GRAVITACIÓN 3

3. 2019-Julio

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial al ser la órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \qquad v=\frac{2\pi R}{T} \Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2 \Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R^3}$$

Sustituyendo valores numéricos $T=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(6{,}37\cdot10^6+5900\cdot10^3)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}}=1{,}35\cdot10^4\,s$

b) La energía requerida es la energía a aportar, que es la diferencia de energía entre ambas situaciones.

A (superficie antes del lanzamiento): $E_p=-G\frac{Mm}{R_T};E_c=0$

B (órbita): De igualar fuerza gravitatoria y centrípeta en una órbita circular se llega a

$$E_m=E_m+E_p=\frac{-GMm}{R_O}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_O}$$

La diferencia es $E(B)-E(A)=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_O}-(\frac{-GMm}{R_T})=GMm(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2R_O})$

Numéricamente

$$E(B)-E(A)=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot504(\frac{1}{¿}6{,}37\cdot10^6-\frac{1}{2(6{,}37\cdot10^6+5900\cdot10^3)})=1{,}87\cdot10^{10}\,J$$

Usando la definición de gravedad como fuerza por unidad de masa y la ley de gravitación universal

$$g_L=G\frac{M_L}{R_L^2}=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{(1737\cdot10^3)^2}=1{,}62\,m/s^2$$

5. 2019-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) Igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta en órbita circular.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{1737\cdot10^3+250\cdot10^3}}=1{,}57\cdot10^3\,m/s$$

La energía total del satélite en órbita es la energía mecánica

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}=\frac{-1}{2}mv^2$$

Numéricamente $E_m=\frac{-1}{2}\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}\cdot1{,}6\cdot10^4}{1737\cdot10^3+250\cdot10^3}=-1{,}97\cdot10^{10}\,J$

6. **B. Pregunta 1.-**

a) La distancia desde el punto B (2, -2) al punto A (0, 0) es $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}m$

Lo podemos plantear de dos maneras

A. Por trigonometría, utilizando el ángulo que forma r con el eje x, que son 45º

$$|\vec{F}|=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{3\cdot5}{8}=1{,}25\cdot10^{-10}N$$

Calculamos las componentes multiplicando módulo por coseno y seno, tomando signos de diagrama

$$\vec{F}=-|\vec{F}|\cos 45\vec{i}+|\vec{F}|sen\,45\vec{j}=-1{,}25\cdot10^{-10}\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+1{,}25\cdot10^{-10}\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}=-8{,}84\cdot10^{-11}\vec{i}+8{,}84\cdot10^{-11}\vec{j}\,N$$

B. Usando la definición vectorial de la ley de gravitación universal $\vec{F}=-G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$

El vector unitario que va desde el punto B (2, -2) al punto A (0, 0) es $\vec{u}_r=\frac{-2}{2\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}$

$$\vec{F}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{3\cdot5}{8}(\frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j})=-8{,}84\cdot10^{-11}\vec{i}+8{,}84\cdot10^{-11}\vec{j}\,N$$

b) Consideramos el trabajo realizado por el campo y llamamos C al punto (2, 0)

$$W_{B\to C}=-m\Delta V=-m(V(C)-V(B))=-5\cdot(-6{,}67\cdot10^{-11}\frac{3}{2}-(-6{,}67\cdot10^{-11}\frac{3}{2\sqrt{2}}))=1{,}57^{-10}J$$

El trabajo realizado por el campo es positivo: es favor del campo atraer la masa de 5 kg desde la posición B a la posición C más cercana a la masa A

7. **2019-Junio**

A. Pregunta 1.-

a) La distancia desde el punto (4, 3) al origen es $\sqrt{4^2+3^2}=5m$

Lo podemos plantear de dos maneras

A. Por trigonometría, utilizando el ángulo que forma r con el eje x, cuyo coseno 4/5 y seno 3/5.

$$|\vec{g}|=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5}{5^2}=1{,}33\cdot10^{-10}m/s^2\,ó\,N/kg$$

