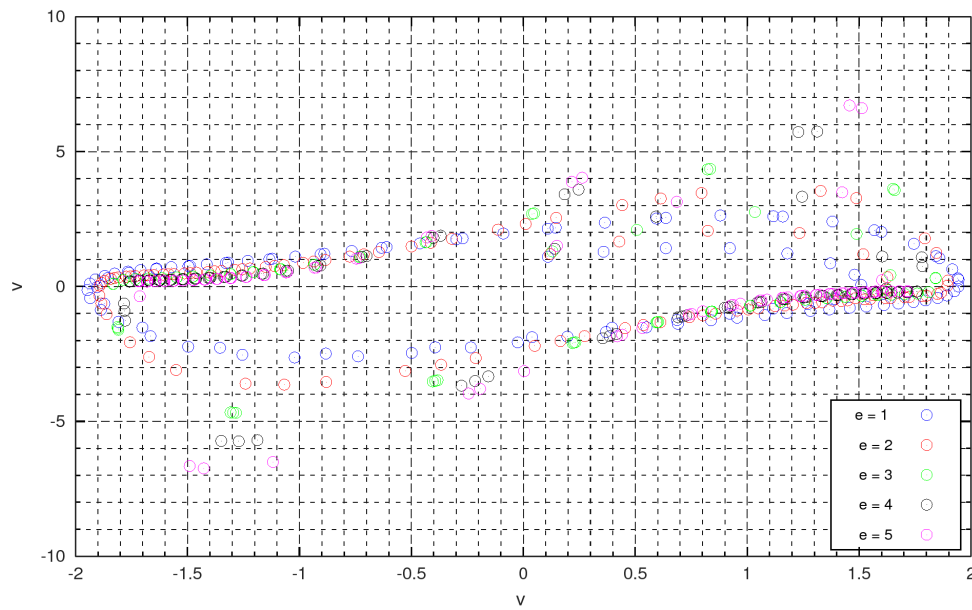


Figura 3: Aproximación por método de Euler - Ciclos

### 3.2. Método de Runge-Kutta de segundo orden

El método de Runge-Kutta es una generalización del del Euler para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, pero en lugar de la una recta tangente se utiliza un promedio de varias pendientes de rectas en el intervalo  $x_n < x < x_{n+1}$ . El número de pendientes es el **orden** del método y a cada pendiente  $k_i$  se le asigna un **peso**  $w_i$ . Los parámetros  $w_i$  se eligen tal que la fórmula coincida con un polinomio de Taylor de grado  $m$  en

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1 k_1 + \dots + w_m k_m) \quad (6)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + y''(x_n) \frac{h^2}{2!} + \dots + y^{(k+1)}(c) \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}, \quad x_n < c < x_{n+1}$$

En el caso del método con orden dos, hay que encontrar  $w_1, w_2, \alpha, \beta$  tal que (YYYY) coincida con un polinomio de grado 2. Quedando determinados muchos posibles procedimientos de segundo orden.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(w_1 k_1 + w_2 k_2) \\ k_1 &= f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \\ w_1 &= 1 - w_2, \quad \alpha = \frac{1}{2w_2}, \quad \beta = \frac{1}{2w_2} \end{aligned}$$

Tomando  $w_2 = 1/2$  se tiene un procedimiento particular que ajustamos a nuestra ecuación de Van der Pol mediante un cambio de variable  $y = v'$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 &= \epsilon(1 + v^2)y - v \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2}(2 + h)y_n \end{aligned} \quad (7)$$

### 3.3. Simulación

Tomando un  $h$  se discretiza un intervalo entre  $[t_0, 3T]$ , donde  $T$  representa un periodo de la oscilación de Van der Pol y  $t_0$  un punto inicial. Tomando  $t_0 = 0$  y  $h = 0,1$  se implementa un *script* en *Octave* para computar la aproximación numérica detallado en la figura TTTT.

---

```

1  eps = [1:1:5]      % Epsilon
2  h = 0.1             % Paso
3  n = 1               % Contador
4
5  xn = 0              % Condiciones
6  yn = 1
7  vn = 0
8
9  for n = [1:1:200]
10     k1=eps.*(1-vn.^2).*yn - vn;
11     k2 = eps.*(1-(vn+h).^2).*(yn+h.*k1) - (vn+h);
12     yn1 = yn + (h/2).*(k1 + k2);
13
14     yn = yn1;
15     xn(n) = n*h;
16
17     vn1 = vn + (h/2).*(2+h).*(yn);
18     vn = vn1;
19     n = n+1;
20 endfor

