GRAVITACIÓN

1. 2019-Julio-Coincidentes

A. Pregunta 1.- Una nave espacial tripulada se encuentra describiendo una órbita circular geoestacionaria alrededor de la Tierra. Determine:

a) El radio de la órbita y la velocidad lineal de la nave,

El astronauta recibe la orden de cambiar de órbita y pasar a otra, también circular, de radio el doble de la actual.

b) ¿Cuál será la nueva velocidad lineal de la nave? Justifique la respuesta.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97\cdot10^{24}$ kg.

2019-Julio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa la nave es la gravitatoria y es radial en una órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \qquad v=\frac{2\pi R}{T} \Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2 \Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

En un satélite geoestacionario el periodo son 24 h. Sustituyendo valores numéricos

$$R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{4\pi^2}(24\cdot3600)^2}=4{,}22\cdot10^7\,m$$

La velocidad orbital es $v=\dfrac{2\cdot\pi\cdot4{,}22\cdot10^7}{(24\cdot3600)}=3{,}1\cdot10^3\,m/s$

b) En la nueva órbita varía radio, periodo y velocidad. El periodo lo podemos calcular

-Con el mismo planteamiento del apartado anterior:

$$v=\frac{2\pi R}{T} \Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2 \Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R^3}$$

Numéricamente $T=\sqrt{\dfrac{4\pi^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}(2\cdot4{,}22\cdot10^7)^2}=2{,}44\cdot10^5\,s$

-Usando la tercera ley de Kepler teniendo en cuenta que ambas órbitas son sobre mismo objeto centrales

$$\frac{T_1^2}{R_1^3}=\frac{T_2^2}{R_2^3} \Rightarrow T_2=T_1\sqrt{\frac{R_2^3}{R_1^3}}=24\cdot3600\cdot\sqrt{2^3}=2{,}44\cdot10^5\,s$$

La nueva velocidad orbital es $v=\dfrac{2\cdot\pi\cdot2\cdot4{,}22\cdot10^7}{(2{,}44\cdot10^5)}=2{,}17\cdot10^3\,m/s$

4. B. Pregunta 1.- El satélite Europa describe una órbita circular alrededor de Júpiter de 671100 km de radio. Teniendo en cuenta que su periodo de revolución es de 3,55 días terrestres, determine:

a) La masa de Júpiter.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Radio de Júpiter, $R_{Júpiter}$= 69911 km.

B. Pregunta 1-.

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial al ser la órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \qquad v=\frac{2\pi R}{T} \Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2 \Rightarrow M=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2}$$

Sustituyendo valores numéricos $M=\dfrac{4\pi^2\cdot(671100\cdot10^3)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(3{,}55\cdot24\cdot3600)^2}=1{,}9\cdot10^{27}\,kg$

12. B. Pregunta 1.- Un satélite artificial de masa 712 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 694 km. Calcule:

a) La velocidad y el periodo del satélite en la órbita.

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10 $^{-11}$ N m^2 kg^{-2};

Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg ; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37\times10^6$ m

B. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite artificial es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\,m}{R^2}=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R}$$

El radio de la órbita es $R=R_T+h=6{,}37\cdot10^6+694\cdot10^3=7{,}064\cdot10^6$ m

$$v=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{7{,}064\cdot10^6}}=7508\,m/s$$

Al tratarse de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow T=\frac{2\cdot\pi\cdot7{,}064\cdot10^6}{7508}=5912\,s$

27. 2016-Junio

A. Pregunta 1.- El planeta Marte, en su movimiento alrededor del Sol, describe una órbita elíptica. El punto de la órbita más cercano al Sol, perihelio, se encuentra a 206,7·10^6 km, mientras que el punto de la órbita más alejado del Sol, afelio, está a 249,2·10^6 km. Si la velocidad de Marte en el perihelio es de 26,50 km s^{-1}, determine:

a) La velocidad de Marte en el afelio.

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10 $^{-11}$ N m^2 kg^{-2};

Masa de Marte, M_M = 6,42·10^{23} kg; Masa del Sol M_S = 1,99·10^{30} kg.

2016-Junio

A. Pregunta 1.-

a) En la órbita elíptica el momento angular se conserva, por lo que su módulo es el mismo en todos los puntos. Dado que en en perihelio y afelio vector posición y velocidad forman 90º, podemos igualar los módulos y llegamos a

$$|\vec{L}_{perihelio}|=|\vec{L}_{perihelio}|\Rightarrow r_{perihelio}\cdot m\cdot v_{perihelio}=r_{afelio}\cdot m\cdot v_{afelio}\Rightarrow v_{afelio}=v_{perihelio}\cdot\frac{r_{perihelio}}{r_{afelio}}$$

$$v_{afelio}=26{,}50\cdot10^3\cdot\frac{206{,}7\cdot10^9}{249{,}2\cdot10^9}\approx21980\,m\,s^{-1}$$

Se puede citar que la velocidad es un vector tangente a la trayectoria y se indica solamente su módulo. Validación física: en afelio debe llevar una velocidad menor que en perihelio.

