Métodos numéricospara la ciencia e Ingeniería: Informe Tarea 2

José Guillermo Araya

October 1, 2015

1 Pregunta 1

1.1 Introducción

Se busca implementar una rutina que permita calcular la posición del choque n+1 y la velocidad justo después de ese choque (y_{n+1}, v'_{n+1}) a partir de la posición en el choque anterior y la velocidad justo después del choque anterior (y_n, v'_n)

1.2 Procedimiento

Notemos que y_{n+1} es el momento, después de el choque n, en que la posición del piso y la de la pelota coincide, es decir $y_{pelota} - y_{piso} = 0$.
Sabemos que el piso se mueve de forma sinusoidal como: $y_{piso} = \sin \omega t$. Ahora, para simplificar los cálculos tomaremos el instante del choque previo como $t' = 0$, de manera que para representar el movimiento del piso con esta nueva variable tiempo debemos desplazar la función por t_n, donde t_n es el instante del choque previo respecto a $t = 0$ tomado desde el inicio del problema.
Primero, veamos el cálculo de t_n:
En el choque previo se cumple que:

$$y_n = \sin \omega t_n$$

entonces:

$$t_n = \frac{\arcsin y_n}{w}$$

Por lo tanto, la nueva función que describe el movimiento del suelo es de la forma:

$$y_{piso}(t') = \sin \omega(t' + t_n)$$

La posición de la pelota es conocida y derivable de las ecuaciones de newton como:

$$y_{pelota}(t') = y_0 + t'v_0 - \frac{t'^2}{2}$$

donde y_0,v_0 son la posición y velocidad inicial respectivamente. Por lo que y_{pelota} queda:

$$y_{pelota}(t') = y_n + t'v'_n - \frac{t'^2}{2}$$

Finalmente lo que se debe cumplir para que se produzca el choque es:

$$y_{pelota}(t') - y_{piso}(t') = 0$$

$$y_n + t'v'_n - \frac{t'^2}{2} - \sin\omega(t' + t_n) = 0$$

por lo que conviene definir la función auxiliar:

$$f(t') = y_n + t'v'_n - \frac{t'^2}{2} - \sin\omega(t' + t_n)$$

y buscar los ceros de esta función.
Una vez que se obtiene t^* tal que $f(t^*) = 0$, podemos calcular v'_{n+1} como:

$$v'_{n+1} = (1+\eta)\frac{dy_{piso}}{dt}(t^*) - \eta\frac{dy_{pelota}}{dt}(t^*)$$

reemplazando se obtiene:

$$v'_{n+1} = (1+\eta)\omega\cos\omega(t^* + t_n) - \eta(v'_n - t^*)$$

Para encontrar el cero de la función se ocupa la estrategia sugerida en el enunciado, es decir, avanzando con un paso pequeño hasta encontrar un valor negativo, y luego buscar un 0 entre ese valor y un paso anterior. Esto está implementado en las funciones "busca_bajo_piso" y "buscar_cero". La tolerancia usada para encontrar un valor negativo de la función, es decir el paso usado es de 0.1.

1.3 Resultados

Se observa en el siguiente gráfico el gráfico de los dos primeros choques usando el método descrito.

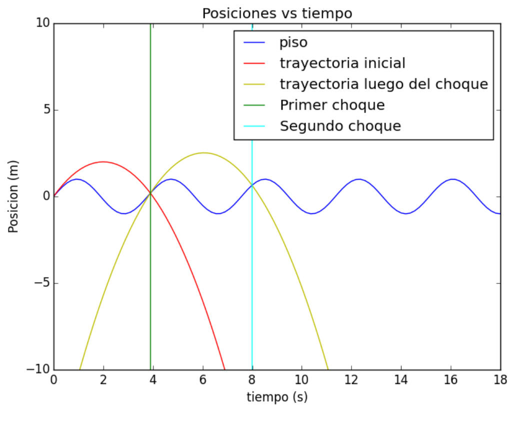

Figure 1: Gráfico posición vs tiempo para 2 choques

1.4 Conclusiones

De la figura 1 se ve que la rutina calcula correctamente la aproximación de la posición de los choques, la intersección de la parábola amarilla y la roja es justo el punto esperado de choque. Concluimos entonces que el paso fijado para la función "busca_bajo_piso" es lo suficientemente pequeño para entregar información precisa, elegimos un paso de 0.1 que comparado con los 2 segundos que separan los choques es bastante pequeño.
Una forma de mejorar la eficiencia del programa es utilizar un método distinto para encontrar el cero de la función auxiliar, en este caso utilizamos el método de bisección.

