Métodos numéricos para la ciencia e Ingeniería: Informe Tarea 4

José Guillermo Araya

18 de octubre de 2015

1. Pregunta 1

1.1. Introducción

El objetivo de esta pregunta es aprender a mejorar el diseño de software, para las tareas y trabajos futuros, usando el tutorial de Software Carpentry

1.2. Resultados

1. **Describa la idea de escribir el main driver primero y llenar los huecos luego. ¿Por qué es buena idea? :** Escribir el main driver primero permite establecer una estructura clara a seguir para resolver el problema, sirve para ordenar el código y hacerlo más legible.

2. **¿Cuál es la idea detrás de la función mark_filled? ¿Por qué es buena idea crearla en vez del código original al que reemplaza?:** La función mark_filled se asegura que los parámetros que se usarán sean coherentes, a pesar de que python podría levantar un error, este podría no entregar información sobre qué está ocurriendo, con esta función se define los criterios específicos de fallas y se asocian mensajes de errores descriptivos que hacen más fácil encontrar errores.

3. **¿Qué es refactoring?:** Consiste en cambiar la estructura de un programa, reorganizarlo para mejorar su calidad, en este caso específico se realiza para que sea más fácil testear el programa.

4. **¿Por qué es importante implmentar tests que sean sencillos de escribir? ¿Cuál es la estrategia usada en el tutorial?:** Porque de esta manera los test ayudarán a mejorar el código en lugar de acarrear más bugs y problemas. Un test difícil de escribir tiene una probabilidad alta de tener bugs. La estrategia usada en el tutorial consiste en usar "fixturesz resultados, de manera que para cada fixture hay un resultado esperado correcto, y se compara con el resultado del test para comprobar el funcionamiento del programa.

5. **El tutorial habla de dos grandes ideas para optimizar programas, ¿cuáles son esas ideas? Descríbalas. :** Memoria a cambio de tiempo, que implica en ciertas ocasiones guardar información redundante para no

realizar procesos más de las veces necesarias (buscar los vecinos cada vez que se agrega una celda) y trabajo humano a cambio de desempeño del programa, que consiste en escribir programas más complicados que, por lo tanto, requieren más tiempo, a cambio de que el desempeño del programa sea óptimo.

6. **¿Qué es lazy evaluation?:** Se refiere a computar los valores necesarios solo cuando son pedidos, se logra un programa más rápido y eficiente, pero más complicado de leer, intercambiando trabajo de programación por eficiencia del programa.

7. **Describa la other moral del tutorial (es una de las más importantes a la hora de escribir buen código).** Para conseguir un programa rápido y eficiente se debe comensar por un programa simple, para luego mejorarlo parte por parte utilizando los test correspondientes, rehusando los test para revisar el programa en cada paso.

2. Pregunta 2

2.1. Introducción

Se pide encontrar numéricamente la órbita que realiza un cuerpo bajo el potencial central

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} + \alpha\frac{GMm}{r^2}$$

primero para $\alpha = 0$ y luego para $\alpha = 10^{-2,844}$, para finalmente encontrar la velocidad angular de precesión.

2.2. Procedimiento

En primer lugar, se deben escribir las ecuaciones de movimiento para x e y, usando $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$m\ddot{x} = -\frac{GMmx}{\sqrt{x^2+y^2}^3} + \alpha\frac{GMmx}{x^2+y^2}$$
$$m\ddot{y} = -\frac{GMmy}{\sqrt{x^2+y^2}^3} + \alpha\frac{GMmy}{x^2+y^2}$$

Para la resolución numérica de la EDO, se define:

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

donde $v_k = \dot{k}$.
De la misma forma definimos:

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{bmatrix}$$

donde $f_k = k(-\frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2}^3} + \alpha\frac{GM}{x^2+y^2})$ que corresponde al lado derecho de la ecuación de movimiento.

