

Aplicación del método de numérico Newton - Raphson para hallar la tasa interna de retorno de la función valor actual neto

Barba Farro José Luis
Luna Infantes Fabricio Martin
Rojas García Sadhu
Sandoval Castillo Yahaira Elizabeth
Toledo Campos Marco Camilo
Ugarte Flores Carlo André

Trujillo, julio del 2021

Resumen

El presente trabajo de investigación analiza los proyectos de inversión durante su vida útil desde la perspectiva de una rentabilidad interna. Mediante la aplicación del Método de Newton-Raphson se determina la solución a la función del Valor Neto Actual (VNA) que hace referencia al valor actual que poseen los flujos de inversión, tanto ingresos como egresos respecto a una Tasa Interna de Descuento (TIR), el cual es el porcentaje de beneficio o pérdida que conlleva cualquier inversión. Para alcanzar el objetivo principal planteado será necesario tomar muestras y medidas de los ingresos y egresos dentro de un periodo en dicha inversión con el modelo matemático.

Palabras Claves: Valor actual neto, inversión Inicial, flujo de caja, activos tangibles, activos intangibles, horizonte de evaluación del proyecto, tasa interna de retorno, método numérico, Newton - Raphson, algoritmo.

Abstract

This research work analyzes investment projects during their useful life from the perspective of internal profitability. By applying the Newton-Raphson Method, the solution to the function of the Net Present Value (NPV) is determined, which refers to the present value of the investment flows, both income and expenses with respect to an Internal Discount Rate (IDR), which is the percentage of profit or loss that any investment entails. To achieve the main objective, it will be necessary to take samples and measurements of income and expenses within a period in said investment with the mathematical model.

Keywords:

Net present value, initial investment, cash flow, tangible assets, intangible assets, project evaluation horizon, internal rate of return, numerical method, Newton - Raphson, algorithm.

Introducción

Cada día surgen nuevos problemas en nuestra sociedad, los cuales a su vez necesitan de una solución, en tal sentido las matemáticas y la computación permiten acercarse a una respuesta aceptable e incluso encontrar una solución óptima a un problema.

En el campo financiero se evalúa la asignación de recursos y la toma de decisiones a través del tiempo, en tal sentido surge la necesidad de administrar las inversiones tal que generen la mayor ganancia posible. Entonces la matemática provee un modelo que permite hallar una solución a tal problema, el cual consiste en la suma de los ingresos y egresos en un tiempo determinado, pero trasladando este flujo monetario al valor monetario del tiempo actual o tasa de retorno, a este modelo se le conoce como la función Valor Actual Neto. Sin embargo, al ser la función VAN una función muy compleja de muchas variables, entonces recurrimos a los métodos matemáticos para hallar la solución o raíz de dicha función con el propósito de determinar en qué valor de la Tasa Interna de Retorno (TIR) no se percibe ganancias ni pérdidas en una inversión, es decir el flujo monetario es nulo, a su vez de lo cual se puede deducir los valores para los que las ganancias son mayor que las pérdidas en una inversión, para este problema utilizaremos un método numérico conocido como el método de Newton - Raphson. Además, este proceso se realiza mediante la implementación de un programa informático que busca realizar el cálculo de dicha solución sistemáticamente y con una rapidez considerable; por lo que luego se contrastan los resultados obtenidos con un método distinto, siendo este el método de Prueba y Error.

Marco teórico

El valor actual neto (VAN) o valor presente neto (VPN)

El valor actual neto hace referencia al valor actual que poseen los flujos de inversión, tanto ingresos como egresos respecto a una tasa de descuento, es decir que los flujos de ingresos y salida de una inversión en un periodo de tiempo futuro, son analizados en el momento de realizar la inversión con el valor actual. En tal sentido, el VAN sirve para determinar la rentabilidad de una inversión, lo cual permite determinar si una inversión es más o menos conveniente que otra. El VAN queda determinado por lo siguiente:

$$VAN = \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+i)^t} - I_0$$

Donde:

- **F_n**: flujo de caja en el periodo n.
- **n**: número de períodos.
- **I₀**: valor de la inversión inicial.
- **i**: tasa interna de retorno

