ELECTROMAGNETISMO

◊ PROBLEMAS

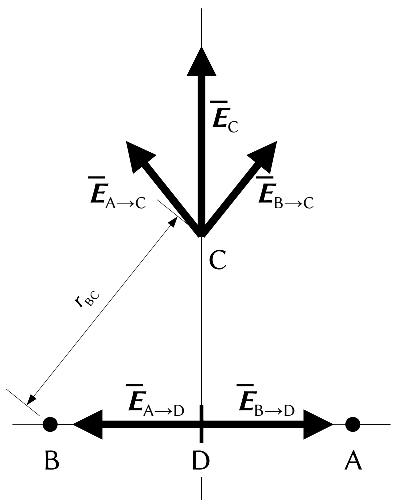
● Campo electrostático

1. Dos cargas eléctricas de 3 mC están situadas en A(4, 0) y B(−4, 0) (en metros). Calcula:
   a) El campo eléctrico en C(0, 5) y en D(0, 0).
   b) El potencial eléctrico en los mismos puntos C y D.
   c) El trabajo para trasladar q' = −1 mC desde C a D.
   Datos: $K = 9·10^9$ N·m²·C⁻²; 1 mC = 10^{-3} C *(P.A.U. Jun. 09)*
   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_C = 1{,}03·10^6\ \overline{\mathbf{j}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\mathbf{0}}$; b) $V_C = 8{,}43·10^6$ V; $V_D = 1{,}35·10^7$ V c) W(ext.) = $-5{,}1·10^3$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Posición de la carga Q_1	$\overline{\boldsymbol{r}}_A$ = (4,00, 0) m
Posición de la carga Q_2	$\overline{\boldsymbol{r}}_B$ = (−4,00, 0) m
Posición del punto C	$\overline{\boldsymbol{r}}_C$ = (0, 5,00) m
Posición del punto D	$\overline{\boldsymbol{r}}_D$ = (0, 0) m
Valor de la carga situada en el punto A	Q_1 = 3,00 mC = $3{,}00·10^{-3}$ C
Valor de la carga situada en el punto B	Q_2 = 3,00 mC = $3{,}00·10^{-3}$ C
Valor de la carga que se traslada	q = −1,00 mC = $-1{,}00·10^{-3}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00·10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en los puntos C y D	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$, $\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Potencial electrostático en los puntos C y D	V_C, V_D
Trabajo para trasladar una carga de −1 mC desde C a D	$W_{C\to D}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{\boldsymbol{E}} = K \dfrac{Q}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A = \sum \vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K \dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$

Solución:

a) Se hace un dibujo con los vectores intensidad de campo electrostático creado por cada carga y la suma vectorial, que es el vector campo $\overline{\boldsymbol{E}}$ resultante.



Para el punto C(0, 5):
Las distancias entre los puntos AC y BC son las mismas:

$$r_{AC} = r_{BC} = |\vec{\boldsymbol{r}}_C - \vec{\boldsymbol{r}}_A| = \sqrt{(0\,[\text{m}] - (-4{,}00\,[\text{m}]))^2 + (5{,}00\,[\text{m}] - 0\,[\text{m}])^2} = 6{,}40 \text{ m}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto C, debida a la carga de 3 mC situada en el punto A, es:

La intensidad de campo electrostático en el punto C(0, 5) debida a la carga de 3 mC situada en el punto B es simétrica a la del punto A:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (4{,}11·10^5\ \overline{\mathbf{i}} + 5{,}14·10^5\ \overline{\mathbf{j}}) \text{ N/C}$$

Por el principio de superposición, la intensidad de campo electrostático resultante en el punto C(0, 5) es la suma vectorial de las intensidades de campo de cada carga:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (-4{,}11\cdot10^5\ \overline{\mathbf{i}} + 5{,}14\cdot10^5\ \overline{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] + (4{,}11\cdot10^5\ \overline{\mathbf{i}} + 5{,}14\cdot10^5\ \overline{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] = 1{,}03\cdot10^6\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Análisis: La dirección del campo resultante es vertical hacia arriba, como se ve en el dibujo.

Para el punto D(0, 0):
Como las distancias AD y BD son las mismas y las cargas situadas en A y en B son iguales, los vectores intensidad de campo electrostático creados por las cargas en A y en B son opuestos (mismo valor y dirección pero sentido contrario como se ve en el dibujo) por lo que su resultante es nula.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\mathbf{0}}$$

b) Los potenciales en el punto C(0, 5) debidos a cada carga son iguales y valen:

$$V_{B\to C} = V_{A\to C} = V_1 = 9{,}00\cdot10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{3{,}00\cdot10^{-3}\ [\text{C}]}{(6{,}40\ [\text{m}])} = 4{,}22\cdot10^6\ \text{V}$$

El potencial electrostático de un punto debido a la presencia de varias cargas, es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} = 2\cdot V_1 = 2\cdot 4{,}22\cdot10^6\ [\text{V}] = 8{,}43\cdot10^6\ \text{V}$$

Análogamente para el punto D(0, 0)

$$V_{B\to D} = V_{A\to D} = V_2 = 9{,}00\cdot10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{3{,}00\cdot10^{-3}\ [\text{C}]}{(4{,}00\ [\text{m}])} = 6{,}75\cdot10^6\ \text{V}$$

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} = 2\cdot V_2 = 2\cdot 6{,}75\cdot10^6\ [\text{V}] = 13{,}5\cdot10^6\ \text{V}$$

c) El trabajo que hace la fuerza del campo es

$$W_{C\to D} = q\,(V_C - V_D) = -1{,}00\cdot10^{-3}\ [\text{C}]\cdot(8{,}43\cdot10^6 - 13{,}5\cdot10^6)\ [\text{V}] = 5{,}1\cdot10^3\ \text{J}$$

Suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = -5{,}1\cdot10^3\ \text{J}$$

2. Tres cargas de +3 μC están situadas equidistantes entre sí sobre una circunferencia de radio 2 m. Calcula:
   a) El potencial eléctrico en el centro de la circunferencia.
   b) El vector campo eléctrico en el mismo punto.
   c) El trabajo para traer una carga q' = 1 μC desde el infinito al centro de la circunferencia.
   Dato: $K = 9\cdot10^9$ N·m²·C⁻² *(P.A.U. Jun. 12)*
   Rta.: a) $V = 4{,}05\cdot10^4$ V; b) $\overline{\boldsymbol{E}}_O = \overline{\mathbf{0}}$; c) $W(\text{ext.}) = 4{,}05\cdot10^{-2}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de cada carga	$Q = 3{,}00\ \mu\text{C} = 3{,}00\cdot10^{-6}$ C
Radio de la circunferencia	$R = 2{,}00$ m
Valor de la carga que se traslada	$q = -1{,}00\ \mu\text{C} = 1{,}00\cdot10^{-6}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\cdot10^9\ \text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}$
Incógnitas	
Potencial electrostático en el centro de la circunferencia	V_O
Intensidad del campo electrostático en el centro de la circunferencia	$\overline{\boldsymbol{E}}_O$
Trabajo para trasladar una carga de 1 μC desde el infinito al centro	$W_{\infty\to O}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Ley de Coulomb (aplicada a dos cargas puntuales separadas una distancia r)	$\vec{F} = K\dfrac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$

Ecuaciones

Principio de superposición	$\vec{F}_A = \sum \vec{F}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{F} = K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$

Solución:

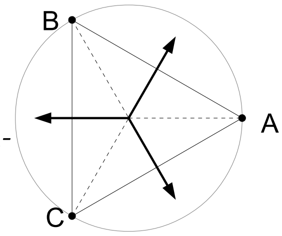
a) Los potenciales en el centro O de la circunferencia debidos a cada carga son iguales porque tanto las cargas como las distancias al centro son iguales. Valen:

$$V_{C\to O} = V_{B\to O} = V_{A\to O} = V = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{3{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(2{,}00\ [\mathrm{m}])} = 1{,}35 \cdot 10^4\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático de un punto debido a la presencia de varias cargas, es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_O = V_{A\to O} + V_{B\to O} + V_{C\to O} = 3 \cdot V = 3 \cdot 1{,}35 \cdot 10^4\ [\mathrm{V}] = 4{,}05 \cdot 10^4\ \mathrm{V}$$

b) Se hace un dibujo con los vectores intensidad de campo electrostático creado por cada carga y la suma vectorial que es el vector campo $\overline{\boldsymbol{E}}$ resultante.



Al ser iguales las tres cargas y estar a la misma distancia del centro de la circunferencia, los tres vectores intensidad de campo electrostático son simétricos y su resultante es nula:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_O = \overline{\mathbf{0}}$$

Si quieres realizar los cálculos:

La intensidad de campo electrostático en el centro O de la circunferencia, debida a la carga de 3 μC situada en el punto A es:

$$\vec{E}_{A\to O} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{3{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(2{,}00\ [\mathrm{m}])^2} (-\vec{\mathbf{i}}) = -6{,}75 \cdot 10^3\ \vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el centro O de la circunferencia, debida a la carga de 3 μC situada en el punto B es:

$$\vec{E}_{B\to O} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{3{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(2{,}00\ [\mathrm{m}])^2} (\cos(-60°)\,\vec{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}(-60°)\,\vec{\mathbf{j}}) = (3{,}38 \cdot 10^3\ \vec{\mathbf{i}} - 5{,}85 \cdot 10^3\ \vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Por simetría, la intensidad de campo electrostático en el centro O de la circunferencia, debida a la carga de 3 μC situada en el punto C es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{C\to O} = 3{,}38 \cdot 10^3\ \bar{\mathbf{i}} + 5{,}85 \cdot 10^3\ \bar{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Por el principio de superposición, la intensidad de campo electrostático resultante en el punto O es la suma vectorial de las intensidades de campo de cada carga:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_O = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to O} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to O} + \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to O} = (-6{,}75 \cdot 10^3\ \bar{\mathbf{i}}) + (3{,}38 \cdot 10^3\ \bar{\mathbf{i}} - 5{,}85 \cdot 10^3\ \bar{\mathbf{j}}) + (3{,}38 \cdot 10^3\ \bar{\mathbf{i}} + 5{,}85 \cdot 10^3\ \bar{\mathbf{j}}) = 0\ \bar{\mathbf{i}} + 0\ \bar{\mathbf{j}}$$

c) El trabajo que hace la fuerza del campo es

$$W_{\infty\to O} = q\,(V_\infty - V_O) = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}] \cdot (0 - 4{,}05 \cdot 10^4)\ [\mathrm{V}] = -4{,}05 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}$$

Suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = 4{,}05 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}$$

3. Tres cargas eléctricas puntuales de 10^{-6} C se encuentran situadas en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Calcula:

a) La intensidad del campo y el potencial electrostático en el vértice libre.
b) Módulo, dirección y sentido de la fuerza del campo electrostático sobre una carga de $-2\cdot10^{-6}$ C situada en dicho vértice.
c) El trabajo realizado por la fuerza del campo para trasladar dicha caga desde el vértice al centro del cuadrado. Interpreta el signo del resultado.

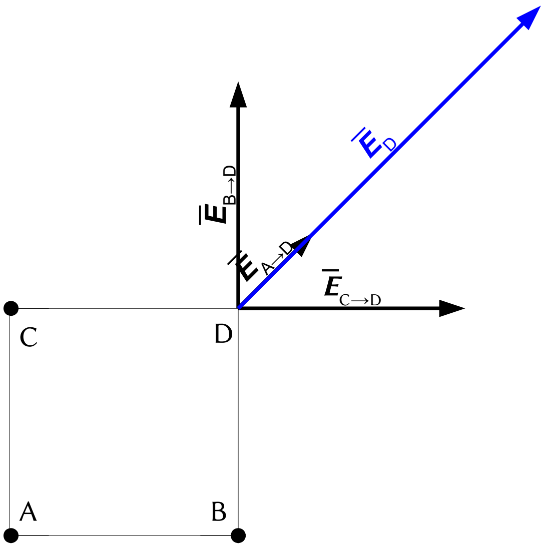
Dato: $K = 9\cdot10^9$ N·m²·C⁻² *(P.A.U. Sep. 13)*

Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}} = 1{,}72\cdot10^4$ N/C, diagonal hacia fuera; $V = 2{,}44\cdot10^4$ V; b) $|\overline{\boldsymbol{F}}| = 0{,}0344$ N, diagonal hacia el centro; c) $W_E = 0{,}0276$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Lado del cuadrado	$l = 1{,}00$ m
Valor de la carga situada en el punto A(0, 0) m	$Q_A = 1{,}00\cdot10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B(1,00, 0) m	$Q_B = 1{,}00\cdot10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto C(0, 1,00) m	$Q_C = 1{,}00\cdot10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto D(1,00, 1,00) m	$Q_D = -2{,}00\cdot10^{-6}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\cdot10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto D	$\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Potencial electrostático en el punto D	V_D
Trabajo del campo al llevar a carga desde D al centro del cuadrado G	$W_{D\to G}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{E} = K\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}_r = \dfrac{\vec{F}}{q}$
Principio de superposición	$\vec{E}_A = \sum \vec{E}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y de cada uno de los vectores campo y de la suma vectorial que es el vector campo $\overline{\boldsymbol{E}}$ resultante.



Las distancias BD y CD valen la longitud del lado:

$$r_{BD} = r_{CD} = l = 1{,}00 \text{ m}$$

La distancia AD es la longitud de la diagonal del cuadrado

$$r_{AD} = |\vec{r}_{AD}| = \sqrt{(1{,}00\,[\text{m}])^2 + (1{,}00\,[\text{m}])^2} = 1{,}41 \text{ m}$$

Se elige un sistema de referencia con el origen en cada carga, tomando el eje X horizontal, positivo hacia la derecha y el eje Y vertical, positivo hacia arriba.

El vector unitario $\overline{\boldsymbol{u}}_{CD}$ del punto D tomando como origen el punto C es el vector $\bar{\mathbf{i}}$ unitario del eje X.

El vector unitario $\overline{\boldsymbol{u}}_{BD}$ del punto D tomando como origen el punto B es el vector $\bar{\mathbf{j}}$ unitario del eje Y.

El vector unitario $\overline{\boldsymbol{u}}_{AD}$ del punto D tomando como origen el punto A es:

$$\vec{u}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|} = \frac{(1{,}00\,\vec{\mathbf{i}} + 1{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\,[\text{m}]}{1{,}41\,[\text{m}]} = 0{,}707\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto D, debida a la carga de 1 µC situada en el punto A es:

$$\vec{E}_{A\to D} = 9{,}00\cdot10^9\,[\text{N·m}^2\text{C}^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\cdot10^{-6}\,[\text{C}]}{(1{,}41\,[\text{m}])^2}(0{,}707\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}) = (3{,}18\cdot10^3\,\vec{\mathbf{i}} + 3{,}18\cdot10^3\,\vec{\mathbf{j}})\text{ N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto D, debida a la carga de 1 µC situada en el punto B es:

$$\vec{E}_{B\to D}=9{,}00\cdot 10^9\ [N\cdot m^2 C^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [C]}{(1{,}00\ [m])^2}\vec{j}=9{,}00\cdot 10^3\ \vec{j}\ N/C$$

Por analogía, la intensidad de campo electrostático en el punto D, debida a la carga de 1 µC situada en el punto C es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{C\to D} = 9{,}00\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}}\ N/C$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \Sigma\ \overline{\boldsymbol{E}}_{i\to D} = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to D}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = (3{,}18\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}} + 3{,}18\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{j}})\ [N/C] + (9{,}00\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{j}})\ [N/C] + (9{,}00\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}})\ [N/C] = (1{,}22\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 1{,}22\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}})\ N/C$$

Análisis: El vector intensidad de campo eléctrico resultado del cálculo es diagonal hacia arriba y hacia la derecha, coherente con el dibujo que se había hecho.

El valor del campo es:

$$|\vec{E}_D|=\sqrt{(1{,}22\cdot 10^4\ [N/C])^2+(1{,}22\cdot 10^4\ [N/C])^2}=1{,}72\cdot 10^4\ N/C$$

Generalizando el resultado para cualquier sistema de referencia,

$|\overline{\boldsymbol{E}}_D| = 1{,}72\cdot 10^4$ N/C. El campo va en la dirección de la diagonal, hacia fuera.

Los potenciales electrostáticos en el punto D debidos a las cargas en C y B son iguales y valen:

$$V_{B\to D}=V_{C\to D}=9{,}00\cdot 10^9\ [N\cdot m^2 C^{-2}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [C]}{(1{,}00\ [m])}=9{,}00\cdot 10^3\ V$$

El potencial electrostático en el punto D debido a la carga en A vale:

$$V_{A\to D}=9{,}00\cdot 10^9\ [N\cdot m^2 C^{-2}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [C]}{(1{,}41\ [m])}=6{,}36\cdot 10^3\ V$$

El potencial electrostático en un punto debido a la presencia de varias cargas, es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} + V_{C\to D} = 6{,}36\cdot 10^3\ [V] + 2\cdot 9{,}00\cdot 10^3\ [V] = 2{,}44\cdot 10^4\ V$$

b) Como la intensidad del campo electrostático en un punto es la fuerza sobre la unidad de carga positiva colocada en ese punto, podemos calcular la fuerza electrostática sobre la carga de −2 µC a partir del vector intensidad de campo electrostático:

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\cdot\overline{\boldsymbol{E}} = -2{,}00\cdot 10^{-6}\ [C]\ (1{,}22\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 1{,}22\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}})\ [N/C] = (-2{,}44\cdot 10^{-2}\ \overline{\mathbf{i}} - 2{,}44\cdot 10^{-2}\ \overline{\mathbf{j}})\ N$$

Generalizando el resultado para cualquier sistema de referencia,

$|\overline{\boldsymbol{F}}| = |q|\cdot|\overline{\boldsymbol{E}}| = 2{,}00\cdot 10^{-6}\ [C]\cdot 1{,}72\cdot 10^4\ [N/C] = 3{,}44\cdot 10^{-2}$ N. La fuerza va en la dirección de la diagonal, hacia el centro del cuadrado, porque la carga es negativa.

c) El trabajo que hace la fuerza del campo cuando se traslada la carga q = −2 µC desde el vértice D al centro G del cuadrado es

$$W_{D\to G} = q\ (V_D - V_G)$$

Falta calcular el potencial electrostático en el punto G situado en el centro del cuadrado de forma análoga a como se hizo antes.
La distancia de cada vértice al centro del cuadrado es la mitad de la diagonal:

$$r_{AG} = r_{BG} = r_{CG} = 1{,}41\ [m] / 2 = 0{,}707\ m$$

Los potenciales electrostáticos en el punto G debidos a las cargas en A, B y C son iguales y valen:

$$V_{A\to G}=V_{B\to G}=V_{C\to G}=V=9{,}00\cdot 10^9\ [N\cdot m^2\cdot C^{-2}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [C]}{(0{,}707\ [m])}=1{,}27\cdot 10^4\ V$$

El potencial electrostático en G es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_G = V_{A\to G} + V_{B\to G} + V_{C\to G} = 3 \cdot V = 3 \cdot 1{,}27{\cdot}10^4\ [V] = 3{,}82{\cdot}10^4\ V$$

El trabajo de la fuerza del campo es

$$W_E = W_{D\to G} = q\,(V_D - V_G) = -2{,}00{\cdot}10^{-6}\ [C] \cdot (2{,}44{\cdot}10^4 - 3{,}82{\cdot}10^4)\ [V] = 2{,}76{\cdot}10^{-2}\ J$$

El trabajo es positivo porque el sentido de la fuerza (hacia el centro del cuadrado) y el del desplazamiento son iguales.

4. Tres cargas de −2, 1 y 1 μC están situadas en los vértices de un triángulo equilátero y distan 1 m del centro del mismo.
   a) Calcula el trabajo necesario para llevar otra carga de 1 μC desde el infinito al centro del triángulo.
   b) ¿Qué fuerza sufrirá la carga una vez que esté situada en el centro del triángulo?
   c) Razona si en algún punto de los lados del triángulo puede existir un campo electrostático nulo.
   Dato: $K = 9{\cdot}10^9\ N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}$ *(P.A.U. Jun. 16)*
   Rta.: a) $W = 0$; b) $\overline{F} = 0{,}0270$ N hacia la carga negativa

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	$Q_1 = -2{,}00\ \mu C = -2{,}00{\cdot}10^{-6}\ C$
Valor de la carga situada en el punto B	$Q_2 = 1{,}00\ \mu C = 1{,}00{\cdot}10^{-6}\ C$
Valor de la carga situada en el punto C	$Q_3 = 1{,}00\ \mu C = 1{,}00{\cdot}10^{-6}\ C$
Distancia de las cargas al centro del triángulo	$r = 1{,}00$ m
Valor de la carga que se traslada	$q = 1{,}00\ \mu C = 1{,}00{\cdot}10^{-6}\ C$
Constante eléctrica	$K = 9{,}00{\cdot}10^9\ N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}$
Incógnitas	
Trabajo para llevar una carga de 1 μC del infinito al centro del triángulo.	$W_{\infty\to O}$
Fuerza sobre la carga en el centro del triángulo	$\overline{\boldsymbol{F}}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Ley de Coulomb (aplicada a dos cargas puntuales separadas una distancia r)	$\vec{F} = K\dfrac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{F}_A = \sum \vec{F}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{F} = K\dfrac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$

Solución:

a) El trabajo W de la fuerza del campo cuando se lleva una carga q desde el infinito al centro O del triángulo es:

$$W_{\infty\to O} = q\,(V_\infty - V_O)$$

Para calcular el potencial V_O electrostático en el centro O del triángulo, se calculan cada uno de los potenciales creados en ese punto por cada carga situada en los vértices y luego se suman.
La ecuación del potencial V electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r:

$$V = K\frac{Q}{r}$$

El potencial electrostático en el centro O del triángulo debido a la carga de −2 μC situada en el punto A a 1 m de distancia vale:

$$V_{A\to O} = 9{,}00\cdot 10^9\ [N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}]\frac{-2{,}00\cdot 10^{-6}\ [C]}{(1{,}00\ [m])} = -1{,}80\cdot 10^4\ V$$

Los potenciales electrostáticos en el centro O del triángulo debidos a las cargas de 1 µC situadas en los puntos B y C son iguales porque tanto las cargas como las distancias al centro son iguales. Valen:

$$V_{B\to O}=V_{C\to O}=9{,}00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}00\ [\mathrm{m}])}=9{,}00\cdot 10^{3}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático de un punto debido a la presencia de varias cargas es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_O = V_{A\to O} + V_{B\to O} + V_{C\to O} = -1{,}80\cdot 10^4\ [\mathrm{V}] + 9{,}00\cdot 10^3\ [\mathrm{V}] + 9{,}00\cdot 10^3\ [\mathrm{V}] = 0$$

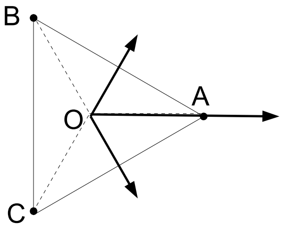
El potencial electrostático en el infinito es nulo por definición.
El trabajo que hace la fuerza del campo cuando se lleva una carga de 1 µC desde el infinito hasta el centro O del triángulo es:

$$W_{\infty\to O} = q\,(V_\infty - V_O) = 1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}] \cdot (0 - 0)\ [\mathrm{V}] = 0$$

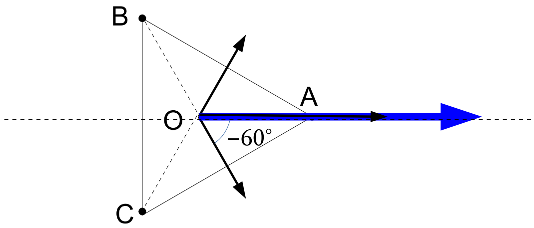
Suponiendo que la carga salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = 0$$

b) Se hace un esquema en el que se dibujan los vectores fuerza electrostática ejercida sobre la carga que está en el centro.



Se dibuja un vector por cada carga, teniendo en cuenta el sentido. Las fuerza ejercidas por las cargas en los puntos B y C son de repulsión (porque las cargas son del mismo signo) pero la fuerza realizada por la carga en A es de atracción y vale el doble que una de las otras.
Se dibuja el vector suma vectorial que es el vector fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ resultante.
Como los vectores fuerza creados por las cargas en B y C son del mismo valor, sus componentes verticales se anulan y la resultante estará dirigida hacia el vértice A.
Se calculan cada una de las fuerzas entre las cargas situadas en los vértices y la carga situada en el centro con la ley de Coulomb.



$$\vec{F}=K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$$

La fuerza electrostática sobre la carga de 1 µC situada en el centro O del triángulo, debida a la carga de -2 µC situada en el punto A es:

$$\vec{F}_{A\to O}=9{,}00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{-2{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot 1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}00\ [\mathrm{m}])^2}(-\vec{\mathbf{i}})=0{,}0180\ \vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{N}$$

(El vector unitario $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ es un vector cuya dirección es la de la línea A → O y el sentido es desde la carga que ejerce la fuerza (A) hacia la carga que la sufre (O): en este caso es el vector unitario horizontal en sentido negativo $-\overline{\mathbf{i}}$)
La fuerza electrostática sobre la carga de 1 µC situada en el centro O del triángulo, debida a la carga de 1 µC situada en el punto B es:

$$\vec{F}_{B\to O}=9{,}00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot 1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}00\ [\mathrm{m}])^2}(\cos(-60°)\,\vec{\mathbf{i}}+\mathrm{sen}(-60°)\,\vec{\mathbf{j}})=(4{,}50\cdot 10^{-3}\,\vec{\mathbf{i}}-7{,}79\cdot 10^{-3}\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N}$$

(Cuando se conoce el ángulo α que forma el vector $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ con el eje X horizontal, el vector unitario se calcula con la expresión: $\overline{\boldsymbol{u}}_r = \cos\alpha\ \overline{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}\ \alpha\ \overline{\mathbf{j}}$)
La fuerza electrostática sobre la carga de 1 µC situada en el centro O del triángulo, debida a la carga de 1 µC situada en el punto C es simétrica a la ejercida por la carga que se encuentra en el punto B:

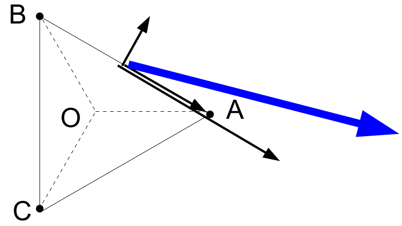
$$\overline{\boldsymbol{F}}_{C\to O} = 4{,}50\cdot 10^{-3}\ \overline{\mathbf{i}} + 7{,}79\cdot 10^{-3}\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{N}$$

(El vector tiene la misma componente horizontal, y la componente vertical es del mismo valor pero de signo contrario).
Por el principio de superposición, la fuerza electrostática resultante sobre la carga de 1 µC situada en el centro O del triángulo es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por cada carga:

$$\bar{F} = \bar{F}_{A\rightarrow O} + \bar{F}_{B\rightarrow O} + \bar{F}_{C\rightarrow O} = (18{,}0\cdot10^{-3}\ \bar{\mathbf{i}}) + (4{,}5\cdot10^{-3}\ \bar{\mathbf{i}} - 7{,}8\cdot10^{-3}\ \bar{\mathbf{j}}) + (4{,}5\cdot10^{-3}\ \bar{\mathbf{i}} + 7{,}8\cdot10^{-3}\ \bar{\mathbf{j}}) = 0{,}0270\ \bar{\mathbf{i}}\ \text{N}$$

Análisis: Coincide con el dibujo pues las componentes verticales se anulan y solo queda la componente horizontal en sentido positivo.

c) No. En ningún punto de los lados del triángulo puede existir un campo electrostático nulo.
En el centro del lado BC se anulan las fuerzas debidas a las cargas situadas en los vértices B y C, porque son iguales pero de sentidos opuestos, pero la fuerza de la carga de −2 µC situada en A queda sin contrarrestar.
Cualquier otro punto de ese lado estaría más cerca de una de las cargas verticales, y en ese caso, la componente vertical de una de ellas sería mayor que la otra y no se anularían.
En los otros lados las fuerzas de la carga situada en A y la del otro vértice siempre sumarían y tampoco se anularían. El dibujo representa la fuerza en el centro del lado BA.



