

Métodos numéricos para la ciencia e Ingeniería:

Informe Tarea 3

José Guillermo Araya

October 6, 2015

1 Pregunta 1

1.1 Introducción

El objetivo de esta pregunta es resolver numéricamente la ecuación del oscilador de van der Pol utilizando el método de Runge-Kutta de orden 3 visto en clases.

1.2 Procedimiento

Partiendo de la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2)\frac{dx}{dt}$$

Notar que usando el cambio de variable $y = \frac{x}{a}$ y $s = t\sqrt{k}$, de modo que:

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = a\sqrt{k} \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ak \frac{d^2y}{ds^2}$$

La ecuación de Van der Pol queda como:

$$ak \frac{d^2y}{ds^2} = -kay - \mu(a^2y^2 - a^2)a\sqrt{k} \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1) \frac{dy}{ds}$$

donde $\mu^* = \frac{\mu a^2}{\sqrt{k}}$.

Se puede reducir el orden de la ecuación diferencial escribiéndola como el siguiente sistema:

$$\frac{dy}{ds} = m$$

$$\frac{dm}{ds} = -y - \mu^*(y^2 - 1)m$$

Para resolver numéricamente este sistema se implementará el método de Runge-Kutta de orden 3, definiendo $f(y, m) = (m, -y - \mu^*(y^2 - 1)m)$, aprovechando

que la función definida no depende de s , el método de Runge-Kutta se puede escribir como sigue:

$$J_{n+1} = J_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

donde:

$$J_n = (y_n, m_n)$$

$$k_1 = hf(J_n)$$

$$k_2 = hf(J_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(J_n - k_1 + 2k_2)$$

Notar que h es el paso de integración, J y k_i son vectores. Para trabajar estos vectores en Python, se utilizaron tuplas, así la operación $k_2 = hf(J_n + \frac{k_1}{2})$ se implemente definiendo primero $f_n = f(y_n + \frac{k_1[0]}{2}, m_n + \frac{k_1[1]}{2})$ y luego $(k_2 = hf_n[0], hf_n[1])$.

El método "avanzar_rk3" recibe el valor en el paso n -ésimo de y y m , el valor del paso escogido (h), y la función a integrar f y retorna el valor en el paso $n+1$. Este método utiliza las funciones "get_ k_i ", para calcular los valores de k descritos anteriormente. Finalmente se define el rango de integración, el número de pasos a dar y las condiciones iniciales del problema y se resuelve iterando con avanzar_rk3 obteniendo el valor de las funciones para cada punto.

1.3 Resultados

De la integración numérica con RK3, hasta $s = 20\pi$ con 1000 pasos, y utilizando condiciones iniciales

$$1) \frac{dy}{ds} = 0; y = 0.12) \frac{dy}{ds} = 0; y = 4.0$$

los gráficos presentados en las figuras.

Se usó $\mu^* = 1.844$ (rut = 18.641.844-1)

Figure 1: Gráfico de $\frac{dy}{ds}$ vs y

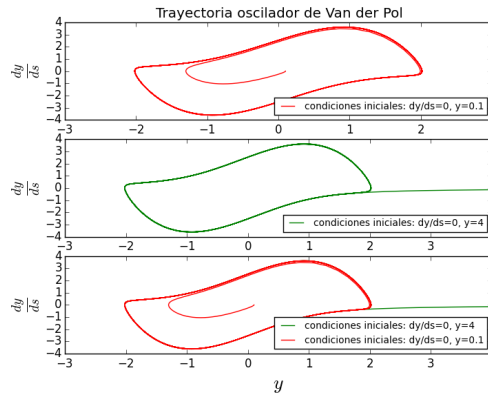
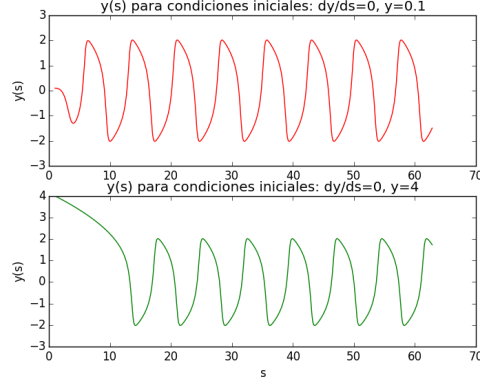


Figure 2: Gráfico de $y(s)$ vs s



1.4 Conclusiones

Como se observa de las figuras, ambas condiciones iniciales convergen al mismo tipo de trayectoria cerrada, más aún, como muestra la figura 1, convergen a la misma curva cerrada, podríamos esperar que dadas otras condiciones iniciales se tenga la convergencia a esta curva, es decir, dado un tiempo finito se cae en esta trayectoria cerrada que se ve en la figura. Para la solución $y(s)$, vemos que, después de un tiempo en que la segunda condición inicial decae, ambas soluciones son periódicas e idénticas.