Así es que, el VAN sirve para determinar dos criterios: si la inversión es rentable, es decir el flujo de ingresos a lo largo del tiempo es mayor respecto al flujo saliente o si es mejor optar por una u otra inversión. Según lo siguiente:

- **VAN > 0**: El valor actualizado de los cobros y pagos futuros de la inversión, a la tasa de descuento elegida generará beneficios.
- **VAN = 0**: El proyecto de inversión no generará ni beneficios ni pérdidas, siendo su realización, en principio, indiferente.
- **VAN < 0**: El proyecto de inversión generará pérdidas, por lo que deberá ser rechazado.

Tasa Interna de Retorno (TIR)

Es la tasa de interés o de rentabilidad que nos ofrece una inversión. Así, se puede decir que la Tasa Interna de Retorno es el porcentaje de beneficio o pérdida que conlleva cualquier inversión.

Es una medida ampliamente utilizada para la evaluación de los proyectos de inversión. Además, está muy relacionada con el VAN o Valor Actualizado Neto. De hecho, su relación es tal, que la Tasa Interna de Retorno también está definida como el valor de la tasa de descuento cuando el Valor Actualizado Neto adquiere un valor igual a 0 para un proyecto de inversión concreto y determinado.

Uso de la tasa interna de retorno

En un mundo en constante evolución, que sufre continuos cambios políticos, económicos y sociales, resulta de gran dificultad que los mercados puedan anticipar todos estos cambios. Así, resulta una verdadera actividad de riesgo decidir en qué invertir nuestro dinero. No obstante, existen fórmulas muy útiles para evaluar la rentabilidad de nuestras inversiones. Y es justo para eso para lo que sirve calcular la Tasa Interna de Retorno a la hora de decidir en qué invertir y en qué no.

Así, la Tasa Interna de Retorno nos dice qué rentabilidad tendrá la inversión que pretendemos hacer, así como el valor y riesgo de la misma. Sin duda, es una medida que palia y mitiga la incertidumbre a la

que está sometida el mercado actual en un mundo en constante cambio y movimiento.

Cálculo de la Tasa Interna de Retorno

$$VAN_i = \sum_{T=1}^n \frac{Fn}{(1+i)^n} - I_0 = 0$$

Donde:

- **Fn:** es el flujo de caja en el periodo n.
- **n:** número de períodos.
- **i:** tasa interna de retorno
- **I₀:** valor de la inversión inicial.

Interpretación de los resultados de la Tasa Interna de Retorno

Para analizar la rentabilidad o viabilidad de cualquier inversión, la Tasa Interna de Retorno ha de ser comparada con una tasa mínima de corte (r), la cual representará el coste de oportunidad de la inversión en concreto. Así, es necesario comparar ambos porcentajes y, de acuerdo con dicha comparación, se determinará si la inversión que se va a realizar se debe llevar a cabo o no de acuerdo con su rentabilidad.

De esta forma, podemos interpretar los resultados de la Tasa Interna de Retorno de la siguiente forma:

- Cuando la Tasa Interna de Retorno es mayor que la tasa mínima de corte: en este caso, el proyecto de inversión será aceptado, ya que la Tasa Interna de Retorno tiene un porcentaje mayor al porcentaje de la tasa mínima de rentabilidad que se exige a dicha inversión. En este caso: adelante, puedes invertir en el proyecto en cuestión y obtener la rentabilidad suficiente.
- Si $TIR > r$; entonces se aceptará el proyecto.
- Cuando la Tasa Interna de Retorno es igual que la tasa mínima de corte: en este caso estamos ante un supuesto muy similar al que se produciría cuando el Valor Actualizado Neto adquiriera un valor igual a 0. En este supuesto, la inversión sólo debería llevarse a cabo si la posición competitiva de la empresa en el

mercado mejorará y no existieran otras alternativas que resulten más favorables.