5. Dadas tres cargas puntuales $q_1 = 10^{-3}$ µC en (-8, 0) m, $q_2 = -10^{-3}$ µC en (8, 0) m y $q_3 = 2\cdot10^{-3}$ µC en (0, 8) m. Calcula:
   a) El campo y el potencial eléctricos en (0, 0)
   b) La energía electrostática.
   c) Justifica que el campo electrostático es conservativo.
   Datos: 1 µC = 10^{-6} C; $K = 9\cdot10^9$ N·m²·C⁻² *(P.A.U. Sep. 07)*
   Rta.: a) $\bar{E}_O = 0{,}282\ \bar{\mathbf{i}} - 0{,}282\ \bar{\mathbf{j}}$ N/C; $V_O = 2{,}25$ V; b) $E = -5{,}63\cdot10^{-10}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto 1(−8,00, 0) m	$q_1 = 10^{-3}$ µC $= 1{,}00\cdot10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto 2(+8,00, 0) m	$q_2 = -10^{-3}$ µC $= -1{,}00\cdot10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto 3(0, 8,00) m	$q_3 = 2\cdot10^{-3}$ µC $= 2{,}00\cdot10^{-9}$ C
Posición del punto 1	$\bar{r}_1 = (-8{,}00, 0)$ m
Posición del punto 2	$\bar{r}_2 = (+8{,}00, 0)$ m
Posición del punto 3	$\bar{r}_3 = (0, 8{,}00)$ m
Posición del punto 4 donde hay que calcular el campo y potencial	$\bar{r}_4 = (0, 0)$ m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\cdot10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto (0, 0)	$\bar{E}_4$
Potencial electrostático en el punto (0, 0)	V_4
Energía electrostática	E
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{E} = K\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A = \sum \vec{E}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial electrostática de una interacción entre dos cargas Q y q situadas a una distancia r una de la otra.	$E_p = q\cdot V = K\dfrac{Q\cdot q}{r}$
Energía potencial electrostática de un conjunto de cargas	$E_p = \sum E_{p\,i} = ½\sum E_{p\,q}$

Solución:

a) La intensidad de campo electrostático debida a la carga de 1 en el punto 4 es:

$$\vec{E}_{1\rightarrow4} = 9{,}00\cdot10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\cdot10^{-9}\ [\text{C}]}{(8{,}00\ [\text{m}])^2}\vec{\mathbf{i}} = 0{,}141\ \vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático debida a la carga 2 en el punto 4 es la misma,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{2\to4} = 0{,}141\ \bar{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático debida a la carga 3 en el punto 4 es:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{3\to4}=9{,}00\cdot10^{9}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{2{,}00\cdot10^{-9}\ [\text{C}]}{(8{,}00\ [\text{m}])^2}(-\vec{\mathbf{j}})=-0{,}282\ \vec{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto 4 es, por el principio de superposición:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_4 = \overline{\boldsymbol{E}}_{1\to4} + \overline{\boldsymbol{E}}_{2\to4} + \overline{\boldsymbol{E}}_{3\to4} = 0{,}282\ \bar{\mathbf{i}} - 0{,}282\ \bar{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Su módulo vale:

$$|\vec{\boldsymbol{E}}_4|=\sqrt{((0{,}282\ [\text{N/C}])^2+(0{,}282\ [\text{N/C}])^2)}=0{,}398\ \text{N/C}$$

Los potenciales en el punto 4 debidos a cada carga valen:
El potencial electrostático debido a la carga 1:

$$V_{1\to4}=9{,}00\cdot10^{9}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\cdot10^{-9}\ [\text{C}]}{(8{,}00\ [\text{m}])}=1{,}13\ \text{V}$$

El potencial electrostático debido a la carga 2 es opuesto, ya que la carga 2 vale lo mismo que la carga 1 pero es negativa y se encuentra a la misma distancia:

$$V_{2\to4} = -1{,}13\ \text{V}$$

El potencial electrostático debido a la carga 3 es el doble que el de la carga 1, ya que la carga 3 vale el doble y se encuentra a la misma distancia:

$$V_{3\to4} = 2{,}25\ \text{V}$$

El potencial electrostático del punto 4 es:

$$V_4 = V_{1\to4} + V_{2\to4} + V_{3\to4} = 1{,}13\ \text{V} - 1{,}13\ \text{V} + 2{,}25\ \text{V} = 2{,}25\ \text{V}$$

b) La energía potencial de cada interacción entre dos cargas viene dada por la expresión:

$$E_{\text{p i}}=K\frac{Q\cdot q}{r}$$

La energía total electrostática es la suma de las energías de las tres interacciones: 1↔2; 2↔3 y 1↔3.

$$E_{1\leftrightarrow2}=9{,}00\cdot10^{9}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\cdot10^{-9}\ [\text{C}]\cdot(-1{,}00\cdot10^{-9})\ [\text{C}]}{16{,}00\ [\text{m}]}=-5{,}63\cdot10^{-10}\ \text{J}$$

$$E_{2\leftrightarrow3}=9{,}00\cdot10^{9}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{(-1{,}00\cdot10^{-9})\ [\text{C}]\cdot2{,}00\cdot10^{-9}\ [\text{C}]}{\sqrt{(8{,}00\ [\text{m}])^2+(8{,}00\ [\text{m}])^2}}=-15{,}9\cdot10^{-10}\ \text{J}$$

$$E_{1\leftrightarrow3}=9{,}00\cdot10^{9}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\cdot10^{-9}\ [\text{C}]\cdot2{,}00\cdot10^{-9}\ [\text{C}]}{\sqrt{(8{,}00\ [\text{m}])^2+(8{,}00\ [\text{m}])^2}}=15{,}9\cdot10^{-10}\ \text{J}$$

$$E = E_{1\leftrightarrow2} + E_{2\leftrightarrow3} + E_{1\leftrightarrow3} = -5{,}63\cdot10^{-10}\ \text{J}$$

Análisis: Si se calculase la energía total como la suma de las energías potenciales de las tres cargas, el resultado daría el doble, porque se estarían contando las interacciones dos veces. Por ejemplo la interacción 1 ↔ 2 aparece en el cálculo de la energía potencial de la carga 1 y también en el cálculo de la energía potencial de la carga 2.

c) El campo de fuerzas electrostático es conservativo porque el trabajo que realizan las fuerzas del campo al mover una carga entre dos puntos es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. En este caso se puede definir una función escalar llamada potencial V asociada al campo de fuerzas vectorial de modo que el trabajo entre esos puntos es igual a variación de la energía potencial entre esos dos puntos. Como el potencial electrostático es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$W_{\text{A}\to\text{B}} = -\Delta E_{\text{p}} = q\ (V_{\text{A}} - V_{\text{B}})$$

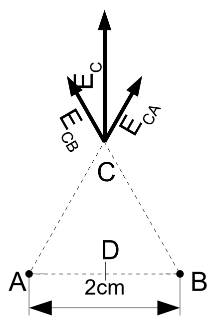
6. En dos de los vértices de un triángulo equilátero de 2 cm de lado se sitúan dos cargas puntuales de +10 μC cada una. Calcula:
   a) El campo eléctrico en el tercer vértice.
   b) El trabajo para llevar una carga de 5 μC desde el tercer vértice hasta el punto medio del lado opuesto.
   c) Justifica por qué no necesitas conocer la trayectoria en el apartado anterior.

   Datos: $K = 9\cdot10^9$ N·m²·C⁻²; 1 μC = 10^{-6} C *(P.A.U. Jun. 08)*

   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_C = 3{,}90\cdot10^8$ N/C, en la bisectriz hacia el exterior; b) W(ext.) = 45,0 J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de cada carga fija	$Q = 10{,}0\ \mu\text{C} = 1{,}00\cdot10^{-5}$ C
Longitud del lado del triángulo equilátero	$L = 2{,}00$ cm $= 0{,}0200$ m
Valor de la carga que se desplaza	$q = 5{,}00\ \mu\text{C} = 5{,}00\cdot10^{-6}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\cdot10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Vector intensidad del campo eléctrico en el tercer vértice	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$
Trabajo para llevar 5 μC desde C el tercer vértice hasta el punto D medio del lado opuesto	$W_{C\to D}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{E}=K\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}_r = \dfrac{\vec{F}}{q}$
Principio de superposición	$\vec{E}_A=\sum \vec{E}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V=K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$

Solución:



a) Se sitúan las cargas en los vértices A y B del lado horizontal y se hace un dibujo de cada uno de los vectores intensidad de campo y de la suma vectorial que es el vector campo resultante en el punto C que es el otro vértice.
El vector unitario del punto C, $\boldsymbol{u}_{AC}$ respecto a A es:

$$\vec{u}_{AD}=\cos 60°\,\vec{\mathbf{i}}+\text{sen}\,60°\,\vec{\mathbf{j}}=0{,}500\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}866\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}_{CA}$ en el punto C debida a la carga de 10 μC situada en A es:

$$\vec{E}_{CA}=9{,}00\cdot10^9\,[\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\cdot10^{-5}\,[\text{C}]}{(0{,}0200\,[\text{m}])^2}(0{,}500\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}866\,\vec{\mathbf{j}})=$$
$$=(1{,}13\cdot10^8\,\vec{\mathbf{i}}+1{,}95\cdot10^8\,\vec{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Por simetría, la intensidad de campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}_{CB}$ en C debida a la carga de 10 μC situada en B es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{CB} = (-1{,}13\cdot10^8\,\overline{\mathbf{i}} + 1{,}95\cdot10^8)\,\overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

El campo resultante en C debido a ambas cargas (principio de superposición) es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = (-1{,}13\cdot10^8\,\overline{\mathbf{i}} + 1{,}95\cdot10^8\,\overline{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] + (1{,}13\cdot10^8\,\overline{\mathbf{i}} + 1{,}95\cdot10^8\,\overline{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] = 3{,}90\cdot10^8\,\overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Análisis: El campo resultante del cálculo es vertical, coherente con el dibujo que se había hecho.

Una respuesta general independiente de cómo se hayan elegido los vértices sería: El campo eléctrico en el tercer vértice vale $3{,}90\cdot10^8$ N/C y está dirigido según la bisectriz del ángulo hacia el exterior del triángulo.

b) Los potenciales en el punto C debidos a cada carga valen:

$$V_{CA}=V_{CB}=9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-5}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}0200\ [\mathrm{m}])}=4{,}50\cdot 10^6\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en el punto C es:

$$V_C = V_{CA} + V_{CB} = 2 \cdot 4{,}50{\cdot}10^6\ [\mathrm{V}] = 9{,}00{\cdot}10^6\ \mathrm{V}$$

Llamando punto D al centro del lado AB, los potenciales en el punto D debidos a cada carga valen:

$$V_{DA}=V_{DB}=9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-5}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}0100\ [\mathrm{m}])}=9{,}00\cdot 10^6\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en el punto D es:

$$V_D = V_{DA} + V_{DB} = 2 \cdot 9{,}00{\cdot}10^6\ [\mathrm{V}] = 1{,}80{\cdot}10^7\ \mathrm{V}$$

El trabajo realizado por las fuerzas del campo electrostático cuando se mueve una carga q = 5 μC desde el punto C al D es la disminución de la energía potencial entre los puntos C y D:

$$W_{C\to D} = q\,(V_C - V_D) = 5{,}00{\cdot}10^{-6}\ [\mathrm{C}] \cdot (9{,}00\ {\cdot}10^6 - 1{,}80{\cdot}10^7)\ [\mathrm{V}] = -45{,}0\ \mathrm{J}$$

El trabajo necesario para mover una carga q = 5 μC desde el punto C al D, suponiendo que llegue a D con la misma velocidad que tenía en C, es:

$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = 45{,}0\ \mathrm{J}$$

c) La fuerza electrostática es una fuerza conservativa y el trabajo que realiza es independiente del camino seguido para ira de un punto a otro.

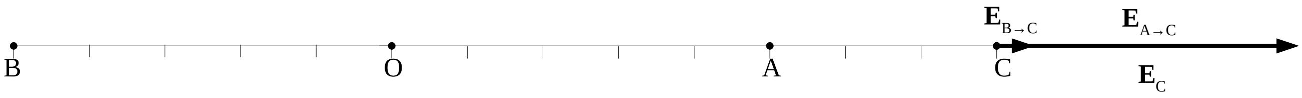
7. Dos cargas puntuales iguales q = 1 μC están situadas en los puntos A(5, 0) y B(−5, 0). Calcula:
   a) El campo eléctrico en los puntos C(8, 0) y D (0, 4)
   b) La energía para trasladar una carga de −1 μC desde C a D.
   Datos: 1 μC = 10^{-6} C, $K = 9{\cdot}10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}$. Las coordenadas en metros. *(P.A.U. Sep. 06)*
   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_C = 1{,}05{\cdot}10^3\ \bar{\mathbf{i}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_D = 2{,}74{\cdot}10^2\ \bar{\mathbf{j}}$ N/C; b) $\Delta E = 8{,}81{\cdot}10^{-4}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	Q_A = 1,00 μC = $1{,}00{\cdot}10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B	Q_B = 1,00 μC = $1{,}00{\cdot}10^{-6}$ C
Posición del punto A	$\boldsymbol{r}_A$ = (5,00, 0,00) m
Posición del punto B	$\boldsymbol{r}_B$ = (−5,00, 0,00) m
Posición del punto C	$\boldsymbol{r}_C$ = (8,00, 0,00) m
Posición del punto D	$\boldsymbol{r}_D$ = (0,00, 4,00) m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00{\cdot}10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}$
Incógnitas	
Vector intensidad del campo eléctrico en los puntos C y D	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$, $\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Energía para llevar una carga de −1 μC desde C hasta D	$W_{C\to D}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{\boldsymbol{E}}=K\frac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r=\frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{q}$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A=\sum \vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$
Energía potencial electrostática de una carga q en un punto A	$E_{p\,A} = q \cdot V_A$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores intensidad de campo y de la suma vectorial que es el vector campo resultante en cada punto.

Punto C



Cálculo de distancias:

$$r_{AC} = (8{,}00,\ 00)\ [\text{m}] - (5{,}00,\ 0{,}00)\ [\text{m}] = 3{,}00\ \text{m}$$

$$r_{BC} = (8{,}00,\ 00)\ [\text{m}] - (-5{,}00,\ 0{,}00)\ [\text{m}] = 13{,}00\ \text{m}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto C debida a la carga de 1 μC situada en A es:

$$\vec{E}_{A\to C} = 9 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(3{,}00\ [\text{m}])^2} \vec{\mathbf{i}} = 1{,}00 \cdot 10^3\ \vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto C debida a la carga de 1 μC situada en B es:

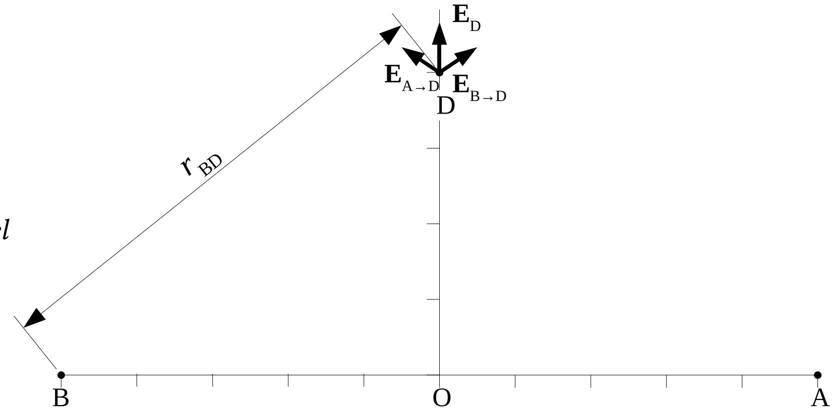
$$\vec{E}_{B\to C} = 9 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(13{,}0\ [\text{m}])^2} \vec{\mathbf{i}} = 53{,}3\ \vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \Sigma\ \overline{\boldsymbol{E}}_i = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = 1{,}00 \cdot 10^3\ \bar{\mathbf{i}}\ [\text{N/C}] + 53{,}3\ \bar{\mathbf{i}}\ [\text{N/C}] = 1{,}05 \cdot 10^3\ \bar{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Análisis: El resultado es coherente con el dibujo que se había hecho.



Punto D.

Cálculo de distancias:

$$r_{BD} = r_{AD} = \sqrt{(5{,}00\ [\text{m}])^2 + (4{,}00\ [\text{m}])^2} = 6{,}40\ \text{m}$$

El vector unitario del punto D, $\overline{\boldsymbol{u}}_{AD}$ respecto a A es:

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{AD} = \vec{\boldsymbol{u}}_{AD} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_{AD}}{|\vec{\boldsymbol{r}}_{AD}|} = \frac{(-5{,}00\ \vec{\mathbf{i}} + 4{,}00\ \vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]}{\sqrt{(-5{,}00\ [\text{m}])^2 + (4{,}00\ [\text{m}])^2}} = -0{,}781\ \vec{\mathbf{i}} + 0{,}625\ \vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto D debida a la carga de 1 μC situada en A es:

$$\vec{E}_{A\to D} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(6{,}40\ [\text{m}])^2} (-0{,}781\ \vec{\mathbf{i}} + 0{,}625\ \vec{\mathbf{j}}) = (-1{,}71 \cdot 10^2\ \vec{\mathbf{i}} + 1{,}37\ 10^2\ \vec{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Por simetría, la intensidad de campo electrostático en el punto D debida a la carga de 1 μC situada en B es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} = 1{,}71 \cdot 10^2\ \bar{\mathbf{i}} + 1{,}37 \cdot 10^2\ \bar{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

El campo resultante en D debido a ambas cargas (principio de superposición) es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = (-1{,}71 \cdot 10^2\ \bar{\mathbf{i}} + 1{,}37 \cdot 10^2\ \bar{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] + (1{,}71 \cdot 10^2\ \bar{\mathbf{i}} + 1{,}37 \cdot 10^2\ \bar{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] = 2{,}74 \cdot 10^2\ \bar{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Análisis: La fuerza resultante del cálculo es vertical, coherente con el dibujo que se había hecho.

b) Los potenciales en el punto C debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to C} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(3{,}00\ [\text{m}])} = 3{,}00 \cdot 10^3\ \text{V}$$

$$V_{B\to C} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(13{,}00\ [\text{m}])} = 6{,}92 \cdot 10^2\ \text{V}$$

El potencial electrostático del punto C es:

$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} = 3{,}00\cdot10^3\ [V] + 6{,}92\cdot10^2\ [V] = 3{,}69\cdot10^3\ V$$

Los potenciales en el punto D debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to D} = V_{B\to D} = 9{,}00\cdot10^9 [N\ m^2\ C^{-2}] \frac{1{,}00\cdot10^{-6}[C]}{(6{,}40[m])} = 1{,}41\cdot10^3\ V$$

El potencial electrostático del punto D es:

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} = 1{,}41\cdot10^3\ [V] + 1{,}41\cdot10^3\ [V] = 2{,}81\cdot10^3\ V$$

La energía que hay que comunicarle a una carga $q = -1\ \mu C$ para moverla desde el punto C al D es la variación de energía potencial desde el punto C al D, suponiendo que llegue a D con la misma velocidad que tenía en C.

$$\Delta E_{C\to D} = q\cdot V_D - q\cdot V_C = q\,(V_D - V_C) = -1{,}00\cdot10^{-6}\ [C]\cdot(2{,}81\cdot10^3 - 3{,}69\cdot10^3)\ [V] = 8{,}81\cdot10^{-4}\ J$$

8. Tres cargas puntuales de 2 μC se sitúan respectivamente en A(0, 0), B(1, 0) y C(1/2, $\sqrt{3}/2$). Calcula:
   a) El campo eléctrico en los puntos D(1/2, 0) y F(1/2, $1/(2\sqrt{3})$)
   b) El trabajo para trasladar una carga q'= 1 μC de D a F.
   c) Con este trabajo, ¿aumenta o disminuye la energía electrostática del sistema?
   Datos: Las coordenadas en metros, $K = 9\cdot10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$; 1 μC = 10^{-6} C *(P.A.U. Jun. 07)*
   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_D = -2{,}40\cdot10^4\ \overline{\mathbf{j}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_F = \overline{\mathbf{0}}$; b) $W_{D\to F}$ (exterior) = $-W_{D\to F}$ (campo) = $7\cdot10^{-4}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	$Q_A = 2{,}00\ \mu C = 2{,}00\cdot10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B	$Q_B = 2{,}00\ \mu C = 2{,}00\cdot10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto C	$Q_C = 2{,}00\ \mu C = 2{,}00\cdot10^{-6}$ C
Carga de la partícula que se desplaza	$q = 1{,}00\ \mu C = 1{,}00\cdot10^{-6}$ C
Posición del punto A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A = (0, 0)$ m
Posición del punto B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B = (1{,}00, 0)$ m
Posición del punto C	$\overline{\boldsymbol{r}}_C = (1/2, \sqrt{3}/2) = (0{,}500, 0{,}866)$ m
Posición del punto D	$\overline{\boldsymbol{r}}_D = (0{,}500, 0)$ m
Posición del punto F	$\overline{\boldsymbol{r}}_F = (1/2, 1/(2\sqrt{3})) = (0{,}500, 0{,}289)$ m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\cdot10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto D	$\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Intensidad del campo electrostático en el punto F	$\overline{\boldsymbol{E}}_F$
Trabajo para llevar q desde D hasta F	$W_{D\to F}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r = \frac{\vec{F}}{q}$
Principio de superposición	$\vec{E}_A = \sum \vec{E}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$

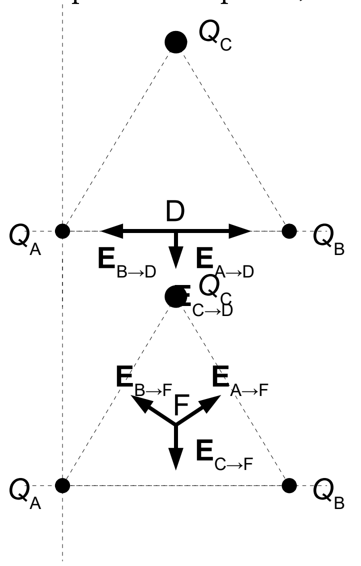
Solución:

a) La intensidad de campo electrostático en el punto D debida a la carga situada en el punto A es:

$$\vec{E}_{A\to D} = 9{,}00\cdot10^9\ [N\cdot m^2\cdot C^{-2}]\cdot\frac{2{,}00\cdot10^{-6}\ [C]}{(0{,}500\ [m])^2}\vec{\mathbf{i}} = 7{,}20\cdot10^4\ \vec{\mathbf{i}}\ N/C$$

La intensidad de campo electrostático en el punto D debida a la carga situada en el punto B es opuesta,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} = -7{,}20\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$



La intensidad de campo electrostático en el punto D debida a la carga situada en el punto C es:

$$\vec{E}_{C\to D}=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{2{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}866\ [\text{m}])^2}(-\vec{\mathbf{j}})=-2{,}40\cdot 10^4\ \vec{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto D es, por el principio de superposición:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to D} = -2{,}40\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Las distancias de los puntos A, B y C al punto F valen todas lo mismo,

$$r_{BF}=r_{AF}=\sqrt{(0{,}500\ [\text{m}])^2+(0{,}289\ [\text{m}])^2}=0{,}577\ \text{m}$$

$$r_{CF}=\sqrt{(0{,}500\ [\text{m}]-0{,}500\ [\text{m}])^2+(0{,}289\ [\text{m}]-0{,}866\ [\text{m}])^2}=0{,}577\ \text{m}$$

Los módulos de los vectores campo creados en F por las cargas (iguales) situadas en los puntos A, B y C son iguales. Al estar situados simétricamente, su resultante es nula.

$$\vec{E}_{A\to F}=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{2{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}577\ [\text{m}])^2}\left(\frac{0{,}500\ \vec{\mathbf{i}}+0{,}289\ \vec{\mathbf{j}}}{0{,}577}\right)=(4{,}68\cdot 10^4\ \vec{\mathbf{i}}+2{,}70\cdot 10^4\ \vec{\mathbf{i}})\ \text{N/C}$$

Por simetría

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to F} = -4{,}68\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 2{,}70\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_{C\to F}=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{2{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}577\ [\text{m}])^2}(-\vec{\mathbf{j}})=-5{,}40\cdot 10^4\ \vec{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

El campo resultante en el punto F, por el principio de superposición es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_F = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to F} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to F} + \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to F} = (4{,}68\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 2{,}70\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}}) + (-4{,}68\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 2{,}70\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}}) - 5{,}40\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}} = \overline{\mathbf{0}}$$

b) Los potenciales en el punto D debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to D}=V_{B\to D}=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{2{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}500\ [\text{m}])}=3{,}60\cdot 10^4\ \text{V}$$

$$V_{C\to D}=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{2{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}866\ [\text{m}])}=2{,}08\cdot 10^4\ \text{V}$$

El potencial electrostático del punto D es:

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} + V_{C\to D} = 2\cdot 3{,}60\cdot 10^4\ [\text{V}] + 2{,}08\cdot 10^4\ [\text{V}] = 9{,}28\cdot 10^4\ \text{V}$$

Los potenciales en el punto F debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to F}=V_{B\to F}=V_{C\to F}=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{2{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}577\ [\text{m}])}=3{,}12\cdot 10^4\ \text{V}$$

El potencial electrostático del punto F es:

$$V_F = V_{A\to F} + V_{B\to F} + V_{C\to F} = 3\cdot 3{,}12\cdot 10^4\ [\text{V}] = 9{,}35\cdot 10^4\ \text{V}$$

El trabajo que hace la fuerza del campo es

$$W_{D\to F} = q\ (V_D - V_F) = 1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]\cdot(9{,}28\cdot 10^4 - 9{,}35\cdot 10^4)\ [\text{V}] = -7\cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

Análisis: Al restar dos potenciales tan próximos, se pierden cifras significativas ↗.

Suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = 7\cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

c) En un campo conservativo, el trabajo de las fuerzas del campo es igual y de sentido contrario a la variación de la energía potencial.

$$W_{A \to B} = -\Delta E_p = q\,(V_A - V_B)$$

Como el trabajo de las fuerzas del campo electrostático es negativo, la energía potencial del sistema aumenta.

9. En un punto de coordenadas (0, 3) está situada una carga q_1 = 7,11 nC, y en el punto de coordenadas (4, 0) está situada otra carga q_2 = 3,0 nC. Las coordenadas están expresada en metros. Calcula:
   a) La expresión vectorial de la intensidad del campo eléctrico en el punto (4, 3).
   b) El valor del potencial eléctrico en el punto (4, 3).
   c) Indica el signo y el valor de la carga q_3 que hay que situar en el origen para que el potencial eléctrico en el punto (4, 3) se anule.
   DATO: $K = 9·10^9$ N·m²·C⁻² *(A.B.A.U. Jun. 19)*
   Rta.: A) $\overline{\boldsymbol{E}} = (4\,\bar{\mathbf{i}} + 3\,\bar{\mathbf{j}})$ N/C; b) V = 25 V; c) q_3 = −13,9 nC

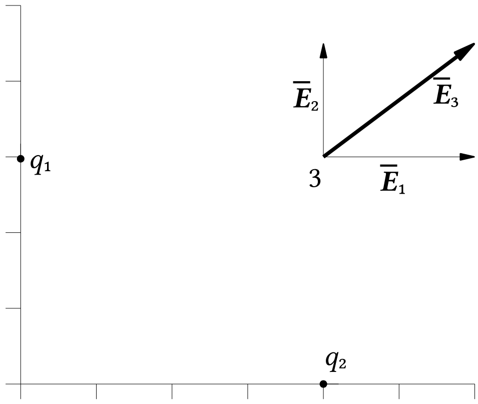
Datos	***Cifras significativas: 3***
Posición de la carga q_1	$\overline{\boldsymbol{r}}_1$ = (0, 3,00) m
Posición de la carga q_2	$\overline{\boldsymbol{r}}_2$ = (4,00, 0) m
Posición del punto 3	$\overline{\boldsymbol{r}}_3$ = (4,00, 3,00) m
Valor de la carga situada en el punto 1	q_1 = 7,11 nC = $7,11·10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto 2	q_2 = 3,00 nC = $3,00·10^{-9}$ C
Constante eléctrica	$K = 9,00·10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto 3	$\overline{\boldsymbol{E}}_3$
Potencial electrostático en el punto 3	V_3
Valor de la carga situada en el origen para que el potencial en 3 sea nulo	q_3
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada la una distancia r	$\vec{\boldsymbol{E}} = K \dfrac{Q}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A = \sum \vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada la una distancia r	$V = K \dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A \to B} = q\,(V_A - V_B)$

Solución:

a) Se hace un dibujo con los vectores intensidad de campo electrostático creado por cada carga y la suma vectorial, que es el vector campo $\overline{\boldsymbol{E}}$ resultante.

La intensidad de campo electrostático en el punto 3, debido a la carga de 7,11 nC situada en el punto 1, es:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{1\to 3} = 9,00·10^9\,[\text{N·m}^2·\text{C}^{-2}] \frac{7,11·10^{-9}\,[\text{C}]}{(4,00\,[\text{m}])^2} \vec{\mathbf{i}} = 4,00\,\vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$



La intensidad de campo electrostático en el punto 3, debido a la carga de 3,00 nC situada en el punto 2, es:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{2\to 3} = 9,00·10^9\,[\text{N·m}^2·\text{C}^{-2}] \frac{3,00·10^{-9}\,[\text{C}]}{(3,00\,[\text{m}])^2} \vec{\mathbf{j}} = 3,00\,\vec{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Por el principio de superposición, la intensidad de campo electrostático resultante en el punto 3(4, 3) es la suma vectorial de las intensidades de campo de cada carga:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_3 = \overline{\boldsymbol{E}}_{1\to 3} + \overline{\boldsymbol{E}}_{2\to 3} = 4{,}00\ \overline{\mathbf{i}}\ [\text{N/C}] + 3{,}00\ \overline{\mathbf{j}}\ [\text{N/C}] = (4{,}00\ \overline{\mathbf{i}} + 3{,}00\ \overline{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Análisis: La dirección del campo resultante está de acuerdo con el dibujo.

b) El potencial en el punto 3 debido a la carga de 7,11 nC situada en el punto 1, es:

$$V_1 = 9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{7{,}11\cdot 10^{-9}\ [\text{C}]}{(4{,}00\ [\text{m}])} = 16{,}0\ \text{V}$$

Lo potencial en el punto 3 debido a la carga de 4,00 nC situada en el punto 2, es:

$$V_2 = 9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{3{,}00\cdot 10^{-9}\ [\text{C}]}{(3{,}00\ [\text{m}])} = 9{,}00\ \text{V}$$

El potencial electrostático de un punto debido a la presencia de varias cargas, es la suma algebraica de los potenciales de la cada carga.

$$V_3 = V_1 + V_2 = 16{,}0\ [\text{V}] + 9{,}00\ [\text{V}] = 25{,}0\ \text{V}$$

c) La distancia del punto 3 al origen es:

$$r_{3\text{O}} = \sqrt{(3{,}00\ [\text{m}])^2 + (4{,}00\ [\text{m}])^2} = 5{,}00\ \text{m}$$

El potencial de la carga en el origen en el punto 3 sería

$$V'_3 = 9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{q_3\ [\text{C}]}{(5{,}00\ [\text{m}])}$$

Para que el potencial en el punto 3 sea nulo, debe cumplirse que:

$$9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{q_3\ [\text{C}]}{(5{,}00\ [\text{m}])} + 25{,}0\ [\text{V}] = 0$$

$$q_3 = \frac{-25{,}0\ [\text{V}]\cdot 5{,}00\ [\text{m}]}{9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]} = -1{,}39\cdot 10^{-8}\ \text{C} = -13{,}9\ \text{nC}$$

10. Una carga q de 2 mC está fija en el punto A(0, 0), que es el centro de un triángulo equilátero de lado $3\sqrt{3}$ m. Tres cargas iguales Q están en los vértices y la distancia de cada carga Q a A es 3 m. El conjunto está en equilibrio electrostático. Calcula:
    a) El valor de Q.
    b) La energía potencial de cada carga Q.
    c) La energía puesta en juego para que el triángulo rote 45° alrededor de un eje que pasa por A y es perpendicular al plano del papel.