De modo que obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\vec{Y} = \vec{K}$$

que luego se resuelve con los algoritmos conocidos pedidos, RK4, Euler explícito y Verlet.

Cabe destacar que como el algoritmo de Verlet necesita 2 pasos anteriores se realiza el primer paso con rk4 y luego se entrega como parámetro el estado anterior.

Para la primera parte, se utiliza $\alpha = 0$, las condiciones iniciales entregadas
$x_0 = 10$
$y_0 = 0$
$v_x 0 = 0$

Se usa $GMm = 1$ para facilitar los cálculos. Y se escoge velocidad inicial en y $v_y 0 = 0{,}3$ de manera que la energía es menor que cero

Para calcular la energía se usa:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U(r)$$

Para la segunda parte se utiliza $\alpha = 10^{-2{,}844}$ (rut : 18641844-1). Se integra usando Verlet una cantidad aproximada de 30 órbitas.

Para encontrar la velocidad angular de precesión se rastrea la posición del afelio. Como se sabe por las condiciones iniciales que el radio máximo es 10, simplemente comparamos a cada paso si el radio es cercano a 10, como se trata de una integración numérica podemos obtener valores distintos de 10 pero que representen el afelio, por lo que se le entrega un valor de tolerancia $e = 0{,}000005$.

Cada vez que se obtiene un valor para el afelio, se guarda su coordenada t,x e y en un arreglo, luego usando las coordenadas x, e y se grafican las posiciones del afelio.

Usando la relación $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, calculamos el ángulo para cada posición del afelio. luego se resta con la posición anterior obteniendo la diferencia de ángulo $\Delta\phi$, como se tienen las coordenadas temporales se calcula Δt, obteniendo un arreglo con valores de ω_{pres}.

Finalmente para encontrar la velocidad angular de precesión redondeamos los valores del arreglo al séptimo decimal y calculamos la moda, para evitar tomar en cuenta valores erróneos, como por ejemplo que en una órbita se hayan encontrado 2 afelios. En efecto, se mostrará que el arreglo contiene repeticiones de un valor exceptuando 3 valores que asumimos provienen de afelios falsos.

2.3. Resultados

Integrando la ecuación con los distintos métodos pedidos se obtienen los siguientes gráficos:

Figura 1: Gráfico de la trayectoria y la energía, para la solución con el método de Euler

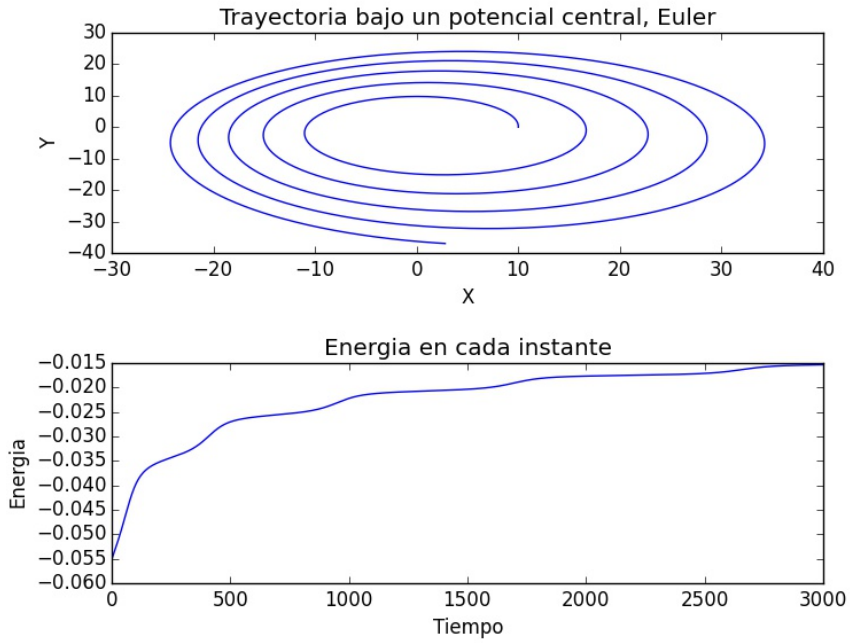


Figura 2: Gráfico de la trayectoria y la energía, para la solución con el método de Runge-Kutta 4