35. 2015-Junio

A. Pregunta 1.- Dos lunas que orbitan alrededor de un planeta desconocido, describen órbitas circulares concéntricas con el planeta y tienen periodos orbitales de 42 h y 171,6 h. A través de la observación directa, se sabe que el diámetro de la órbita que describe la luna más alejada del planeta es de 2,14·10^6 km. Despreciando el efecto gravitatorio de una luna sobre otra, determine:

a) La velocidad orbital de la luna exterior y el radio de la órbita de la luna interior.

Dato: Constante de gravitación universal, G = 6,67·10 $^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

2015-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Para calcular la velocidad en una órbita circular, si el diámetro es 2,14·10^6 km, el radio es 1,07·10^9 m

$$v_{exterior}=\frac{2\cdot\pi\cdot R_{exterior}}{T_{exterior}}=\frac{2\cdot\pi\cdot1{,}07\cdot10^9}{171{,}6\cdot3600}=1{,}09\cdot10^4\,m/s$$

Utilizando la tercera ley de Kepler podemos plantear (no es necesario cambiar de unidades los periodos mientras expresemos ambos con las mismas unidades)

$$\frac{R^3_{exterior}}{R^3_{interior}}=\frac{T^2_{exterior}}{T^2_{interior}}\Rightarrow R_{interior}=R_{exterior}\sqrt[3]{\frac{T^2_{interior}}{T^2_{exterior}}}\Rightarrow R_{interior}=1{,}07\cdot10^9\cdot\sqrt[3]{\frac{42^2}{171{,}6^2}}=4{,}19\cdot10^8\,m$$

46. B. Pregunta 1.- Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios, situados sobre el ecuador terrestre y con un periodo orbital de 1 día.

a) Suponiendo que la órbita que describen es circular y poseen una masa de 500 kg, determine el módulo del momento angular de los satélites respecto del centro de la Tierra y la altura a la que se encuentran estos satélites respecto de la superficie terrestre.

Datos: Radio Terrestre = $6{,}37\times10^6$ m ; Masa de la Tierra= $5{,}97\times10^{24}$ kg;
Constante de Gravitación Universal G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

B. Pregunta 1.-

a) El momento angular es un vector pero se pide solamente el módulo.
Al estar los satélites geoestacionarios en el plano ecuatorial, el vector posición respecto al centro de la Tierra y el vector velocidad son perpendiculares, y podemos plantear

$$|\vec{L}| = R_{órbita}\cdot m_{satélite}\cdot v_{satélite}$$

Calculamos el radio de la órbita geoestacionaria. Al ser una órbita circular, podemos igualar fuerza gravitatoria y centrípeta, siendo al mismo tiempo $v=\frac{2\pi R_{órbita}}{T}$ con T=24·3600=86400 s

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot86400^2}{4\pi^2}}=4{,}22\cdot10^7 m$$

$$|\vec{L}|=4{,}22\cdot10^7\cdot500\cdot\frac{2\pi4{,}22\cdot10^7}{86400}=6{,}48\cdot10^{13}\,kg\cdot m^2\cdot s^{-1}$$

Para calcular la altura respecto de la superficie terrestre, restamos el radio terrestre:
$h=R_{órbita}-R_{terrestre}=4{,}22\cdot10^7-6{,}37\cdot10^6=3{,}58\cdot10^7$ m

47. 2013-Septiembre

A. Pregunta 1.- Dos satélites describen órbitas circulares alrededor de un planeta cuyo radio es de 3000 km. El primero de ellos orbita a 1000 km de la superficie del planeta y su periodo orbital es de 2 h. La órbita del segundo tiene un radio 500 km mayor que la del primero. Calcule:

b) El periodo orbital del segundo satélite.

b) Utilizando la tercera ley de Kepler, utilizamos subíndice 1 para datos primer satélite y 2 para segundo. Según enunciado T_1=2 h.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{R_1^3}{R_2^3};T_2=T_1\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}=2\sqrt{\left(\frac{(3+1+0{,}5)\cdot10^6}{(3+1)\cdot10^6}\right)^3}=2{,}39\,h$$

49. 2013-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.- Un satélite de masa 800 kg orbita alrededor de la Luna con una velocidad angular de $4{,}33\times10^{-4}$ rad s^{-1}. Despreciando rozamientos, determine:

a) La altura, medida desde la superficie de la Luna, a la que se encuentra el satélite orbitando así como su período de revolución alrededor de la misma.

