

# Métodos numéricos para la ciencia e Ingeniería:

## Informe Tarea 5

José Guillermo Araya

28 de octubre de 2015

### 1. Pregunta 1

#### 1.1. Introducción

El objetivo de esta tarea es resolver numéricamente el valor de el potencial electrostático en una caja de 10 cm x 15 cm, dado una distribución de carga en forma de una letra con densidad de carga constante y carga total igual a 1 C, sujeto a condiciones de borde nulas en los extremos de la caja y condiciones derivativas en un trazo específico.

#### 1.2. Procedimiento

Para resolver el potencial electrostático se utiliza el método de sobre-relajación sucesiva.

En primer lugar se realiza un reticulado con  $h = 0.2$  [cm], y se asocia a tres matrices de numpy que en este caso son de 50 x 75, la primera matriz corresponderá a la distribución de carga, y la segunda y tercera se usarán para guardar los valores del potencial en cada punto.

Luego se definen las coordenadas de la letra donde se distribuirá la carga de 1 C, la función `armar_letra` recibe coordenadas de inicio y final del trazo a realizar junto con el ancho de dicho trazo. En este caso dibujamos una "J" que se compone de 3 trazos.

A partir de estas coordenadas se colocan cargas iguales en cada punto de manera que sumen 1 C, estos valores se van reemplazando en la matriz `caja_carga`.

Luego se itera con el algoritmo de sobre-relajación y se actualiza la matriz `caja_potencial_next` cada paso. Para facilitar el recorrido del dominio se definen 3 zonas principales.

1. Rectángulo con la letra: en esta zona se itera con el algoritmo completo de sobre-relajación
2. Fuera del bloque de la letra y lejos de la línea con condiciones derivativas: En esta zona obviamos el último término de sobre-relajación pues la carga para cualquier punto de esta zona es 0.
3. Cerca de la Línea:

a) Bajo la línea: Se itera usando:

$$\Phi_{i,N-1} = (1 - \omega)\Phi_{i,N-1} + \frac{\omega}{3}[\Phi_{i+1,N-1} + \Phi_{i-1,N-1} + \Phi_{i,N-2} + h * g$$

b) Por encima de la línea: de la misma manera que la anterior, pero en vez de acercarse por abajo, se acerca por arriba a la línea, por lo que el signo de la derivada cambia en la recurrencia:

$$\Phi_{i,N+1} = (1 - \omega)\Phi_{i,N+1} + \frac{\omega}{3}[\Phi_{i+1,N+1} + \Phi_{i-1,N+1} + \Phi_{i,N+2} - h * g$$

c) En la línea: se completa usando la condición de la derivada, es decir:

$$\Phi_{i,N} - \Phi_{i,N-1} = h * g$$

donde  $h$  es el paso del reticulado, y  $g$  es la derivada.

De esta manera, durante la iteración se comprueban las coordenadas actuales y se asocian a una de estas zonas y por lo tanto a un tipo de iteración.

Finalmente se define un criterio de convergencia como:

$$\max \|\Phi^{k+1} - \Phi^k\| < \epsilon$$

donde  $\epsilon$  es la tolerancia deseada.

Finalmente se grafican las distribuciones de carga, el valor del potencial en el espacio y un perfil transversal del potencial.

Como agregado se resolvió el problema aumentando la carga disponible para la letra, de manera de hacer comparables la acción de la línea con condiciones derivativas y el potencial generado por la letra.

Todo esto se realizó usando  $\omega = 1,8$ .

Para analizar las iteraciones necesarias para la convergencia dependiendo de  $\omega$ , se utiliza el script "distintos\_w", en este script la tolerancia se aumenta, pues solo interesa observar como cambia este valor con  $w$  y no el valor exacto de las iteraciones. Se utiliza un máximo de iteraciones de 1000, y tolerancia de  $1e - 2$

### 1.3. Resultados

Usando distribución de carga en ambos casos se obtiene los siguientes gráficos.

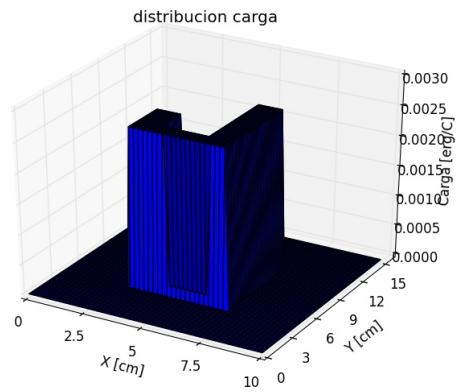


Figura 1: Distribución de la Carga.