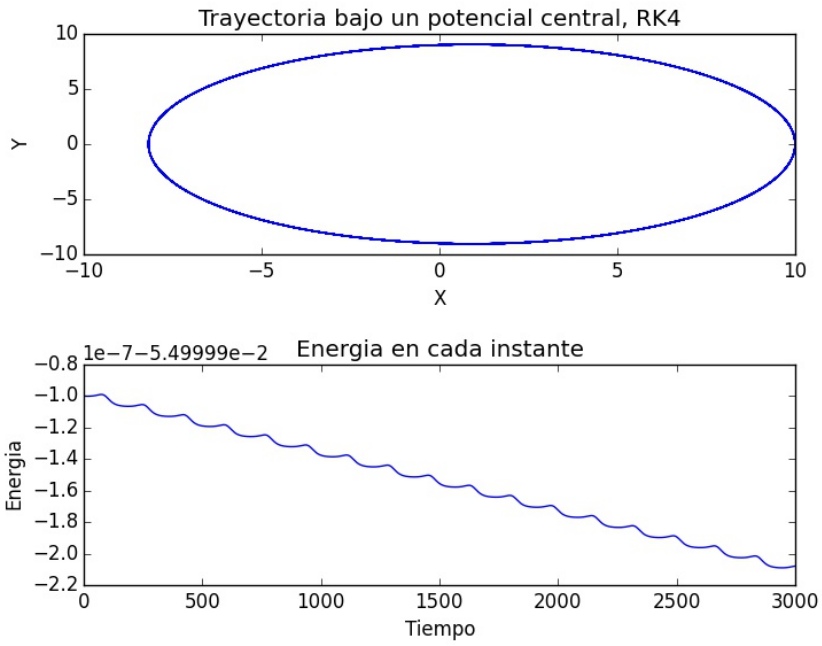
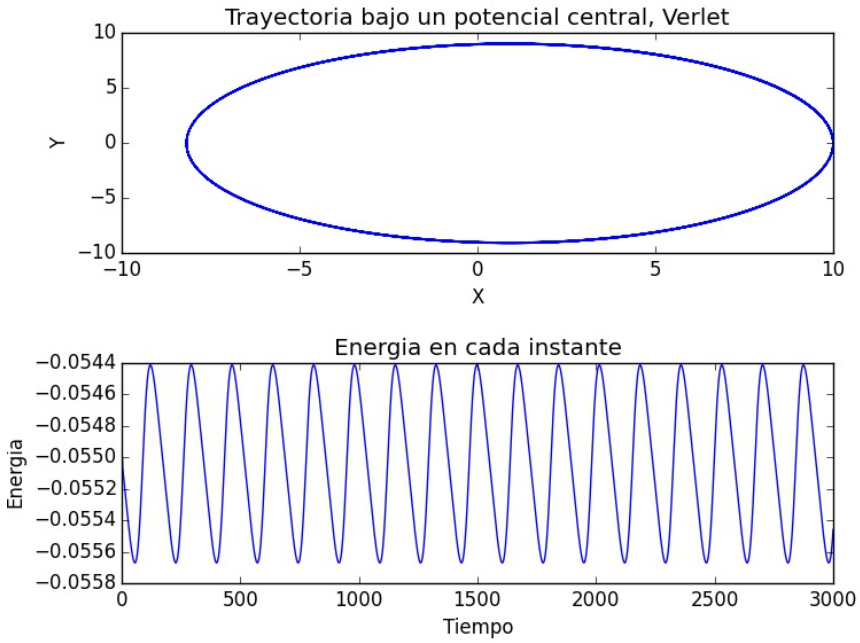
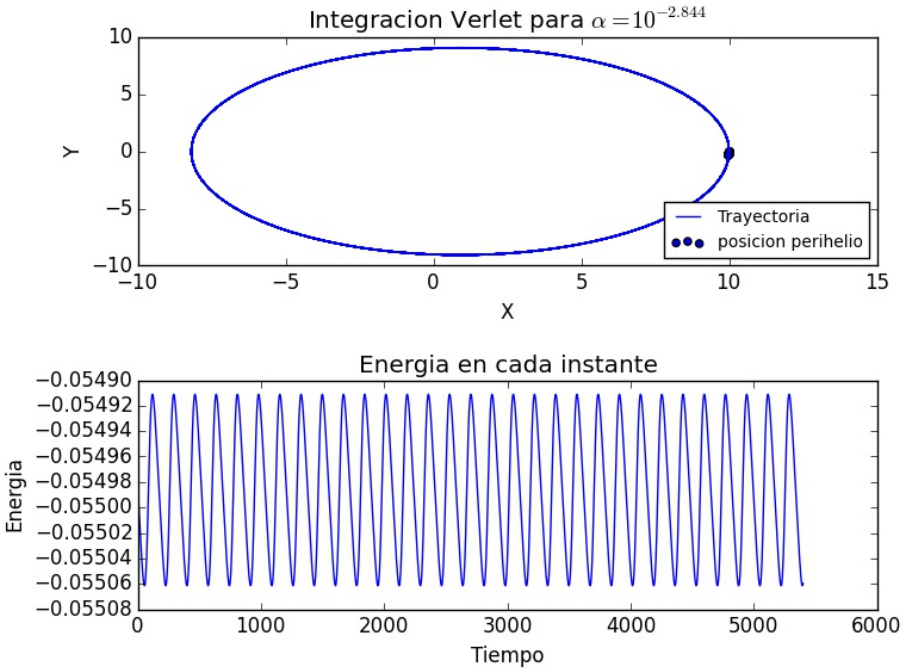