- Si $TIR = r$; en este tipo de escenario, la inversión se dará en caso que mejore la posición competitiva de la empresa y no existieran otras alternativas mejores.
- Cuando la Tasa Interna de Retorno es menor que la tasa mínima de corte: en este caso, lo ideal es no llevar a cabo la inversión en cuestión, pues no se ha alcanzado la tasa de rentabilidad mínima que se exige para que el proyecto de inversión en cuestión sea viable y rentable. Así, en este supuesto es mejor que aparques ese proyecto de inversión y conserves tu dinero para otra ocasión.
- Si $TIR < r$; entonces se rechazará el proyecto.

Aproximación inicial de TIR

La aproximación del TIR se expresa en la siguiente función. Esta función retorna un valor cercano, pero no próximo al resultado que ayuda a poder hacer pruebas e interpolación para hallar la raíz cercana del TIR.

$$TIR_0 = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n \text{ingresos}}{\sum_{i=0}^n \text{egresos}} - 1 \right)}{n}$$

- n: Número de periodos.
- Ingresos: Ingresos con valores sin actualizar.
- Egresos: Egresos con valores sin actualizar.

Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson (también conocido como el método de Newton) es un algoritmo para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función no lineal.

El método de Newton (o de Newton-Raphson) es uno de los métodos numéricos más poderosos y reconocidos para resolver un problema de encontrar la raíz.

Una forma para representar el método de Newton, está basado en los polinomios de Taylor.

Esto constituye la base para todo método de Newton, que empieza con una aproximación inicial p_0 y genera la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, mediante:

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1, \text{ para } n > 1$$

Este método involucra a 4 variables que nos ayudaran para encontrar la raíz a diferencia de otros métodos que requieren de un valor adicional, estos valores son:

- Una aproximación inicial.
- Una tolerancia.
- Un número máximo de interacciones.

El método consiste en seleccionar un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada para luego comenzar a iterar, para esto el método linealiza la función por la recta tangente en ese valor supuesto. Para poder encontrar un nuevo valor que será sustituido por el anterior y así se realizarán sucesivas iteraciones hasta que el método haya convergido lo suficiente, este parámetro es dado por la tolerancia.

Material es y Métodos

Material es e Instrumentos

- Un ordenador con sistema operativo Windows 10.
- Lenguaje de programación Python.
- Un entorno virtual Spyder.
- Programa de hoja de cálculo Excel.

Métodos

Comprobaremos el método de la interpolación con el método de Newton, además se realizará una aproximación a la TIR mediante un cálculo computacional y un cálculo en Excel para posteriormente contrastar ambos métodos y sus resultados.

Algoritmo de método Prueba y Error

El método de prueba y error sigue la siguiente secuencia de datos:

Paso 1: Formar la función Van con sus respectivos datos de ingresos, egresos, y tiempo.

Paso 2: Aplicar la fórmula de aproximación inicial a la TIR.

Paso 3: Después de obtener la TIR aproximada inicial se comienza a buscar el VAN positivo y negativo en función de valores cercanos a la aproximación inicial a la TIR realizando cálculos de prueba y error.

Paso 4: Después de obtener los valores de la TIR cuando el VAN es positivo y negativo se fija el intervalo en donde se encuentra la TIR cuando el valor del VAN es cero.

Paso 5: Se aplica una regla de tres simple y obtenemos el valor de la TIR igual a cero.

Algoritmo del Aplicativo creado utilizando el método de Newton

Paso 1: Guardar un archivo xlsx con los datos de ingresos, egresos y tiempo en el ordenador.

Paso 2: Copiar la ruta del archivo xlsx y ingresar al aplicativo.

Paso 3: El aplicativo formará la ecuación de VAN con los datos del archivo xlsx y su derivada aplicando el teorema de límite.

Paso 4: El algoritmo resolverá el TIR aproximado inicial.

Paso 5: El aplicativo utilizará el método de Newton y hallará el TIR a partir de TIR aproximado inicial y lo imprimirá en la pantalla.

Elaboramos los siguientes pseudocódigos para la implementación del aplicativo.

Pseudocódigo para calcular la función VAN:

ENTRADA Tasa interna de retorno a evaluar TIR_i , matriz de datos dataframe.

SALIDA Valor actual neto VAN en TIR_i .

PASO 1 determinar valor actual de ingreso VAI.