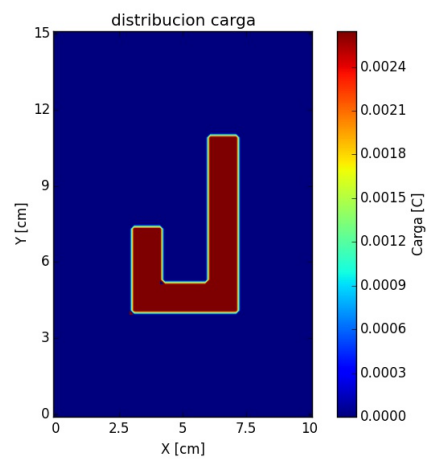


Figura 2: Distribución de la Carga.

Para carga inicial de 1 C, el potencial obtenido queda representado por los siguientes gráficos.

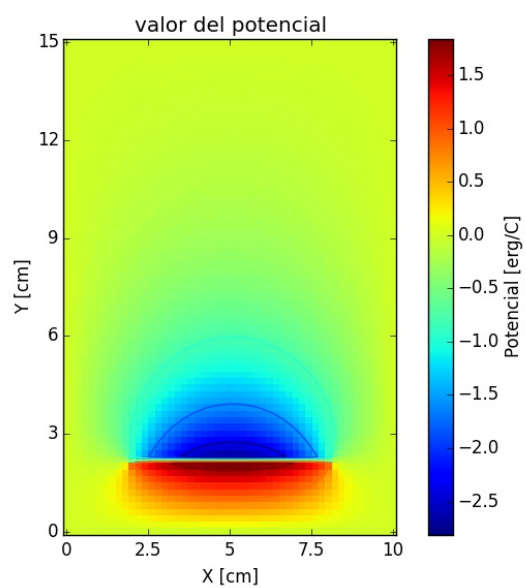


Figura 3: Valor potencial electrostático. Carga inicial 1C

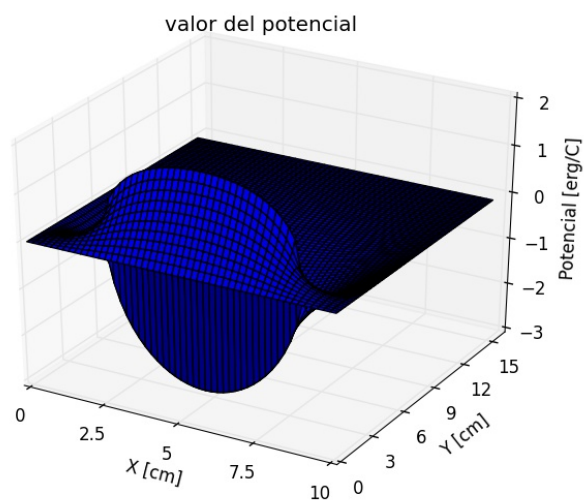


Figura 4: Valor potencial electrostático. Carga inicial 1C

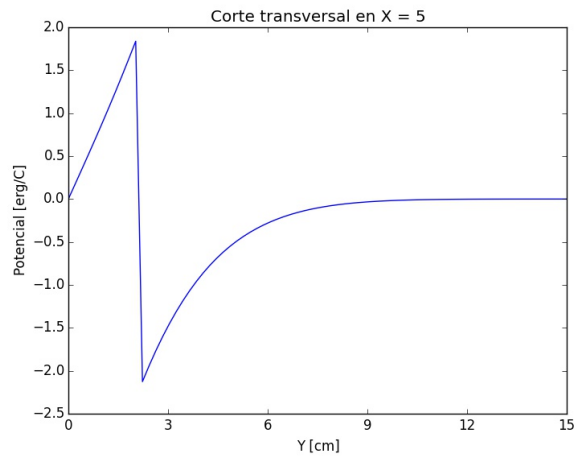


Figura 5: Corte transversal del potencial. Carga inicial 1C

Para carga inicial de 300 C, el potencial obtenido queda representado por los siguientes gráficos.