    $K = 9\cdot 10^9\ \text{N·m}^2\text{·C}^{-2}$ *(P.A.U. Jun. 11)*

    Rta.: a) $Q = -3{,}46$ mC; b) $E_p = 2{,}07\cdot 10^4$ J; c) $\Delta E = 0$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	$q = 2{,}00$ mC = 0,00200 C
Longitud del lado del triángulo	$L = 3\sqrt{3}$ m = 5,20 m
Distancia del centro del triángulo a cada vértice	$d = 3{,}00$ m
Posición del punto A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A = (0, 0)$ m
Ángulo girado por el triángulo	$\theta = 45°$
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\cdot 10^9\ \text{N·m}^2\text{·C}^{-2}$
Incógnitas	
Valor de la carga Q que se encuentra en cada uno de los vértices	Q
Energía potencial de cada carga Q	E_p
Energía necesaria para rotar el triángulo 45° alrededor de un eje perpendicular	ΔE
Otros símbolos	

Incógnitas

Distancia entre dos puntos A y B — r_{AB}

Ecuaciones

Ley de Coulomb: fuerza entre dos cargas puntuales Q y q a una distancia r — $\vec{F}=K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$

Principio de superposición — $\vec{F}_A=\sum\vec{F}_{Ai}$

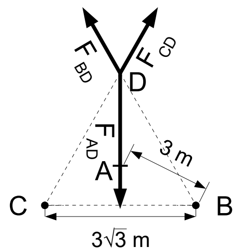
Energía potencial electrostática de una interacción entre dos cargas Q y q situadas a una distancia r una de la otra. — $E_p=q\cdot V=K\frac{Q\cdot q}{r}$

Energía potencial electrostática de un conjunto de cargas — $E_p = \Sigma E_{p\ i} = ½\Sigma E_{p\ q}$

Trabajo de una fuerza $\vec{F}$ constante cuando su punto de aplicación se desplaza $\Delta\vec{r}$ — $W_F = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y de cada uno de los vectores fuerza electrostática de dos de las tres cargas iguales Q y de la carga central q sobre la tercera carga Q.



La fuerza electrostática $\vec{F}_{AD}$ de la carga q situada en el punto A sobre la carga Q en el punto D es, en función de la carga Q desconocida:

$$\vec{F}_{A\to D}=9{,}00\cdot10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{0{,}00200\ [\text{C}]\cdot Q}{(3{,}00\ [\text{m}])^2}\vec{\mathbf{j}}=2{,}00\cdot10^6\,Q\,\vec{\mathbf{j}}\ \text{N}$$

La fuerza electrostática $\vec{F}_{B\to D}$ que ejerce la carga Q situada en el punto B sobre la carga Q en el punto D es, en función de la carga Q desconocida:

$$\vec{F}_{B\to D}=9{,}00\cdot10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{Q\cdot Q}{(5{,}20\ [\text{m}])^2}(\cos 120°\,\vec{\mathbf{i}}+\text{sen}\,120°\,\vec{\mathbf{j}})=(-167\,\vec{\mathbf{i}}+289\,\vec{\mathbf{j}})\cdot10^6\,Q^2\ [\text{N}]$$

Por simetría, la fuerza electrostática $\vec{F}_{C\to D}$ que ejerce la carga Q situada en el punto C sobre la carga Q en el punto D es,

$$\vec{F}_{C\to D} = (167\,\vec{\mathbf{i}} + 289\,\vec{\mathbf{j}})\cdot10^6\,Q^2\ [\text{N}]$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\vec{F}_D = \vec{F}_{A\to D} + \vec{F}_{B\to D} + \vec{F}_{C\to D} = \vec{\mathbf{0}}$$

La fuerza resultante es nula porque la carga en D está en equilibrio. Las componentes x de las fuerzas se anulan. Para las componentes y:

$$(2{,}00 + 289\,Q + 289\,Q)\,Q\cdot10^6 = 0$$

$$Q=\frac{-2{,}00\,\text{C}}{(2\cdot289)}=-0{,}00346\ \text{C}=-3{,}46\ \text{mC}$$

b) La energía potencial de cada carga es la suma de las energías potenciales de todos los pares de carga que le afecten:

$$E_{p\ Q} = \Sigma E_{p\ i}$$

$$E_{p\ D} = E_{p\ CD} + E_{p\ BD} + E_{p\ AD}$$

$$E_{p\ Q}=9{,}00\cdot10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\left(2\frac{(-3{,}46\cdot10^{-3}\ [\text{C}])^2}{(5{,}20\ [\text{m}])}+\frac{2\cdot10^{-3}\ [\text{C}]\cdot(-3{,}46\cdot10^{-3}\ [\text{C}])}{(3{,}00\ [\text{m}])}\right)=2{,}08\cdot10^4\ \text{J}$$

c) La energía potencial de la disposición de cargas es la suma de las energías potenciales de todos los pares de cargas o, lo que es lo mismo, la mitad de la suma de las energías potenciales de todas las cargas (porque en esta caso cada interacción se cuenta dos veces)

$$E_{p\ A}=3\cdot\left(9{,}00\cdot10^9\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{2\cdot10^{-3}\ [\text{C}]\cdot(-3{,}46\cdot10^{-3}\ [\text{C}])}{(3{,}00\ [\text{m}])}\right)=-6{,}24\cdot10^4\ \text{J}$$

$$E_p=\frac{1}{2}\left(E_{p\ A}+3\cdot E_{p\ Q}\right)=0$$

Como al girar 45°, las distancias relativas no cambian, la energía de la nueva disposición es la misma, y la energía total requerida es cero.

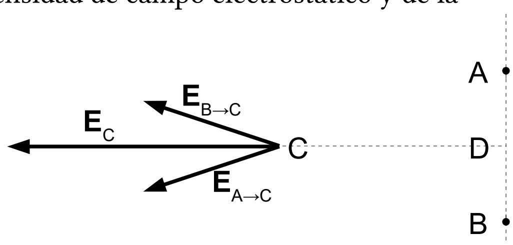
$$\Delta E = E_p'{}_T - E_{p\,T} = 0$$

11. Dos cargas puntuales iguales de +2 μC se encuentran en los puntos (0, 1) m y (0, −1) m. Calcula:
    a) El vector campo y el potencial electrostático en el punto (−3, 0) m.
    b) Calcula el trabajo necesario para trasladar una carga de +3 μC desde el infinito al citado punto.
    Si en el punto (−3, 0) m se abandona una carga de −2 μC y masa 1 g:
    c) Calcula su velocidad en el origen de coordenadas.
    DATO: $K = 9\cdot10^9$ N·m²·C⁻² *(P.A.U. Sep. 14)*
    Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}} = -3{,}42\cdot10^3\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $V = 1{,}14\cdot10^4$ V; b) W(ext.) = -W(campo) = 0,0342 J; c) $\overline{\boldsymbol{v}} = 9{,}92\ \overline{\mathbf{i}}$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valores de las cargas fijas	$Q = 2{,}00$ μC $= 2{,}00\cdot10^{-6}$ C
Posicións de las cargas fixas: A	$\overline{r}_A = (0,\ 1{,}00)$ m
B	$\overline{r}_B = (0,\ -1{,}00)$ m
Posición del punto C	$\overline{r}_C = (-3{,}00,\ 0)$ m
Valor de la carga que se traslada desde el infinito	$q_1 = 3{,}00$ μC $= 3{,}00\cdot10^{-6}$ C
Carga que se desplaza hasta el origen	$q_2 = -2{,}00$ μC $= -2{,}00\cdot10^{-6}$ C
Masa de la carga que se desplaza hasta el origen	$m = 1{,}00$ g $= 1{,}00\cdot10^{-3}$ kg
Velocidad inicial en el punto C (se supone)	$v_C = 0$
Posición del punto D por el que pasa la carga que se desplaza	$\overline{r}_D = (0,\ 0)$ m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\cdot10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Vector campo electrostático en el punto C	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$
Potencial electrostático en el punto C	V_C
Trabajo necesario para trasladar 3 μC desde el infinito al punto C	$W_{\infty\to C}$
Velocidad que tendrá la carga de −2 μC al pasar por el punto D	v_D
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Ley de Coulomb (aplicada a dos cargas puntuales separadas una distancia r)	$\vec{F} = K\dfrac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{F}_A = \sum \vec{F}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$
Energía potencial electrostática de una carga en un punto A	$E_{p\,A} = q \cdot V_A$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Principio de la conservación de la energía entre dos puntos A y B	$(E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores intensidad de campo electrostático y de la suma vectorial que es el campo $\overline{\boldsymbol{E}}_C$ resultante.



Cálculo de distancias:

$$r_{AC} = r_{BC} = \sqrt{(3{,}00\ [\mathrm{m}])^2 + (1{,}00\ [\mathrm{m}])^2} = 3{,}16\ \mathrm{m}$$

El vector unitario del punto C, $\overline{\boldsymbol{u}}_{AC}$ respecto a A es:

$$\vec{u}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|} = \frac{(-3{,}00\,\vec{\mathbf{i}} - 1{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\ [\mathrm{m}]}{3{,}16\ [\mathrm{m}]} = -0{,}949\,\vec{\mathbf{i}} - 0{,}316\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto C debido a la carga de +2 μC situada en A es:

$$\vec{E}_{A \to C} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{2 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(3{,}16\ [\text{m}])^2} (-0{,}949\ \vec{\mathbf{i}} - 0{,}343\ \vec{\mathbf{j}}) = (-1{,}71 \cdot 10^3\ \vec{\mathbf{i}} - 5{,}69 \cdot 10^2\ \vec{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B \to C} = (-1{,}71 \cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}} + 5{,}69 \cdot 10^2\ \overline{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{A \to C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B \to C} = (-1{,}71 \cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}} - 5{,}69 \cdot 10^2\ \overline{\mathbf{j}}\ [\text{N}] + (-1{,}71 \cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}} + 5{,}69 \cdot 10^2\ \overline{\mathbf{j}})\ [\text{N}] = -3{,}42 \cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Análisis: El campo resultante del cálculo es horizontal hacia la izquierda, coherente con el dibujo que se había hecho.

El potencial en el punto C debido a cada carga vale lo mismo, porque la distancia es la misma (están situadas simétricamente) y el valor de la carga también es el mismo.

$$V_C = V_{A \to C} + V_{B \to C} = 2 \cdot V_{A \to C} = 2 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{2{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(3{,}16\ [\text{m}])} = 1{,}14 \cdot 10^4\ \text{V}$$

b) El trabajo realizado por las fuerzas del campo electrostático cuando se mueve una carga q_1 = +3 μC desde el infinito hasta el punto C es la disminución de la energía potencial entre los puntos ∞ y C. Como se toma el infinito como origen de potencial, $V_\infty = 0$,

$$W_{\infty \to C} = q_1 \cdot (V_\infty - V_C) = 3{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}] \cdot (0 - 1{,}14 \cdot 10^4)\ [\text{V}] = -0{,}0342\ \text{J}$$

El trabajo necesario para mover una carga q = +3 μC desde el infinito hasta el punto C, suponiendo que llegue a C con la misma velocidad que tenía en el infinito, es:

$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = 0{,}0342\ \text{J}$$

c) Como la fuerza electrostática es una fuerza conservativa la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$½\ m\ v_C^2 + q \cdot V_C = ½\ m\ v_D^2 + q \cdot V_D$$

El potencial en el punto D debido a cada carga vale lo mismo, porque la distancia es la misma (están situadas simétricamente) y el valor de la carga también es el mismo.

$$V_D = 2 \cdot V_{A \to D} = 2 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{2{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(1{,}00\ [\text{m}])} = 3{,}60 \cdot 10^4\ \text{V}$$

Aplicando el principio de conservación de la energía

$$-2{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}] \cdot (-1{,}14 \cdot 10^4\ [\text{V}]) = (1{,}00 \cdot 10^{-3}\ [\text{kg}] \cdot v_D^2) / 2 + (-2{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]) \cdot (3{,}60 \cdot 10^4\ [\text{V}])$$

$$v_D = 9{,}92\ \text{m/s}$$

Como la velocidad es un vector, hay que deducir la dirección y sentido.
Aunque el valor de la intensidad de campo electrostático resultante y la aceleración en el origen es cero, por el valor de la intensidad de campo calculado en el punto C (−3, 0) [m] y el hecho de que pase por el origen, se puede deducir que la aceleración tiene la dirección del eje X en sentido positivo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la línea de la aceleración. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje X en sentido positivo

$$\overline{\boldsymbol{v}}_D = 9{,}92\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{m/s}$$

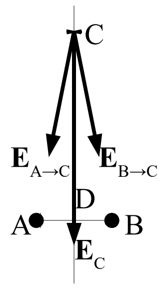
12. Dos cargas puntuales negativas iguales, de -10^{-3} μC, se encuentran sobre el eje de abscisas, separadas una distancia de 20 cm. A una distancia de 50 cm sobre la vertical que pasa por el punto medio de la línea que las une, se coloca una tercera partícula (puntual) de $+10^{-3}$ μC de carga y 1 g de masa, inicialmente en reposo. Calcula:
    a) El campo y potencial eléctrico creado por las dos primeras en la posición inicial de la tercera.
    b) La velocidad de la tercera carga al llegar al punto medio de la línea de unión entre las dos primeras.

Datos: 1 µC = 10^{-6} C, K = $9·10^9$ N·m²·C⁻² (solo se usa la interacción electrostática) *(P.A.U. Jun. 04)*
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}$ = 67,9 N/C vertical hacia el eje de abscisas. V = −35,3 V; b) $\overline{\boldsymbol{v}}$ = −0,017 $\overline{\mathbf{j}}$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	$Q_A = -1{,}00·10^{-3}$ µC $= -1{,}00·10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto B	$Q_B = -1{,}00·10^{-3}$ µC $= -1{,}00·10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto C	$Q_C = 1{,}00·10^{-3}$ µC $= 1{,}00·10^{-9}$ C
Masa de la partícula que se desplaza	m = 1,00 g = $1{,}00·10^{-3}$ kg
Velocidad inicial en el punto C	$v_C = 0$
Posición del punto A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A$ = (−0,100, 0) m
Posición del punto B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B$ = (0,100, 0) m
Posición del punto C	$\overline{\boldsymbol{r}}_C$ = (0, 0,500) m
Posición del punto D	$\overline{\boldsymbol{r}}_D$ = (0, 0) m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00·10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto C	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$
Potencial electrostático en el punto C	V_C
Velocidad que tendrá al pasar por el punto D	v_D
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A=\sum\vec{E}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial electrostática de una carga en un punto A	$E_{p\,A} = q \cdot V_A$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Principio de la conservación de la energía entre dos puntos A y B	$(E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y de cada uno de los vectores intensidad de campo electrostático y de la suma vectorial que es el vector $\overline{\boldsymbol{E}}_C$ intensidad de campo resultante.



Cálculo de distancias:

$$r_{AC}=r_{BC}=\sqrt{(0{,}100\ [\mathrm{m}])^2+(0{,}500\ [\mathrm{m}])^2}=0{,}510\ \mathrm{m}$$

El vector unitario del punto C, $\overline{\boldsymbol{u}}_{AC}$ respecto a A es:

$$\vec{u}_{AC}=\frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|}=\frac{(0{,}100\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}500\,\vec{\mathbf{j}})\ [\mathrm{m}]}{0{,}510\ [\mathrm{m}]}=0{,}196\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}981\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto C debida a la carga de −1 nC situada en A es:

$$\vec{E}_{A\to C}=9{,}00\cdot10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{-1{,}00\cdot10^{-9}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}510\ [\mathrm{m}])^2}(0{,}196\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}981\,\vec{\mathbf{j}})=(-6{,}79\,\vec{\mathbf{i}}-33{,}9\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (6{,}79\ \overline{\mathbf{i}} - 33{,}9\ \overline{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (-6{,}79\ \overline{\mathbf{i}} - 33{,}9\ \overline{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] + (6{,}79\ \overline{\mathbf{i}} - 33{,}9\ \overline{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] = -67{,}9\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: La fuerza resultante del cálculo es vertical hacia abajo, coherente con el dibujo que se había hecho.

El potencial en el punto C debido a cada carga vale lo mismo, porque la distancia es la misma (están situadas simétricamente) y el valor de la carga también es el mismo.

$$V_C = 2 \cdot V_{A \to C} = 2 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9 \left[\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}\right] \frac{-1{,}00 \cdot 10^{-9}\,[\mathrm{C}]}{(0{,}510\,[\mathrm{m}])} = -35{,}3\ \mathrm{V}$$

b) Como la fuerza electrostática es una fuerza conservativa, y es la única que hay que tener en cuenta (y mucho más intensa que la gravitatoria), la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$½\ m\ v_C^2 + q \cdot V_C = ½\ m\ v_D^2 + q \cdot V_D$$

El potencial en el punto D vale:

$$V_D = 2 \cdot V_{A \to D} = 2 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9 \left[\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}\right] \frac{-1{,}00 \cdot 10^{-9}\,[\mathrm{C}]}{(0{,}100\,[\mathrm{m}])} = -180\ \mathrm{V}$$

$$1{,}00 \cdot 10^{-9}\,[\mathrm{C}] \cdot (-35{,}3\,[\mathrm{V}]) = ½\ 1{,}00 \cdot 10^{-3}\,[\mathrm{kg}] \cdot v_D^2 + 1{,}00 \cdot 10^{-9}\,[\mathrm{C}] \cdot (-180\,[\mathrm{V}])$$

$$v_D = 0{,}017\ \mathrm{m/s}$$

Como la velocidad es un vector, hay que deducir la dirección y sentido.
Aunque el valor de la fuerza resultante y la aceleración en el origen es cero, por el valor de la fuerza calculado en el punto C y el hecho de que pase por el origen, se puede deducir que la aceleración tiene sido en la dirección del eje Y y en sentido negativo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la línea de la aceleración. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje Y en sentido negativo

$$\overline{\boldsymbol{v}}_D = -0{,}017\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s}$$

13. Tres cargas eléctricas de +1 μC, están en los puntos A(−1, 0), B(0, 2) y C(0, −2) (metros). Calcula en D(0, 0) y en F(2, 0):
    a) El campo eléctrico.
    b) El potencial eléctrico.
    c) Si en D(0, 0) se coloca una tercera carga $q´$ de +1 μC y de 10 g de masa, sometida solo a la acción electrostática de las otras tres, calcula la velocidad con la que llega al punto F(2, 0)

    $K = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$; 1 μC = 10^{-6} C *(P.A.U. Jun. 10)*

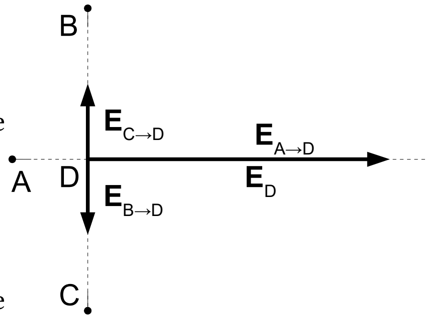
    Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_D = 9{,}0 \cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_F = 2{,}6 \cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; b) $V_D = 1{,}8 \cdot 10^4$ V; $V_F = 9{,}4 \cdot 10^3$ V; c) $v = 1{,}31$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	$Q_A = 1{,}00\ \mu\mathrm{C} = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$
Valor de la carga situada en el punto B	$Q_B = 1{,}00\ \mu\mathrm{C} = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$
Valor de la carga situada en el punto C	$Q_C = 1{,}00\ \mu\mathrm{C} = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$
Masa de la partícula que se desplaza	$m = 10{,}0\ \mathrm{g} = 1{,}00 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg}$
Carga de la partícula que se desplaza	$q = 1{,}00\ \mu\mathrm{C} = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$
Velocidad inicial en el punto D	$\overline{v}_D = 0$
Posición del punto A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A = (-1{,}00,\ 0)$ m
Posición del punto B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B = (0,\ 2{,}00)$ m
Posición del punto C	$\overline{\boldsymbol{r}}_C = (0,\ -2{,}00)$ m
Posición del punto D del que sale	$\overline{\boldsymbol{r}}_D = (0,\ 0)$ m
Posición del punto F al que llega	$\overline{\boldsymbol{r}}_F = (2{,}00,\ 0)$ m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$
Incógnitas	
Intensidades del campo electrostático en los puntos D y F	$\overline{\boldsymbol{E}}_D$, $\overline{\boldsymbol{E}}_F$
Potenciales electrostáticos en los puntos D y F	V_D, V_F
Velocidad que tendrá al pasar por el punto F	v_F
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{\boldsymbol{E}} = K \dfrac{Q}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$

Ecuaciones

Principio de superposición	$\vec{E}_A = \sum \vec{E}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K \dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial electrostática de una carga en un punto A	$E_{p\,A} = q \cdot V_A$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Principio de la conservación de la energía entre dos puntos A y B	$(E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B$

Solución:



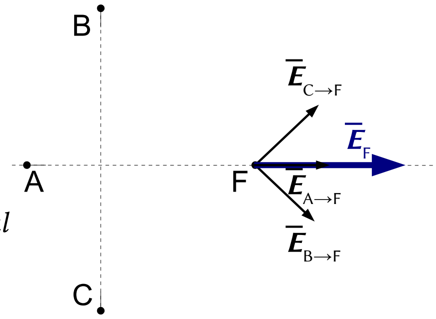
a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores intensidad de campo electrostático y de la suma vectorial que es el vector $\overline{\boldsymbol{E}}_D$ intensidad de campo resultante.

La intensidad de campo electrostático en el punto D debido a la carga de +1 µC situada en A es:

$$\vec{E}_{A\to D} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \cdot \frac{1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(1{,}00\ [\text{m}])^2}\ \vec{\mathbf{i}} = 9{,}00 \cdot 10^3\ \vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto D debido a la carga de +1 µC situada en B es:

$$\vec{E}_{B\to D} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \cdot \frac{1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(2{,}00\ [\text{m}])^2}\ \vec{\mathbf{i}} = 2{,}25 \cdot 10^3\ \vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$



Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{C\to D} = 2{,}25 \cdot 10^3\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to D} = 9{,}00 \cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Análisis: El vector intensidad de campo resultante del cálculo es horizontal hacia derecha, coherente con el dibujo que hicimos previamente.

La intensidad de campo electrostático en el punto F debido a la carga de +1 µC situada en A es:

$$\vec{E}_{A\to F} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \cdot \frac{1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(3{,}00\ [\text{m}])^2}\ \vec{\mathbf{i}} = 1{,}00 \cdot 10^3\ \vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Para calcular los campos debidos a las cargas en B y en C, se hace antes el cálculo de distancias:

$$r_{CF} = r_{BF} = \sqrt{(2{,}00\ [\text{m}])^2 + (2{,}00\ [\text{m}])^2} = 2{,}83\ \text{m}$$

El vector unitario del punto F, $\overline{\boldsymbol{u}}_{BF}$ respecto a B es:

$$\vec{u}_{BF} = \frac{\vec{r}_{BF}}{|\vec{r}_{BF}|} = \frac{(2{,}00\ \vec{\mathbf{i}} - 2{,}00\ \vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]}{2{,}83\ [\text{m}]} = 0{,}707\ \vec{\mathbf{i}} - 0{,}707\ \vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto F debido a la carga de +1 µC situada en B es:

$$\vec{E}_{B\to F} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \cdot \frac{1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(2{,}83\ [\text{m}])^2} (0{,}707\ \vec{\mathbf{i}} - 0{,}707\ \vec{\mathbf{j}}) = (795\ \vec{\mathbf{i}} - 795\ \vec{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{C\to F} = (795\ \overline{\mathbf{i}} + 795\ \overline{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_F = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to F} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to F} + \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to F} = 2{,}59 \cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Análisis: El vector intensidad de campo resultante del cálculo es horizontal hacia derecha, coherente con el dibujo que hicimos previamente.

b) Los potenciales en el punto D debidos a cada carga valen:

$$V_{C\rightarrow D}=V_{B\rightarrow D}=9{,}00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(2{,}00\ [\mathrm{m}])}=4{,}50\cdot 10^{3}\ \mathrm{V}$$

$$V_{A\rightarrow D}=9{,}00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}00\ [\mathrm{m}])}=9{,}00\cdot 10^{3}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en el punto D es:

$$V_D = V_{A\rightarrow D} + V_{B\rightarrow D} + V_{C\rightarrow D} = 9{,}00\cdot 10^3\ [\mathrm{V}] + 2\cdot 4{,}50\cdot 10^3\ [\mathrm{V}] = 1{,}800\cdot 10^4\ \mathrm{V}$$

Los potenciales en el punto F debidos a cada carga valen:

$$V_{C\rightarrow F}=V_{B\rightarrow F}=9{,}00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(2{,}83\ [\mathrm{m}])}=3{,}18\cdot 10^{3}\ \mathrm{V}$$

$$V_{A\rightarrow F}=9{,}00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(3{,}00\ [\mathrm{m}])}=3{,}00\cdot 10^{3}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en el punto F es:

$$V_F = V_{A\rightarrow F} + V_{B\rightarrow F} + V_{C\rightarrow F} = 3{,}00\cdot 10^3\ [\mathrm{V}] + 2\cdot 3{,}18\cdot 10^3\ [\mathrm{V}] = 9{,}36\cdot 10^3\ \mathrm{V}$$

c) Como la fuerza electrostática es una fuerza conservativa la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_F = (E_c + E_p)_D$$

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_F^2 + q\cdot V_F = \tfrac{1}{2}\, m\, v_D^2 + q\cdot V_D$$

$$(1{,}00\cdot 10^{-2}\ [\mathrm{kg}] / 2)\cdot v_F^2 + 1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot 9{,}36\cdot 10^3\ [\mathrm{V}] = 1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot 1{,}800\cdot 10^4\ [\mathrm{V}]$$

La velocidad en el punto F vale:

$$v_F = 1{,}31\ \mathrm{m/s}$$

Como la velocidad es un vector, tenemos que deducir la dirección y sentido.
Por la dirección y sentido del vector intensidad de campo en los puntos D y F, se puede deducir que la aceleración está en la dirección del eje X y en sentido positivo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la línea de la aceleración. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje X y el sentido positivo

$$\overline{\boldsymbol{v}}_F = 1{,}31\ \overline{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s}$$

14. Dos cargas eléctricas de +8 μC están situadas en A(0, 0,5) y B(0, −0,5) (en metros). Calcula:
    a) El campo eléctrico en C(1, 0) y en D(0, 0)
    b) El potencial eléctrico en C y en D.
    c) Si una partícula de masa m = 0,5 g y carga q = −1 μC se sitúa en C con una velocidad inicial de 10^3 m/s, calcula la velocidad en D.

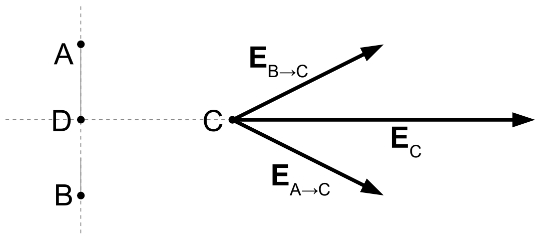
    Datos: $K = 9\cdot 10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}$, 1 μC = 10^{-6} C. Nota: solo intervienen fuerzas eléctricas. *(P.A.U. Sep. 12)*
    Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_C = 1{,}03\cdot 10^5\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\mathbf{0}}$; b) $V_C = 1{,}29\cdot 10^5$ V; $V_D = 2{,}88\cdot 10^5$ V; c) $\overline{\boldsymbol{v}}_D = -1{,}00\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}}$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	Q_A = 8,00 μC = $8{,}00\cdot 10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B	Q_B = 8,00 μC = $8{,}00\cdot 10^{-6}$ C
Posición do punto A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A$ = (0, 0,500) m
Posición do punto B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B$ = (0, −0,500) m
Posición del punto C	$\overline{\boldsymbol{r}}_C$ = (1,00, 0,00) m
Posición del punto D	$\overline{\boldsymbol{r}}_D$ = (0,00, 0,00) m
Masa de la partícula que se desplaza	m = 0,500 g = $5{,}00\cdot 10^{-4}$ kg

Datos	***Cifras significativas: 3***
Carga de la partícula que se desplaza	$q = -1{,}00\ \mu C = -1{,}00\cdot10^{-6}$ C
Velocidad inicial en el punto C	$v_C = 1{,}00\cdot10^3$ m/s
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\cdot10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$
Incógnitas	
Intensidades del campo electrostático en los puntos C y D	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$, $\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Potenciales electrostáticos en los puntos C y D	V_C, V_D
Velocidad que tendrá al pasar por el punto D	v_D
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A=\sum \vec{E}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial electrostática de una carga en un punto A	$E_{p\,A} = q \cdot V_A$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Principio de la conservación de la energía entre dos puntos A y B	$(E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y de cada uno de los vectores intensidad de campo electrostático y de la suma vectorial que es el vector $\overline{\boldsymbol{E}}_D$ intensidad de campo resultante.



