Laboratorio 4

José Alejandro Guzmán Zamora

28 de agosto de 2018

- Método de Sustitución
  Demuestre que la solución dada para cada recurrencia es la correcta utilizando el método de sustitución.

1. $T(n) = T(n-1) + n$

   Se debe de demostrar que $T(n) \leq cn^2$. Utilizando un valor menor a n, en este caso (n - 1) y reemplazándolo en la función la se obtiene lo siguiente:

   $$\begin{aligned} T(n) &\leq (c(n-1)^2) + n \\ &= c(n^2 - 2n + 1) + n \\ &= cn^2 - 2cn + c + n \\ &= cn^2 + c + n - 2cn \end{aligned}$$

   Se puede observar que lo que se le suma a cn^2 es menor a lo que se le está restando, es decir, $(c + n) \leq (2cn)$. Esto significa que:
   $$cn^2 + c + n - 2cn \leq cn^2$$

   Al tener el resultado anterior, lo que falta es definir un n_0 y comprobar la veracidad con cualquier constante c. Por ejemplo, se puede definir $c = 5$ para $n_0 = 3$

   $$5(3^2) + 5 + 3 - 2(5)(3) = 23$$
   $$5(3^2) = 45$$
   $$23 \leq 45$$

2. $T(n) = T(n/2) + 1$

   De una manera similar al problema anterior, se debe de demostrar que $T(n) \leq c * lg(n)$. En esta recursión definida se puede utilizar el valor $n/2$ para reemplazar en la función a modo de desarrollar la desigualdad:

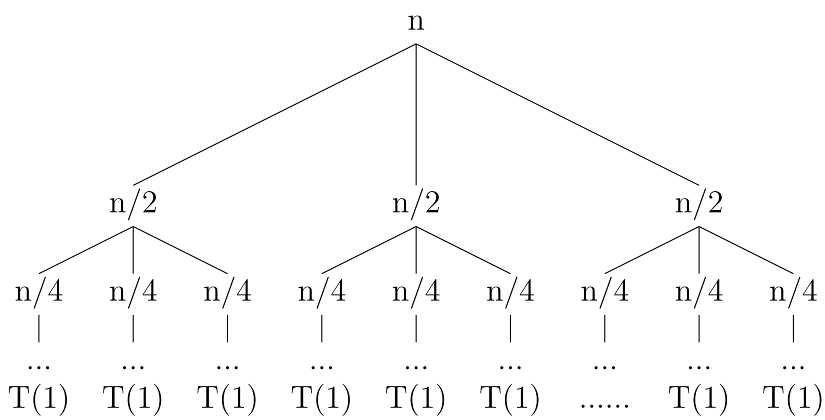
   $$\begin{aligned} T(n/2) &\leq c * lg(n/2) \\ T(n) &\leq (c * lg(n/2)) + 1 \\ &\leq c * lg(n) \end{aligned}$$

   De nuevo, se debe definir un n_0 y comprobar la complejidad con cualquier valor $c > 0$. Por ejemplo, se puede definir $c = 7$ para $n_0 = 5$

$$(7 * lg(5/2)) + 1 = 10{,}2$$
$$7 * lg(5) = 16{,}2$$
$$10{,}2 \leq 16{,}2$$

- Método de Árbol Recursivo
  Utilice el método del árbol recursivo para encontrar un límite asintótico. Utilice el método de sustitución para comprobar.

  1. $T(n) = 3T(n/2) + n$
     Como primer punto hay que tomar en cuenta que el problema se divide en 3 subproblemas de tamaño $n/2$. El árbol recursivo quedaría de la siguiente manera:



     Utilizando el árbol como un apoyo visual, se suman los costos de cada profundidad del mismo. Este costo se encuentra multiplicando el costo individual de cada nodo por la cantidad de nodos por profundidad. Por ejemplo:

     n
     3 * (n/2)
     9 * (n/4)
     Hasta llegar al punto en el que no hay más subdivisiones.

     Además con la información dell árbol y asumiendo que los valores de n son múltiplos de 2 para que la subdivisión se desarrolle sin problema, se pueden obtener los siguientes valores:

     Tamaño del subproblema en $i = n/(2^i)$
     Profundidad del arbol $= lg(n)$
     Cantidad de nodos por profundidad i $= 3^i$
     Costo basado en profundidad i $= n * (3/2)^i$

     Con la información declarada, se puede realizar una sumatoria que resulta en el exponente $lg(3) \approx 1{,}58$ es decir, el límite asintótico se puede representar como $\theta(n^{lg(3)})$. Este valor se puede finalmente establecer de la siguiente manera:

$$O(n^2)$$

Verificación con método de sustitución:

$$T(n) \leq c(n^2)$$
$$T(n/2) \leq c(n/2)^2$$
$$= 3(c(n/2)^2) + n$$
$$= ((3cn^2)/4) + n$$
$$\leq c(n^2)$$

- Método Maestro
  Encuentre un límite asintótico para cada problema utilizando el método maestro.

  1. $T(n) = 2T(n/4) + 1$

     a = 2
     b = 4
     f(n) = 1
     1 tiene que ser igual a $n^{log4(2)+c}$
     Como c tiene que ser negativa para que el exponente sea 0, entonces:
     $T(n) = \theta(n^{1/2})$

  2. $T(n) = 2T(n/4) + sqrt(n)$

     a = 2
     b = 4
     f(n) = $\sqrt{n}$
     $\sqrt{n}$ tiene que ser igual a $n^{log4(2)+c}$
     No es necesario cambiar el valor de c, es decir, tiene que ser 0. Por lo tanto:
     $T(n) = \theta(n^{1/2} * lg(n))$

  3. $T(n) = 2T(n/4) + n$

     a = 2
     b = 4
     f(n) = n
     n tiene que ser igual a $n^{log4(2)+c}$
     Como c tiene que ser positiva para que el exponente sea 1, entonces:
     $T(n) = \theta(n)$

  4. $T(n) = 2T(n/4) + n^2$

     a = 2
     b = 4
     f(n) = n^2
     n^2 tiene que ser igual a $n^{log4(2)+c}$

Como c tiene que ser positiva para que el exponente sea 2, entonces:
$T(n) = \theta(n^2)$