TEOREMA DE GAUSS.

1. Aplicando el teorema de Gaus. Determina:
   a/ El campo eléctrico creado por una carga puntual en función de la distancia.
   b) El potencial eléctrico creado por una carga puntual de $5 \mu C$ a una distancia de 15 cm. Dato: $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \ Nm^2/C^2$

2. Por una superficie esférica está distribuida uniformemente una carga positiva Q. El radio de la esfera R es igual a 25 mm y la carga de 10 nC. Determina:
   a) El campo $\vec{E}$ en puntos exteriores $r > R$ de la esfera
   b) El campo y el potencial en el centro.

3. Una esfera metálica de 10 cm de radio cargada con 0,05 C de carga eléctrica. Determina:
   a) El campo eléctrico a 5 cm y a 15 cm del centro
   b) La densidad superficial de carga.

4. Una esfera está cargada con una carga Q distribuida uniformemente por toda la esfera. tiene un radio R. Determina, aplicando el T. de Gauss:
   a) El campo $\vec{E}$ en puntos interiores, $r < R$.
   b) El campo $\vec{E}$ y el potencial en puntos exteriores, $r > R$

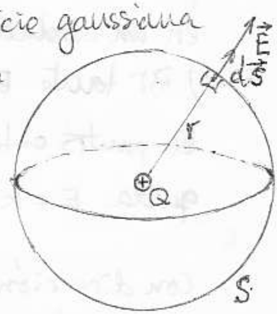
5. Halla, aplicando el teorema de Gauss, el campo eléctrico en cada una de las tres regiones delimitadas por dos superficies concéntricas, esféricas de radios R_1 y R_2. La superficie de radio R_1 está cargada con una carga Q positiva y la superficie de radio R_2 está cargada con una carga $-Q$ negativa. Región I $r < R_1$; región II $R_1 < r < R_2$ y región III $r > R_2$.

TEOREMA DE GAUSS

1. Teorema de Gauss $\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

a) El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada (superficie gaussiana) es directamente proporcional a la carga encerrada en su interior.

Debido a la simetría de la carga puntual la superficie gaussiana es una superficie esférica de radio r, centrada en la carga Q.



$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \overset{①}{=} \oint_S E\cdot dS \overset{②}{=} E\cdot \oint_S dS \overset{③}{=} E\cdot S \overset{④}{=} E\cdot 4\pi\cdot r^2$$

como $Q_{int} = Q$ $\quad E\cdot 4\pi\cdot r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$; $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

① como $\vec{E}\cdot d\vec{S} = E\,dS\cdot\cos\alpha$; $\alpha = 0$

② E vale lo mismo en todos los puntos de la superficie gaussiana.

③ $\oint_S dS = S$

④ $S = 4\pi r^2$ área de una esfera de radio r.

$\vec{E}$ tiene dirección radial y es saliente debido a la simetría esférica.

b) El potencial eléctrico es: $V_A = \int_A^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_A^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr = \left[-k\frac{Q}{r}\right]_{r_A}^{\infty} = k\frac{Q}{r_A}$

$$V = k\frac{Q}{r} = 9\cdot 10^9\,\frac{5\cdot 10^{-6}}{0{,}15} = 3\cdot 10^5\ V$$

2. a) Aplicando el teorema de Gauss a puntos exteriores $r > R$

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = k\frac{Q}{r^2}, \text{ con } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$E = k\frac{Q}{r^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{10^{-8}}{(2{,}5\cdot 10^{-2})^2} = 1{,}44\cdot 10^5\ \frac{N}{C}$ con dirección radial y sentido hacia afuera.

b) En el interior $r < R$, $Q_{int} = 0$; $\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \Longleftrightarrow \vec{E} = 0$

$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} \Rightarrow$ si $\vec{E} = 0$; $V_A = V_B$

Siendo A cualquier punto de la superficie de radio R y B el centro de la esfera. El potencial en un punto de la superficie es: $V = k\frac{Q}{R}$

$V = k\frac{Q}{R} = 9\cdot 10^9\,\frac{10^{-8}}{2{,}5\cdot 10^{-2}} = 3600\ V$ en el centro de la esfera.

3. Un conductor metálico esférico cargado en equilibrio eléctrico tiene un campo eléctrico nulo en su interior. De lo contrario el campo actuaría sobre las cargas "libres" y la fuerza eléctrica sobre ellas produciría una corriente eléctrica. Y si hay una corriente eléctrica en un conductor no está en equilibrio.

a) Por tanto $E=0$ en los puntos $r<$ así en $r=5$ cm $E=0$.

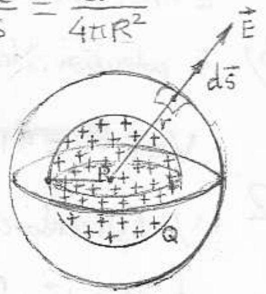
En puntos exteriores para $r>R$ aplicando el teorema de Gauss queda $E=k\frac{Q}{r^2}$; $E=k\frac{Q}{r^2}=9\cdot10^9\frac{0{,}05}{(0{,}15)^2}=\underline{2\cdot10^{10}\ N/C}$

Con dirección radial y sentido hacia afuera.

b) Como en el interior del conductor $\vec{E}=0$. Aplicando el teorema de Gauss $Q_{int}=0$, por lo que toda la carga se distribuye homogéneamente en la superficie.

La densidad superficial de carga es $\sigma=\frac{Q}{S}=\frac{Q}{4\pi R^2}$

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}=\frac{0{,}05}{4\pi\,0{,}1^2}=\underline{0{,}398\ C/m^2}$$



4. Aplicando el teorema de Gauss.

a) $\phi=\oint_S\vec{E}\,d\vec{s}=\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$; $\rho=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Por la simetría de la distribución se toma una superficie gaussiana esférica de radio r.

$$(1)\ \oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}\overset{①}{=}\oint_S E\cdot ds\overset{②}{=}E\oint_S ds\overset{③}{=}E\cdot S\overset{④}{=}E\cdot4\pi r^2;\quad \rho=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3};\quad \rho_{int}=\frac{Q_{int}}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

La densidad volumétrica de carga es constante $\rho_{int}=\rho$

$$\frac{Q_{int}}{Q}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3};\quad Q_{int}=Q\frac{r^3}{R^3};\quad E\cdot4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3};\quad \boxed{E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r}\quad r<R$$

① $\vec{E}\cdot d\vec{s}=E\cdot ds\cdot\cos\alpha$; $\alpha=0$

② E vale lo mismo en todos los puntos de la superficie gaussiana

③ $\oint_S ds=S$

④ $S=4\pi r^2$ Área de la superficie esférica "s. gaussiana"

4. b) Para puntos exteriores $r > R$

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}; \text{ como } Q_{int} = Q \quad \text{De (1)} \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}; \text{ si } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}; \quad \boxed{E = k\frac{Q}{r^2}}$$

El potencial se define como $V_A = \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}$

$$V_A = \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A^\infty k\frac{Q}{r^2} dr = kQ\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^\infty = k\frac{Q}{r_A}; \quad \boxed{V = k\frac{Q}{r}}$$

5. Por la simetría de la distribución de carga se toman superficies gaussianas esféricas concéntricas con las dos superficies cargadas, de radio r.

- Región I $r < R_1$ $Q_{int} = 0$ Teorema de Gauss $\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = 0$$

- Región II $R_1 < r < R_2$; $Q_{int} = Q$

$$\left.\begin{aligned} &\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S E \cdot ds = E\oint_S ds = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 \end{aligned}\right\} E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

- Región III $r > R_2$ $Q_{int} = Q + (-Q) = 0$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = 0$$