Cálculo de distancias:

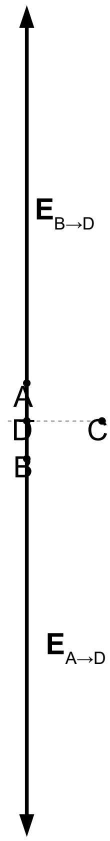
$$r_{AC}=r_{BC}=\sqrt{(0{,}500\ [\mathrm{m}])^2+(1{,}00\ [\mathrm{m}])^2}=1{,}12\ \mathrm{m}$$

El vector unitario del punto C (1, 0), $\overline{\boldsymbol{u}}_{AC}$ respecto al punto A es:

$$\vec{u}_{AC}=\frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|}=\frac{(1{,}00\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}500\,\vec{\mathbf{j}})\ [\mathrm{m}]}{1{,}12\ [\mathrm{m}]}=0{,}894\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}447\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto C debido a la carga de +8 μC situada en A es:

$$\vec{E}_{A\to C} = 9{,}00 \cdot 10^{9}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \cdot \frac{8{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}12\ [\mathrm{m}])^2} (0{,}894\ \vec{\mathbf{i}} - 0{,}447\ \vec{\mathbf{j}}) = (5{,}15 \cdot 10^{4}\ \vec{\mathbf{i}} - 2{,}58 \cdot 10^{4}\ \vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$



Por simetría, la intensidad de campo electrostático en el punto C debido a la carga de +8 μC situada en B es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (5{,}15 \cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 2{,}58 \cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición, el campo electrostático en el punto C es

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = 1{,}03 \cdot 10^5\ \overline{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: El vector intensidad de campo resultante del cálculo es horizontal hacia derecha, coherente con el dibujo que hicimos previamente.

La intensidad de campo electrostático en el punto D (0, 0) debido a la carga de +8 μC situada en A es:

$$\vec{E}_{A\to D} = 9{,}00 \cdot 10^{9}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \cdot \frac{8{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}500\ [\mathrm{m}])^2} (-\vec{\mathbf{j}}) = -2{,}88 \cdot 10^{5}\ \vec{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Por simetría, el campo en el punto D debido a la carga situada en B es

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} = 2{,}88 \cdot 10^5\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} = \overline{\mathbf{0}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: Como las distancias y las cargas son iguales, y están situadas simétricamente, la resultante tiene que ser nula.

b) Los potenciales en el punto C debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to C} = V_{B\to C} = 9{,}00 \cdot 10^{9}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{8{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}12\ [\mathrm{m}])} = 6{,}44 \cdot 10^{4}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en el punto C es la suma de ambos:

$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} = 2 \cdot 6{,}44 \cdot 10^4\ [\mathrm{V}] = 1{,}29 \cdot 10^5\ \mathrm{V}$$

Los potenciales en el punto D debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to D} = V_{B\to D} = 9{,}00 \cdot 10^{9}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{8{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}500\ [\mathrm{m}])} = 1{,}44 \cdot 10^{5}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en el punto D es:

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} = 2 \cdot 1{,}44 \cdot 10^5\ [\mathrm{V}] = 2{,}88 \cdot 10^5\ \mathrm{V}$$

c) Como la fuerza electrostática es una fuerza conservativa la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$½\ m\ v_C^2 + q \cdot V_C = ½\ m\ v_D^2 + q \cdot V_D$$

$$(5{,}00 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{kg}] / 2) \cdot (1{,}00 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2 + (-1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]) \cdot 1{,}29 \cdot 10^5\ [\mathrm{V}] =$$
$$= (5{,}00 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{kg}] / 2) \cdot v_D^2 + (-1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]) \cdot 2{,}88 \cdot 10^5\ [\mathrm{V}]$$

La velocidad que tendrá al pasar por el punto D será:

$$v_D = 1{,}00 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$$

Análisis: La velocidad es prácticamente la misma pero un poco mayor ya que la carga negativa es acelerada en sentido contrario al campo eléctrico.
Como la velocidad es un vector, tenemos que deducir la dirección y sentido.
Por la dirección y sentido del vector intensidad de campo entre los puntos C y D, se puede deducir que la aceleración está en la dirección del eje X y en sentido positivo (las cargas negativas sufren una fuerza de sentido opuesto al campo). La única posibilidad de que la carga que sale del punto C pase por el punto D es

que inicialmente se estuviese moviendo en el sentido negativo del eje X. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje X y el sentido negativo

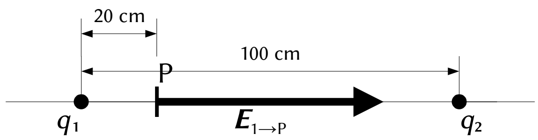
$$\overline{\boldsymbol{v}}_D = -1{,}00 \cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{m/s}$$

15. Dos cargas eléctricas positivas (q_1 y q_2) están separadas una distancia de 1 m. Entre las dos hay un punto, situado a 20 cm de q_1, donde el campo eléctrico es nulo. Sabiendo que q_1 es igual a 2 μC, calcula:
    a) El valor de q_2.
    b) El potencial en el punto en el que se anula el campo.
    c) El trabajo realizado por la fuerza del campo para llevar una carga de −3 μC desde el punto en el que se anula el campo hasta el infinito.
    Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N·m²·C⁻² *(A.B.A.U. Sep. 18)*
    Rta.: a) q_2 = 32 μC; b) $V = 4{,}5 \cdot 10^5$ V; c) W = −1,4 J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Distancia entre las cargas q_1 y q_2	d = 1,00 m
Distancia del punto P a la carga q_1	d_{P1}= 20,0 cm = 0,200 m
Valor de la carga situada en el punto 1	q_1 = 2,00 μC = $2{,}00 \cdot 10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto P	q = −3,00 μC = $-3{,}00 \cdot 10^{-6}$ C
Campo eléctrico en el punto P	$\lvert\overline{\boldsymbol{E}}_P\rvert = 0$
Constante eléctrica	$K = 9{,}00 \cdot 10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Valor da carga q_2	q_2
Potencial electrostático en el punto P	V_P
Trabajo para trasladar una carga de −3 μC desde P hasta el infinito	$W_{P\to\infty}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q ubicada la una distancia r	$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A = \sum \vec{E}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q ubicada la una distancia r	$V = K \frac{Q}{r}$
Potencial electrostático en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$

Solución:

a) Se hace un dibujo con el vector intensidad de campo electrostático creado por la carga q_1.



La intensidad de campo electrostático en el punto P, debido a la carga de 2 μC situada en el punto 1, es:

$$\vec{E}_{1\to P} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{2{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}200\ [\text{m}])^2} \vec{\mathbf{i}} = 4{,}50 \cdot 10^5\ \vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto P debido a la carga q_2 situada a 1 m de distancia de la carga q_1 tiene que ser opuesta para que la intensidad de campo electrostático en el punto P sea nula.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{2\to P} = -4{,}50 \cdot 10^5\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Escribiendo la expresión del módulo de la intensidad de campo electrostático, y teniendo en cuenta que la distancia de q_2 al punto P es

$$d_{P2} = 1{,}00 - 0{,}200 = 0{,}80 \text{ m}$$

$$|\vec{E}|=K\frac{q}{r^2} \Rightarrow 4{,}50\cdot 10^5=9{,}00\cdot 10^9\frac{q_2}{0{,}80^2}$$

$$q_2 = 3{,}2\cdot 10^{-5}\ \text{C} = 32\ \mu\text{C}$$

Análisis: Como la distancia de q_2 al punto P es 4 veces mayor que la de la carga q_1, el valor de la carga tendrá que ser 4^2 = 16 veces mayor.

b) Los potenciales en el punto P debidos a cada carga valen:

$$V_{1\rightarrow \text{P}}=V_1=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot \text{C}^{-2}]\frac{2{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}20\ [\text{m}])}=9{,}00\cdot 10^4\ \text{V}$$

$$V_{2\rightarrow \text{P}}=V_1=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot \text{C}^{-2}]\frac{32\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}80\ [\text{m}])}=3{,}6\cdot 10^5\ \text{V}$$

El potencial electrostático de un punto debido a la presencia de varias cargas, es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_\text{P} = V_{1\rightarrow\text{P}} + V_{2\rightarrow\text{P}} = 9{,}00\cdot 10^4\ [\text{V}] + 3{,}6\cdot 10^5\ [\text{V}] = 4{,}5\cdot 10^5\ \text{V}$$

c) El trabajo que hace la fuerza del campo para llevar la carga de −3 μC desde el punto P hasta el infinito es

$$W_{\text{P}\rightarrow\infty} = q\ (V_\text{P} - V_\infty) = -3{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}] \cdot (4{,}5\cdot 10^5 - 0)\ [\text{V}] = -1{,}4\ \text{J}$$

16. Una carga puntual Q ocupa la posición (0, 0) del plano XY en el vacío. En un punto A del eje X el potencial es V = −100 V y el campo eléctrico es $\overline{\boldsymbol{E}} = -10\ \mathbf{\bar{i}}$ N/C (coordenadas en metros):
    a) Calcula la posición del punto A y el valor de Q.
    b) Determina el trabajo necesario para llevar un protón desde el punto B(2, 2) hasta el punto A.
    c) Haz una representación gráfica aproximada de la energía potencial del sistema en función de la distancia entre ambas cargas. Justifica la respuesta.
    Dato: Carga del protón: $1{,}6\cdot 10^{-19}$ C; $K = 9\cdot 10^9$ N·m²·C⁻² *(P.A.U. Sep. 11)*
    Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{r}}_\text{A}$ = (10,0, 0) m; $Q = -1{,}11\cdot 10^{-7}$ C; b) $W = -4{,}05\cdot 10^{-17}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Posición de la carga Q	$\overline{\boldsymbol{r}}_\text{O}$ = (0, 0) m
Potencial en el punto A	V = −100 V
Campo eléctrico en el punto A	$\overline{\boldsymbol{E}} = -10{,}0\ \mathbf{\bar{i}}$ N/C
Posición del punto B	$\overline{\boldsymbol{r}}_\text{B}$ = (2,000, 2,000) m
Carga del protón	$q_\text{p} = 1{,}60\cdot 10^{-19}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\cdot 10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Posición del punto A	$\overline{\boldsymbol{r}}_\text{A}$
Valor de la carga Q	Q
Trabajo necesario para llevar un protón de B a A	$W_{\text{B}\rightarrow\text{A}}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_AB
Ecuaciones	
Campo eléctrico creado por una carga puntual Q a una distancia r	$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial electrostático de un un punto que dista una distancia r de una carga Q	$V=K\frac{Q}{r}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{\text{A}\rightarrow\text{B}} = q\ (V_\text{A} - V_\text{B})$
Energía potencial electrostática de una carga q en un punto A	$E_{\text{p A}} = q \cdot V_\text{A}$

Solución:

a) Se sustituyen los datos en las ecuaciones del campo

$$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

$$-10{,}0\ \vec{\mathbf{i}}\ [\mathrm{N/C}] = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Tomando solo el módulo, queda:

$$10{,}0\ [\mathrm{N/C}] = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{|Q|}{r^2}$$

También se sustituye en la ecuación de potencial electrostático:

$$V = K \frac{Q}{r}$$

$$-100\ [\mathrm{V}] = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{Q}{r}$$

Como en la ecuación del campo aparece el valor absoluto de la carga $|Q|$, aplicamos valores absolutos a la ecuación del potencial, que queda:

$$100\ [\mathrm{V}] = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{|Q|}{r}$$

Se resuelve el sistema

$$\begin{cases} 10{,}0 = 9{,}00 \cdot 10^9 \dfrac{|Q|}{r^2} \\ 100 = 9{,}00 \cdot 10^9 \dfrac{|Q|}{r} \end{cases}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera se obtiene

$$r = 10{,}0\ \mathrm{m}$$

Despejando el valor absoluto de la carga $|Q|$ de la segunda ecuación:

$$Q = 1{,}11 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}$$

El potencial es negativo, por lo tanto la carga debe ser negativa:

$$Q = -1{,}11 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}$$

Como la intensidad del campo electrostático en el punto es negativa, $\overline{\boldsymbol{E}}_\mathrm{r} = -10{,}0\ \bar{\mathbf{i}}$ (N/C), el punto tiene que estar en el semieje positivo:

$$\overline{\boldsymbol{r}}_\mathrm{A} = (10{,}0,\ 0)\ \mathrm{m}$$

b) El trabajo que hace la fuerza del campo es

$$W_{\mathrm{A \to B}} = q\ (V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B})$$

La distancia del punto B a la carga Q es:

$$r_\mathrm{OB} = \sqrt{(2{,}00\ [\mathrm{m}])^2 + (2{,}00\ [\mathrm{m}])^2} = 2{,}83\ \mathrm{m}$$

El potencial en el punto B vale:

$$V_\mathrm{B} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{|-1{,}11 \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{C}]|}{2{,}83\ [\mathrm{m}]} = -353\ \mathrm{V}$$

El trabajo de la fuerza del campo es

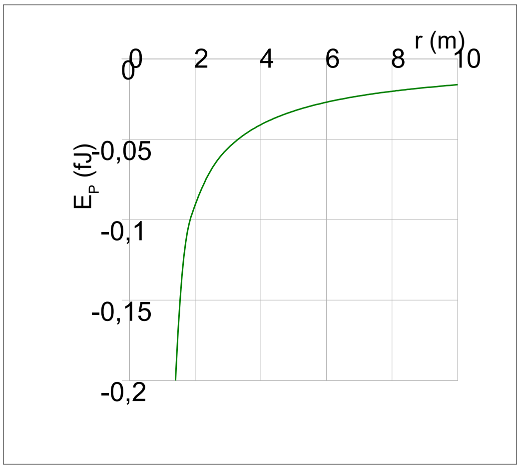
$W_{A\to B} = q\ (V_A - V_B) = 1{,}60\cdot10^{-19}\ [C] \cdot (-353 - (-100)\ )\ [V] = -4{,}05\cdot10^{-17}\ J$

Suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = 4{,}05\cdot10^{-17}\ J$$

c) La energía potencial de dos cargas viene dada por la expresión:

$$E_p = q\cdot V = K\frac{Q\cdot q}{r}$$



Es inversamente proporcional a la distancia entre ambas cargas. Como las cargas son de signo opuesto la energía potencial es negativa y aumenta con la distancia hasta ser nula a una distancia infinita.

17. Dos láminas conductoras con igual carga y signo contrario están colocadas horizontalmente y separadas 5 cm. La intensidad del campo eléctrico en su interior es $2{,}5\cdot10^5\ N\cdot C^{-1}$. Una microgota de aceite cuya masa es $4{,}90\cdot10^{-14}$ kg, y con carga negativa, está en equilibrio suspendida en un punto equidistante de ambas placas.
    a) Razona cual de las dos láminas está cargada positivamente.
    b) Determina la carga de la microgota.
    c) Calcula la diferencia de potencial entre las láminas conductoras.
    Dato: $g = 9{,}8\ m\cdot s^{-2}$ *(P.A.U. Sep. 15)*
    Rta.: b) $q = 1{,}92\cdot10^{-18}$ C; c) $\Delta V = 1{,}25\cdot10^4$ V

Datos	***Cifras significativas: 3***
Intensidad del campo eléctrico	$\lvert\overline{\boldsymbol{E}}\rvert = 2{,}50\cdot10^5$ N/C
Distancia entre las láminas conductoras	$d = 5{,}00$ cm $= 0{,}0500$ m
Masa de la microgota	$m = 4{,}90\cdot10^{-14}$ kg
Valor del campo gravitatorio terrestre	$g = 9{,}80\ m/s^2$
Incógnitas	
Carga de la microgota	q
Diferencia de potencial entre las láminas conductoras	ΔV
Ecuaciones	
Fuerza sobre una carga puntual q en un campo electrostático uniforme $\overline{\boldsymbol{E}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q\cdot\overline{\boldsymbol{E}}$
Valor de la fuerza peso	$P = m\cdot g$
Diferencia de potencial en un campo eléctrico constante	$\Delta V = \lvert\overline{\boldsymbol{E}}\rvert\cdot d$

Solución:

a, b) Peso:

$$P = m\cdot g = 4{,}90\cdot10^{-14}\ [kg]\cdot 9{,}80\ [m\cdot s^{-2}] = 4{,}80\cdot10^{-13}\ N$$

Cuando la microgota alcanza el equilibrio, la fuerza eléctrica equilibra a la fuerza peso.

$$F_E = q\cdot E = 4{,}80\cdot10^{-13}\ N$$

Carga eléctrica:

$$q = \frac{F_E}{E} = \frac{4{,}80\cdot10^{-13}\ [N/C]}{2{,}5\cdot10^5\ [N]} = 1{,}92\cdot10^{-18}\ C$$

Análisis: La carga eléctrica de la microgota es solo ligeramente mayor que la del electrón. Corresponde a la de $1{,}92\cdot10^{-18}$ C / $1{,}6\cdot10^{-19}$ C = 12 *electrones. Este resultado parece razonable.*

La fuerza eléctrica está dirigida hacia arriba, en sentido contrario al peso. Como la carga de la microgota es negativa, el campo eléctrico debe estar dirigido hacia abajo: la lámina superior es la positiva y la inferior la negativa.

c) La diferencia de potencial vale:

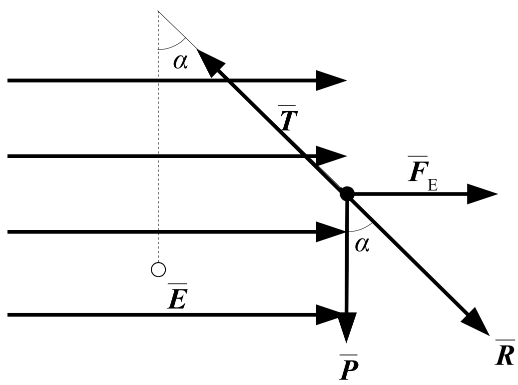
$$\Delta V = |\overline{\boldsymbol{E}}| \cdot d = 2{,}50 \cdot 10^5 \text{ [N/C]} \cdot 0{,}0500 \text{ [m]} = 1{,}25 \cdot 10^4 \text{ V}$$

18. Una esfera pequeña, de masa 2 g y carga +3 μC, cuelga de un hilo de 6 cm de longitud entre dos placas metálicas verticales y paralelas separadas entre si una distancia de 12 cm. Las placas poseen cargas iguales pero de signo contrario. Calcula:
    a) El campo eléctrico entre las placas para que el hilo forme un ángulo de 45° con la vertical.
    b) La tensión del hilo en ese momento.
    c) Si las placas se descargan, ¿cuál será la velocidad de la esfera al pasar por la vertical?
    Dato: $g = 9{,}81$ m·s⁻² *(A.B.A.U. Jun. 17)*
    Rta.: a) $E = 6{,}54 \cdot 10^3$ N/C; b) $T = R = 0{,}0277$ N; c) $v = 0{,}587$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de la esfera	$m = 2{,}00 \text{ g} = 2{,}00 \cdot 10^{-3}$ kg
Carga de la esfera	$q = 3{,}00\ \mu\text{C} = 3{,}00 \cdot 10^{-6}$ C
Longitud del hilo	$L = 6{,}00 \text{ cm} = 0{,}0600$ m
Ángulo que forma el hilo con la vertical	$\alpha = 45°$
Valor del campo gravitatorio terrestre	$g = 9{,}81$ m/s²
Incógnitas	
Valor del campo eléctrico	E
Tensión del hilo	T
Velocidad de la esfera al pasar por la vertical	v
Ecuaciones	
Fuerza sobre una carga puntual q en un campo electrostático uniforme $\overline{\boldsymbol{E}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q \cdot \overline{\boldsymbol{E}}$
Valor de la fuerza peso	$P = m \cdot g$
Energía potencial de la fuerza peso	$E_p = m \cdot g \cdot h$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$

Solución:

a) Esquema de fuerzas:
Cuando la esfera alcanza el equilibrio, la tensión equilibra a la resultante de las fuerzas peso y eléctrica. Estas valen:
Peso:



$$P = m \cdot g = 2{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ [kg]} \cdot 9{,}81 \text{ [m·s}^{-2}\text{]} = 0{,}0196 \text{ N}$$

Como el ángulo entre la resultante y la vertical es de 45° y tan 45° = 1,00

$$F_E = P = 0{,}0196 \text{ N}$$

El campo eléctrico vale:

$$E = \frac{F_E}{q} = \frac{0{,}0196 \text{ N}}{3{,}00 \cdot 10^{-6} \text{ C}} = 6{,}54 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

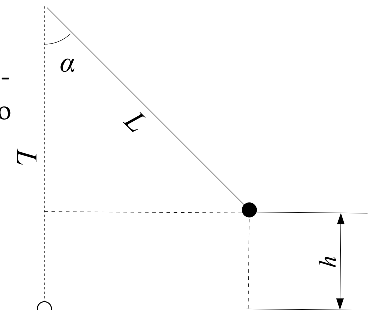
Como son perpendiculares, la fuerza resultante vale:

$$|\vec{\boldsymbol{R}}| = \sqrt{(0{,}0196 [\text{N}])^2 + (0{,}0196 [\text{N}])^2} = 0{,}0277 \text{ N}$$

b) El valor de la tensión es el mismo que el de la fuerza resultante:

$$T = R = 0{,}0277 \text{ N}$$

c) Al descargarse las láminas solo actúa la fuerza peso, que es una fuerza conservativa. La energía mecánica se conserva entra la posición inicial y el punto más bajo de la trayectoria.



La altura del punto de equilibrio respeto del punto más bajo pode calcularse del triángulo:

$$h = L - L \cos \alpha = L (1 - \cos \alpha) = 0{,}0600 \text{ [m]} (1 - \cos 45°) = 0{,}0176 \text{ m}$$

La energía potencial del peso en el punto de partida es:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 2{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ [kg]} \cdot 9{,}81 \text{ [m·s}^{-2}\text{]} \cdot 0{,}00240 \text{ [m]} = 3{,}45 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

Como la energía cinética es nula en ese punto, la energía mecánica valdrá lo mismo.

$$E = E_p = 3{,}45 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

En el punto más bajo la energía mecánica es la misma, y como no hay energía potencial, ese será el valor de la energía cinética. Por lo tanto, la velocidad valdrá:

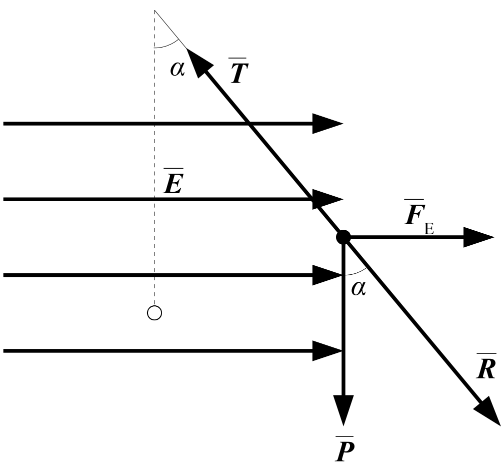
$$v = \sqrt{\frac{2 E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}45 \cdot 10^{-4} [\text{J}]}{2{,}00 \cdot 10^{-3} [\text{kg}]}} = 0{,}587 \text{ m/s}$$

19. Una esfera metálica de masa m = 8 g y carga q = 7 μC, cuelga de un hilo de 10 cm de longitud situado entre dos láminas metálicas paralelas de cargas iguales y de signo contrario. Calcula:
    a) El ángulo que forma el hilo con la vertical si entre las láminas existe un campo electrostático uniforme de 2,5·10³ N/C.
    b) La tensión del hilo en ese momento.
    c) Si las láminas se descargan, ¿cuál será la velocidad de la esfera al pasar por la vertical?
    Dato: g = 9,8 m/s² *(P.A.U. Jun. 14)*
    Rta.: a) α = 12,6°; b) T = 0,0802 N; c) v = 0,217 m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de la esfera	m = 8,00 g = 8,00·10⁻³ kg
Carga de la esfera	q = 7,00 μC = 7,00·10⁻⁶ C
Longitud del hilo	L = 10,0 cm = 0,100 m
Valor del campo eléctrico	E = 2,50·10³ N/C
Valor del campo gravitatorio terrestre	g = 9,80 m/s²
Incógnitas	
Ángulo que forma el hilo con la vertical	α
Tensión del hilo	T
Velocidad de la esfera al pasar por la vertical	v
Ecuaciones	
Fuerza sobre una carga puntual q en un campo electrostático uniforme $\overline{\boldsymbol{E}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q \cdot \overline{\boldsymbol{E}}$
Valor de la fuerza peso	$P = m \cdot g$
Energía potencial de la fuerza peso	$E_p = m \cdot g \cdot h$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$

Solución:

a) En el enunciado no se especifica ni la dirección ni el sentido del campo electrostático uniforme.
Si fuera horizontal, el esquema con las fuerzas sería el siguiente:
Cuando la esfera alcanza el equilibrio, la tensión equilibra a la resultante de las fuerzas peso y eléctrica. Estas valen:
Peso:



$$P = m \cdot g = 8{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ [kg]} \cdot 9{,}80 \text{ [m·s}^{-2}\text{]} = 0{,}0784 \text{ N}$$

Fuerza eléctrica:

$$F_E = q \cdot E = 7{,}00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]} \cdot 2{,}50 \cdot 10^3 \text{ [N/C]} = 0{,}0175 \text{ N}$$

Como son perpendiculares, la fuerza resultante vale:

$$|\vec{\boldsymbol{R}}| = \sqrt{(0{,}0784 [\text{N}])^2 + (0{,}0175 [\text{N}])^2} = 0{,}0802 \text{ N}$$

El ángulo entre la resultante y la vertical mide

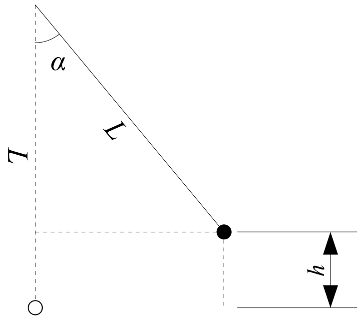
$$\alpha = \arccos \frac{P}{R} = \arccos \frac{0{,}0784}{0{,}0802} = 12{,}6\,°$$

b) El valor de la tensión es el mismo que el de la fuerza resultante:

$$T = R = 0{,}0802 \text{ N}$$

c) Al descargarse las láminas solo actúa la fuerza peso, que es una fuerza conservativa. La energía mecánica se conserva entra la posición inicial y el punto más bajo de la trayectoria.

La altura del punto de equilibrio respeto del punto más bajo pode calcularse del triángulo:



$$h = L - L \cos \alpha = L\,(1 - \cos \alpha) = 0{,}100 \text{ [m] } (1 - \cos 12{,}6°) = 0{,}00240 \text{ m}$$

La energía potencial del peso en el punto de partida es:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 8{,}00·10^{-3} \text{ [kg]} \cdot 9{,}80 \text{ [m·s}^{-2}\text{]} \cdot 0{,}00240 \text{ [m]} = 1{,}88·10^{-4} \text{ J}$$

Como la energía cinética es nula en ese punto, la energía mecánica valdrá lo mismo.

$$E = E_p = 1{,}88·10^{-4} \text{ J}$$

En el punto más bajo la energía mecánica es la misma, y como no hay energía potencial, ese será el valor de la energía cinética. Por lo tanto, la velocidad valdrá:

$$v = \sqrt{\frac{2\,E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}88 \cdot 10^{-4} [\text{J}]}{9{,}00 \cdot 10^{-3} [\text{kg}]}} = 0{,}217 \text{ m/s}$$

También podría suponerse que el campo eléctrico fuera vertical. En cuyo caso el hilo no se desviaría de la vertical. De estar dirigido hacia arriba, la fuerza eléctrica (0,0175 N), no compensaría la fuerza peso (0,0784 N) y la esfera no se movería, pero la tensión variaría de los 0,0784 N con las placas descargadas a 0,0609 N cuando las placas estén cargadas.

$$T = 0{,}0784 \text{ N} - 0{,}0175 \text{ N} = 0{,}0609 \text{ N}$$

Si el campo fuera vertical, pero hacia abajo, la esfera tampoco se movería, y la tensión valdría

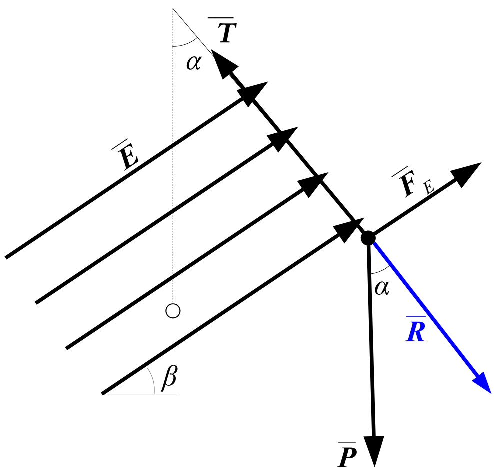
$$T = 0{,}0784 \text{ N} + 0{,}0175 \text{ N} = 0{,}0959 \text{ N}$$

Por imaginar, podría imaginarse que las placas estuvieran colocadas de tal modo que el campo eléctrico formara un ángulo β cualquiera con la horizontal.