Calculamos las componentes multiplicando módulo por coseno y seno, tomando signos de diagrama

$$\vec{g}=|\vec{g}|\cos\alpha\vec{i}+|\vec{g}|sen\,\alpha\vec{j}=1{,}33\cdot10^{-11}\frac{4}{5}\vec{i}+1{,}33\cdot10^{-11}\frac{3}{5}\vec{j}=1{,}07\cdot10^{-11}\vec{i}+8{,}00\cdot10^{-12}\vec{j}\,m/s^2\,ó\,N/kg$$

B. Usando la definición vectorial $\vec{g}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$

El vector unitario que va desde el punto (4,3) al origen es $\vec{u}_r=\frac{-4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}$

Usando la definición vectorial de campo

$$\vec{g}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5}{5^2}(\frac{-4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j})=1{,}07\cdot10^{-11}\vec{i}+8{,}00\cdot10^{-12}\vec{j}\,m/s^2\,ó\,N/kg$$

Consideramos el trabajo realizado por el campo

$$W_{\infty\to origen}=-m\Delta V=-m(V(origen)-\cancel{V(\infty)})=-0{,}5\cdot(-6{,}67\cdot10^{-11}\frac{5}{5})=3{,}34\cdot10^{-11}J$$

El trabajo realizado por el campo es positivo: es favor del campo atraer una masa desde el infinito acercándola a otra masa.

7. b) Llamando x a la distancia medida desde el origen en la línea que une el origen con el punto (4, 3), podemos plantear que ambos campos tendrán misma dirección en esa línea pero sentido opuesto, y para que el campo total resultante por superposición sea nulo, deben tener ambos el mismo módulo.

$$|\vec{g}_{origen}|=|\vec{g}_{(4,3)}|\Rightarrow G\frac{m_{origen}}{x^2}=G\frac{m_{(4,3)}}{(d_{(4,3)}-x)^2}\Rightarrow\frac{0,5}{x^2}=\frac{5}{(5-x)^2}$$

$$0,1(5-x)^2=x^2\Rightarrow\sqrt{0,1}(5-x)=x\Rightarrow(1+\sqrt{0,1})x=5\sqrt{0,1}\Rightarrow x=\frac{5\sqrt{0,1}}{1+\sqrt{0,1}}\approx 1,2m$$

Matemáticamente hay dos soluciones, pero solamente tiene sentido la que está más cerca de la masa de 0,5 kg.

8. **B. Pregunta 1.-**

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\qquad v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

En un satélite geoestacionario el periodo son 24 h. Sustituyendo valores numéricos

$$R=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}}{4\pi^2}(24\cdot 3600)^2}=4,22\cdot 10^7 m$$

Como se pide altura, $h=R-R_T=4,22\cdot 10^7-6,37\cdot 10^6=3,58\cdot 10^7$ m

La velocidad orbital es $v=\frac{2\cdot\pi\cdot 4,22\cdot 10^7}{(24\cdot 3600)}=3,1\cdot 10^3 m/s$

b) La fuerza centrípeta es $F_c=m\frac{v^2}{R}=5900\cdot\frac{(3,1\cdot 10^3)^2}{4,22\cdot 10^7}=1,34\cdot 10^3 N$

La energía total del satélite en órbita es la energía mecánica

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

Numéricamente $E_m=\frac{-1}{2}\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{23}\cdot 5900}{4,22\cdot 10^7}=-2,78\cdot 10^{10} J$

9. **2019-Modelo**

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow M=\frac{v^2R}{G}$$

Al ser de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R=\frac{v\cdot T}{2\cdot\pi}$

Sustituyendo $M=\frac{v^3T}{2\cdot\pi G}=\frac{(2,3\cdot 10^4)^3\cdot 30\cdot 60}{2\cdot\pi\cdot 6,67\cdot 10^{-11}}=5,226\cdot 10^{25} kg$

b) Usamos directamente la expresión de energía potencial gravitatoria (la deducción implica integrar) y obtenemos la expresión de energía mecánica en órbita

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

Numéricamente $E_m=\frac{-1}{\cancel{2}}\frac{GMm\cdot\cancel{2}\cdot\pi}{v\cdot T}=\frac{-6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,226\cdot 10^{25}\cdot 150\cdot\pi}{2,3\cdot 10^4\cdot 30\cdot 60}=-3,97\cdot 10^{10} J$