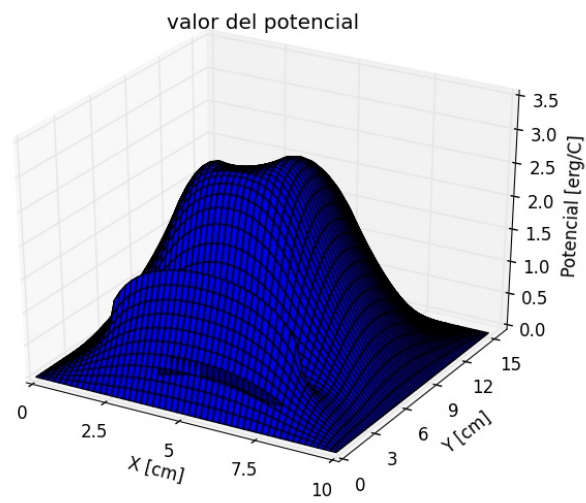


Figura 6: Valor potencial electrostático. Carga inicial 300C

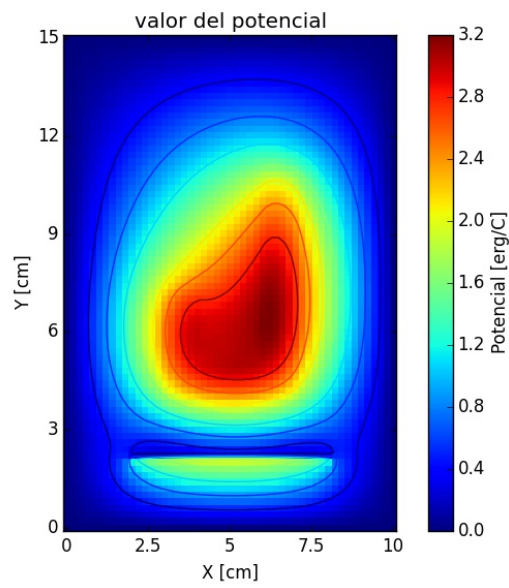


Figura 7: Valor potencial electrostático. Carga inicial 300C

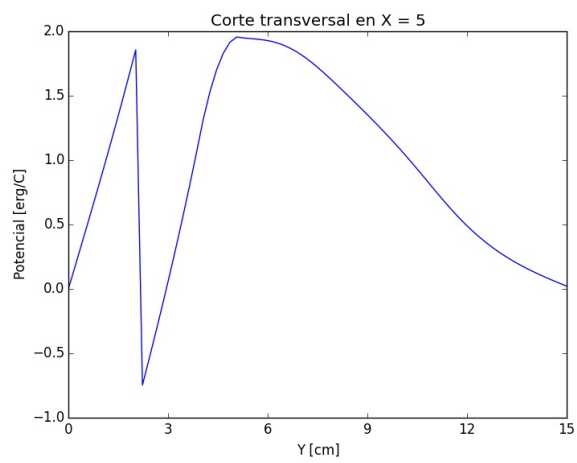


Figura 8: Corte transversal del potencial. Carga inicial 300C

Del script "distintos\_w", se obtiene la siguiente tabla:

Valor de $\omega$	Iteraciones para converger
1	1000
1.25	727
1.5	436
1.75	216
2	1000

Cuadro 1: Valores de iteraciones necesarias para convergencia según  $\omega$

#### 1.4. Conclusiones

En primer lugar, para condiciones de Carga inicial 1C, la línea con condiciones de borde derivativas, al tener derivada 1, influye más en la forma final del potencial, por lo que el efecto de la letra es despreciable, en cambio, cuando seteamos la carga inicial a 300C, podemos ver claramente como el potencial se ve afectado por la forma de la letra (figura 6).

Respecto a línea con condiciones de borde, es interesante notar que la derivada se mantiene continua (es igual a 1 por debajo y sobre la línea), pero el potencial mismo es discontinuo para satisfacer esta condición, de hecho en una primera instancia se intento calcular asumiendo el potencial continuo, pero se llegaba a situaciones finales completamente distintas dependiendo del lado por el que se aproximara a la línea.

Se puede observar que se cumplen las condiciones de bordes dadas, (el potencial en los bordes es 0), como se espera del buen funcionamiento del programa.

Para valores cercanos a  $\omega = 1,8$ , la convergencia es más rápida, lo que es esperado pues 1.8 es el valor recomendado para realizar sobrerelajación. Para  $\omega = 1$  y  $\omega = 2$  los valores obtenidos son 1000, lo que significa que no converge dentro de la cota de iteraciones impuesta.

Algunas mejoras propuestas para el código son, sustituir la matriz de la distribución de carga pues contiene en su mayoría 0, y reemplazar directamente por el valor constante en la iteración, es decir, a medida que se itera revisar si se encuentra en una coordenada perteneciente a la línea.

Realizar un zoom en la zona de la letra para los gráficos con carga inicial 1C, e implementar alguna función que permita aumentar el contraste para visualizar el efecto de la letra. Finalmente se podría ajustar la condición de convergencia para lograr un programa más eficiente.