En un plano *XY*, la fuerza eléctrica podría expresarse cómo:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_E = 0{,}0175\,(\cos \beta\,\overline{\mathbf{i}} + \text{sen}\,\beta\,\overline{\mathbf{j}}) \text{ N}$$

La fuerza resultante $\overline{R}$ sería la suma vectorial de esta fuerza eléctrica y la fuerza peso:



$$\overline{\boldsymbol{P}} = -0{,}0784\,\overline{\mathbf{j}} \text{ N}$$

$$\overline{R} = \overline{\boldsymbol{F}}_E + \overline{\boldsymbol{P}} = 0{,}0175 \cos \beta\,\overline{\mathbf{i}} + (0{,}0175 \text{ sen}\,\beta - 0{,}0784)\,\overline{\mathbf{j}} \text{ N}$$

$$|\vec{\boldsymbol{R}}| = \sqrt{(0{,}0175 \text{ sen}\,\beta - 0{,}0784)^2 [\text{N}]^2 + (0{,}0175 \cos \beta [\text{N}])^2}$$

$$|\vec{\boldsymbol{R}}| = \sqrt{(0{,}0175[\text{N}])^2 \text{ sen}(2\beta) + (0{,}0784[\text{N}])^2 + (0{,}0175[\text{N}])^2} = \sqrt{3{,}06 \cdot 10^{-4} \text{ sen}(2\beta)\,[N]^2 + 6{,}45 \cdot 10^{-3}\,[\text{N}]^2}$$

El ángulo entre la resultante y la vertical mediría

$$\alpha = \arccos \frac{P}{R} = \arccos \frac{0{,}0784}{\sqrt{3{,}06 \cdot 10^{-4} \text{ sen}(2\beta) + 6{,}45 \cdot 10^{-3}}}$$

Por ejemplo, si $\beta = 30°$, el ángulo $\alpha = 17{,}0°$

20. Una esfera conductora de radio 4 cm tiene una carga de +8 µC en equilibrio electrostático. Calcula cuánto valen en puntos que distan 0, 2 y 6 cm del centro de la esfera:
 a) El módulo de la intensidad del campo electrostático.
 b) El potencial electrostático.
 c) Representa las magnitudes anteriores en función de la distancia al centro de la esfera.
 DATO: $K = 9·10^9$ N·m²·C⁻² *(A.B.A.U. Jun. 18)*
 Rta.: a) $|\overline{E}_1| = |\overline{E}_2| = 0$; $|\overline{E}_3| = 2{,}00·10^7$ N/C; b) $V_1 = V_2 = 1{,}80·10^6$ V; $V_3 = 1{,}20·10^6$ V

Datos		***Cifras significativas: 3***
Carga de la esfera		$Q = 8{,}00$ µC $= 8{,}00·10^{-6}$ C
Radio de la esfera		$R = 4{,}00$ cm $= 0{,}0400$ m
Distancias al centro de la esfera:	punto interior 1	$r_1 = 0$ cm $= 0$ m
	punto interior 2	$r_2 = 2{,}00$ cm $= 0{,}0200$ m
	punto exterior	$r_3 = 6{,}00$ cm $= 0{,}0600$ m
Constante eléctrica		$K = 9{,}00·10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas		
Intensidad del campo electrostático en los puntos 1, 2 y 3		$\overline{E}_1, \overline{E}_2, \overline{E}_3$
Potencial electrostático en los puntos 1, 2 y 3		V_1, V_2, V_3
Ecuaciones		
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r		$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r		$V=K\frac{Q}{r}$

Solución:

a) La intensidad de campo electrostático en los puntos 1 y 2, que se encuentran en el interior a 0 y 2 cm del centro de la esfera, es nulo porque el conductor se encuentra en equilibrio y todas las cargas se encuentran en la superficie de la esfera.
El potencial electrostático en los puntos 1 y 2 es el mismo que en la superficie de la esfera:

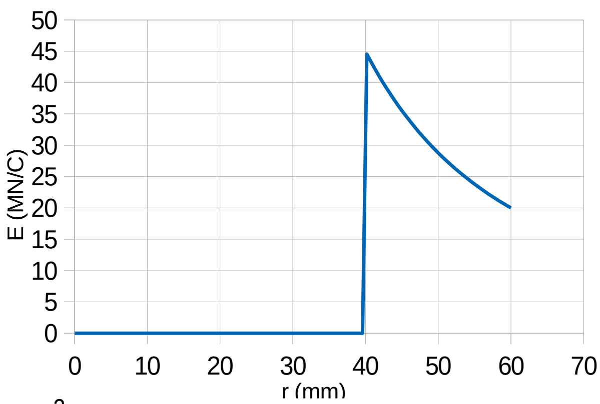
$$V_1=V_2=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{8{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}0400\ [\text{m}])}=1{,}80\cdot 10^6\ \text{V}$$

b) El módulo de la intensidad de campo electrostático en el punto 3 a 6 cm del centro de la esfera es el mismo que si la carga fuera puntual

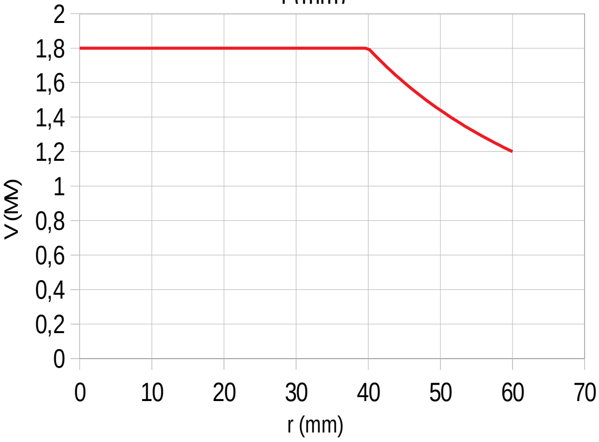
$$|\vec{E}_3|=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{8{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}0600\ [\text{m}])^2}=2{,}00\cdot 10^7\ \text{N/C}$$

El potencial electrostático en el punto 3 es el mismo que si la carga fuera puntual

$$V_3=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{8{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}0600\ [\text{m}])}=1{,}20\cdot 10^6\ \text{V}$$



c) La gráfica de la variación de la intensidad del campo electrostático da una valor 0 para distancias inferiores al radio de la esfera, se hace máxima para el radio y disminuye inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la esfera.
La gráfica de la variación del potencial electrostático de la una valor constante para distancias inferiores al radio de la esfera y disminuye inversamente proporcional a la distancia al centro de la esfera.

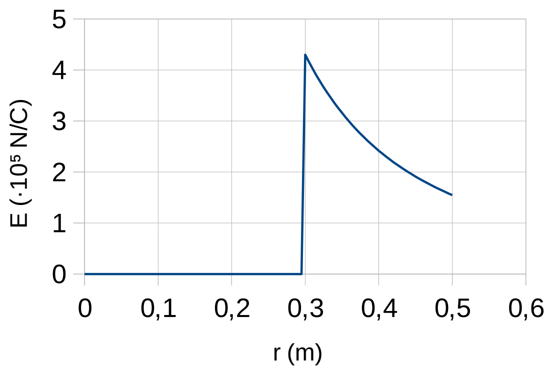


21. Dada una esfera maciza conductora de 30 cm de radio y carga q = +4,3 μC. calcula el campo eléctrico y el potencial en los siguientes puntos:
    a) A 20 cm del centro de la esfera.
    b) A 50 cm del centro de la esfera.
    c) Haz una representación gráfica del campo eléctrico y del potencial en función de la distancia al centro de la esfera.
    Dato: $K = 9·10^9$ N·m²·C⁻² *(A.B.A.U. Set. 17)*
    Rta.: a) $|\overline{\boldsymbol{E}}_1| = 0$; $V_1 = 1{,}29·10^5$ V; b) $|\overline{\boldsymbol{E}}_2| = 1{,}55·10^5$ N/C; $V_2 = 7{,}74·10^4$ V

Datos	***Cifras significativas: 3***
Carga de la esfera	Q = 4,30 μC = $4{,}30·10^{-6}$ C
Radio de la esfera	R = 30,0 cm = 0,300 m
Distancias al centro de la esfera: punto interior	r_1 = 20,0 cm = 0,200 m
punto exterior	r_2 = 50,0 cm = 0,500 m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00·10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en los puntos 1 y 2	$\overline{\boldsymbol{E}}_1$, $\overline{\boldsymbol{E}}_2$
Potencial electrostático en los puntos 1 y 2	V_1, V_2
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{\boldsymbol{E}}=K\dfrac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V=K\dfrac{Q}{r}$

Solución:

a) La intensidad de campo electrostático en el punto 1 a 20 cm del centro de la esfera es nulo porque el conductor se encuentra en equilibrio y todas las cargas se encuentran en la superficie de la esfera.



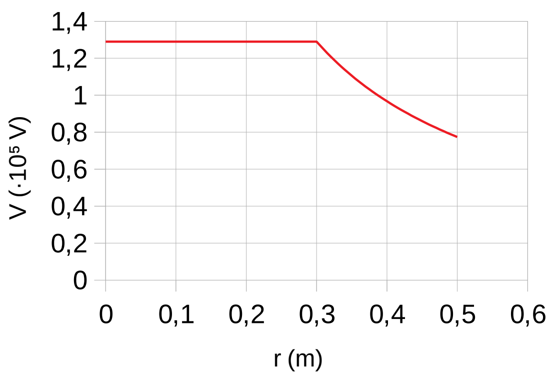
El potencial electrostático en el punto 1 es el mismo que en la superficie:

$$V_1=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{4{,}30\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}300\ [\text{m}])}=1{,}29\cdot 10^5\ \text{V}$$

b) El módulo de la intensidad de campo electrostático en el punto 2 a 50 cm del centro de la esfera es el mismo que si la carga fuera puntual

$$|\vec{\boldsymbol{E}}_2|=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{4{,}30\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}500\ [\text{m}])^2}=1{,}55\cdot 10^5\ \text{N/C}$$

El potencial electrostático en el punto 2 es el mismo que si la carga fuera puntual



$$V_2=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{4{,}30\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}500\ [\text{m}])}=7{,}74\cdot 10^4\ \text{V}$$

c) La gráfica de la variación de la intensidad del campo electrostático da una valor 0 para distancias inferiores al radio de la esfera, se hace máxima para el radio y disminuye inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la esfera.
La gráfica de la variación del potencial electrostático de la una valor constante para distancias inferiores al radio de la esfera y disminuye inversamente proporcional a la distancia al centro de la esfera.

● Campo magnético

1. Un protón con velocidad $\overline{\boldsymbol{v}} = 5\cdot10^6\ \overline{\mathbf{i}}$ m/s penetra en una zona donde hay un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}} = 1\ \overline{\mathbf{j}}$ T.
   a) Dibuja la fuerza que actúa sobre el protón y deduce la ecuación para calcular el radio de la órbita.
   b) Calcula el número de vueltas en un segundo.
   c) ¿Varía la energía cinética del protón al entrar en esa zona?
   Datos: $m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg; $q_p = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C *(P.A.U. Jun. 13)*
   Rta.: a) $R=\dfrac{m\cdot v}{|q|\cdot B\cdot \operatorname{sen}\varphi}$; b) N = Media vuelta en $3{,}28\cdot10^{-8}$ s

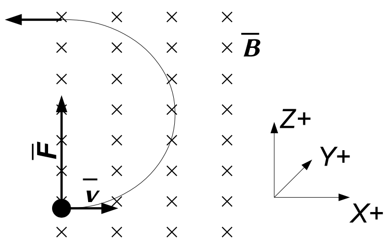
Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidad del protón	$\overline{\boldsymbol{v}} = 5{,}00\cdot10^6\ \overline{\mathbf{i}}$ m·s⁻¹
Intensidad del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{B}} = 1{,}00\ \overline{\mathbf{j}}$ T
Carga del protón	$q = 1{,}60\cdot10^{-19}$ C
Masa del protón	$m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg
Incógnitas	
Fuerza magnética sobre el protón	$\overline{\boldsymbol{F}}_B$
Radio de la trayectoria circular	R
Número de vueltas en un segundo	N
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N=\dfrac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio R	$v=\dfrac{2\pi\cdot R}{T}$

Solución:

a) La fuerza magnética $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ ejercida por el campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ sobre la carga q del protón que se desplaza a la velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ es:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = 1{,}60\cdot10^{-19}\ [\mathrm{C}]\ (5{,}00\cdot10^6\ \overline{\mathbf{i}}\ [\mathrm{m/s}] \times 1{,}00\ \overline{\mathbf{j}}\ [\mathrm{T}]) = 8{,}00\cdot10^{-13}\ \overline{\mathbf{k}}\ \mathrm{N}$$

Es perpendicular a la dirección del campo magnético y también a la velocidad, y el sentido viene dado por la regla de la mano izquierda, teniendo en cuenta que la carga es negativa. En la figura, las cruces × indican un campo magnético que entra en el papel.



Como solo actúa la fuerza magnética, el protón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración solo tiene componente normal a_N,

$$F_B=m\cdot a=m\cdot a_N=m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q|\cdot B\cdot v\cdot \operatorname{sen}\varphi=m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R=\frac{m\cdot v}{|q|\cdot B\cdot \operatorname{sen}\varphi}=\frac{1{,}67\cdot10^{-27}\ [\mathrm{kg}]\cdot5{,}00\cdot10^6\ [\mathrm{m/s}]}{1{,}60\cdot10^{-19}\ [\mathrm{C}]\cdot1{,}00\ [\mathrm{T}]\cdot \operatorname{sen}90°}=5{,}22\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}=5{,}22\ \mathrm{cm}$$

Análisis: el radio tiene un valor aceptable, unos centímetros.

b) Despejando el período de la ecuación de la velocidad:

$$T=\frac{2\pi\cdot R}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 5{,}22\cdot 10^{-2}\,[\text{m}]}{5{,}00\cdot 10^{6}\,[\text{m/s}]}=6{,}56\cdot 10^{-8}\text{ s}$$

El número de vueltas en 1 s sería:

$$N=1{,}00\,[\text{s}]\cdot\frac{1\text{ vuelta}}{6{,}56\cdot 10^{-8}\,[\text{s}]}=1{,}52\cdot 10^{7}\text{ vueltas}$$

Análisis: Si el protón entra en un campo magnético, saldrá de él después de describir media circunferencia, por lo que en realidad solo daría media vuelta en un tiempo de T / 2 = 3,28·10⁻⁸ s *y saldría a una distancia de* 2 R = 10,4 cm *del punto de entrada en el campo.*

c) No. La fuerza magnética es perpendicular a la trayectoria en todos los puntos y, por tanto, no realiza trabajo. Si el trabajo de la fuerza resultante es nulo, no hay variación de la energía cinética.

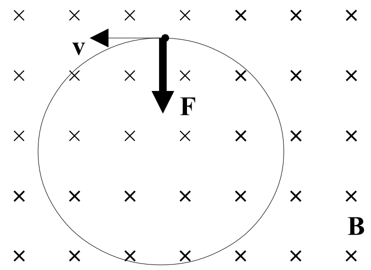
2. Un protón con una energía cinética de 20 eV se mueve en una órbita circular perpendicular a un campo magnético de 1 T. Calcula:
   a) El radio de la órbita.
   b) La frecuencia del movimiento.
   c) Justifica por qué no se consume energía en este movimiento.
   Datos: m_p = 1,67·10⁻²⁷ kg; q_p = 1,6·10⁻¹⁹ C; 1 eV = 1,6·10⁻¹⁹ J *(P.A.U. Jun. 14)*
   Rta.: a) R = 6,46·10⁻⁴ m; b) f = 1,52·10⁷ vueltas/s

Datos	***Cifras significativas: 2***
Energía cinética del protón	E_c = 20 eV = 3,2·10⁻¹⁸ J
Valor de la intensidad del campo magnético	B = 1,0 T
Carga del protón	q = 1,6·10⁻¹⁹ C
Ángulo entre la velocidad del protón y el campo	φ = 90°
Masa del protón	m = 1,67·10⁻²⁷ kg
Incógnitas	
Radio de la trayectoria circular	R
Frecuencia del movimiento	f
Otros símbolos	
Valor de la fuerza magnética sobre el protón	F_B
Período del movimiento circular	T
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\boldsymbol{v}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}}\times\overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N=\dfrac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio R	$v=\dfrac{2\pi\cdot R}{T}$

Solución:

a) La energía cinética vale:

$$E_c = 20\text{ eV}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\text{ J/eV} = 3{,}2\cdot 10^{-18}\text{ J}$$



La velocidad del protón se calcula a partir de la energía cinética:

$$E_c = \tfrac{1}{2}\,m\cdot v^2 \Rightarrow 3{,}2\cdot 10^{-18}\,[\text{J}] = (1{,}67\cdot 10^{-27}\,[\text{kg}]\,/\,2)\cdot v^2$$

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot 3{,}2\cdot 10^{-18}[\text{J}]}{1{,}67\cdot 10^{-27}[\text{kg}]}}=6{,}2\cdot 10^{4}\text{ m/s}$$

Como solo actúa la fuerza magnética:

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

El protón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración solo tiene componente normal a_N,

$$F_B = m \cdot a = m \cdot a_N = m \frac{v^2}{R}$$

$$|q| \cdot B \cdot v \cdot \operatorname{sen} \varphi = m \frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B \cdot \operatorname{sen} \varphi} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,[\text{kg}] \cdot 6{,}2 \cdot 10^4\,[\text{m/s}]}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,[\text{C}] \cdot 1{,}0\,[\text{T}] \cdot \operatorname{sen} 90°} = 6{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$$

b)

$$T = \frac{2\pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-4}\,[\text{m}]}{6{,}2 \cdot 10^4\,[\text{m/s}]} = 6{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

La frecuencia será:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1\ \text{vuelta}}{6{,}5 \cdot 10^{-8}\,[\text{s}]} = 1{,}5 \cdot 10^7\ \text{vueltas/s}$$

c) Como la fuerza magnética es perpendicular al desplazamiento en todo momento, su trabajo es nulo.

3. Un protón acelerado por una diferencia de potencial de 5000 V penetra perpendicularmente en un campo magnético uniforme de 0,32 T. Calcula:
   a) La velocidad del protón.
   b) El radio de la órbita que describe y el número de vueltas que da en 1 segundo.
   Datos: m_p = 1,67·10⁻²⁷ kg, q_p = 1,60·10⁻¹⁹ C (Haz un dibujo del problema) *(P.A.U. Jun. 05)*
   Rta.: a) v = 9,79·10⁵ m/s; b) R = 3,2 cm; N = 4,9·10⁶ vueltas/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Potencial de aceleración	V = 5000 V = 5,00·10³ V
Valor de la intensidad del campo magnético	B = 0,320 T
Carga del protón	q = 1,60·10⁻¹⁹ C
Ángulo entre la velocidad del protón y el campo magnético	φ = 90°
Masa del protón	m = 1,67·10⁻²⁷ kg
Tiempo para calcular el número de vueltas	t = 1,00 s
Incógnitas	
Velocidad del protón	v
Radio de la trayectoria circular	R
Número de vueltas que da en 1 s	N
Otros símbolos	
Valor de la fuerza magnética sobre el protón	F_B
Período del movimiento circular	T
Energía (cinética) del protón	E_c
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \frac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio R	$v = \frac{2\pi \cdot R}{T}$
Trabajo del campo eléctrico	W(eléctrico) = $q \cdot \Delta V$
Trabajo de la fuerza resultante	$W = \Delta E_c$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$

Solución:

a) Para calcular la velocidad tenemos que tener en cuenta que al acelerar el protón con una diferencia de potencial (suponemos que desde el reposo), este adquiere una energía cinética:

$$W(\text{eléctrico}) = q \cdot \Delta V = \Delta E_c = ½\, m_p\, v^2 - ½\, m_p\, v_0^2$$

Si parte del reposo, $v_0 = 0$. La velocidad final es:

$$v=\sqrt{\frac{2\, q\cdot \Delta V}{m_p}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}60\cdot 10^{-19}\,[\mathrm{C}]\cdot 5{,}00\cdot 10^{3}\,[\mathrm{V}]}{1{,}67\cdot 10^{-27}\,[\mathrm{kg}]}}=9{,}79\cdot 10^{5}\ \mathrm{m/s}$$

b) Como solo actúa la fuerza magnética:

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

El protón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración solo tiene componente normal a_N,

$$F_B = m\cdot a = m\cdot a_N = m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q|\cdot B\cdot v\cdot \operatorname{sen}\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R=\frac{m\cdot v}{|q|\cdot B\cdot \operatorname{sen}\varphi}=\frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\,[\mathrm{kg}]\cdot 9{,}79\cdot 10^{5}\,[\mathrm{m/s}]}{1{,}60\cdot 10^{-19}\,[\mathrm{C}]\cdot 0{,}320\,[\mathrm{T}]\cdot \operatorname{sen} 90°}=3{,}19\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}=3{,}19\ \mathrm{cm}$$

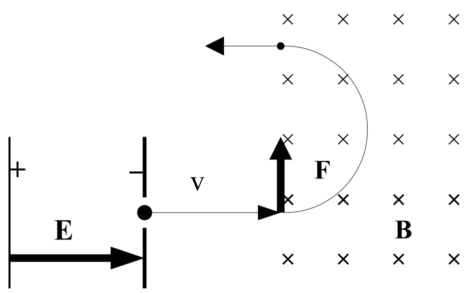
Análisis: el radio tiene un valor aceptable, unos centímetros.

Despejando el período

$$T=\frac{2\,\pi\cdot R}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 3{,}19\cdot 10^{-2}\,[\mathrm{m}]}{9{,}79\cdot 10^{5}\,[\mathrm{m/s}]}=2{,}05\cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

El número de vueltas en 1 s será:

$$N=1{,}00\,[\mathrm{s}]\cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{2{,}05\cdot 10^{-7}\,[\mathrm{s}]}=4{,}88\cdot 10^{6}\ \text{vueltas}$$



Análisis: Si el protón entra en un campo magnético, al describir media circunferencia saldrá de él, por lo que en realidad solo daría media vuelta en un tiempo de $T / 2 = 1{,}03\cdot 10^{-7}$ s *y saldría a una distancia de* $2\ R = 6{,}4$ cm *del punto de entrada.*

4. Un protón se mueve en un círculo de radio r = 20 cm, perpendicularmente a un campo magnético B = 0,4 T. Determina:
   a) La velocidad del protón.
   b) El período del movimiento.
   c) El campo eléctrico necesario para anular el efecto del campo magnético.
   DATOS: $q_p = 1{,}6\times 10^{-19}$ C; $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg. *(A.B.A.U. Jun. 19)*
   Rta.: A) $v = 7{,}66\cdot 10^6$ m/s; b) $T = 1{,}64\cdot 10^{-7}$ s; c) $E = 3{,}07\cdot 10^6$ N/C

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la trayectoria circular	R = 20,0 cm = 0,200 m
Intensidad del campo magnético	B = 0,400 T
Carga del protón	$q_p = 1{,}60\cdot 10^{-19}$ C
Masa del protón	$m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg

Incógnitas

Velocidad del protón	$\overline{\boldsymbol{v}}$
Período del movimiento	T
Vector campo eléctrico que anule el efecto del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{E}}$

Otros símbolos

Vector fuerza magnética sobre el electrón	$\overline{\boldsymbol{F}}_B$
Vector fuerza eléctrica sobre el electrón	$\overline{\boldsymbol{F}}_E$

Ecuaciones

Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \frac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio R	$v = \frac{2\pi \cdot R}{T}$
Fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}_E$ ejercida por un campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}$ sobre una carga q	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q \cdot \overline{\boldsymbol{E}}$

Solución:

a) Si sólo actúa la fuerza magnética:

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

El protón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N ,

$$F_B = m \cdot a = m \cdot a_N = m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q| \cdot B \cdot v \cdot \operatorname{sen}\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando la velocidad

$$v = \frac{|q| \cdot B \cdot R \cdot \operatorname{sen}\varphi}{m} = \frac{|1{,}60 \cdot 10^{-19}\ [\mathrm{C}]| \cdot 0{,}400\ [\mathrm{T}] \cdot 0{,}200\ [\mathrm{m}] \cdot \operatorname{sen} 90°}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ [\mathrm{kg}]} = 7{,}66 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}$$

b) Despejando el período de la ecuación de la velocidad:

$$T = \frac{2\pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}200\ [\mathrm{m}]}{7{,}66 \cdot 10^6\ [\mathrm{m/s}]} = 1{,}64 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

c) Se actúa una fuerza eléctrica que anula la magnética,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B + \overline{\boldsymbol{F}}_E = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q \cdot \overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\boldsymbol{0}}$$

El campo eléctrico debe valer, en módulo:

$$|\overline{\boldsymbol{E}}| = |-(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})| = 7{,}66 \cdot 10^6\ [\mathrm{m/s}] \cdot 0{,}400\ [\mathrm{T}] \cdot \sin 90° = 3{,}07 \cdot 10^6\ \mathrm{N/C}$$

5. Una partícula con carga $0{,}5 \cdot 10^{-9}$ C se mueve con $\overline{\boldsymbol{v}} = 4 \cdot 10^6\ \overline{\mathbf{j}}$ m/s y entra en una zona en donde existe un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}} = 0{,}5\ \overline{\mathbf{i}}$ T:
   a) ¿Qué campo eléctrico $\overline{\boldsymbol{E}}$ hay que aplicar para que la carga no sufra ninguna desviación?
   b) En ausencia de campo eléctrico calcula la masa si el radio de la órbita es 10^{-7} m.
   c) Razona si la fuerza magnética realiza algún trabajo sobre la carga cuando esta describe una órbita circular.

(P.A.U. Sep. 07)

Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}} = 2{,}00 \cdot 10^6\ \overline{\mathbf{k}}$ N/C; b) $m = 6{,}25 \cdot 10^{-24}$ kg

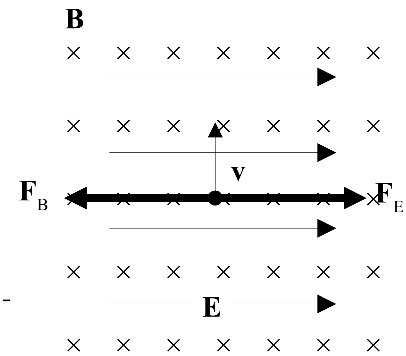
Datos	***Cifras significativas: 3***
Carga de la partícula	$q = 0{,}5·10^{-9}$ C $= 5{,}00·10^{-10}$ C
Intensidad del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{B}} = 0{,}500\ \overline{\mathbf{i}}$ T
Velocidad de la partícula	$\overline{\boldsymbol{v}} = 4{,}00·10^6\ \overline{\mathbf{j}}$ m/s
Radio de la trayectoria circular	$R = 1{,}00·10^{-7}$ m
Incógnitas	
Vector campo eléctrico que anule el efecto del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{E}}$
Masa de la partícula	m
Otros símbolos	
Valor de la fuerza magnética sobre el protón	F_B
Vector fuerza eléctrica sobre el protón	$\overline{\boldsymbol{F}}_E$
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\ (\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \dfrac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}_E$ ejercida por un campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}$ sobre una carga q	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q \cdot \overline{\boldsymbol{E}}$

Solución:

a) Si la fuerza eléctrica anula la magnética,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B + \overline{\boldsymbol{F}}_E = q\ (\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q \cdot \overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\mathbf{0}}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}} = -(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = -(4{,}00·10^6\ \overline{\mathbf{j}}\ [\text{m/s}] \times 0{,}500\ \overline{\mathbf{i}}\ [\text{T}]) = 2{,}00·10^6\ \overline{\mathbf{k}}\ \text{N/C}$$



b) Como solo actúa la fuerza magnética:

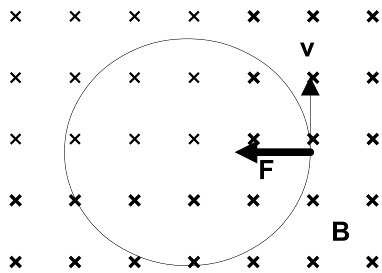
$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

La partícula describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración solo tiene componente normal a_N,

$$F_B = m \cdot a = m \cdot a_N = m \frac{v^2}{R}$$

Si la partícula entra perpendicularmente al campo magnético:

$$|q| \cdot B \cdot v = m \frac{v^2}{R}$$



Despejando la masa m

$$m = \frac{R \cdot q \cdot B}{v} = \frac{1{,}00 \cdot 10^{-7}\ [\text{m}] \cdot 5{,}00 \cdot 10^{-10}\ [\text{C}] \cdot 0{,}500\ [\text{T}]}{4{,}00 \cdot 10^6\ [\text{m/s}]} = 6{,}25 \cdot 10^{-24}\ \text{kg}$$

Análisis: La masa es unas $7·10^6$ *veces la masa del electrón. Aún suponiendo el improbable caso de una «partícula» constituida por todos esos electrones, su carga no podría ser superior a* $7·10^6 \cdot 1{,}6·10^{-19}$ C $= 1·10^{-12}$ C *y jamás podría alcanzar el valor de* $0{,}5·10^{-9}$ C. *Algo falla. Como los cálculos parecen estar bien, es de suponer que los datos del problema no han sido muy meditados.*

c) Como la trayectoria es circular, el desplazamiento es, en todo momento, perpendicular a la fuerza magnética, por lo que el trabajo es nulo.

$$W = F \cdot \Delta s \cdot \cos 90° = 0$$

6. Se acelera una partícula alfa mediante una diferencia de potencial de 1 kV, penetrando a continuación, perpendicularmente a las líneas de inducción, en un campo magnético de 0,2 T. Halla:
   a) El radio de la trayectoria descrita por la partícula.
   b) El trabajo realizado por la fuerza magnética.

c) El módulo, dirección y sentido de un campo eléctrico necesario para que la partícula alfa no experimente desviación alguna a su paso por la región en la que existen los campos eléctrico y magnético.

