

Métodos numéricos para la ciencia e Ingeniería:

Informe Tarea 6

José Guillermo Araya

3 de noviembre de 2015

1. Pregunta 1

1.1. Introducción

El problema consiste en discretizar y resolver la ecuación de Fisher KPP:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2$$

Usando las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} n(t, 0) &= 1 \\ n(t, 1) &= 0 \\ n(0, x) &= e^{-x^2/0,1} \end{aligned}$$

Mediante el método de Crank-Nicolson para la parte difusiva y Euler explícito para la parte reactiva.

1.2. Procedimiento

Para evitar confusiones se denotará a n (la función a integrar) como Φ durante el desarrollo de este informe. Se comienza discretizando la ecuación, usando en primer lugar el método de Crank-Nicolson para la derivada espacial de n , de modo que queda:

$$\frac{\Phi_j^{n+1} - \Phi_j^n}{\epsilon} = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\Phi_{j+1}^{n+1} - 2\Phi_j^{n+1} + \Phi_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{\Phi_{j+1}^n - 2\Phi_j^n + \Phi_{j-1}^n}{h^2} \right) + \mu n - \mu n^2$$

para discretizar lo que falta, ocuparemos euler explícito y entonces se obtiene:

$$\frac{\Phi_j^{n+1} - \Phi_j^n}{\epsilon} = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\Phi_{j+1}^{n+1} - 2\Phi_j^{n+1} + \Phi_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{\Phi_{j+1}^n - 2\Phi_j^n + \Phi_{j-1}^n}{h^2} \right) + \mu \Phi_j^n - \mu \Phi_j^n \times \Phi_j^n$$

separando los términos que dependen del tiempo $n + 1$ de los que dependen de n , se obtiene:

$$-r\Phi_{j+1}^{n+1} + (1 + 2r)\Phi_j^{n+1} - r\Phi_{j-1}^{n+1} = r\Phi_{j+1}^n + r\Phi_{j-1}^n + (\epsilon\mu(1 - \Phi_j^n) + 1 - 2r)\Phi_j^n$$

donde $r = \frac{\gamma\epsilon}{2h^2}$

Desde aquí se observa que el único cambio respecto a una ecuación puramente difusiva es la aparición de un término extra en el lado derecho (b_k), que es constante al momento de calcular Φ^{n+1} . (Recordar que cuando calculamos un paso tenemos los valores del paso anterior como dato).

Por lo tanto la única parte que se debe adaptar del método de crank-Nicolson es la expresión para b_k .

Para integrar el problema se trabajará con vectores representados como arreglos unidimensionales de numpy.

El resultado final será una matriz donde cada fila corresponde a la solución en el espacio para un tiempo particular, entonces en cada iteración llenamos la fila siguiente de la matriz, partiendo con la fila 0 que contiene la condición inicial. Para cada iteración están definidas recurrencias para los términos α y β tal que:

$$\Phi_k = \alpha_k \Phi_{k+1} + \beta_k$$

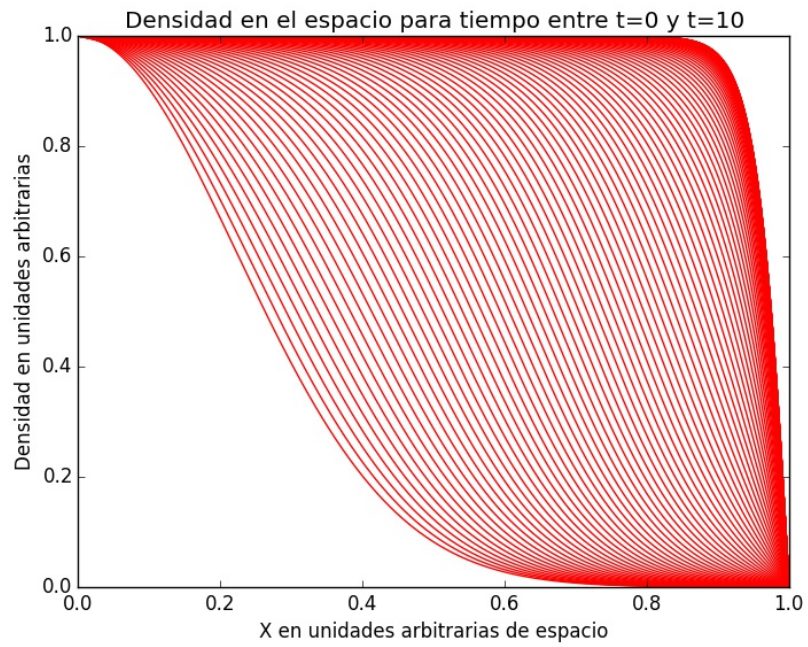
Entonces partimos de una condición de borde rígida conocida, e iteramos hasta llenar la fila del arreglo. Cabe notar que el programa itera desde el extremo derecho hacia el izquierdo, es decir, parte desde Φ_{N+1} hasta llegar a Φ_0 .