Datos: Constante de la Gravitación Universal, G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2};
Radio de la Luna, R_L=1740 km; Masa de la Luna, $M_L=7{,}35\times10^{22}$ kg

2013-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

Relacionamos el periodo con la velocidad angular, dato del problema $T=\frac{2\pi}{\omega}$, y sustituyendo

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}\cdot(\frac{2\pi}{\omega})^2}{4\pi^2}}=2{,}97\cdot10^6 m$$

Se nos pide altura desde la superficie $h=R_0-R_L=2{,}97\cdot10^6-1{,}74\cdot10^6=1{,}23\cdot10^6$ m

57. 2012-Junio

A. Pregunta 1.- Un satélite de masa m gira alrededor de la Tierra describiendo una órbita circular a una altura de 2×10^4 km sobre su superficie.

a) Calcule la velocidad orbital del satélite alrededor de la Tierra.

Datos: Constante de la Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2};
Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg ; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37\times10^6$

2012-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria. Pasamos el radio de la órbita a metros.

$R_S=R_T+h=6{,}37\cdot10^6+2\cdot10^7=2{,}637\cdot10^7$ m

$$m\frac{v_o^2}{R_S}=\frac{GM_Tm}{R_S^2}\Rightarrow v_o=\sqrt{\frac{GM_T}{R_S}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{2{,}637\cdot10^7}}=3889\,m/s$$

b) Si la velocidad se anulase repentinamente, no tendría energía cinética y solamente tendría energía potencial asociada a la altura de la órbita, y caería verticalmente. Sin considerar el rozamiento del aire solamente actúa la fuerza de la gravedad conservativa y podemos considerar que hay conservación de la energía mecánica.

A. Órbita tras el frenado: $E_c=0, E_p=-G\frac{M_Tm}{R_S}$

58. B. Pregunta 1.- Una nave espacial de 3000 kg de masa describe, en ausencia de rozamiento, una órbita circular en torno a la Tierra a una distancia de $2{,}5\times10^4$ km de su superficie. Calcule:

a) El período de revolución de la nave espacial alrededor de la Tierra.

Datos: Constante de la Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2};
Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg ; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37\times10^6$ m

B. Pregunta 1.-

a) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria. Pasamos el radio de la órbita (R_O) a metros, y obtenemos periodo ya que $v_O=2\pi R_O/T$. Con datos enunciado

$R_O=R_T+h=6{,}37\cdot10^6+2{,}5\cdot10^7=3{,}137\cdot10^7$ m

$$m\frac{\left(\frac{2\pi R_O}{T}\right)^2}{R_O}=\frac{GM_Tm}{R_O^2}\Rightarrow4\pi^2R_O^3=GM_TT^2\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2R_O^3}{GM_T}}$$

$$T=\sqrt{\frac{4\cdot\pi^2\cdot(3{,}137\cdot10^7)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}}=55276\,s$$

60. B. Pregunta 1.-Un satélite artificial está situado en una órbita circular en torno a la Tierra a una altura de su superficie de 2500 km. Si el satélite tiene una masa de 1100 kg:

b) Calcule el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.

Datos: Constante de Gravitación $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2};
Radio de la Tierra = 6370 km; Masa de la Tierra = $5{,}98\times10^{24}$ kg.

$$R_o=6370+2500=8870\,km$$

Calculamos velocidad en la órbita estable, donde $F_g=F_c$

a) $$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_0};v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{8870\cdot10^3}}=6706\,m/s$$

b) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$

Al calcular el momento angular respecto al centro de la Tierra para una órbita circular, el vector posición siempre es perpendicular al vector velocidad, por lo que su módulo será

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|=8870\cdot10^3\cdot1100\cdot6706=6{,}54\cdot10^{13}\,kg\frac{m^2}{s}[también\,J\cdot s]$$

61. 2011-Septiembre-Coincidentes

A. Problema 1.- Un satélite artificial de masa 200 kg se mueve alrededor de la Tierra en una órbita elíptica definida por una distancia al perigeo (posición más próxima al centro de la Tierra) de $7{,}02\times10^6$ m y una distancia al apogeo (posición más alejada al centro de la Tierra) de $10{,}30\times10^6$ m. Si en el perigeo el módulo de la velocidad es $8{,}22\times10^3$ m/s

a) ¿Cuál es módulo de la velocidad en el apogeo?

b) Determine el módulo y la dirección del momento angular del satélite.

c) Determine la velocidad areolar del satélite.