Datos: m_α = 6,68·10⁻²⁷ kg; q_α = 3,2·10⁻¹⁹ C *(P.A.U. Sep. 13)*

Rta.: a) R = 3,2 cm; b) W_B = 0; c) $|\overline{\boldsymbol{E}}|$ = 6,2·10⁴ V/m

Datos	**Cifras significativas: 3**
Carga de la partícula alfa	$q_\alpha = 3{,}2\cdot10^{-19}$ C
Diferencia de potencial de aceleración	$\Delta V = 1{,}00$ kV $= 1{,}00\cdot10^3$ V
Masa de la partícula alfa	$m_\alpha = 6{,}68\cdot10^{-27}$ kg
Intensidad del campo magnético	$|\overline{\boldsymbol{B}}| = 0{,}200$ T
Incógnitas	
Radio de la trayectoria descrita por la partícula alfa	R
Trabajo realizado por la fuerza magnética	W_B
Vector campo eléctrico que anule el efecto del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{E}}$
Otros símbolos	
Vector de la fuerza magnética sobre la partícula alfa	$\overline{\boldsymbol{F}}_B$
Vector fuerza eléctrica sobre la partícula alfa	$\overline{\boldsymbol{F}}_E$
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \frac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio R	$v = \frac{2\pi\cdot R}{T}$
Fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}_E$ ejercida por un campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}$ sobre una carga q	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q \cdot \overline{\boldsymbol{E}}$

Solución:

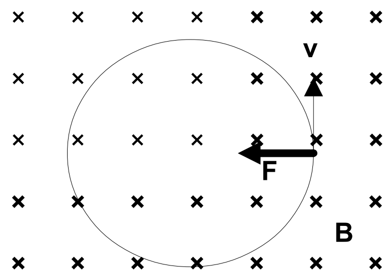
a) Para calcular la velocidad de la partícula alfa tenemos que tener en cuenta que al acelerar la partícula alfa con una diferencia de potencial (suponemos que desde el reposo), este adquiere una energía cinética:

$$W(\text{eléctrico}) = q \cdot \Delta V = \Delta E_c = ½\ m_p \cdot v^2 - ½\ m_p \cdot v_0^2$$

Si parte del reposo, v_0 = 0. La velocidad final es:

$$v=\sqrt{\frac{2\,q_\alpha\cdot\Delta V}{m_\alpha}}=\sqrt{\frac{2\cdot3{,}20\cdot10^{-19}\,[\text{C}]\cdot1{,}00\cdot10^{3}\,[\text{V}]}{6{,}28\cdot10^{-27}\,[\text{kg}]}}=3{,}10\cdot10^{5}\ \text{m/s}$$

Si solo actúa la fuerza magnética:



$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

La partícula alfa describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración solo tiene componente normal a_N,

$$F_B=m\cdot a=m\cdot a_N=m\frac{v^2}{R}$$

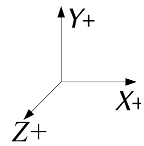
Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q|\cdot B\cdot v\cdot\text{sen}\,\varphi=m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R=\frac{m\cdot v}{|q|\cdot B\cdot\text{sen}\,\varphi}=\frac{6{,}28\cdot10^{-27}\,[\text{kg}]\cdot3{,}10\cdot10^{5}\,[\text{m/s}]}{3{,}20\cdot10^{-19}\,[\text{C}]\cdot0{,}200\,[\text{T}]\cdot\text{sen}\,90°}=3{,}23\cdot10^{-2}\ \text{m}=3{,}23\ \text{cm}$$

b) Como la trayectoria es circular, el desplazamiento es, en todo momento, perpendicular a la fuerza magnética, por lo que su trabajo es nulo.



$$W_B = F_B \cdot \Delta s \cdot \cos 90° = 0$$

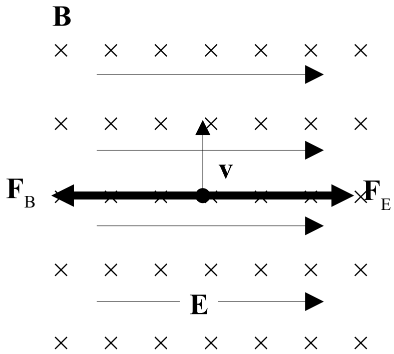
c) Tomando el sistema de referencia como el de figura de la derecha, cuando solo actúa la fuerza magnética la trayectoria de la partícula alfa es una circunferencia. En la figura anterior se dibujó la partícula alfa moviéndose inicialmente en el sentido positivo del eje Y y el campo magnético dirigido en el sentido negativo del eje Z.

Cuando actúa una fuerza eléctrica que anula la magnética,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B + \overline{\boldsymbol{F}}_E = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q \cdot \overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\boldsymbol{0}}$$

El campo eléctrico debe valer:

$$\overline{\boldsymbol{E}} = -(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = -(3{,}10\cdot10^5\ \overline{\mathbf{j}}\ [\text{m/s}] \times 0{,}200\ (-\overline{\mathbf{k}})\ [\text{T}]) = 6{,}19\cdot10^4\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$



El campo eléctrico está dirigido en el sentido positivo del eje X.

En cualquier sistema de referencia, la dirección del campo eléctrico debe ser perpendicular tanto a la dirección del campo magnético como a la dirección de la velocidad. El sentido del campo eléctrico tiene que ser igual que el de la fuerza eléctrica y opuesto al de la fuerza magnética.

7. Un electrón es acelerado por una diferencia de potencial de 1000 V, entra en un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ perpendicular a su trayectoria, y describe una órbita circular en $T = 2\cdot10^{-11}$ s. Calcula:
   a) La velocidad del electrón.
   b) El campo magnético.
   c) ¿Qué dirección debe tener un campo eléctrico $\overline{\boldsymbol{E}}$ que aplicado junto con $\overline{\boldsymbol{B}}$ permita que la trayectoria sea rectilínea?

   Datos: $q_e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg *(P.A.U. Jun. 08)*

   Rta.: a) $v = 1{,}88\cdot10^7$ m/s; b) $B = 1{,}79$ T

Datos	***Cifras significativas: 3***
Carga del electrón	$q_e = -1{,}60\cdot10^{-19}$ C
Diferencia de potencial de aceleración	$\Delta V = 1{,}00\cdot10^3$ V
Masa del electrón	$m_e = 9{,}10\cdot10^{-31}$ kg
Período de la trayectoria circular	$T = 2{,}00\cdot10^{-11}$ s
Incógnitas	
Velocidad del electrón	$\overline{\boldsymbol{v}}$
Intensidad del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{B}}$
Vector campo eléctrico que anule el efecto del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{E}}$
Otros símbolos	
Vector fuerza magnética sobre el electrón	$\overline{\boldsymbol{F}}_B$
Vector fuerza eléctrica sobre el electrón	$\overline{\boldsymbol{F}}_E$
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \dfrac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio R	$v = \dfrac{2\pi \cdot R}{T}$
Fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}_E$ ejercida por un campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}$ sobre una carga q	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q \cdot \overline{\boldsymbol{E}}$

Solución:

a) Para calcular la velocidad del electrón tenemos que tener en cuenta que al acelerar el electrón con una diferencia de potencial (suponemos que desde el reposo), este adquiere una energía cinética:

$$W(\text{eléctrico}) = q \cdot \Delta V = \Delta E_c = ½\ m_p\ v^2 - ½\ m_p\ v_0^2$$

Si parte del reposo, $v_0 = 0$. La velocidad final es:

$$v=\sqrt{\frac{2|q|\cdot \Delta V}{m_e}}=\sqrt{\frac{2\cdot|-1{,}60\cdot 10^{-19}\ [\text{C}]|\cdot 1{,}00\cdot 10^{3}\ [\text{V}]}{9{,}10\cdot 10^{-31}\ [\text{kg}]}}=1{,}88\cdot 10^{7}\ \text{m/s}$$

Análisis: La velocidad parece muy elevada, pero no supera la décima de la parte de la velocidad de la luz, y no hay que aplicar correcciones relativistas.

b) Si solo actúa la fuerza magnética:

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

El electrón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración solo tiene componente normal a_N,

$$F_B = m\cdot a = m\cdot a_N = m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q|\cdot B\cdot v\cdot \text{sen}\,\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

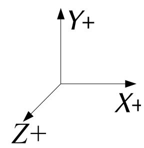
Despejando el campo magnético B

$$B=\frac{m\cdot v}{|q|\cdot R\cdot \text{sen}\,\varphi}$$

Es necesario tener el radio de la trayectoria circular. Como se conoce el período, se calculará el radio a partir de la relación entre el período y el radio de un movimiento circular uniforme.

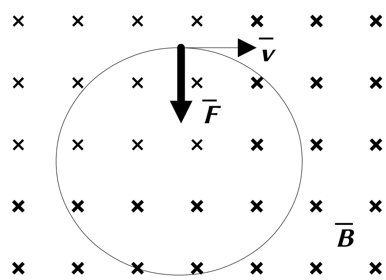
$$R=\frac{v\cdot T}{2\pi}=\frac{1{,}88\cdot 10^{7}\ [\text{m/s}]\cdot 2{,}00\cdot 10^{-11}\ [\text{s}]}{2\pi}=5{,}97\cdot 10^{-5}\ \text{m}$$

El campo magnético valdrá:



$$R=\frac{m\cdot v}{|q|\cdot B\cdot \text{sen}\,\varphi}=\frac{9{,}10\cdot 10^{-31}\ [\text{kg}]\cdot 1{,}88\cdot 10^{7}\ [\text{m/s}]}{|-1{,}60\cdot 10^{-19}\ [\text{C}]|\cdot 5{,}97\cdot 10^{-5}\ [\text{m}]\cdot \text{sen}\,90°}=1{,}79\ \text{T}$$

c) Si solo actúa la fuerza magnética se puede dibujar la trayectoria del electrón como en la figura, en la que el electrón se mueve en el sentido positivo del eje X y el campo magnético está dirigido en el sentido negativo del eje Z.



Si actúa una fuerza eléctrica que anula la magnética,

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B + \overline{\boldsymbol{F}}_E = q\ (\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q\cdot \overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\boldsymbol{0}}$$

El campo eléctrico debe valer:

$$\overline{\boldsymbol{E}} = -(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = -(1{,}88\cdot 10^7\ \overline{\mathbf{i}}\ [\text{m/s}] \times 1{,}79\ (-\overline{\mathbf{k}})\ [\text{T}]) = -3{,}35\cdot 10^7\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

El campo eléctrico está dirigido en el sentido negativo del eje Y.

Análisis: La fuerza eléctrica estará dirigida en la misma dirección pero en sentido opuesto que la fuerza magnética, o sea, en sentido positivo del eje Y. Pero como el electrón tiene carga negativa, el sentido del campo eléctrico es opuesto, o sea en el sentido negativo del eje Y.

8. Dos conductores rectos, paralelos y largos están situados en el plano XY y paralelos al eje Y. Uno pasa por el punto (10, 0) cm y el otro por el (20, 0) cm. Ambos conducen corrientes eléctricas de 5 A en el sentido positivo del eje Y.
   a) Explica la expresión utilizada para el cálculo del vector campo magnético creado por un largo conductor rectilíneo con corriente I.
   b) Calcula el campo magnético en el punto (30, 0) cm

c) Calcula el campo magnético en el punto (15, 0) cm

Dato: $\mu_0 = 4\ \pi \cdot 10^{-7}$ (S.I.) *(P.A.U. Jun. 09)*

Rta.: b) $\overline{\boldsymbol{B}}_b = -15{\cdot}10^{-6}\ \overline{\mathbf{k}}$ T; c) $\overline{\boldsymbol{B}}_c = \overline{\mathbf{0}}$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Intensidad de corriente por cada conductor	$I = 5{,}00$ A
Posición del punto por el que pasa el primer conductor	$\overline{\boldsymbol{r}}_1$ (10,0, 0) cm = (0,0100, 0) m
Posición del punto por el que pasa el segundo conductor	$\overline{\boldsymbol{r}}_2$ (20,0, 0) cm = (0,0200, 0) m
Posición del punto en el que hay que calcular el campo magnético del apdo. a	$\overline{\boldsymbol{r}}_3$ (30,0, 0) cm = (0,0300, 0) m
Posición del punto en el que hay que calcular el campo magnético del apdo.b	$\overline{\boldsymbol{r}}_4$ (15,0, 0) cm = (0,0150, 0) m
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0 = 4\ \pi \cdot 10^{-7}$ T·m·A⁻¹
Incógnitas	
Campo magnético en el punto (30, 0) cm	$\overline{\boldsymbol{B}}_3$
Campo magnético en el punto (15, 0) cm	$\overline{\boldsymbol{B}}_4$
Ecuaciones	
Ley de Biot y Savart: campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado a una distancia r por un conductor recto por el que circula una intensidad de corriente I	$B=\dfrac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$
Principio e superposición:	$\overline{\boldsymbol{B}} = \Sigma \overline{\boldsymbol{B}}_i$

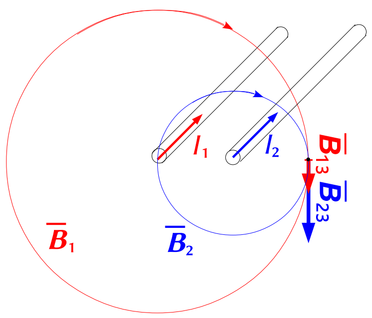
Solución:

a) El campo magnético creado por un conductor rectilíneo es circular y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha: el sentido del campo magnético es el de cierre de la mano derecha cuando el pulgar apunta en el sentido de la corriente.

El valor del campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado a una distancia r por un conductor recto por el que circula una intensidad de corriente I viene dado por la expresión:

$$B=\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

b) En el diagrama se dibujan los campos magnéticos $\overline{\boldsymbol{B}}_1$ y $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ creados por ambos conductores en el punto C(30, 0) cm.

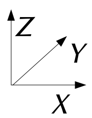


El campo magnético creado por el conductor 1 que pasa por (10, 0) cm en el punto 3 (30, 0) cm es:

$$\vec{\boldsymbol{B}}_{1\to 3}=\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r}(-\vec{\mathbf{k}})=\frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{T{\cdot}m{\cdot}A^{-1}}]\cdot 5{,}00\ [\mathrm{A}]}{2\pi \cdot 0{,}200\ [\mathrm{m}]}(-\vec{\mathbf{k}})=-5{,}00 \cdot 10^{-6}\,\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

El campo magnético creado por el conductor 2 que pasa por (20, 0) cm en el punto 3(30, 0) cm es:

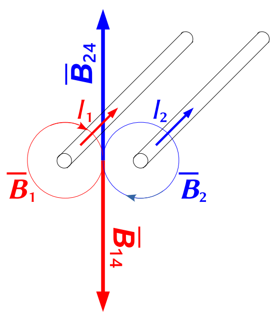
$$\vec{\boldsymbol{B}}_{2\to 3}=\frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot r}(-\vec{\mathbf{k}})=\frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{T{\cdot}m{\cdot}A^{-1}}]\cdot 5{,}00\ [\mathrm{A}]}{2\pi \cdot 0{,}100\ [\mathrm{m}]}(-\vec{\mathbf{k}})=-10{,}0 \cdot 10^{-6}\,\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$



El campo magnético resultante es la suma vectorial de ambos:

$$\overline{\boldsymbol{B}}_3 = \overline{\boldsymbol{B}}_{1\to 3} + \overline{\boldsymbol{B}}_{2\to 3} = (-5{,}00{\cdot}10^{-6}\ \overline{\mathbf{k}})\ [\mathrm{T}] + (-10{,}0{\cdot}10^{-6}\ \overline{\mathbf{k}})\ [\mathrm{T}] = -15{,}0{\cdot}10^{-6}\ \overline{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

c) El campo magnético creado por el conductor 1 en el punto 4 equidistante de ambos conductores es:



$$\vec{\boldsymbol{B}}_{1\to 4}=\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r}(-\vec{\mathbf{k}})=\frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{T{\cdot}m{\cdot}A^{-1}}]\cdot 5{,}00\ [\mathrm{A}]}{2\pi \cdot 0{,}050\ [\mathrm{m}]}(-\vec{\mathbf{k}})=-2{,}00 \cdot 10^{-5}\,\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

El campo magnético creado por el conductor 2 en el punto 4 equidistante de ambos conductores es opuesto, de igual magnitud y dirección pero de sentido opuesto, por lo que la resultante es nula.

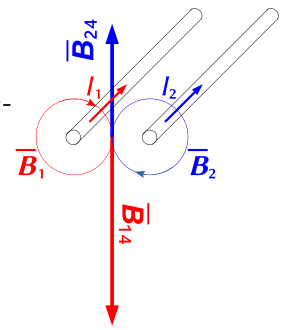
$$\overline{\boldsymbol{B}}_4 = \overline{\mathbf{0}}$$

9. Dos hilos conductores muy largos, rectilíneos y paralelos, se disponen verticalmente separados 8 cm. Por el conductor situado a la izquierda circula una corriente de intensidad 30 A, y por el situado a la derecha, otra de 20 A, ambas hacia arriba. Calcula:
   a) El campo de inducción magnética en el punto medio entre los dos conductores.
   b) La fuerza por unidad de longitud ejercida sobre un tercer conductor vertical situado entre los dos conductores iniciales, a 3 cm del conductor de la izquierda, por el que circula una corriente de 10 A dirigida hacia abajo.
   c) ¿Es conservativo el campo magnético creado por el conductor? Justifícalo.
   DATO: $\mu_0 = 4\ \pi \times 10^{-7}$ T·m·A⁻¹. *(A.B.A.U. Jun. 18)*
   Rta.: a) $|\overline{\boldsymbol{B}}| = 5{,}00·10^{-5}$ T; b) $\overline{\boldsymbol{F}} / l = 1{,}2·10^{-3}$ N/m hacia el 2º conductor

Datos	***Cifras significativas: 3***
Intensidad de corriente por el conductor 1	$I_1 = 30{,}0$ A
Intensidad de corriente por el conductor 2	$I_2 = 20{,}0$ A
Distancia entre los conductores	$d = 8{,}00$ cm $= 0{,}0800$ m
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0 = 4\ \pi \cdot 10^{-7}$ T·m·A⁻¹
Intensidad de corriente por el conductor 3	$I_C = 10{,}0$ A
Distancia del conductor 3 al conductor 1	$d_{31} = 3{,}00$ cm $= 0{,}0300$ m
Incógnitas	
Campo magnético en el punto medio entre los dos conductores	$\overline{\boldsymbol{B}}$
Fuerza por unidad de longitud ejercida sobre un conductor 3 a 3 cm del 1	$\overline{\boldsymbol{F}}_3$
Ecuaciones	
Ley de Biot y Savart: campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado a una distancia r por un conductor recto por el que circula una intensidad de corriente I	$B = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{2 \pi \cdot r}$
Principio de superposición:	$\overline{\boldsymbol{B}} = \sum \overline{\boldsymbol{B}}_i$
Ley de Laplace: fuerza magnética que ejerce un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ sobre un tramo l de conductor recto por el que circula una intensidad de corriente I	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = I (\overline{\boldsymbol{l}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$

Solución:

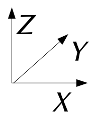
a) El campo magnético creado por un conductor rectilíneo es circular y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha: el sentido del campo magnético es el de cierre de la mano derecha cuando el pulgar apunta en el sentido de la corriente.
En el diagrama se dibujan los campos magnéticos $\overline{\boldsymbol{B}}_1$ y $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ creados por ambos conductores en el punto medio 4.
El campo magnético creado por el conductor 1 en el punto 4 equidistante de ambos conductores es:



$$\vec{\boldsymbol{B}}_{1\to4} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \pi \cdot r_{14}}(-\vec{\mathbf{k}}) = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}}] \cdot 30{,}0\ [\mathrm{A}]}{2 \pi \cdot 0{,}0400\ [\mathrm{m}]}(-\vec{\mathbf{k}}) = -1{,}50 \cdot 10^{-4}\,\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

El campo magnético creado por el conductor 2 en el punto 4 equidistante de ambos conductores es:

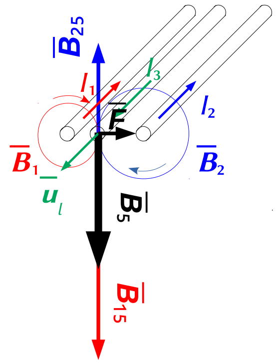
$$\vec{\boldsymbol{B}}_{2\to4} = \frac{\mu_0 \cdot I_B}{2 \pi \cdot r_{24}}\vec{\mathbf{k}} = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}}] \cdot 20{,}0\ [\mathrm{A}]}{2 \pi \cdot 0{,}0400\ [\mathrm{m}]}\vec{\mathbf{k}} = 1{,}00 \cdot 10^{-4}\,\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$



El campo magnético resultante es la suma vectorial de ambos:

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{B}}_{1\to4} + \overline{\boldsymbol{B}}_{2\to4} = -1{,}50·10^{-4}\ \overline{\mathbf{k}}\ [\mathrm{T}] + 1{,}00·10^{-4}\ \overline{\mathbf{k}}\ [\mathrm{T}] = -5{,}00·10^{-5}\ \overline{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

b) En el diagrama se dibujan los campos magnéticos $\overline{\boldsymbol{B}}_1$ y $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ creados por ambos conductores en el punto 5 situado a 3 cm del conductor de la izquierda.



El campo magnético creado por el conductor 1 en el punto 5 a 3 cm de él es:

$$\vec{B}_{1\to 5}=\frac{\mu_0\cdot I_1}{2\pi\cdot r_{15}}(-\vec{\mathbf{k}})=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,[\mathrm{T{\cdot}m{\cdot}A^{-1}}]\cdot 30{,}0\,[\mathrm{A}]}{2\pi\cdot 0{,}0300\,[\mathrm{m}]}(-\vec{\mathbf{k}})=-2{,}00\cdot 10^{-4}\,\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

El campo magnético creado por el conductor 2 en el punto 5 a 5 cm de él es:

$$\vec{B}_{2\to 5}=\frac{\mu_0\cdot I_B}{2\pi\cdot r_{25}}\vec{\mathbf{k}}=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,[\mathrm{T{\cdot}m{\cdot}A^{-1}}]\cdot 20{,}0\,[\mathrm{A}]}{2\pi\cdot 0{,}0500\,[\mathrm{m}]}\vec{\mathbf{k}}=8{,}00\cdot 10^{-5}\,\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

El campo magnético resultante es la suma vectorial de ambos:

$$\overline{\boldsymbol{B}}_5 = \overline{\boldsymbol{B}}_{1\to 5} + \overline{\boldsymbol{B}}_{2\to 5} = -2{,}00\cdot 10^{-4}\ \overline{\mathbf{k}}\ [\mathrm{T}] + 8{,}00\cdot 10^{-5}\ \overline{\mathbf{k}}\ [\mathrm{T}] = -1{,}20\cdot 10^{-4}\ \overline{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

La fuerza por unidad de longitud que se ejerce sobre un conductor 3 situado en el punto 5 es:

$$\frac{\vec{F}}{l}=\frac{I(\vec{l}\times\vec{B}_5)}{l}=I(\vec{u}_l\times\vec{B}_5)=10{,}0[\mathrm{A}](-\vec{\mathbf{j}}\times(-1{,}2\cdot 10^{-4}\,\vec{\mathbf{k}}[\mathrm{T}]))=1{,}2\cdot 10^{-3}\,\vec{\mathbf{i}}\,\mathrm{N/m}$$

Está dirigida hacia el conductor 2 porque el sentido de la corriente es el contrario que el de los otros conductores.
Análisis: Los conductores que transportan la corriente en el mismo sentido se atraen y en sentido opuesto se repelen. Aunque sufre la repulsión de ambos conductores, la fuerza mayor es la del conductor por el que circula mayor intensidad y se encuentra más cerca, o sea el 1.

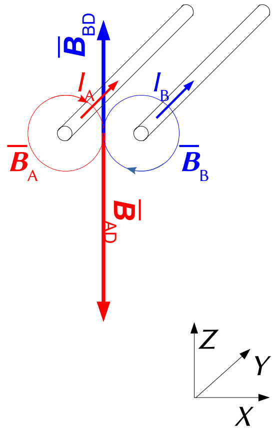
c) No. Para que un campo vectorial sea conservativo, la circulación del campo a lo largo de una línea cerrada debe ser nula, lo que es equivalente a decir que la circulación entre dos puntos A y B es independiente del camino seguido, solo dependería de los puntos A y B.
El campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ no es conservativo. La circulación del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ a lo largo de una línea *l* cerrada no es nula. Por la ley de Ampère.

$$\oint \vec{B}\,\mathrm{d}\,\vec{l}=\mu_0\sum I$$

10. Dos hilos conductores rectos muy largos y paralelos (A y B) con corrientes I_A = 5 A e I_B = 3 A en el mismo sentido están separados 0,2 m. Calcula:
    a) El campo magnético en el punto medio entre los dos conductores (D)
    b) La fuerza ejercida sobre un tercer conductor C paralelo los anteriores, de 0,5 m y con I_C = 2 A y que pasa por D.
    Dato: μ_0 = 4 π · 10⁻⁷ S.I. *(P.A.U. Sep. 06)*
    Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{B}}$ = $4{,}0\cdot 10^{-6}$ T perpendicular a los hilos ; b) $\overline{\boldsymbol{F}}$ = $4{,}0\cdot 10^{-6}$ N hacia A

Datos	***Cifras significativas: 3***
Intensidad de corriente por el conductor A	I_A = 5,00 A
Intensidad de corriente por el conductor B	I_B = 3,00 A
Distancia entre los conductores	d = 0,200 m
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0 = 4\ \pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T{\cdot}m{\cdot}A^{-1}}$
Intensidad de corriente por el conductor C	I_C = 2,00 A
Longitud del conductor C	l = 0,500 m
Incógnitas	
Campo magnético en el punto D medio entre los dos conductores	$\overline{\boldsymbol{B}}_D$
Fuerza ejercida sobre un tercer conductor C que pasa por D	$\overline{\boldsymbol{F}}_C$
Ecuaciones	
Ley de Biot y Savart: campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado a una distancia *r* por un conductor recto por el que circula una intensidad de corriente *I*	$B=\frac{\mu_0\cdot I}{2\pi\cdot r}$
Principio de superposición:	$\overline{\boldsymbol{B}} = \Sigma \overline{\boldsymbol{B}}_i$
Ley de Laplace: fuerza magnética que ejerce un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ sobre un tramo *l* de conductor recto por el que circula una intensidad de corriente *I*	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = I(\overline{\boldsymbol{l}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$

Solución:



a) El campo magnético creado por un conductor rectilíneo es circular y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha: el sentido del campo magnético es el de cierre de la mano derecha cuando el pulgar apunta en el sentido de la corriente.
En el diagrama se dibujan los campos magnéticos $\overline{\boldsymbol{B}}_A$ y $\overline{\boldsymbol{B}}_B$ creados por ambos conductores en el punto medio D.
El campo magnético creado por el conductor A en el punto D equidistante de ambos conductores es:

$$\vec{B}_{A\rightarrow D}=\frac{\mu_0 \cdot I_A}{2\pi\cdot r}(-\vec{\mathbf{k}})=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,[\mathrm{T{\cdot}m{\cdot}A^{-1}}]\cdot 5{,}00\,[\mathrm{A}]}{2\pi\cdot 0{,}100\,[\mathrm{m}]}(-\vec{\mathbf{k}})=-1{,}00\cdot 10^{-5}\,\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

El campo magnético creado por el conductor B en el punto D equidistante de ambos conductores es:

$$\vec{B}_{B\rightarrow D}=\frac{\mu_0 \cdot I_B}{2\pi\cdot r}\vec{\mathbf{k}}=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,[\mathrm{T{\cdot}m{\cdot}A^{-1}}]\cdot 3{,}00\,[\mathrm{A}]}{2\pi\cdot 0{,}100\,[\mathrm{m}]}\vec{\mathbf{k}}=6{,}00\cdot 10^{-6}\,\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

El campo magnético resultante es la suma vectorial de ambos:

$$\overline{\boldsymbol{B}}_D = \overline{\boldsymbol{B}}_{A\rightarrow D} + \overline{\boldsymbol{B}}_{B\rightarrow D} = -1{,}00\cdot 10^{-5}\,\overline{\mathbf{k}}\,[\mathrm{T}] + 6{,}00\cdot 10^{-6}\,\overline{\mathbf{k}}\,[\mathrm{T}] = -4{,}0\cdot 10^{-6}\,\overline{\mathbf{k}}\ \mathrm{T}$$

b) La fuerza que se ejerce sobre un conductor C situado en D es:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = I\,(\overline{\boldsymbol{l}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = 2{,}00\,[\mathrm{A}]\,(0{,}500\,\overline{\mathbf{j}}\,[\mathrm{m}] \times (-4{,}0\cdot 10^{-6}\,\overline{\mathbf{k}}\,[\mathrm{T}])\,) = -4{,}0\cdot 10^{-6}\,\overline{\mathbf{i}}\ \mathrm{N}$$

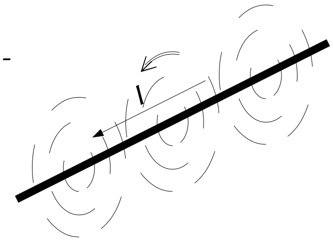
Está dirigida hacia el conductor A si el sentido de la corriente es el mismo que el de los otros conductores.
Análisis: Los conductores que transportan la corriente en el mismo sentido se atraen y en sentido opuesto se repelen. Aunque se ve atraído por ambos conductores, lo será con mayor fuerza por el que circula mayor intensidad, o sea el A.