2 Pregunta 2 y 3

2.1 Introducción

Se busca estimar N_{relax}, es decir el número de botes necesario para relajar el sistema.

2.2 Procedimiento

Para estimar N_{relax} se grafica V_n', la velocidad justo después del n-ésimo choque, vs n, la cantidad de choques, y se busca un valor para el cual la velocidad después del choque se mantenga estable.
Para obtener los valores de V_n', se utiliza el método "llenar_choques", que recibe las condiciones iniciales e itera utilizando la fórmula de recurrencia descrita en la pregunta 1 obteniendo un arreglo con todos los V_n' .

2.3 Resultados

Graficando los valores de V_n' obtenidos para distintos ω, se obtiene:

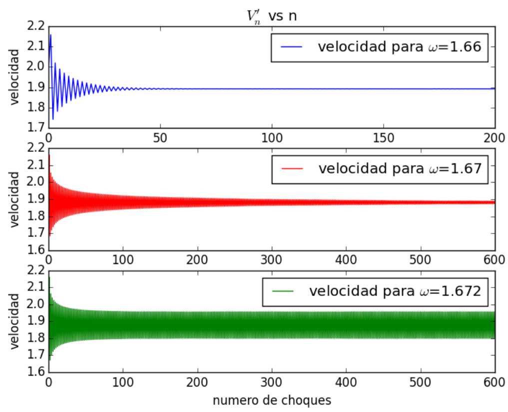

Figure 2: velocidad después del n-ésimo choque vs n

Los N_{relax} estimados se ven en la siguiente tabla:

	$\omega = 1.66$	$\omega = 1.67$	$\omega = 1.672$
N_{relax}	50	500	100

Table 1: N_{relax} estimados.

2.4 Conclusiones

Para valores cercanos a $\omega = 1.66$, la velocidad se estabiliza cerca de los 50 rebotes, para valore mayores, la velocidad se estabiliza oscilando entre 2 valores, lo que se puede observar claramente en el gráfico con $\omega = 1.672$. Mientras los ω se alejan de 1.66 se demoran más en estabilizarse, pero para valores cercanos a $\omega = 1.7$ se estabiliza más rápidamente en dos valores.

3 Pregunta 4

3.1 Introducción

El objetivo de esta pregunta es ver cómo varía V_n' con ω en el rango entre 1,66 y 1,79, utilizando $\eta = 0,15$

3.2 Procedimiento

Para verificar la relación entre V_n' y ω e grafican 50 puntos de velocidad para cada valor de ω analizado, se utiliza un paso constante utilizando "linspace", para los valores entre 1.66 y 1.67 se plotean 5 valores, para el tramo 1.67-1.675 10 valores, y finalmente para 1.675-1.79 50 valores.

3.3 resultados

Del procedimiento anterior se obtiene el siguiente gráfico:

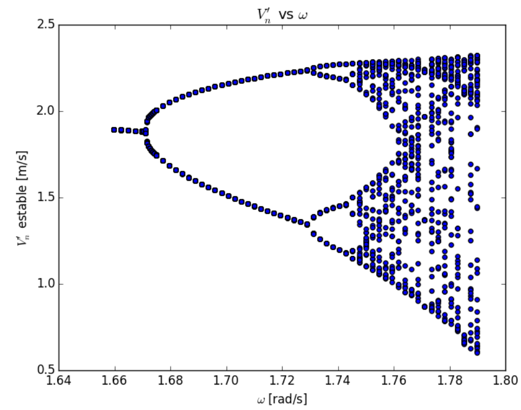

Figure 3: Gráfico V_n' estables vs ω

3.4 Conclusiones

Se ve, un diagrama de bifurcación, tal que para valores de ω entre 1.66 y 1.67 sólo existe 1 valor de V_n' estable, luego en el tramo siguiente se duplica los V_n', es decir el sistema oscila entre 2 velocidades periódicamente, y así se siguen multiplicando las ramas. Por lo tanto, el tipo de convergencia final del sistema depende de la frecuencia de oscilación del piso, el tipo de solución puede variar desde relajarse en una sola velocidad hasta converger a múltiples velocidades, esto se observa trazando líneas verticales en el gráfico v vs w.