Dato: Constante de Gravitación Universal G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra = $5{,}98\times10^{24}$ kg.

2011-Septiembre-Coincidentes

A. Problema 1.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales, por lo que su módulo es igual entre dos puntos cualquiera de la órbita. Como en perigeo y apogeo los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A = r_P m v_P$ y despejar para obtener el módulo de la velocidad solicitado.

$$v_A=\frac{r_p v_p}{r_A}=\frac{7{,}02\cdot10^6\cdot8{,}22\cdot10^3}{10{,}30\cdot10^6}=5{,}60\cdot10^3\,m/s$$

b) El módulo del momento angular es constante en la órbita, lo podemos calcular en perigeo o apogeo, tomamos uno de ellos.

$$|\vec{L}|=r_p m v_p=7{,}02\cdot10^6\cdot200\cdot8{,}22\cdot10^3=1{,}15\cdot10^{13}\,kg\,m^2 s^{-1}[también\,J\cdot s]$$

Su dirección es perpendicular al pano de la órbita, y su sentido vendrá dado por la regla de la mano derecha al realizar el producto vectorial de los vectores r y p.

c) La velocidad areolar es constante según la 2ª ley de Kepler. Hay dos opciones

A.-Teniendo el periodo de la órbita, se puede utilizar la fórmula del área de la elipse y dividir por él (similar a resolución apartado a de 2011-Junio-A.Cuestión 1 para órbita circular). No se da T explícitamente, pero se puede obtener con la 3ª ley de Kepler $\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$ recordando que para órbitas elípticas en hay que usar como R el semieje mayor de la elipse "a", que podemos calcular como la mitad de la suma de radio en perigeo y apogeo.

$$a=\frac{r_{apogeo}+r_{perigeo}}{2}=\frac{10{,}30\cdot10^6+7{,}02\cdot10^6}{2}=8{,}66\cdot10^6\,m$$

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(8{,}66\cdot10^6)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}}=8017{,}6\,s$$

Para calcular el área de la elipse debemos calcular su semieje menor, "b"

Una vez conocido el semieje mayor y el apogeo, podemos calcular la distancia del centro al foco

$$r_{focoa\,centro}=a-r_{perigeo}=8{,}66\cdot10^6-7{,}02\cdot10^6=1{,}64\cdot10^6\,m$$

Sabiendo que por geometría de la elipse la suma de distancias entre un punto cualquiera y ambos focos es constante, tomando los puntos donde cortan semieje menor y mayor tenemos $f^2+b^2=a^2$

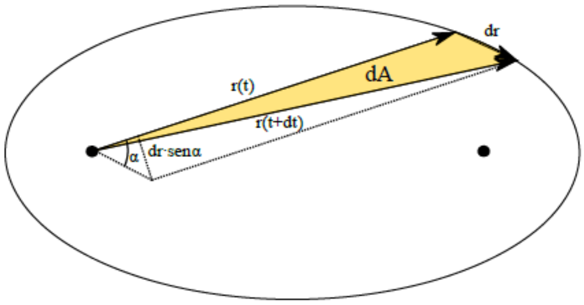
luego $b=\sqrt{(8{,}66\cdot10^6)^2-(1{,}64\cdot10^6)^2}=8{,}5\cdot10^6\,m$

El área es $A=\pi a b=\pi\cdot8{,}66\cdot10^6\cdot8{,}5\cdot10^6=2{,}31\cdot10^{14}\,m^2$

La velocidad areolar es $\frac{dA}{dt}=\frac{2{,}31\cdot10^{14}}{8017{,}6}=2{,}88\cdot10^{10}\frac{m^2}{s}$

B.-Usar la relación de proporcionalidad entre el módulo del momento angular, que es constante en toda la órbita, y la velocidad areolar, también constante. La expresión o bien se conoce, o se deduce:
Si planteamos la órbita elíptica y un área diferencial barrida

$dA=\frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|$ (La mitad del área del paralelogramo formado por vectores r y dr)



Operando para obtener la velocidad areolar

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$$

Como $|\vec{L}|=cte=m|\vec{r}\times\vec{v}|$ $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m}=\frac{|\vec{L}|}{2m}=cte$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1{,}15\cdot10^{13}}{2\cdot200}=2{,}88\cdot10^{10}\frac{m^2}{s}$$

65. 2011-Junio

A. Cuestión 1.- Un satélite que gira con la misma velocidad angular que la Tierra (geoestacionario) de masa $m=5\times10^3$ kg, describe una órbita circular de radio $r=3{,}6\times10^7$ m.