VI: columna de valores de ingresos

$VAI = \text{suma}([\text{hacer ingreso}(1+TIR_i)^{\text{año}} \text{ para cada ingreso y año en dataframe['VI'] y dataframe['Time'] si año != 0])$

PASO 2 determinar valor actual de egreso VAE.

VE: columna de valores de egreso

$VAE = \text{suma}([\text{hacer egreso}(1+TIR_i)^{\text{año}} \text{ para cada egreso y año en dataframe['VI'] y dataframe['Time'] si año != 0])$

PASO 3 determinar inversión inicial

$I = \text{dataframe['VE']}[0]$ (primer egreso en el año = 0)

PASO 4 determinar $VAN = VAI - VAE - I$

PASO 5 retornar VAN

Pseudocódigo para calcular la derivada de la función VAN:

ENTRADA Tasa interna de retorno a evaluar TIR_i , matriz de datos dataframe.

SALIDA Derivada dVAN de Valor actual neto VAN en TIR_i .

PASO 1 determinar $h = 1e-10$

PASO 2 determinar $dVAN = VAN(TIR_i + h) - VAN(TIR_i)h$

PASO 3 retornar $dVAN$

Pseudocódigo para calcular la variable TIR:

PASO 1 Construir un archivo en formato .xlsx con los campos “Time”, “VI” y “VE” llenos.

PASO 2 Guardar la hoja en un lugar del ordenador.

PASO 3 Copiar la ruta de acceso del archivo e ingresar a la entrada del aplicativo.

PASO 4 Convertir archivo a una matriz llamada dataframe con campos “Time”, “VI” y “VE” como columnas.

PASO 5 Cálculo de TIRA (TIR aproximado)

Determine $VNE = \text{suma de valores de columna “VE” en dataframe.}$

Determine $VNI = \text{suma de valores de columna “VI” en dataframe.}$

Determine $N = \text{tamaño de filas en dataframe.}$

Determine $TIRA = (VNI/VNE - 1)N$

PASO 6 Cálculo de TIR para encontrar una solución $VAN(TIR) = 0$ dada una

aproximación inicial $TIR = TIRA$.

ENTRADA aproximación inicial $TIR_0 = TIRA$, tolerancia $TOL = 1e-10$, número de iteraciones $N_0 = 100$.

SOLUCIÓN aproximada TIR o mensaje de falla.

PASO 7 Determine $i = 1$.

PASO 8 Mientras $i \leq N_0$ haga los pasos 9 – 12

PASO 9 Determine $TIR = TIR_0 - VAN(TIR_0)/VAN'(TIR_0)$. (Calcule TIR_i)

PASO 10 Si $|TIR - TIR_0| < TOL$ entonces

SALIDA TIR (El procedimiento fue exitoso)

PARE.

PASO 11 Determine $i = i + 1$.

PASO 12 Determine $TIR_0 = TIR$ (Actualice TIR_0)

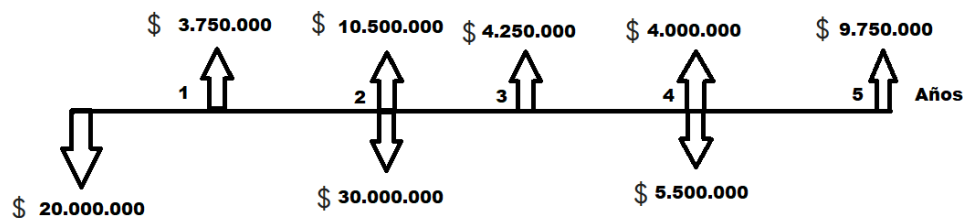
PASO 13 SALIDA (‘EL método falló al terminar las N_0 iteraciones. No se pudo calcular el TIR’).

PARE

Se implementó el pseudocódigo con el lenguaje de programación Python versión 3.9 en el entorno de Spider y se subió a Google Colaboraty. Finalmente se comparó el aplicativo con el método de prueba y error ingresando los mismos datos al sistema en función del tiempo.

Se implementó el método de prueba y error en una hoja de Excel para facilitar el cálculo de las funciones y se aplicó el algoritmo mencionado anteriormente.

