Rotacion de un vector θ grados en sentido antihorario.

José Juan Suárez Elizalde

Junio 2020

ABSTRACT. Probaremos que: $f(\overrightarrow{v}, \theta) = (x\cos\theta - y\sin\theta, y\cos\theta + x\sin\theta)$, donde $\overrightarrow{v}$ es un vector arbitrario tal que $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}2$ y θ es los grados que se desea rotar a $\overrightarrow{v}$ de su dirección inicial de λ grados en sentido contrario a las manecillas del reloj. La función nos da el vector resultante en coordenadas rectangulares.

Analicemos:

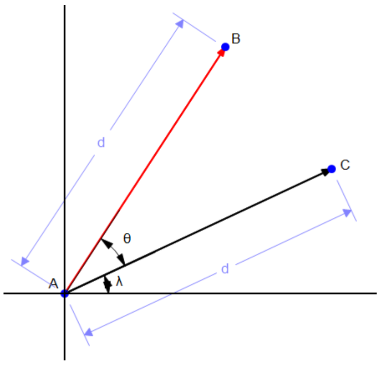

Fig. 1

Tomemos al vector $\overrightarrow{v}$ como el vector $\overrightarrow{AC}$ representado en *Fig. 1*, el vector resultante (el cual a partir de ahora llamaremos $\overrightarrow{r}$ y es representado en Fig. 1 como $\overrightarrow{AB}$ tiene que cumplir que $\|\overrightarrow{r}\| = \|\overrightarrow{v}\|$, puesto que lo unico que queremos hacer es cambiar su dirección, no su norma.
Si tenemos que $\overrightarrow{v}$ tiene un angulo λ con respecto al eje de las abscisas y queremos añadir θ grados a este, entonces si el angulo de $\overrightarrow{r}$ es ω, tenemos que:

$$\omega = \lambda + \theta \tag{1}$$

Podemos observar que al cambiar el angulo de nuestro vector, algo mas cambia, ya vimos que la magnitud del vector no, pero si tomamos el sistema de coordenadas que representa a nuestro vector como el sistema rectangular, entonces podemos ver dos parametros representandolo, estos a su vez pueden ser vistos como catetos y la magnitud de nuestro vector seria la hipotenusa, de esta forma transformamos nuestro vector a un triangulo rectangulo.
Con esta perspectiva nos damos cuenta que queremos transformar un triangulo rectangulo en otro, pero con el angulo entre el cateto adyacente y la hipotenusa modificado con las restricciones ya anteriormente mencionadas, ademas tambien podemos observar que si encontramos el tamaño de los catetos del triangulo resultante, podremos expresar el vector resultante y el problema estaría resuelto.

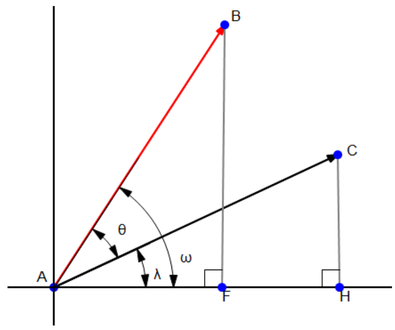

Fig. 2

En Fig. 2 tenemos que los catetos del vector original $\overrightarrow{v}$, son $\overrightarrow{HC}$ que representaria a y y $\overrightarrow{AH}$ que representaria a x, tal que $\overrightarrow{v} = (x, y)$, queremos encontrar $\overrightarrow{r}$ que es igual a (x', y'), punto que no conocemos.
Usemos identidades trigonometricas conocidas para despejar el valor de x' y y'.

$$\sin(\omega) = \frac{y'}{\|\overrightarrow{r}\|} \tag{2}$$

Por *(1)* tenemos que *(2)* es:

$$\sin(\lambda + \theta) = \frac{y'}{\|\overrightarrow{r}\|} \tag{3}$$

Con base al mismo razonamiento tenemos que :

$$\cos(\lambda + \theta) = \frac{x'}{\|\overrightarrow{r}\|} \tag{4}$$

Podemos usar las siguientes entidades trigonometricas:

$$\sin(\lambda + \theta) = \sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\sin\theta \tag{1}$$

$$\cos(\lambda + \theta) = \cos\lambda\cos\theta + \sin\lambda\sin\theta \tag{2}$$

Sustituyendo las identidades en *(3)* y *(4)* tenemos:

$$\frac{y'}{\|\overrightarrow{r}\|} = \sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\sin\theta \tag{5}$$

$$\frac{x'}{\|\overrightarrow{r}\|} = \cos\lambda\cos\theta + \sin\lambda\sin\theta \tag{6}$$

Pasa que al tener *(x,y)*, podemos encontrar el valor numerico de las funciones trigonometricas en función de λ. Las funciones que podemos sustituir en *(5)* y *(6)*, serian *(cos)* y *(sen)*. Encontremoslas:

$$\cos(\lambda) = \frac{x}{\|\overrightarrow{v}\|} \tag{7}$$

$$\sin(\lambda) = \frac{y}{\|\overrightarrow{v}\|} \tag{8}$$

Sustituyamos *(7)* y *(8)* en *(5)* y *(6)*.

$$\frac{y'}{\|\overrightarrow{r}\|} = \frac{y}{\|\overrightarrow{v}\|}\cos\theta + \frac{x}{\|\overrightarrow{v}\|}\sin\theta \tag{9}$$

$$\frac{x'}{\|\overrightarrow{r}\|} = \frac{x}{\|\overrightarrow{v}\|}\cos\theta + \frac{y}{\|\overrightarrow{v}\|}\sin\theta \tag{10}$$

Pasamos $\|\overrightarrow{r}\|$ multiplicando en ambas ecuaciones y cancelamos los $\|\overrightarrow{v}\|$, puesto que $\|\overrightarrow{r}\| = \|\overrightarrow{v}\|$. Por tanto:

$$y' = y\cos\theta + x\sin\theta \tag{11}$$

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \tag{12}$$

Sí $\overrightarrow{r} = (x', y')$ entonces sustituimos *(11)* y *(12)*, por lo que tenemos:

$$\overrightarrow{r} = (x\cos\theta + y\sin\theta, y\cos\theta + x\sin\theta) \tag{13}$$

□