Determine:

a) La velocidad areolar del satélite.

b) Suponiendo que el satélite describe su órbita en el plano ecuatorial de la Tierra, determine el módulo, la dirección y el sentido del momento angular respecto de los polos de la Tierra.

Dato: Periodo de rotación terrestre= 24 h.

2011-Junio

A. Cuestión 1.-

Nota: suponemos ciertos los datos (el radio real de una órbita geoestacionaria no es $3{,}6\times10^7$ m, el dato suministrado es el valor real de la altura de una órbita geoestacionaria)

a) Como la órbita es circular y según la tercera ley de Kepler la velocidad areolar es constante

$$v_{areolar}=\frac{\pi\cdot r^2}{T}=\frac{\pi\cdot(3{,}6\cdot10^7)^2}{24\cdot3600}=4{,}7\cdot10^{10}\,m^2/s$$

b) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$. Si es geoestacionario la órbita está en el plano ecuatorial, pero el momento angular es referido a un punto, por lo que no lo hacemos respecto al centro de la Tierra sino que utilizamos los dos puntos que indica el enunciado.

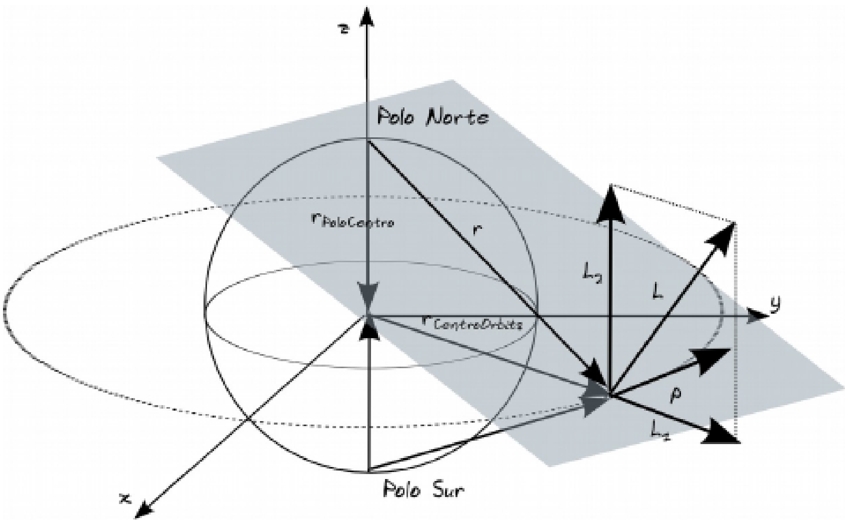
El momento angular respecto a los polos de la Tierra es respecto a dos puntos que están en el eje de giro, por lo que el vector posición siempre lo podemos descomponer en un vector que vaya desde el polo hasta el centro de la Tierra más un vector que vaya desde el centro de la Tierra hasta el punto de la órbita (y este último vector está en el mismo plano que el vector velocidad)

$$\vec{L}=(r_{\vec{PoloCentro}}+r_{\vec{CentroOrbita}})\times m\cdot\vec{v}=r_{\vec{PoloCentro}}\times m\cdot\vec{v}+r_{\vec{CentroOrbita}}\times m\cdot\vec{v}=\vec{L}_1+\vec{L}_2$$

Para calcular el módulo de la la velocidad, podemos calcular de manera intermedia la velocidad angular, o sabiendo que es constante, utilizar el cociente entre espacio recorrido en la órbita circular

$$|\vec{v}|=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$$

$$|\vec{v}|=\frac{2\cdot\pi\cdot 3{,}6\cdot 10^{7}}{24\cdot 3600}=2618\, m/s$$



Si tomamos el plano ecuatorial como plano xy y el eje de giro en el que están los dos polos como eje z, tomando como sentido positivo el dirigido hacia el polo norte geográfico, tendremos:

- $\vec{L}_1=\vec{r}_{PoloCentro}\times m\cdot\vec{v}$
  - Dirección: perpendicular al plano formado por eje z y el vector velocidad: será dirección radial, misma dirección de vector posición.
  - Sentido: de acuerdo al sentido de giro del satélite, y según de qué polo se trate, será el mismo sentido que el vector posición (para polo norte) o sentido opuesto (polo sur).
  - Módulo: al ser siempre el vector perpendicular a la velocidad, será (no se proporciona como dato el radio de la Tierra, se toma 6370 km.

$$6{,}37\cdot 10^{6}\cdot 5\cdot 10^{3}\cdot 2618=8{,}3\cdot 10^{13}\frac{kg\cdot m^{2}}{s}[\text{también}\, J\cdot s]$$