```

---

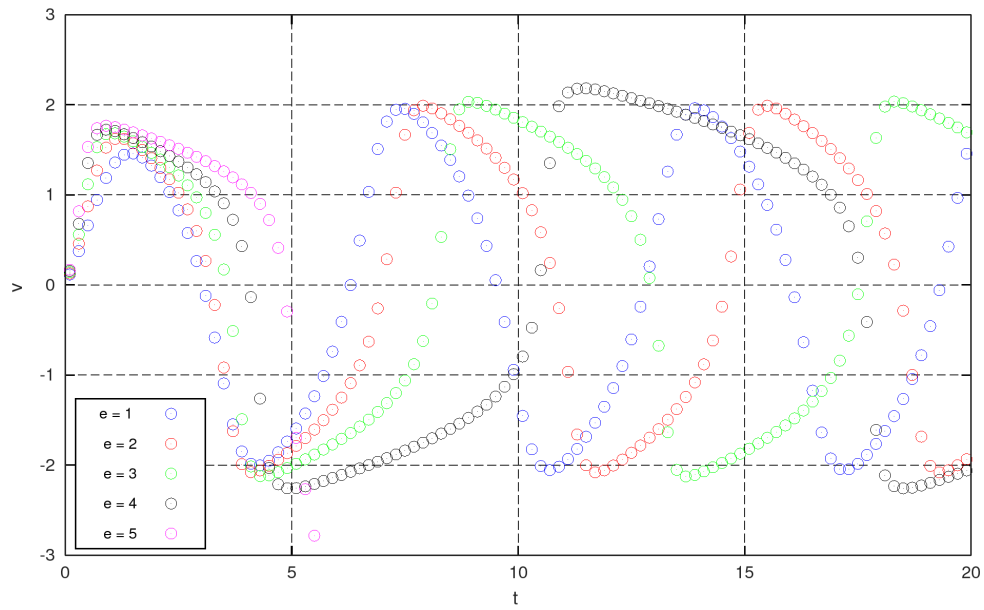


Figura 4: Aproximación por método de Rung-Kutta - Oscilaciones

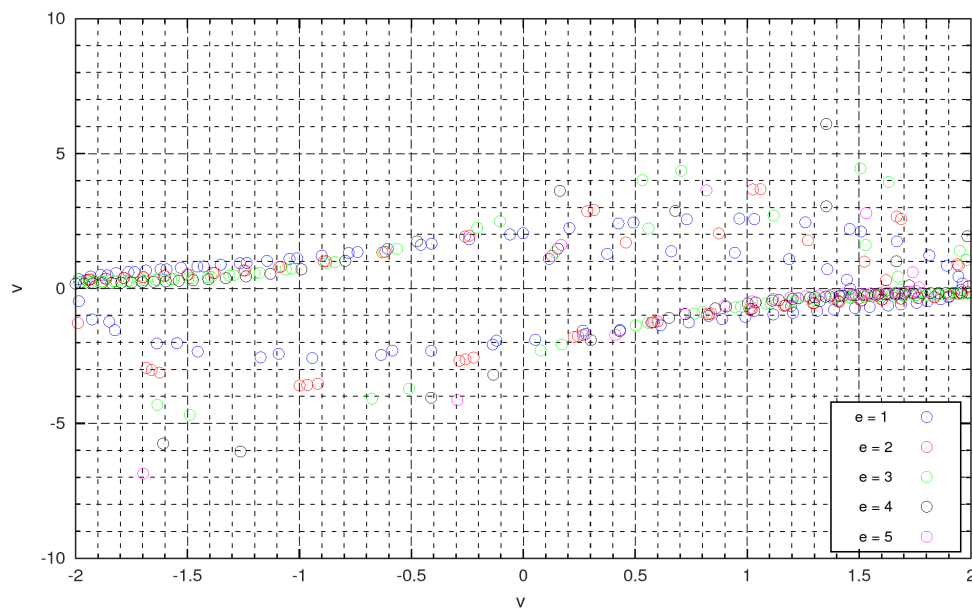


Figura 5: Aproximación por método de Runge-Kutta - Ciclos

## 4. Referencias

- [1] Resumen de clases teóricas - Ing. Rodolfo Schwarz - 2011.
- [2] Análisis numérico - Hernan González - 2da edición.
- [3] Período Van der Pol  
<https://math.stackexchange.com/questions/1564464/how-to-find-the-period-of-periodic-solutions-of-the-van-der-pol-equation>
- [4] <https://math.stackexchange.com/questions/1515251/using-rk4-on-the-van-der-pol-oscillator>
- [5] Ecuación Diferenciales con aplicaciones de modelado - Dennis Zill - Cengage - Novena Edición - Capítulo 9.