Calcular la Tasa Interna de Retorno-Método de prueba y error



$$VPN = 0$$

$$VPN = VPI - VPE$$

$$VPI = \frac{\$ 3.750.000}{(1+i)} + \frac{\$ 10.500.000}{(1+i)^2} + \frac{\$ 4.250.000}{(1+i)^3} + \frac{\$ 5.000.000}{(1+i)^4} + \frac{\$ 9.750.000}{(1+i)^5}$$

$$VPE = \$ 20.000.000 + \frac{\$ 3.000.000}{(1+i)^2} + \frac{\$ 5.500.000}{(1+i)^4}$$

Aproximación del TIR:

$$= \left(\frac{\sum \text{Ingresos}}{\sum \text{Egresos}} - 1 \right) \div n$$

$$= \left(\frac{\$ 32.250.000}{\$ 28.500.000} - 1 \right) \div 5$$

$$\text{Aproximacion de TIR} = 0,0263$$

$$\text{Aproximacion de TIR} = 2.63\%$$

$$I = 3\%$$

$$VPI = \frac{\$ 3.750.000}{(1+0.03)} + \frac{\$ 10.500.000}{(1+0.03)^2} + \frac{\$ 4.250.000}{(1+0.03)^3} + \frac{\$ 5.000.000}{(1+0.03)^4} + \frac{\$ 9.750.000}{(1+0.03)^5}$$

$$VPE = \$ 20.000.000 + \frac{\$ 3.000.000}{(1+0.03)^2} + \frac{\$ 5.500.000}{(1+0.03)^4}$$

$$VPN = VPI - VPE$$

$$VPN = \$ 1.677.304 \Rightarrow 3 \%$$

$$I = 5\%$$

$$VPI = \frac{\$ 3.750.000}{(1 + 0.05)} + \frac{\$ 10.500.000}{(1 + 0.05)^2} + \frac{\$ 4.250.000}{(1 + 0.05)^3} + \frac{\$ 5.000.000}{(1 + 0.05)^4} + \frac{\$ 9.750.000}{(1 + 0.05)^5}$$

$$VPE = \$ 20.000.000 + \frac{\$ 3.000.000}{(1 + 0.05)^2} + \frac{\$ 5.500.000}{(1 + 0.05)^4}$$

$$VPN = \$ 450.786 \Rightarrow 5 \%$$

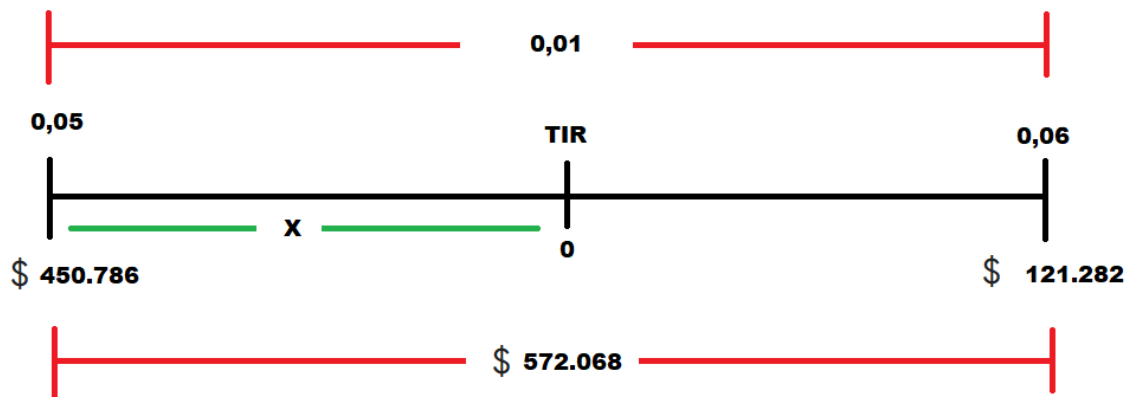
$$I = 6\%$$

$$VPI = \frac{\$ 3.750.00}{(1 + 0.06)} + \frac{\$ 10.500.000}{(1 + 0.06)^2} + \frac{\$ 4.250.00}{(1 + 0.06)^3} + \frac{\$ 4.000.00}{(1 + 0.06)^4} + \frac{\$ 9.750.00}{(1 + 0.06)^5}$$