- $\vec{L}_2=\vec{r}_{CentroOrbita}\times m\cdot\vec{v}$
  - Dirección: perpendicular al plano xy
  - Sentido: de acuerdo al sentido de giro del satélite, que tiene que ser el mismo que el de la tierra, estará dirigido hacia z positivas.
  - Módulo: al ser siempre el vector perpendicular a la velocidad, será

$$3{,}6\cdot 10^{7}\cdot 5\cdot 10^{3}\cdot 2618=4{,}7\cdot 10^{14}\frac{kg\cdot m^{2}}{s}[\text{también}\, J\cdot s]$$

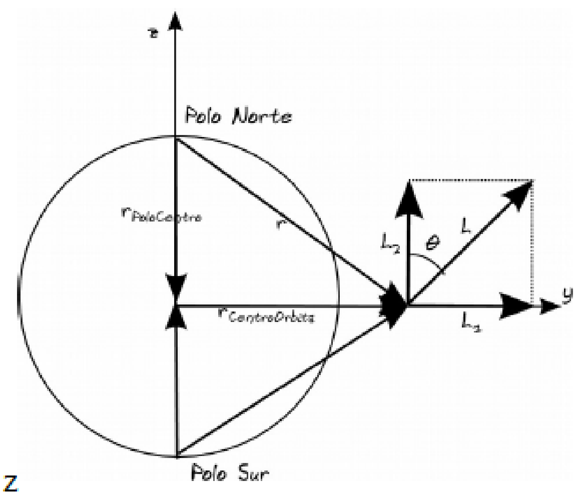
Fijándonos en los que nos solicita el enunciado, indicamos de manera global el módulo, dirección y sentido. Realizamos un diagrama en 2 dimensiones más simplificado donde se ve el ángulo que forma con la vertical: no está a escala, ya que se ve que $|\vec{L}_2|\gg|\vec{L}_1|$, por lo que podríamos intentar aproximar $|\vec{L}|\approx|\vec{L}_2|$

- Módulo: Viendo que los dos vectores calculados antes son perpendiculares entre sí:

$$|\vec{L}|=\sqrt{|\vec{L}_1|^{2}+|\vec{L}_2|^{2}}$$

$$|\vec{L}|=\sqrt{(8{,}3\cdot 10^{13})^{2}+(4{,}7\cdot 10^{14})^{2}}$$

$$|\vec{L}|=4{,}8\cdot 10^{14}\frac{kg\cdot m^{2}}{s}[\text{también}\, J\cdot s]$$



- Dirección: en una recta que está en el plano formado por el eje de la Tierra y el satélite, y que forma con el eje z un ángulo θ, siendo

$$tg\theta=\frac{|\vec{L}_1|}{|\vec{L}_2|}=\frac{4{,}7\cdot 10^{14}}{8{,}3\cdot 10^{13}}\Rightarrow\theta=arctg(5{,}66)=1{,}4\, rad=80^{o}$$

- Sentido: dirigido hacia z positivas (Polo Norte) o z negativas (Polo Sur),

67. 2011-Modelo

A. Problema 1.- Un planeta orbita alrededor de una estrella de masa M. La masa del planeta es m = 10^{24} kg y su órbita es circular de radio r = 10^8 km y periodo T = 3 años terrestres. Determine:

a) La masa M de la estrella.

c) El módulo del momento angular del planeta respecto al centro de la estrella.

d) La velocidad angular de un segundo planeta que describiese una órbita circular de radio igual a 2 r alrededor de la estrella.

Datos: Constante de Gravitación Universal G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}. Considere 1 año terrestre = 365 días

2011-Modelo

A. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler para los datos del planeta, y teniendo en cuenta que la masa que aparece en la fórmula es la del objeto central respecto al que se orbita, en este caso la estrella, y haciendo cambios de unidades (se puede llegar también igualando F_g y F_c)

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM};M=\frac{4\pi^2\cdot R^3}{G\cdot T^2}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot(10^8\cdot10^3)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(3\cdot365\cdot24\cdot3600)^2}=6{,}61\cdot10^{28}kg$$

c) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$

Al calcular el momento angular respecto al centro de la estrella para una órbita circular, el vector posición siempre es perpendicular al vector velocidad, por lo que su módulo será

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|=10^8\cdot10^3\cdot10^{24}\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}61\cdot10^{28}}{10^8\cdot10^3}}=6{,}64\cdot10^{38}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también J\cdot s]$$

d) $$r_2=2\cdot r_1;\omega_2=\frac{v_2}{r_2}=\frac{\sqrt{\frac{GM}{r_2}}}{r_2}=\sqrt{\frac{GM}{(2r_1)^3}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}61\cdot10^{28}}{(2\cdot10^8\cdot10^3)^3}}=2{,}35\cdot10^{-8}rad/s$$

71. 2010-Septiembre-Fase Específica

A. Cuestión 1.- Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Explique en qué punto de su órbita, afelio (punto más alejado del Sol) o perihelio (punto más cercano al Sol) tiene mayor valor:

a) La velocidad.