Para conseguir una solución estable se debe cumplir que como máximo $r = \frac{\gamma h^2}{2}$, y estamos discretizando el espacio con un paso $h = \frac{1}{500}$, por lo que elegimos un paso temporal (ϵ) acorde.

1.3. Resultados

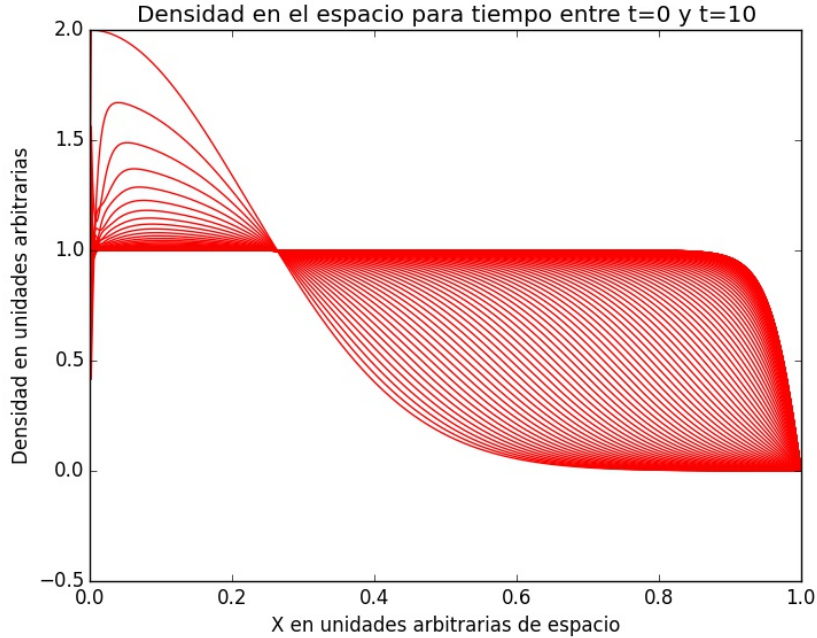
Graficando la densidad para todo el espacio entre tiempo $t=0$ y $t=10$ con las condiciones iniciales dadas se obtiene:

Figura 1: $n(t, x)$ para tiempos entre $t=0$ y $t=10$



Graficando para condiciones iniciales: $2 * \exp(-x^2/0,1)$ se obtiene:

Figura 2: $n(t, x)$ para tiempos entre $t=0$ y $t=10$, para condición inicial $= 2 * \exp(-x^2/0.1)$



La animación que puede ayudar a aclarar el movimiento de las curvas en el tiempo se puede observar en el archivo "p1.gif." ejecutando el programa p1.py u "otra.condicion_inicial.py".

1.4. Conclusiones

De la figura 1 se observa que la densidad tiende a 1 en todo el espacio a medida que avanza el tiempo, esto se puede apreciar más claramente en la animación. El resultado tiene sentido, pues el único punto estable es 1 (recordar que 0 es inestable), por lo que podemos pensarlo como un péndulo, donde el ángulo medido desde la vertical 0 representa el valor 1 de densidad, finalmente cualquier condiciones inicial terminará convergiendo a $\theta = 0$ en este caso $n = 1$.