El resultado es consistente con lo que se espera, pues corresponde al ciclo límite en el espacio de fases conocido para esta ecuación (figura 1).

2 Pregunta 2

2.1 Introducción

Esta pregunta consiste en resolver numéricamente, utilizando RK4, el sistema de ecuaciones de Lorenz.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{ds} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{ds} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

2.2 Procedimiento

Se define la función $f(x, y, z) = [\sigma(y - x), x(\rho - z) - y, xy - \beta z]$ como la función a la que se aplica RK4, en este programa se utilizará "dopri5".

La solución se integra utilizando los parámetros indicados en el enunciado $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$, y las condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ (figura 4). Para la figura 5 se utilizaron condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 10)$ dopri5 se usa para integrar desde $t = 0$ hasta $t = 100$, con un paso $dt = 0.01$. La solución se guarda en el arreglo "sol_n", y luego se grafican sus 3 componentes.

2.3 Resultados

El gráfico del procedimiento descrito se puede observar en la figura 4.

Figure 3: Gráfico de $x(t), y(t), z(t)$ con $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$

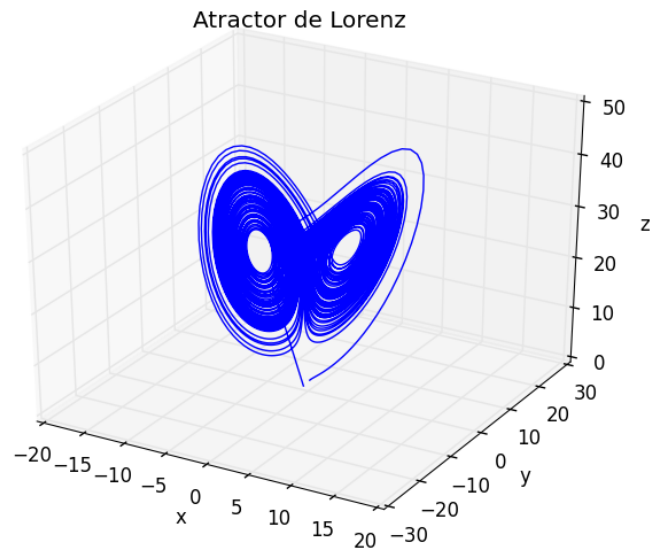
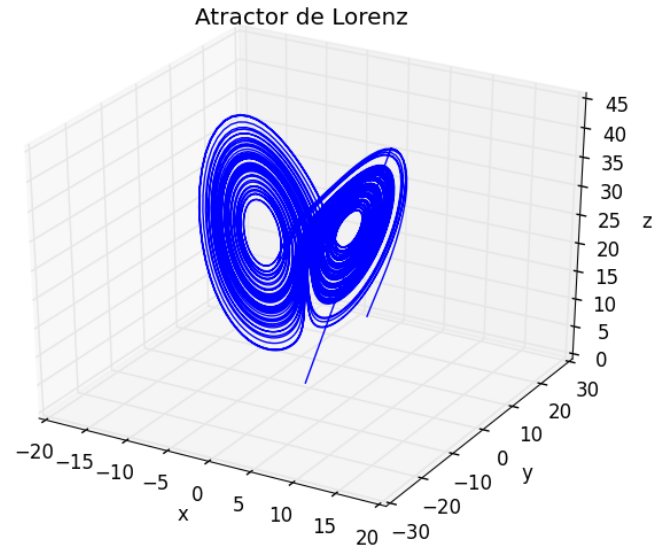


Figure 4: Gráfico de $x(t), y(t), z(t)$ con $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 10)$



2.4 Conclusiones

A diferencia de la pregunta 1, la trayectoria no converge a una curva cerrada simple, pero tampoco diverge. Sino que se mantiene cerca de esta estructura parecida a un "8". Observamos que el sistema descrito por las ecuaciones es estable globalmente, pues condiciones iniciales lejanas entre sí convergen al mismo tipo de estructura, pero inestable localmente, para dos posiciones cercanas en el atractor puede darse que sus trayectorias difieran enormemente. Los resultados son los esperados porque obtenemos el conocido Atractor de Lorenz.