$$VPE = \$ 20.000.000 + \frac{\$ 3.000.000}{(1 + 0.06)^2} + \frac{\$ 5.500.000}{(1 + 0.06)^4}$$

$$VPN = \$ - 121.282 \Rightarrow 6 \%$$

INTERPOLACION:



$$0,01 \Rightarrow \$ 572.068$$

$$X \Leftarrow \$ 450.786$$

$$X = \frac{(0,01)(\$ 450.786)}{\$ 572.068}$$

$$X = 0,0078799374$$

$$TIR = 0,05 + 0,0078799374$$

$$TIR = 5,79 \% E.A \Rightarrow E.A = Efectivo Anual$$

Resultados

Se obtuvieron los siguientes resultados:

Con el método computacional se obtuvo un valor aproximado de TIR

$$\text{TIR} = 0.0578415283295872$$

El proceso de obtención del TIR tardó 44 milisegundos.

Con el Excel se obtuvo la siguiente aproximación para el TIR

$$\text{TIR} = 0.05787993$$

Se obtuvo el resultado en 12 minutos y 25 segundos

Análisis y Discusión

Según los resultados tenemos que:

Los valores de la TIR que se obtuvieron tanto por el método computacional como por el cálculo en la herramienta Excel resultaron ser aproximadamente el mismo, sin embargo considerando el tiempo empleado en el cálculo de la TIR, el método computacional saca larga ventaja al cálculo en Excel, el código tardó algunos milisegundos en hallar la respuesta mientras que en Excel se demoró mucho más tiempo debido a que en este se tienen que realizar las sumatorias, aproximaciones de prueba y error y demás cálculos por partes, ya que no presenta una herramienta que permita realizar el cálculo de una sola vez, terminando con un largo proceso para hallar la TIR por medio de la interpolación.

Conclusiones

Se concluye que llegamos a una solución a través del método de Newton - Raphson mediante la implementación de un algoritmo computacional para hallar la raíz de la función VAN o TIR, para determinar la viabilidad de una inversión.

Además, los resultados obtenidos por el programa computacional se aproximan a los valores exactos obtenidos con Excel en el cual se aplicó el método de prueba y error, por lo que si consideramos el tiempo recurrido para realizar el cálculo tenemos que el método computacional es más eficiente.

Bibliografía

Bu, C. (2009). *Análisis y Evaluación de Proyectos de Inversión*. México.
https://www.academia.edu/9355544/An%C3%A1lisis_y_Evaluaci%C3%B3n_de_Proyectos_Raul_Coss_Bu

Colaboradores de Wikipedia. (2021, 11 marzo). *Método de Newton*. Wikipedia, la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Newton

Ilarrosa. (2017, February 19). *Método de Newton-Raphson*. Geogebra.Org.
<https://www.geogebra.org/m/XCrwWHzy>

López Dumrauf G. (2006). *Cálculo Financiero Aplicado: un enfoque profesional*. Editorial La Ley. http://fepi.web.unq.edu.ar/wp-content/uploads/sites/39/2014/12/FEP_Lopez_Dumrauf_Cap.-10.pdf

Oso, J. (2017). *ANÁLISIS NUMÉRICO - Richard Burden 10ma. edición*. ACADEMIA.
https://www.academia.edu/40157817/AN%C3%81LISIS_NUM%C3%89RICO_Richard_Burden_10ma_edici%C3%B3n

Software DELSOL. (2019, 19 de junio). *Tasa interna de retorno (TIR)*. Sdelsol.Com.
<https://www.sdelsol.com/glosario/tasa-interna-de-retorno-tir/>

Torres, M. (23 de junio de 2021). Tasa Interna de Retorno (TIR): definición, cálculo y ejemplos. *Rankia.Cl*. <https://www.rankia.cl/blog/mejores-opiniones-chile/3391122-tasa-interna-retorno-tir-definicion-calculo-ejemplos>