2010-Septiembre-Fase Específica

A. Cuestión 1.-

a) (Similar a 2009-Septiembre-Cuestión 1-b) Se puede razonar de dos maneras

- El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A = r_P m v_P$ y dado que $r_A > r_P$, tiene que cumplirse que $v_P > v_A$

111. A. Problema 1.- Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio su distancia al Sol es de $6{,}99\times10^{10}$ m, y su velocidad orbital es de $3{,}88\times10^4$ m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de $4{,}60\times10^{10}$ m.

a) Calcule la velocidad orbital de Mercurio en el perihelio.

c) Calcule el módulo de su momento lineal y de su momento angular en el perihelio.

d) De las magnitudes calculadas en los apartados anteriores, decir cuáles son iguales en el afelio.

Datos: Masa de Mercurio $M_M = 3{,}18\times10^{23}$ kg; Masa del Sol $M_S = 1{,}99\times10^{30}$ kg

Constante de Gravitación Universal G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

A. Problema 1.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos plantear

$$r_A m v_A = r_P m v_P \Rightarrow v_P=\frac{r_A v_A}{r_P}=\frac{6{,}99\cdot10^{10}\cdot3{,}88\cdot10^4}{4{,}60\cdot10^{10}}=5{,}9\cdot10^4 m/s$$

c) $|\vec{p}|=m|\vec{v}|=3{,}18\cdot10^{23}\cdot5{,}9\cdot10^{4}=1{,}88\cdot10^{28}\,kg\,\frac{m}{s}$

$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|\,sen\,90°=R|\vec{p}|=4{,}6\cdot10^{10}\cdot1{,}88\cdot10^{28}=8{,}65\cdot10^{38}\,kg\,\frac{m^2}{s}[también\;J\cdot s]$

d) Energía total: igual en afelio y perihelio, ya que se conserva al haber sólo fuerzas conservativa
Momento angular: igual en afelio y perihelio, ya que se conserva al ser fuerzas centrales.
Energía cinética y potencial: distinta en afelio y perihelio al depender de la distancia.
Momento lineal: distinto en afelio y perihelio al haber distintas velocidades.

113. A. Problema 1.- Júpiter tiene aproximadamente una masa 320 veces mayor que la de la Tierra y un volumen 1320 veces superior al de la Tierra. Determine:
a) A que altura h sobre la superficie de Júpiter debería encontrarse un satélite, en órbita circular en torno a este planeta, para que tuviera un período de 9 horas 50 minutos.
b) La velocidad del satélite en dicha órbita.
Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra g=9,8 ms^{-2}; Radio medio de la Tierra R_T=6,37x 10^{6}m

A. Problema 1.-
a) Utilizamos la tercera ley de Kepler

$$T^2_{satélite}=\frac{4\pi^2}{GM_{Júpiter}}R^3_{satélite}\Rightarrow R_{satélite}=\sqrt[3]{\frac{GM_{Júpiter}T^2_{satélite}}{4\pi^2}}$$

Expresamos la masa de la Júpiter en función de los datos proporcionados

$$M_{Júpiter}=320\,M_{Tierra};\,g_{Tierra}=\frac{GM_{Tierra}}{R_T^2}\Rightarrow M_{Tierra}=\frac{g_{Tierra}\cdot R_T^2}{G};\,M_{Júpiter}=\frac{320\cdot g_{Tierra}\cdot R_T^2}{G}$$

Despejamos el Radio de la órbita del satélite, y calculamos altura

$$R_{satélite}=\sqrt[3]{\frac{320\cdot g_{Tierra}\cdot R_T^2\,T^2_{satélite}}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{320\cdot9{,}8\cdot(6{,}37\cdot10^6)^2\cdot(9\cdot3600+50\cdot60)^2}{4\pi^2}}=1{,}59\cdot10^8\,m$$

$$V_{Júpiter}=\frac{4}{3}\pi R^3_{Júpiter}=1320\cdot\frac{4}{3}\pi R^3_{Tierra}\Rightarrow R_{Júpiter}=\sqrt[3]{1320}\,R_{Tierra}$$

$$h=R_{satélite}-R_{Júpiter}=1{,}59\cdot10^8-\sqrt[3]{1320}\cdot6{,}37\cdot10^6=8{,}91\cdot10^7\,m$$

b) $\quad Órbita\;circular\;v=\frac{2\pi R_{satélite}}{T_{satélite}}=\frac{2\cdot\pi\cdot1{,}59\cdot10^8}{9\cdot3600+50\cdot60}=28221\,m/s$