Figura 3: Gráfico de la trayectoria y la energía, para la solución con el método de Verlet



Para la segunda parte, al usar $\alpha = 10^{-2,844}$, se obtiene el siguiente gráfico

Figura 4: Gráfico de la órbita para $\alpha = 10^{-2,844}, usandoverlet$



El arreglo de velocidades angulares de precesión obtenido es el siguiente:

Figura 5: Imagen del terminal ipython con el arreglo de velocidades angulares de precesión

```
velocidad angular de precesion = [ -1.21000000e-05   1.92000000e-05  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05
  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05   3.00046000e-02
  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05
  -1.21000000e-05   1.92000000e-05  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05
  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05   1.92000000e-05  -1.21000000e-05
  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05
   3.00399000e-02  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05
  -1.21000000e-05  -1.21000000e-05   3.00569000e-02  -1.21000000e-05
  -1.21000000e-05]
```

Finalmente la velocidad angular de precesión calculada es:

$$vel\_angulares\_precesion = -1{,}21e-05$$

2.4. Conclusiones

Para la primera parte, se observa que el método de Euler no es lo suficientemente estable como para entregar una solución representativa del sistema, cuando lo comparamos con RK4 o Euler.

Por otro lado, se puede notar que el método de Verlet se acerca más a la solución esperada de energía constante, aunque no se aprecian diferencias sustanciales en la forma de la órbita con RK4

Para la segunda parte, aunque no se aprecia a simple vista, el cálculo y rastreo de afelios entrega el resultado esperado en que la órbita precesa a causa del parámetro alfa agregado, Verlet sigue manteniendo energía cercana a un valor constante pues solo varía 0,001.

Se obtiene una velocidad angular de precesión negativa consistente con el rastreo de afelios, pues estos se giran hacia la izquierda, en el sentido negativo del ángulo