11. a) Indica cuál es el módulo, dirección y sentido del campo magnético creado por un hilo conductor recto recorrido por una corriente y realiza un esquema que ilustre las características de dicho campo.
Considérese ahora que dos hilos conductores rectos y paralelos de gran longitud transportan su respectiva corriente eléctrica. Sabiendo que la intensidad de una de las corrientes es el doble que la de la otra corriente y que, estando separados 10 cm, se atraen con una fuerza por unidad de longitud de $4{,}8\cdot 10^{-5}$ N·m⁻¹,
b) calcula las intensidades que circulan por los hilos.
c) ¿Cuánto vale el campo magnético en un punto situado entre los dos hilos, a 3 cm del que transporta menos corriente?
Dato: $\mu_0 = 4\,\pi\cdot 10^{-7}$ N·A⁻² *(P.A.U. Jun. 15)*
Rta.: b) I_1 = 3,46 A; I_2 = 6,93 A; c) B = 3,3 µT

Datos	***Cifras significativas: 3***
Intensidad de corriente por el segundo conductor	$I_2 = 2\,I_1$
Distancia entre los dos conductores	d = 10,0 cm = 0,100 m
Fuerza de atracción por unidad de longitud	$F / l = 4{,}8\cdot 10^{-5}$ N·m⁻¹
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0 = 4\,\pi\cdot 10^{-7}$ N·A⁻²
Incógnitas	
Intensidades que circulan por los hilos	I_1, I_2
Campo magnético a 3 cm del hilo con menos corriente	$\overline{\boldsymbol{B}}$
Ecuaciones	
Ley de Biot y Savart: campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado a una distancia r por un conductor recto por el que circula una intensidad de corriente I	$B=\dfrac{\mu_0\cdot I}{2\pi\cdot r}$
Principio e superposición:	$\overline{\boldsymbol{B}} = \Sigma\overline{\boldsymbol{B}}_i$
Ley de Laplace: Fuerza que ejerce un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ sobre un tramo l de conductor que transporta una corriente I	$\overline{\boldsymbol{F}} = I\,(\overline{\boldsymbol{l}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$

Solución:

a) El campo magnético creado por un conductor rectilíneo es circular y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha: el sentido del campo magnético es el de cierre de la mano derecha cuando el pulgar apunta en el sentido de la corriente.



El valor del campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado a una distancia r por un conductor recto por el que circula una intensidad de corriente I viene dado por la expresión:

$$B=\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

b) La fuerza entre dos conductores rectilíneos paralelos se obtiene sustituyendo en la ecuación de Lorentz la expresión de la ley de Biot y Savart.

$$F_{1\rightarrow 2}=I_1 \cdot l \cdot B_2=I_1 \cdot l \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot r}=\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot r} \cdot l$$

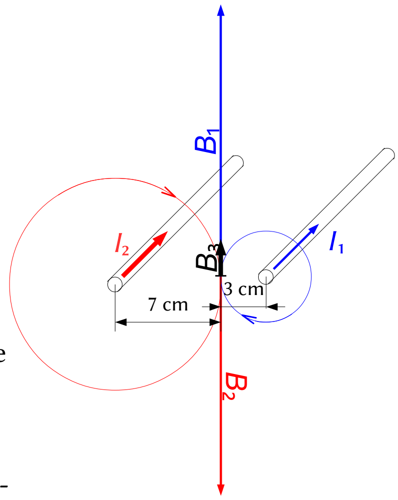
Sustituyendo los datos, teniendo en cuenta que la fuerza es por unidad de longitud (l = 1 m)

$$4{,}8 \cdot 10^{-5}\ [\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}]=\frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{N{\cdot}A^{-2}}] \cdot I_1 \cdot 2 I_1}{2\pi \cdot 0{,}100\ [\mathrm{m}]}$$

$$I_1=\sqrt{\frac{4{,}8 \cdot 10^{-5}\ [\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}] \cdot 2\pi \cdot 0{,}100\ [\mathrm{m}]}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{N{\cdot}A^{-2}}]}}=3{,}46\ \mathrm{A}$$

$$I_2 = 2\ I_1 = 6{,}93\ \mathrm{A}$$

c) En el diagrama se dibujan los campos magnéticos $\overline{\boldsymbol{B}}_1$ y $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ creados por ambos conductores en el punto 3 a 3 cm de I_1.



El campo magnético creado por el conductor 1 a 3 cm de distancia es:

$$B_1=\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r_1}=\frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{N{\cdot}A^{-2}}] \cdot 3{,}46\ [\mathrm{A}]}{2\pi \cdot 0{,}0300\ [\mathrm{m}]}=2{,}31 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

El campo magnético creado por el conductor 2 a 7 cm de distancia es:

$$B_2=\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r_2}=\frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{N{\cdot}A^{-2}}] \cdot 6{,}93\ [\mathrm{A}]}{2\pi \cdot 0{,}0700\ [\mathrm{m}]}=1{,}98 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

Como los campos son de sentidos opuestos, el campo magnético resultante en el punto que dista 3 cm es

$$B_3 = B_1 - B_2 = 2{,}31{\cdot}10^{-5}\ [\mathrm{T}] - 1{,}98{\cdot}10^{-5}\ [\mathrm{T}] = 3{,}3{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{T}$$

La dirección del campo magnético resultante es perpendicular al plano formado por los dos conductores y el sentido es el del campo magnético del hilo más cercano, (en el dibujo, hacia el borde superior del papel)

● Inducción electromagnética

1. Una bobina cuadrada y plana (S = 25 cm²) construida con 5 espiras está en el plano XY:
   a) Enuncia la ley de Faraday - Lenz.
   b) Calcula la f.e.m. media inducida si se aplica un campo magnético en dirección del eje Z, que varía de 0,5 T a 0,2 T en 0,1 s.
   c) Calcula la f.e.m. media inducida si el campo permanece constante (0,5 T) y la bobina gira hasta colocarse en el plano XZ en 0,1 s.

(P.A.U. Jun. 07)

Rta.: b) ε_b = 0,038 V; c) ε_c = 0,063 V

Datos	***Cifras significativas: 2***
Superficie de cada espira	S = 25 cm² = $2{,}5{\cdot}10^{-3}$ m²

Datos	***Cifras significativas: 2***
Número de espiras	$N = 5$ espiras
Campo magnético inicial	$\overline{\boldsymbol{B}}_0 = 0,50\ \overline{\mathbf{k}}$ T
Campo magnético final	$\overline{\boldsymbol{B}} = 0,20\ \overline{\mathbf{k}}$ T
Intervalo de tiempo	$\Delta t = 0,10$ s
Incógnitas	
Fuerza electromotriz al disminuir el campo magnético	ε_b
Fuerza electromotriz al girar la bobina 90°	ε_c
Ecuaciones	
Ley de Faraday - Lenz	$\varepsilon = \frac{-\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$
Flujo magnético elemental	$\mathrm{d}\Phi = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$
Flujo magnético de un campo constante a través de un solenoide de N espiras	$\Phi = B \cdot N \cdot S$

Solución:

a) La ley de Faraday - Lenz dice que se producirá una corriente inducida en un circuito por la variación de flujo magnético a través de él. La fuerza electromotriz inducida ε es igual a la variación instantánea del flujo magnético Φ que lo atraviesa.

$$\varepsilon = \frac{-\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

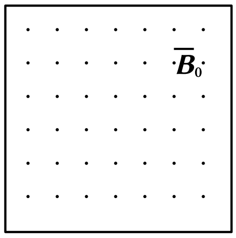
La ley de Lenz dice que la corriente inducida circulará de manera que el flujo magnético producido por ella se opondrá a la variación de flujo.
El flujo magnético elemental dΦ a través de un elemento de superficie es el producto escalar del vector campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ por el vector elemento de superficie d$\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a la superficie.

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

El flujo total es la suma de todos los flujos elementales a través de todas las superficies. Si el campo magnético es constante y perpendicular a la superficie

$$\Phi = B \cdot N \cdot S$$

Siendo N el número de espiras atravesadas por el campo magnético.



b) El flujo inicial era:

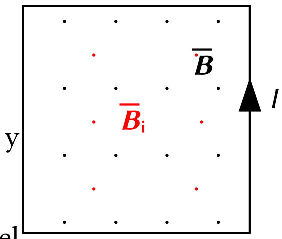
$$\Phi_0 = B_0 \cdot N \cdot S \cdot \cos 0 = 0,50\ [\mathrm{T}] \cdot 5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}^2] = 6,3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Wb}$$

El final

$$\Phi = B \cdot N \cdot S \cdot \cos 0 = 0,20\ [\mathrm{T}] \cdot 5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}^2] = 2,5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Wb}$$

La fuerza electromotriz media será:

$$\varepsilon_b = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{2,5 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{Wb}] - 6,3 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{Wb}]}{0,10\ [\mathrm{s}]} = 0,038\ \mathrm{V}$$



El sentido de la corriente se opondrá a la disminución de flujo saliente (hacia fuera del papel), por lo que producirá un campo magnético saliente (hacia fuera del papel) y la corriente tendrá un sentido antihorario (visto desde encima del papel)

c) Si la bobina gira hasta colocarse en el plano XZ habrá descrito un ángulo de 90° y el vector superficie quedará perpendicular al campo magnético, por lo que el flujo final será

$$\Phi = B \cdot N \cdot S \cdot \cos 90 = 0$$

La fuerza electromotriz media inducida

$$\varepsilon_c = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{0\ [\mathrm{Wb}] - 6,3 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{Wb}]}{0,10\ [\mathrm{s}]} = 0,063\ \mathrm{V}$$

como también se produce por una disminución de flujo magnético, el sentido de la corriente es antihorario.

◊ CUESTIONES

● Campo electrostático.

1. Dos cargas puntuales de valor $+q$ están separadas una distancia a. En el punto medio entre ambas (a/2) se cumple:
A) El módulo del campo es $E = 8\ k·q/a^2$ y el potencial $V = 0$.
B) $E = 0$ y $V = 4\ k·q/a$.
C) Ambos son nulos.

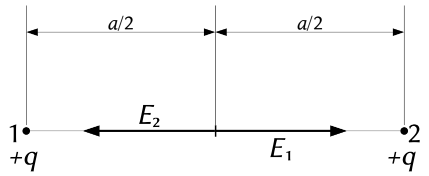
(A.B.A.U. Jun. 17)

Solución: B

La intensidad $\overline{\boldsymbol{E}}$ del campo eléctrico creado por una carga puntual Q en un punto P situado a una distancia r es:

$$\vec{\boldsymbol{E}}=K\frac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

K es la constante electrostática y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la línea que une la carga con el punto P.
La intensidad de campo eléctrico creado por varias cargas puntuales en un punto es la suma vectorial de las intensidades de campo electrostático debidas a cada una de ellas como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Se dibuja un esquema



Como el punto medio se encuentra a la misma distancia de ambas cargas y éstas son del mismo valor, el valor de las intensidades de campo eléctrico en el punto medio es el mismo. Como los vectores son de sentidos opuestos, la resultante es nula.

El potencial eléctrico V creado por una carga puntual Q en un punto P situado a una distancia r es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

El potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas puntuales es la suma de los potenciales eléctricos debidos a cada una de ellas como si el resto de las cargas no estuviese presente.

$$V=V_1+V_2=K\frac{q}{a/2}+K\frac{q}{a/2}=4\,k\frac{q}{a}$$

2. Se dispone de varias cargas eléctricas puntuales. Si en un punto del espacio próximo a las cargas el potencial eléctrico es nulo:
A) Puede haber campo eléctrico en ese punto.
B) Las líneas del campo se cortan en ese punto.
C) El campo no es conservativo.

(P.A.U. Jun. 13)

Solución: A

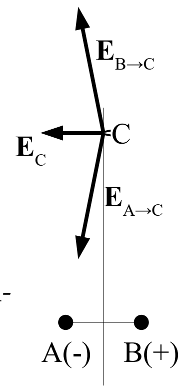
Por ejemplo, en cualquier punto equidistante de dos cargas del mismo valor y distinto signo (dipolo eléctrico).
El potencial electrostático creado por una carga puntual Q en un punto que está a una distancia r de la carga es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

Donde K es la constante electrostática del medio.
Cualquier punto que se encuentre a la mismo distancia de ambas cargas, tendrá un potencial nulo, ya que el potencial en ese punto será la suma de los potenciales creados por cada una de las cargas:

$$V=K\frac{Q}{r}+K\frac{-Q}{r}=0$$

Las cargas son opuestas y las distancias iguales.
Pero el campo electrostático en el punto no es nulo, pues es la suma vectorial de los vectores campo creados por cada una de las dos cargas que produce una resultante que no es nula, como se puede ver en la figura.



Las otras opciones:
B. Falsa. Una de las propiedades de las líneas de campo es que no se cortan en ningún punto, ya que el campo en cada punto es único en valor y dirección. Las líneas de campo se dibujan de forma que el vector campo es tangente a ellas en cada punto. Si dos líneas se cortasen, existirían dos vectores campo tangentes a cada línea en ese punto, lo que contradice la definición.

C. Falsa. El campo electrostático es un campo conservativo. El trabajo de la fuerza del campo cuando una carga de prueba se mueve entre dos puntos es independiente del camino. (También se podría decir que la circulación del vector campo a lo largo de una línea cerrada es nula).

3. Dos cargas distintas Q y q, separadas una distancia d, producen un potencial cero en un punto P situado entre las cargas y en la línea que las une. Esto quiere decir que:
A) Las cargas deben tener el mismo signo.
B) El campo eléctrico debe ser nulo en P.
C) El trabajo necesario para traer una carga desde el infinito hasta P es cero.

(P.A.U. Jun. 15)

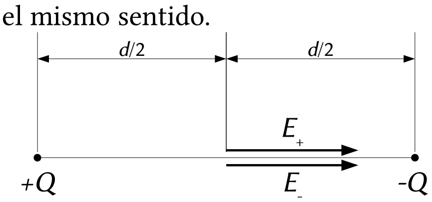
Solución: C

El potencial electrostático en un punto es el trabajo que hace la fuerza electrostática cuando la unidad de carga positiva se traslada desde su posición hasta el infinito. Como el trabajo de la fuerza del campo eléctrico es

$$W = q \cdot \Delta V$$

Si el potencial es cero también lo es el trabajo.

Las otras opciones.
A. Falsa. Si las cargas tuviesen el mismo signo, el potencial en el punto creado por ambas cargas, que es la suma de los potenciales producidos por cada carga, $V = K \cdot Q / r$, siempre se acumularían, nunca podrían anularse.
B. Falsa. En un caso simple de un punto P que equidista de dos cargas de igual valor y signo opuesto, el potencial en el punto es nulo: $V = K \cdot Q / r + K \cdot (-Q) / r = 0$, pero el campo eléctrico no porque los vectores intensidad de campo eléctrico tienen el mismo sentido.



4. Explica cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:
A) No se realiza trabajo cuando una carga eléctrica se traslada entre dos puntos de una superficie equipotencial.
B) Las líneas de fuerza del campo electrostático son cerradas.
C) Las líneas Las líneas de fuerza siempre se cortan.

(P.A.U. Sep. 16)

Solución: A

El trabajo de la fuerza del campo eléctrico es

$$W = q \cdot \Delta V$$

Si la diferencia de potencial es cero también lo es el trabajo.

Las otras opciones.
B. Falsa. Las líneas de fuerza de un campo electrostático surgen de las cargas positivas (fuentes) y terminan en las cargas negativas (sumideros). Son abiertas.
C. Falsa. Por definición, las líneas de fuerza se dibujan de forma que el campo eléctrico sea tangente a ellas en cada punto. El campo eléctrico en un punto es único. Si las líneas de fuerza se cortasen, habría dos tangentes y dos vectores campo eléctrico.

5. Si aplicamos el teorema de Gauss al campo electrostático, el flujo del campo a través de una superficie cerrada depende:
A) De la localización de las cargas dentro de la superficie gaussiana.
B) De la carga neta encerrada por la superficie gaussiana.
C) De la carga neta situada tanto dentro como fuera de la superficie gaussiana.

(A.B.A.U. Jun. 18)

Solución: B

El flujo del vector campo eléctrico $\overline{\boldsymbol{E}}$ que atraviesa una superficie cerrada es:

$$\Phi = \oiint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

El teorema de Gauss dice que el flujo del campo a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada:

$$\Phi = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

6. Si el flujo del campo eléctrico a través de una superficie gaussiana que rodea a una esfera conductora cargada y en equilibrio electrostático es Q / ε_0, el campo eléctrico en el exterior de la esfera es:
A) Cero
B) $Q / (4 \pi \varepsilon_0 r^2)$
C) Q / ε_0

(P.A.U. Sep. 05)

Solución: B

Como el flujo elemental dΦ del vector campo eléctrico $\overline{\boldsymbol{E}}$ que atraviesa una superficie elemental dS, que se puede representar por el vector d$\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a ella dirigido hacia el exterior, es el producto escalar de ambos vectores.

$$\mathrm{d}\Phi = \overline{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{S}}$$

El flujo total a través de una superficie cerrada es:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

A una distancia r del centro de la esfera el vector campo eléctrico $\overline{E}$ tiene dirección radial y es paralelo al vector superficie que represente cualquier superficie elemental en la superficie de la esfera.
En todos los puntos de una esfera imaginaria de radio R el valor de campo eléctrico es el mismo porque todos distan lo mismo del centro de la esfera.

El flujo del vector campo eléctrico $\overline{E}$ que atraviesa esa esfera imaginaria es:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S |\vec{E}| \cdot |\mathrm{d}\vec{S}| \cos 0 = \oiint_S E \cdot \mathrm{d}S = E \oiint_S \mathrm{d}S = E \cdot S = E \cdot 4\pi R^2$$

Como el flujo total viene dado por el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Igualando las expresiones anteriores, queda

$$E\, 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Despejando el módulo E del campo eléctrico

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2 \varepsilon_0}$$

7. En el interior de una esfera conductora cargada:
   A) El potencial no es nulo.
   B) La carga no es nula.
   C) El campo eléctrico no es nulo.

(P.A.U. Jun. 16, Sep. 15)

Solución: A

La intensidad $\overline{E}$ de campo electrostático en el interior de un conductor metálico en equilibrio es nula. Si no fuese así, las cargas se desplazarían debido a la fuerza del campo.
La diferencia de potencial entre dos puntos $V_1 - V_2$ es:

$$V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\, \mathrm{d}\vec{r}$$

Al ser nula la intensidad del campo, también lo será la diferencia de potencial entre dos puntos,

$$V_1 - V_2 = 0$$

O sea, el potencial será constante.

$$V_1 = V_2$$

8. En el interior de un conductor esférico cargado y en equilibrio electrostático se cumple:
   A) El potencial y el campo aumentan desde el centro hasta la superficie de la esfera.
   B) El potencial es nulo y el campo constante.
   C) El potencial es constante y el campo nulo.

(P.A.U. Jun. 05)

Solución: C. Véase la cuestión de setiembre de 2015

9. Un conductor macizo de forma esférica recibe una carga eléctrica ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?:
   A) La carga se distribuye por todo el conductor.

B) El potencial es cero en todos los puntos del conductor.
C) En el interior del conductor no hay campo electrostático.

(P.A.U. Sep. 14)

Solución: C. Véase la cuestión de setiembre de 2015

10. Cuando se aproximan dos cargas del mismo signo, la energía potencial electrostática:
A) Aumenta.
B) Disminuye.
C) No varía.

(A.B.A.U. Sep. 18)

Solución: A

La energía potencial electrostática de dos cargas es

$$E=K\frac{q_1 \cdot q_2}{r}$$

Si las cargas son del mismo signo, la energía es positiva. Cuanto menor sea la distancia entre las cargas mayor será la energía.

11. Si una carga de 1 µC se mueve entre dos puntos de la superficie de un conductor separados 1 m (cargado y en equilibrio electrostático), ¿cuál es la variación de energía potencial que experimenta esta carga?:
A) 9 kJ
B) Depende del potencial del conductor.
C) Cero.
$K = 9·10^9$ N·m²·C⁻²; 1 µC = 10^{-6} C *(P.A.U. Sep. 08)*

Solución: C

Todos los puntos de un conductor cargado en equilibrio están al mismo potencial.
Si no lo estuviesen, las cargas positivas se desplazarían en hacia los potenciales decrecientes y ya no estaría en equilibrio.
Como el potencial V de un punto es la energía potencial E_p de la unidad de carga situada en ese punto:

$$\Delta E_p = q \cdot \Delta V = 0$$

12. Dos esferas de radio R con cargas $+Q$ y $-Q$, tienen sus centros separados una distancia d. A una distancia $d/2$ (siendo $d/2 >> R$); se cumple:
A) El potencial es cero y el campo electrostático $4\ K\ Q\ d^{-2}$
B) El potencial es cero y el campo electrostático $8\ K\ Q\ d^{-2}$
C) El potencial es $4\ K\ Q\ d^{-1}$ y el campo cero.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: B

Si $d/2 >> R$, las esferas pueden considerarse como cargas puntuales.
El potencial en un punto debido a dos cargas puntuales es la suma algebraica de los potenciales que cada carga crea en ese punto sin ser afectada por la presencia de la otra.
El potencial V electrostático en un punto creado por una carga Q puntual (o esférica) situada a una distancia R es:

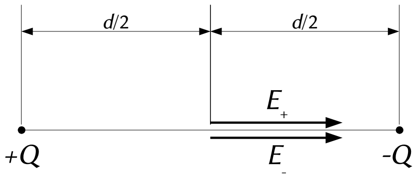
$$V=K\frac{Q}{R}$$

Donde K es la constante electrostática.

Por tanto el potencial electrostático en el punto medio creado por ambas cargas es cero:

$$V = V_+ + V_- = K\frac{+Q}{d/2} + K\frac{-Q}{d/2} = 0$$

Por el principio de superposición, la intensidad del campo electrostático en un punto creado por un conjunto de cargas puntuales es la suma vectorial de las intensidades de campo electrostático debidas a cada una de ellas como si el resto de las cargas no estuviese presente.
La expresión de la intensidad $\overline{\boldsymbol{E}}$ del campo electrostático creado por una carga Q puntual en un punto a una distancia r



$$\vec{\boldsymbol{E}} = K\frac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Siendo $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la dirección del punto tomando como origen la carga.
Por el principio de superposición

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_+ + \vec{\boldsymbol{E}}_- = K\frac{+Q}{(d/2)^2}\vec{\mathbf{i}} + K\frac{-Q}{(d/2)^2}(-\vec{\mathbf{i}}) = 2\left(4K\frac{Q}{d^2}\right)\vec{\mathbf{i}} = 8K\frac{Q}{d^2}\vec{\mathbf{i}}$$

$$|\vec{\boldsymbol{E}}| = 8K\frac{Q}{d^2}$$

13. Dadas dos esferas conductoras cargadas y de diferente radio, con cargas Q_A y Q_B, si se ponen en contacto:
a) Se igualan las cargas en las dos esferas.
b) Se igualan los potenciales de las esferas.
c) No ocurre nada.

(P.A.U. Sep. 09)

Solución: B

Cuando dos esferas conductoras cargadas se ponen en contacto eléctrico las cargas se desplazan desde la esfera que tiene mayor potencial hacia la que lo tiene menor, hasta que sus potenciales se igualan. Las cargas eléctricas positivas se desplazan siempre en el sentido de los potenciales decrecientes. Suponiendo que el sistema de dos esferas está aislado del exterior, la carga eléctrica deberá conservarse. Por lo tanto se podría calcular la carga final q' de cada esfera resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2$$

$$V'_1 = K\frac{q'_1}{R_1} = K\frac{q'_2}{R_2} = V'_2$$

● Campo magnético.

1. Si una partícula cargada se mueve en un campo magnético y este ejerce una fuerza, dicha fuerza siempre es perpendicular a la velocidad de la partícula.
A) Verdadero.
B) Falso.
C) Depende del módulo de la velocidad de la partícula.

(A.B.A.U. Sep. 18)

Solución: A

La fuerza magnética $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ viene dada por la ley de Lorentz:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

Esta fuerza es perpendicular a la velocidad de la partícula.

2. Si una partícula cargada de masa despreciable penetra en un campo magnético uniforme con una velocidad que forma un ángulo de 180° con las líneas del campo, la trayectoria que describe la partícula es:
   A) Rectilínea.
   B) Circular.
   C) Parabólica.

(A.B.A.U. Jun. 18)

Solución: A

La fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ sobre una carga eléctrica q en movimiento se rige por la ley de Lorentz

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

Siendo $\overline{\boldsymbol{v}}$ la velocidad de la carga y $\overline{\boldsymbol{B}}$ la inducción magnética (intensidad del campo magnético).
El módulo del producto vectorial de los vectores velocidad e inducción magnética es

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{B}}| \cdot \text{sen}\ \varphi$$

Donde φ es el ángulo que forman esos vectores. Si φ = 180°, sen φ = 0 y la fuerza es nula, por lo que la partícula no se desvía. La trayectoria será rectilínea.

3. Un campo magnético constante $\overline{\boldsymbol{B}}$ ejerce una fuerza sobre una carga eléctrica:
   A) Si la carga está en reposo.
   B) Si la carga se mueve perpendicularmente a $\overline{\boldsymbol{B}}$.
   C) Si la carga se mueve paralelamente a $\overline{\boldsymbol{B}}$.

(P.A.U. Sep. 12)

Solución: B

La fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ sobre una carga eléctrica q en movimiento se rige por la ley de Lorentz

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

Siendo $\overline{\boldsymbol{v}}$ la velocidad de la carga y $\overline{\boldsymbol{B}}$ la inducción magnética (intensidad del campo magnético).
El módulo del producto vectorial de los vectores velocidad e inducción magnética es

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{B}}| \cdot \text{sen}\ \varphi$$

Donde φ es el ángulo que forman esos vectores. Si son perpendiculares, sen φ = 1

Las otras opciones.
A. Falsa. Si está en reposo, la velocidad es nula y el producto vectorial también.
C. Falsa. Si son paralelos, sen φ = 0 y el producto vectorial es nulo. No hay fuerza.

4. Cuando una partícula cargada se mueve dentro de un campo magnético, la fuerza magnética que actúa sobre ella realiza un trabajo que siempre es:
   A) Positivo, si la carga es positiva.
   B) Positivo, sea como sea la carga.
   C) Cero.

(P.A.U. Jun. 16)

Solución: C

El trabajo de una fuerza es

$$W=\int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

La fuerza magnética es perpendicular a la trayectoria en todos los puntos

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos 90° = 0$$

Por tanto, no realiza trabajo.

5. Analiza cuál de las siguientes afirmaciones referentes a una partícula cargada es verdadera y justifica por qué:
A) Si se mueve en un campo magnético uniforme, aumenta su velocidad cuando se desplaza en la dirección de las líneas del campo.
B) Puede moverse en una región en la que existe un campo magnético y un campo eléctrico sin experimentar ninguna fuerza.
C) El trabajo que realiza el campo eléctrico para desplazar esa partícula depende del camino seguido.
(P.A.U. Sep. 11)

Solución: B

La fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ sobre una carga eléctrica q en movimiento se rige por la ley de Lorentz

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q \cdot \overline{\boldsymbol{E}}$$

Siendo $\overline{\boldsymbol{v}}$ la velocidad de la carga, $\overline{\boldsymbol{B}}$ la inducción magnética (intensidad del campo magnético) y $\overline{\boldsymbol{E}}$ la intensidad del campo electrostático.
Mientras que la dirección de la fuerza eléctrica es paralela al campo electrostático, la dirección de la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético.
La partícula puede no experimentar ninguna fuerza si hay un campo magnético y un campo electrostático perpendiculares a la dirección de movimiento de la partícula y perpendiculares entre si, y se cumple que

$$q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q \cdot \overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\boldsymbol{0}}$$

o sea

$$|\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{B}}| = |\overline{\boldsymbol{E}}|$$

6. Un protón y una partícula α ($q_\alpha = 2\ q_p$; $m_\alpha = 4\ m_p$) penetran, con la misma velocidad, en un campo magnético uniforme perpendicularmente a las líneas de inducción. Estas partículas:
A) Atraviesan el campo sin desviarse.
B) El protón describe una órbita circular de mayor radio.
C) La partícula alfa describe una órbita circular de mayor radio.
(P.A.U. Sep. 14)

Solución: C

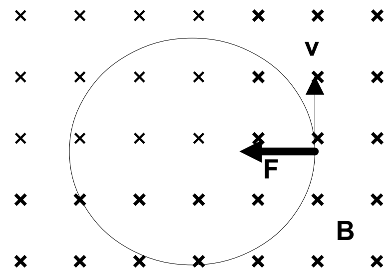
La fuerza magnética $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ viene dada por la ley de Lorentz:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

Esta fuerza es perpendicular en todos los puntos a la dirección de avance de la partícula, por lo que describe trayectoria circular con velocidad de valor constante ya que la aceleración solo tiene componente normal a_N,

Si solo actúa la fuerza magnética:

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$



Aplicando la 2ª ley de Newton

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

$$F_B = m \cdot a = m \cdot a_\mathrm{N} = m \frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q| \cdot B \cdot v \cdot \operatorname{sen} \varphi = m \frac{v^2}{R}$$

Si las partículas entran perpendicularmente al campo, sen φ = 1.
Despejando el radio R

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

Como la velocidad es la misma y el campo magnético es el mismo, aplicando esta expresión tanto al protón como a la partícula α y dividiendo una entre la otra queda:

$$\frac{R_\alpha}{R_\mathrm{p}} = \frac{\dfrac{m_\alpha \cdot v}{q_\alpha \cdot B}}{\dfrac{m_\mathrm{p} \cdot v}{q_\mathrm{p} \cdot B}} = \frac{m_\alpha \cdot q_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p} \cdot q_\alpha} = \frac{4\, m_\mathrm{p} \cdot q_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p} \cdot 2\, q_\mathrm{p}} = 2$$

$$R_\alpha = 2\, R_\mathrm{p}$$

El radio de la circunferencia descrita por la partícula alfa es el doble que el de la circunferencia descrita por protón.

7. Una partícula cargada atraviesa un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$. A continuación, hace lo mismo otra partícula con la misma $\overline{\boldsymbol{v}}$, doble masa y triple carga, y en ambos casos la trayectoria es idéntica. Justifica cuál es la respuesta correcta:
A) No es posible.
B) Solo es posible si la partícula inicial es un electrón.
C) Es posible en una orientación determinada.

(P.A.U. Jun. 11)

Solución: C

Un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ ejerce sobre una partícula de masa m y carga q que lo atraviesa con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$, una fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ que puede calcularse por la expresión de Lorentz.