116. A. Problema 1.- La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en torno al planeta Venus es ω_1=1,45x10^{-4} rad/s y su momento angular respecto al centro de la órbita es L_1=2,2x10^{12} kg m_2 s^{-1}
a) Determine el radio r_1 de la órbita del satélite y su masa.
Datos: Constante de Gravitación Universal: G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}; Masa de Venus: M_V=4,87x 10^{24} kg

A. Problema 1.-
a) Como sabemos la velocidad angular, sabemos el periodo

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{1{,}45\cdot10^{-4}}=43332\,s$$

Conocido el periodo y la masa del objeto respecto al que orbita, podemos conocer el radio de la órbita utilizando la tercera ley de Kepler

$$T_1^2=\frac{4\pi^2}{GM}r_1^3\Rightarrow r_1=\sqrt[3]{\frac{GMT_1^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot4{,}87\cdot10^{24}\cdot43332^2}{4\pi^2}}=2{,}49\cdot10^7\,m$$

Al ser una órbita circular los vectores r y v forman siempre 90º

$$L_1=r_1\cdot m\cdot v_1=r_1\cdot m\cdot\omega_1\cdot r_1\Rightarrow m=\frac{L_1}{\omega_1\cdot r_1^2}=\frac{2{,}2\cdot10^{12}}{1{,}45\cdot10^{-4}\cdot(2{,}49\cdot10^7)^2}=24{,}47\,kg$$

118. A. Problema 1.- Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio 10^{11} m y período de 2 años. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia en la posición más próxima a la estrella 10^{11} m y en la más alejada $1,8x10^{11}$ m.
a) ¿Cuál es la masa de la estrella?
b) Halle el período de la órbita del planeta 2.
Datos: Constante de Gravitación Universal: G = $6,67·10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

A. Problema 1.-

a) Utilizamos la tercera ley de Kepler con los datos del planeta 1

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3 \Rightarrow M=\frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2\cdot(10^{11})^3}{6,67\cdot10^{-11}\cdot(2\cdot365\cdot24\cdot3600)^2}=1,49\cdot10^{29}\,kg$$

b) Utilizamos la tercera ley de Kepler, teniendo en cuenta que R, cuando no se trata de una órbita circular, hace referencia al semieje mayor.

$$\frac{T_2^2}{T_1^2}=\frac{R_2^3}{R_1^3};\,T_2=T_1\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}=2\cdot\sqrt{\left(\frac{1,8\cdot10^{11}}{10^{11}}\right)^3}=4,83\,años$$

128. 2000-Modelo

Cuestión 1.- El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio (posición más próxima) el cometa está a $8,75x10^7$ km del Sol y en el afelio (posición más alejada) está a $5,26x10^9$ km del Sol.
a) ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad? ¿Y mayor aceleración?

2000-Modelo

Cuestión 1.-

a) Según la segunda ley de Kepler, la velocidad areolar es constante, luego para barrer la misma cantidad de área estando más cerca del Sol, perihelio, tendrá que ir a mayor velocidad. También podemos razonar que como se trata de fuerzas centrales, el momento angular es constante, y como tanto en perihelio como en afelio el vector posición y el vector velocidad son perpendiculares podemos establecer la relación

$$|\vec{L}_{afelio}|=|\vec{L}_{perihelio}|\Rightarrow m\cdot r_{afelio}\cdot v_{afelio}=m\cdot r_{perihelio}\cdot v_{perihelio}\Rightarrow\frac{r_{afelio}}{r_{perihelio}}=\frac{v_{perihelio}}{v_{afelio}}$$

Como $r_{afelio} > r_{perihelio} \rightarrow v_{perihelio} > v_{afelio}$

Respecto a la aceleración, al ser la única fuerza la gravitatoria y ser central, en módulo podemos $a=F/m=GM/r^2$, luego en los puntos donde r sea menor (perihelio), el módulo del vector aceleración será menor.

Nota: Se podría intentar plantear que la aceleración es centrípeta $a=v^2/r$, y como en perihelio v es mayor y r menor, también es mayor. Es cierto en el perihelio porque en ese punto los vectores posición y velocidad son perpendiculares y toda la aceleración es realmente centrípeta, pero no es cierto en todos los puntos de una órbita no circular, donde la aceleración global tiene una componente tangencial a la trayectoria y otra normal, no solamente hay aceleración centrípeta.