Si se piensa en el tipo de comportamiento que describe la ecuación (densidad de una especie animal), tiene sentido que la especie crezca hasta uno cuando la condición inicial está bajo el punto estable, se agrego un gráfico para observar que sucede cuando la condición inicial parte sobre el equilibrio, y efectivamente el término de competencia ($-\mu n^2$) hace caer esta condición hasta alcanzar el punto 1.

2. Pregunta 2

2.1. Introducción

Se debe discretizar y resolver la ecuación de Newell-Whitehead-Segel:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu(n - n^3)$$

. Usando las condiciones:

$$n(t, 0) = 0$$

$$n(t, 1) = 0$$

$$n(0, x) = \text{np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)}$$

Con los mismos métodos mencionados en la parte 1 del informe.

2.2. Procedimiento

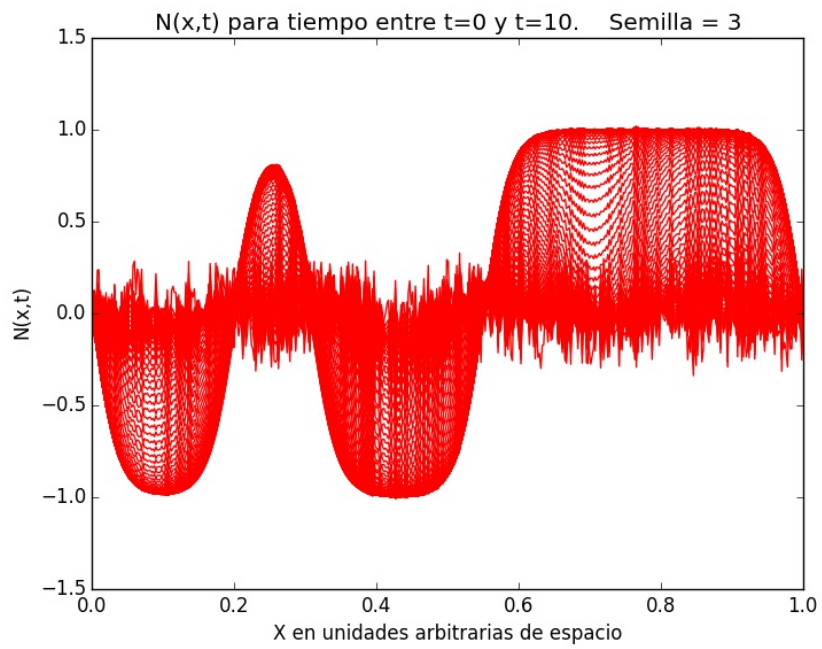
Los únicos cambios a realizar respecto de el procedimiento anterior son, cambiar el término cuadrático por uno cúbico, pero esto solo afectara nuevamente el término b_k por lo que no hay que cambiar el método de Crank-Nicolson más allá de redefinir b_K , y cambiar las condiciones iniciales por una serie random de valores.

Además se agrega la opción de ingresar por el terminal la semilla a utilizar para generar los valores aleatorios, de manera que los resultados sean reproducibles.

2.3. Resultados

Mostrando $n(x, t)$ para t fijos entre $t=0$ y $t=10$, para todo el espacio se tiene:

Figura 3: $n(t, x)$ para tiempos entre $t=0$ y $t=10$, para semilla = 3



para semilla 14

Figura 4: $n(t, x)$ para tiempos entre $t=0$ y $t=10$, para semilla = 14

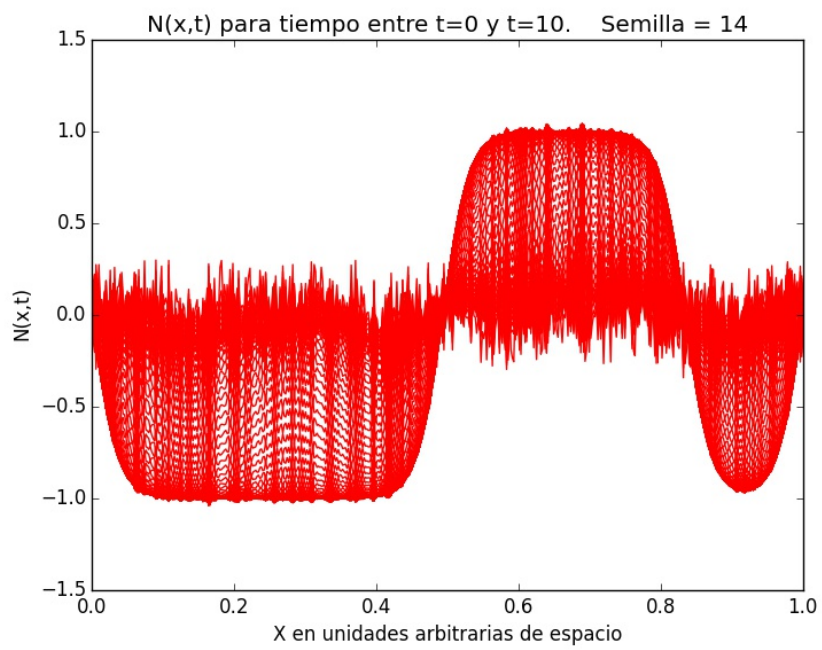
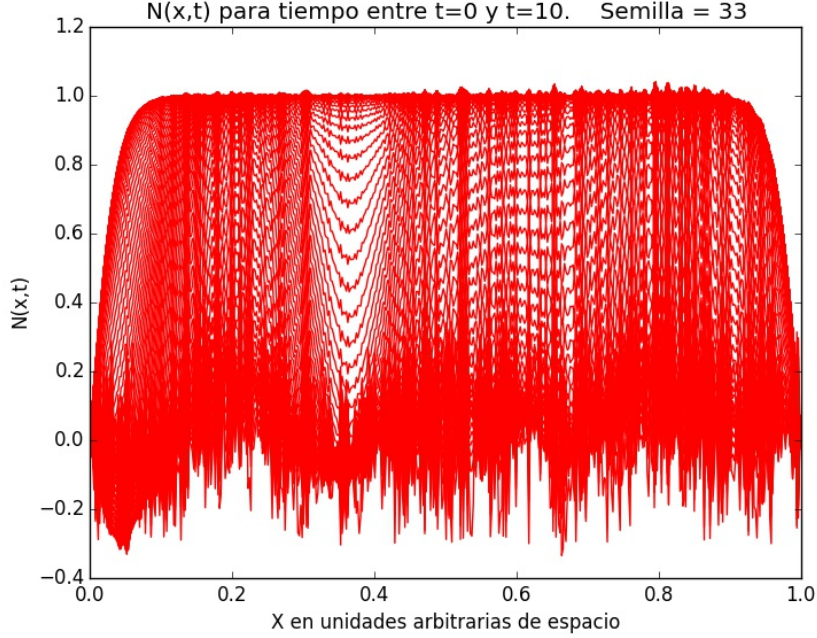


Figura 5: $n(t, x)$ para tiempos entre $t=0$ y $t=10$, para semilla = 33



Al igual que en la pregunta 1, el script "p_2.py" contiene una animación que aclara el movimiento de las curvas.

2.4. Conclusiones

En este caso tenemos dos puntos estables, $+1$ y -1 , esto es porque precisamente en esos valores los términos reactivos se anulan y queda solamente el término de difusión.

Podemos observar que las distintas formas entre soluciones con distintas semillas provienen de que, las condiciones iniciales son random. Partiendo de la existencia de 2 puntos de equilibrio, lo esperable es que para cada x , este valor se acerque al punto de equilibrio que tiene más cerca, por lo que esperamos que para tiempos grandes los puntos estén en -1 o $+1$ exclusivamente, observando la animación vemos este proceso de cómo la posición inicial determina hacia qué punto se aproxima esa parte de la curva.

Para semilla = 33, se tiene que la mayoría está más cercana a 1 , y los términos que están bajo 0 que esperaríamos se aproximen a -1 , son "empujados" hacia $+1$ pues la mayoría de sus vecinos se dirigen a $+1$.

Para semilla = 3, vemos que en el estado final tanto -1 como $+1$ está ocupado, cabe destacar que no existen puntos particulares que se vayan a -1 si la mayoría de sus vecinos van a $+1$, por lo que se genera esta estructura de "paquetes", un conjunto de puntos que va a $+1$, y otro conjunto a -1 .