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\, (\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

$$F = |q| \cdot v \cdot B \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

Si el campo magnético es constante y la partícula entra en dirección perpendicular a las líneas de campo, la trayectoria es una circunferencia porque la fuerza F es siempre perpendicular a la velocidad y la partícula tiene una aceleración centrípeta que solo cambia la dirección de la velocidad,

$$F_B = m \cdot a = m \cdot a_\mathrm{N} = m \frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q| \cdot B \cdot v \cdot \operatorname{sen} \varphi = m \frac{v^2}{R}$$

Por tanto, la trayectoria es una circunferencia de radio:

$$R=\frac{m\cdot v}{|q|\cdot B\cdot \operatorname{sen}\varphi}$$

Con la misma velocidad v y el mismo campo magnético B, el doble de masa y el triple de carga, el radio no podría dar el mismo resultado que la primera vez a no ser que el ángulo α entre el vector velocidad y el vector campo magnético fuera distinto, pero en este caso la trayectoria no sería la misma.
Pero existe una posibilidad. Si el vector velocidad y el vector campo magnético fueran paralelos (φ = 0), no habría fuerza sobre la partícula y seguiría una trayectoria recta en ambos casos.

8. Una partícula cargada y con velocidad $\overline{\boldsymbol{u}}$, se introduce en una región del espacio donde hay un campo eléctrico y un campo magnético constantes. Si la partícula se mueve con movimiento rectilíneo uniforme se debe a que los dos campos:
A) Son de la misma dirección y sentido.
B) Son de la misma dirección y sentido contrario.
C) Son perpendiculares entre sí.

(P.A.U. Sep. 09)

Solución: C

La fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ sobre una carga eléctrica q en movimiento sigue la ley de Lorentz

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q \cdot \overline{\boldsymbol{E}}$$

Siendo $\overline{\boldsymbol{u}}$ la velocidad de la carga, $\overline{\boldsymbol{B}}$ la inducción magnética (intensidad del campo magnético) y $\overline{\boldsymbol{E}}$ la intensidad del campo electrostático.
Mientras que la dirección de la fuerza eléctrica es paralela al campo electrostático, la dirección de la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético.
Si la partícula cargada no se desvía puede ser porque:
- Tanto la dirección del campo magnético como la del campo electrostático son paralelas a la dirección de movimiento de la partícula. No habrá fuerza magnética pero la fuerza eléctrica provocará una aceleración y el movimiento será rectilíneo pero no uniforme.
- Tanto la dirección del campo magnético como la del campo electrostático son perpendiculares a la dirección de movimiento de la partícula y perpendiculares entre sí, y además se cumple que

$$q\,(\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q \cdot \overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\boldsymbol{0}} \Rightarrow |\overline{\boldsymbol{u}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{B}}| = |\overline{\boldsymbol{E}}|$$

En esto se basa el selector de velocidades del espectrógrafo de masas.

9. En una región del espacio hay un campo eléctrico y un campo magnético ambos uniformes de la misma dirección pero de sentidos contrarios. En dicha región se abandona un protón con velocidad inicial nula. El movimiento de protón es:
A) Rectilíneo uniforme.
B) Rectilíneo uniformemente acelerado.
C) Circular uniforme.

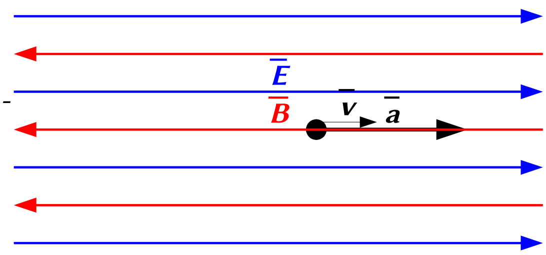
(P.A.U. Sep. 16)

Solución: B

La fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ sobre una carga eléctrica q en movimiento sigue la ley de Lorentz

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q \cdot \overline{\boldsymbol{E}}$$

Siendo $\overline{\boldsymbol{v}}$ la velocidad de la carga, $\overline{\boldsymbol{B}}$ la inducción magnética (intensidad del campo magnético) y $\overline{\boldsymbol{E}}$ la intensidad del campo electrostático.



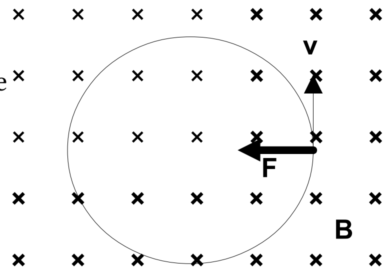
La dirección de la fuerza eléctrica es paralela al campo electrostático.
Inicialmente, con el protón en reposo, solo actúa la fuerza eléctrica, que le produce una aceleración en la dirección y sentido de la fuerza. En cuanto tiene velocidad, debería actuar la fuer-

za magnética, pero no lo hace porque el campo magnético tiene la misma dirección que el campo eléctrico y que la velocidad.
Por tanto el protón sigue moviéndose con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

10. Una partícula cargada penetra en una región donde existe un campo magnético uniforme perpendicular a la velocidad de la partícula. El radio de la órbita descrita:
A) Aumenta si aumenta la energía cinética de la partícula.
B) Aumenta si aumenta la intensidad del campo magnético.
C) No depende de la energía cinética de la partícula.

(P.A.U. Jun. 15)

Solución: A



La fuerza magnética $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ viene dada por la ley de Lorentz:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

Esta fuerza es perpendicular en todos los puntos a la dirección de avance de la partícula, por lo que describe trayectoria circular con velocidad de valor constante ya que la aceleración solo tiene componente normal a_N.
Si solo actúa la fuerza magnética:

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

Aplicando la 2ª ley de Newton

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

$$F_B = m \cdot a = m \cdot a_N = m \frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética quedaría

$$|q| \cdot B \cdot v \cdot \operatorname{sen} \varphi = m \frac{v^2}{R}$$

Si las partículas entran perpendicularmente al campo, sen φ = 1.
Despejando el radio R

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

Si aumenta la energía cinética, aumenta la velocidad y, como se ve en la ecuación anterior, aumenta también el radio de la trayectoria.

11. Indica, justificando la respuesta, cual de las siguientes afirmaciones es correcta:
A) La unidad de inducción magnética es el weber (Wb).
B) El campo magnético no es conservativo.
C) Dos conductores rectos paralelos e indefinidos, por los que circulan corrientes I_1 e I_2 en sentido contrario, se atraen.

(P.A.U. Sep. 15)

Solución: B

Para que un campo vectorial sea conservativo, la circulación del campo a lo largo de una línea cerrada debe ser nula, lo que es equivalente a decir que la circulación entre dos puntos A y B es independiente del camino seguido, solo dependería de los puntos A y B.
El campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ no es conservativo. La circulación del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ a lo largo de una línea l cerrada no es nula. Por la ley de Ampère.

$$\oint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

Las otras opciones:
A. Falsa. La unidad de inducción magnética es el tesla (T). El weber (Wb) es la unidad de flujo magnético.

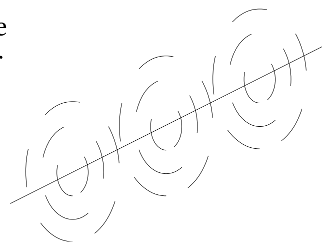
$$\mathrm{Wb} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2$$

C. Falsa. Se repelen. Ver respuesta de junio de 2006

12. Por un conductor recto muy largo circula una corriente de 1 A. El campo magnético que se origina en sus cercanías se hace más intenso cuanto:
A) Más grueso sea el conductor.
B) Mayor sea su longitud.
C) Más cerca del conductor esté el punto donde se determina.

(A.B.A.U. Set. 17)

Solución: C



La dirección del campo magnético $\vec{B}$ creado por una intensidad I de corriente que circula por un conductor recto indefinido es circular alrededor del hilo y su valor en un punto la una distancia r del hilo viene dada por la ley de Biot - Savart:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

El sentido del campo magnético viene dado por la regla de la mano derecha (el sentido del campo magnético es el del cierre de la mano derecha cuando el pulgar apunta en el sentido de la corriente eléctrica).

Como se ve en la expresión, cuanto menor sea la distancia r del punto al hilo, mayor será la intensidad del campo magnético.

13. Un cable recto de longitud ℓ y corriente i está colocado en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ formando con él un ángulo θ. El módulo de la fuerza ejercida sobre dicho cable es:
A) $i\ \ell\ B\ \mathrm{tg}\ \theta$
B) $i\ \ell\ B\ \mathrm{sen}\ \theta$
C) $i\ \ell\ B\ \cos\ \theta$

(P.A.U. Sep. 05)

Solución: B

La 2ª ley de Laplace dice que la fuerza $\vec{F}$ ejercida por un campo magnético $\vec{B}$ uniforme sobre un cable recto de longitud l por el que pasa una corriente de intensidad i viene dado por el producto vectorial del vector $\vec{l}$ por el vector campo $\vec{B}$ magnético multiplicado por la intensidad de corriente i que atraviesa el conductor.

$$\vec{F}_B = i\,(\vec{l} \times \vec{B})$$

El producto vectorial de dos vectores $\vec{l}$ y $\vec{B}$ es otro vector cuyo módulo vale el producto de los módulos l y B por el seno del ángulo que forman cuando coinciden sus orígenes.

$$|\vec{F}_B| = i \cdot |\vec{l}| \cdot |\vec{B}|\ \mathrm{sen}\ \varphi$$

que se puede escribir también como:

$$F = i \cdot l \cdot B\ \mathrm{sen}\ \varphi$$

14. Un hilo recto y conductor de longitud ℓ y corriente I, situado en un campo magnético $\vec{B}$, sufre una fuerza de módulo $I \cdot \ell \cdot B$:
A) Si I y $\vec{B}$ son paralelos y del mismo sentido.

B) Si I y $\overline{\boldsymbol{B}}$ son paralelos y de sentido contrario.
C) Si I y $\overline{\boldsymbol{B}}$ son perpendiculares.

(P.A.U. Sep. 08)

Solución: C

La 2ª ley de Laplace dice que la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ ejercida por un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ uniforme sobre un cable recto de longitud l por el que pasa una corriente de intensidad i viene dado por el producto vectorial del vector $\overline{\boldsymbol{l}}$ por el vector campo $\overline{\boldsymbol{B}}$ magnético multiplicado por la intensidad de corriente i que atraviesa el conductor.

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = i\,(\overline{\boldsymbol{l}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

El producto vectorial de dos vectores $\overline{\boldsymbol{l}}$ y $\overline{\boldsymbol{B}}$ es otro vector cuyo módulo vale el producto de los módulos l y B por el seno del ángulo que forman cuando coinciden sus orígenes.

$$|\overline{\boldsymbol{F}}_B| = i \cdot |\overline{\boldsymbol{l}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{B}}| \text{ sen } \varphi$$

que se puede escribir también como:

$$F = i \cdot l \cdot B \text{ sen } \varphi$$

Cuando el cable es perpendicular al campo magnético, sen $\varphi = 1$ y

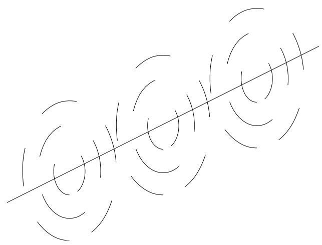
$$F = i \cdot l \cdot B$$

15. Las líneas de fuerza del campo magnético son:
A) Siempre cerradas.
B) Abiertas o cerradas dependiendo del imán o bobina.
C) Abiertas como las del campo eléctrico.

(P.A.U. Sep. 13)

Solución: A

Si el campo magnético es producido por un imán, un solenoide o una espira, las fuentes del campo magnético son los polos N del elemento mientras que los sumideros son los polos S. Pero como ambos polos son inseparables, las líneas de campo son cerradas.
(Si partimos un imán en dos, cada parte sigue teniendo dos polos. No se pueden conseguir por división monopolos magnéticos)
Si el campo es producido por una corriente rectilínea indefinida, las líneas de campo son circunferencias concéntricas alrededor del hilo.

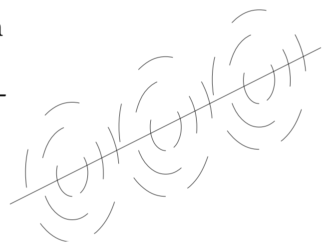


16. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?:
A) La ley de Faraday - Lenz dice que la f.e.m. inducida en una espira es igual al flujo magnético Φ_B que la atraviesa.
B) Las líneas del campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ para un conductor largo y recto son circulares alrededor del mismo.
C) El campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ es conservativo.

(P.A.U. Jun. 14)

Solución: B

Las líneas de campo magnético producido por una corriente recta indefinida, son circunferencias concéntricas alrededor del hilo. Puede comprobarse desparramando limaduras de hierro sobre una superficie perpendicular a un cable que lleva una corriente eléctrica.



Las otras opciones:
A. Falsa. La ley de Faraday - Lenz dice que la f.e.m. inducida en una espira es igual a la variación con el tiempo del flujo magnético Φ_B que la atraviesa.

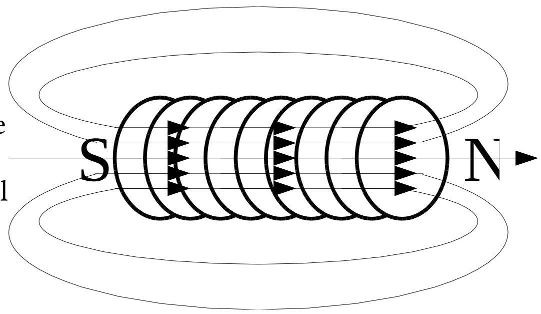
C. Falsa. El campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ no es conservativo. La circulación del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ a lo largo de una línea l cerrada no es nula, por la ley de Ampère.

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}\,\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

17. Las líneas del campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado por una bobina ideal:
    A) Nacen en la cara norte y mueren en la cara sur de la bobina.
    B) Son líneas cerradas sobre sí mismas que atraviesan la sección de la bobina.
    C) Son líneas cerradas alrededor de la bobina y que nunca la atraviesan.

(P.A.U. Jun. 06)

Solución: B



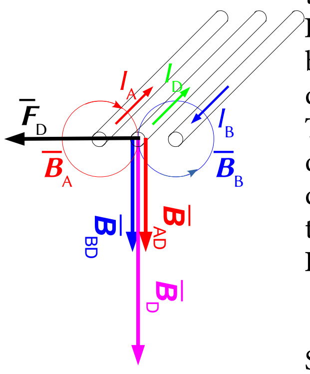
Las líneas de campo magnético son líneas cerradas.
En una bobina recta las líneas son cerradas, que en el exterior salen del polo (o cara) norte y entran por el polo sur, de forma análoga a las de un imán rectangular, recorriendo el interior de la bobina (desde el polo sur hacia el polo norte).
En una bobina toroidal las líneas son cerradas, encerradas en el interior de la bobina, y en el exterior de ella no hay líneas de campo magnético. En este caso no existen polos norte ni sur.

18. Dos conductores idénticos A y B paralelos, con corrientes respectivas +*I* y -*I* (entrando y saliendo del plano del papel) están separados una distancia *a*. Un tercer conductor, C, paralelo e idéntico a los anteriores y con corriente +*I* (entrando) se sitúa en *a*/2. Sobre él se ejerce una fuerza:
    A) Dirigida hacia A.
    B) Dirigida hacia B.
    C) No se ejerce ninguna fuerza sobre él.

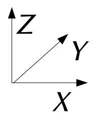
(A.B.A.U. Jun. 17)

Solución: A

El campo magnético creado por un conductor rectilíneo es circular y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha: el sentido del campo magnético es el de cierre de la mano derecha cuando el pulgar apunta en el sentido de la corriente.



En el diagrama se dibujan los campos magnéticos $\overline{\boldsymbol{B}}_A$ y $\overline{\boldsymbol{B}}_B$ creados por ambos conductores en el punto medio D, y el vector fuerza magnética $\overline{\boldsymbol{F}}_D$ ejercida sobre el conductor situado allí.



Tanto el campo magnético creado por el conductor A en el punto D equidistante de ambos conductores como el campo magnético creado por el conductor B en el punto D están dirigidos en el sentido negativo del eje *Z*. Por tanto, el vector campo magnético resultante también lo está. Aplicando la ley de Lorentz:

$$\overline{\boldsymbol{F}} = I\,(\overline{\boldsymbol{l}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = I\,(l\,\overline{\mathbf{j}} \times B\,(-\overline{\mathbf{k}})) = I \cdot l \cdot B\,(-\overline{\mathbf{i}})$$

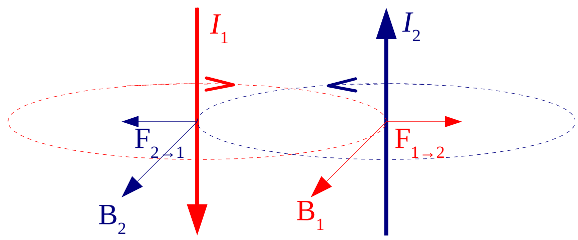
Se ve que está dirigida hacia el conductor que lleva la corriente A.

19. Dos hilos paralelos muy largos con corrientes eléctricas *I* e *I* ' estacionarias y del mismo sentido:
    A) Se atraen entre sí.
    B) Se repelen entre sí.
    C) No interaccionan.

(P.A.U. Jun. 06)

Solución: C

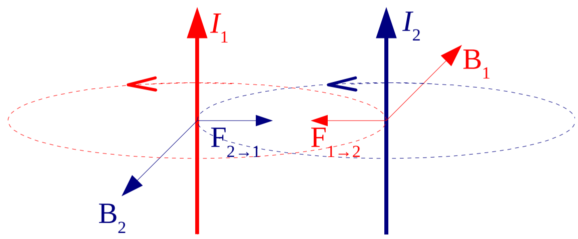
La dirección del campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado por una intensidad I de corriente que circula por un conductor rectilíneo indefinido es circular alrededor del hilo y su valor en un punto a una distancia r del hilo viene dada por la ley de Biot - Savart:



$$B=\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

El sentido del campo magnético viene dado por la regla de la mano derecha (el sentido del campo magnético es el del cierre de la mano derecha cuando el pulgar apunta en el sentido de la corriente eléctrica).

La 2ª ley de Laplace da el valor, dirección y sentido de la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ debida a un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ sobre un tramo $\overline{\boldsymbol{l}}$ recto de corriente por el que circula una intensidad I de corriente eléctrica.



$$\overline{\boldsymbol{F}} = I\,(\overline{\boldsymbol{l}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

Al ser un producto vectorial, la dirección de la fuerza es perpendicular al tramo $\overline{\boldsymbol{l}}$ de corriente y también perpendicular al vector campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$. El sentido viene dado por otra regla de la mano derecha (al cerrar la mano desde el primer vector $\overline{\boldsymbol{l}}$ hacia el segundo $\overline{\boldsymbol{B}}$, el sentido de la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ es el del dedo pulgar).
Si las corrientes son de sentidos opuestos los hilos se repelen.
Si las corrientes son del mismo sentido los hilos se atraen.

20. Se dispone de un hilo infinito recto y con corriente eléctrica *I*. Una carga eléctrica $+q$ próxima al hilo moviéndose paralelamente a él y en el mismo sentido que la corriente:
A) Será atraída.
B) Será repelida.
C) No experimentará ninguna fuerza.

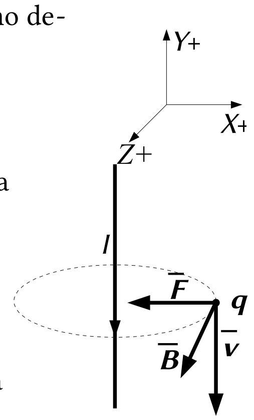
(P.A.U. Jun. 04)

Solución: A

La ley de Biot - Savart dice que el campo magnético creado en un punto por un conductor rectilíneo indefinido por el que pasa una intensidad de corriente I, en un punto que se encuentra a una distancia r del conductor es directamente proporcional a la intensidad de corriente e inversamente proporcional a la distancia a la que se encuentra el punto del conductor.

$$B=\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

El campo magnético es circular alrededor del hilo y su sentido es el del cierre de la mano derecha con el pulgar apuntando en el sentido de la corriente. (Regla de la mano derecha)
En un sistema de coordenadas como el de la figura, el vector campo magnético sería:



$$\overline{\boldsymbol{B}} = B\,\overline{\mathbf{k}}$$

La ley de Lorentz dice que la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ ejercida por un campo magnético sobre una carga q que se mueve con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ puede calcularse por la expresión:

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

La fuerza magnética es perpendicular a la dirección de movimiento de la partícula y al campo magnético.
El sentido de la fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ del campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ creado por la corriente I sobre la carga $+q$ que se mueve paralelamente y en el mismo sentido que la corriente se deduce del producto vectorial.

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = q\,(v\,(-\overline{\mathbf{j}}) \times B\,\overline{\mathbf{k}}) = q \cdot v \cdot B\,(-\overline{\mathbf{i}})$$

La fuerza está dirigida hacia el hilo.

21. Por dos conductores paralelos e indefinidos, separados una distancia r, circulan corrientes en sentido contrario de diferente valor, una el doble de la otra. La inducción magnética se anula en un punto del plano de los conductores situado:
A) Entre ambos conductores.
B) Fuera de los conductores y del lado del conductor que transporta más corriente.
C) Fuera de los conductores y del lado del conductor que transporta menos corriente.

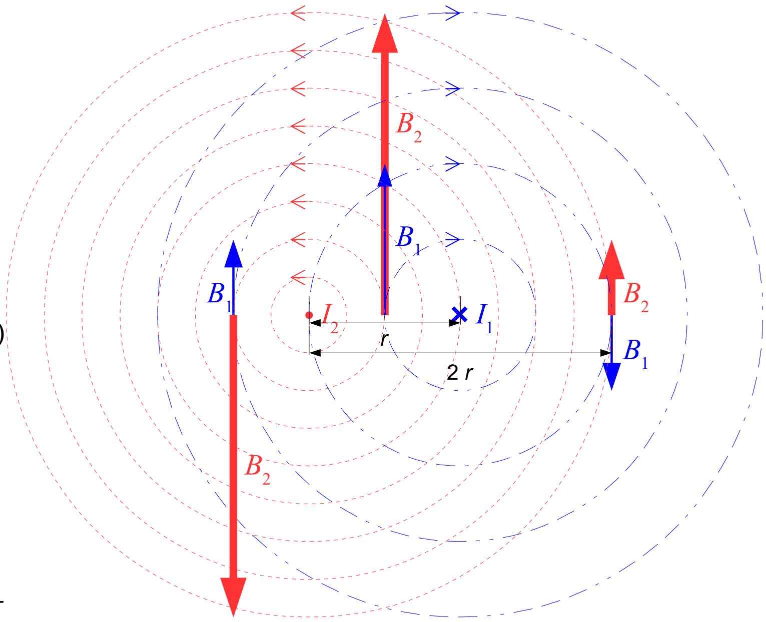
(P.A.U. Sep. 14)

Solución: C

La ley de Biot - Savart dice que el campo magnético creado en un punto por un conductor rectilíneo indefinido por el que pasa una intensidad de corriente I, en un punto que se encuentra a una distancia r del conductor es directamente proporcional a la intensidad de corriente e inversamente proporcional a la distancia a la que se encuentra el punto del conductor.

$$B=\frac{\mu_0 \cdot I}{2 \pi \cdot r}$$

Las líneas del campo magnético son circulares alrededor del conductor.
La dirección del campo magnético viene dada por la regla de la mano derecha, que dice que si colocamos el pulgar en el sentido de la corriente, el sentido del campo magnético es el de los otros dedos al cerrar la mano.



En la figura se representan los campos magnéticos creados por los dos conductores, el que lleva la corriente I_1 hacia dentro y el que lleva la corriente I_2 hacia afuera y del doble de intensidad.
En la zona situada entre ambos conductores, los campos magnéticos creados por las corrientes paralelas de los hilos son del mismo sentido, por lo que el campo resultante nunca será nulo.
En la zona exterior del lado de I_2 (izquierda) que transporta el doble de corriente, el campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ creado por la corriente de ese conductor siempre será mayor que el creado por el de I_1, que se encuentra más alejado.
En la zona exterior del lado de I_1 (derecha), los puntos se encuentran más cerca del conductor 1 que del conductor 2, y los campos magnéticos de ambos pueden ser del mismo valor, y como son de sentido opuesto, pueden anularse en algún punto.
La distancia x de este punto al conductor que lleva I_2 debe cumplir la condición

$$B_2 = B_1$$

$$\frac{\mu_0 \cdot I_2}{2 \pi \cdot x}=\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \pi (x-r)}$$

$$(x - r)\ I_2 = x \cdot I_1$$

Como $I_2 = 2\ I_1$, queda

$$(x - r) \cdot 2\ I_1 = x \cdot I_1$$

$$x = 2\ r$$

● Inducción electromagnética.

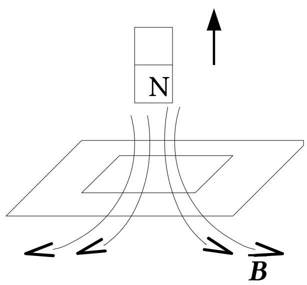
1. Se induce corriente en sentido horario en una espira en reposo si:
A) Acercamos el polo norte o alejamos el polo sur de un imán rectangular.
B) Alejamos el polo norte o acercamos el polo sur.
C) Mantenemos en reposo el imán y la espira.

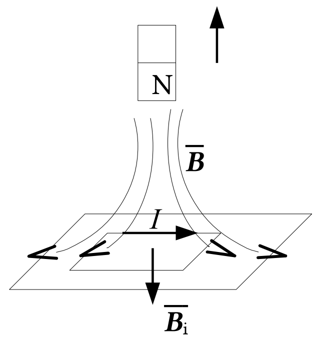
(P.A.U. Sep. 15)

Solución: B

La ley de Faraday - Lenz dice que se inducirá una corriente que se oponga a la variación de flujo a través de la espira. La f.e.m. de esa corriente será igual a la variación de flujo magnético respecto al tiempo.

$$\varepsilon = \frac{-\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}$$





Al alejar el polo norte del imán disminuye el número de líneas de campo magnético que atraviesan la espira, por lo que la corriente inducida circulará en el sentido de «corregir» el aumento de líneas, es decir, lo hará de modo que el campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}_\mathrm{i}$ debido a la corriente I inducida tenga sentido opuesto al que tenía el del imán. Por la regla de la mano derecha, la corriente debe ser en sentido horario.

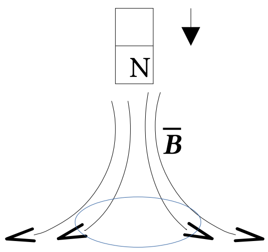
2. Si se acerca el polo norte de un imán recto al plano de una espira plana y circular:
A) Se produce en la espira una corriente inducida que circula en sentido antihorario.
B) Se genera un par de fuerzas que hace rotar la espira.
C) La espira es atraída por el imán.

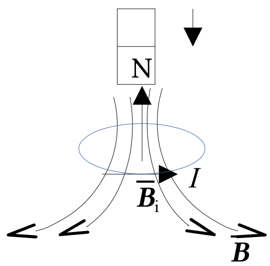
(P.A.U. Sep. 06)

Solución: A

La ley de Faraday - Lenz dice que se inducirá una corriente que se oponga a la variación de flujo a través de la espira. La f.e.m. de esa corriente será igual a la variación de flujo magnético respecto al tiempo.

$$\varepsilon = \frac{-\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}$$



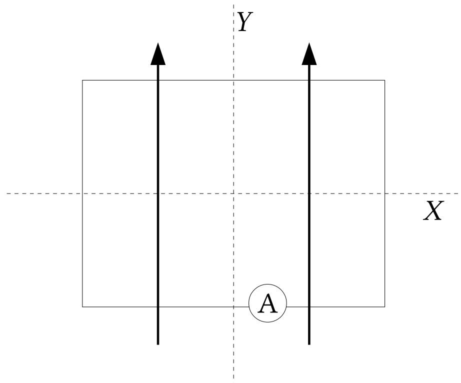


Al acercar el polo norte del imán, aumenta el número de líneas de campo magnético que atraviesan la espira, por lo que la corriente inducida circulará en el sentido de «corregir» el aumento de líneas, es decir, lo hará de modo que el campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}_i$ debido a la corriente I inducida tenga sentido opuesto al que tenía el del imán. Por la regla de la mano derecha, la corriente debe ser en sentido antihorario.

3. La orientación que debe tener la superficie de una espira en un campo magnético uniforme para que el flujo magnético sea nulo es:
A) Paralela al campo magnético.
B) Perpendicular al campo magnético.
C) Formando un ángulo de 45° con el campo magnético.

(A.B.A.U. Set. 17)

Solución: A



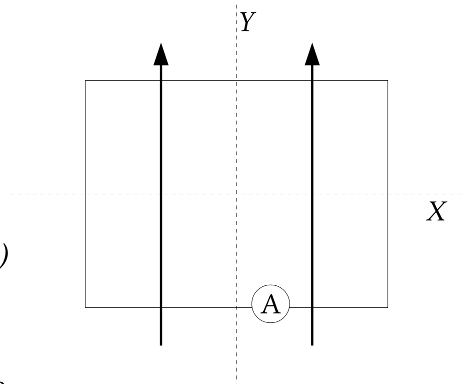
El flujo magnético es el producto escalar del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ campo magnético por el vector $\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a la superficie delimitada por la espira.

$$\Phi = \overline{\boldsymbol{B}} \cdot \overline{\boldsymbol{S}} = B \cdot S \cdot \cos \varphi$$

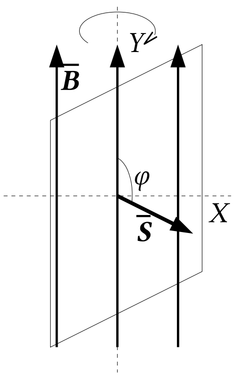
Las líneas de campo no atraviesan la superficie de la espira dando un flujo magnético 0 cuando el vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ campo magnético es perpendicular al vector $\overline{\boldsymbol{S}}$ superficie. Como el vector superficie es perpendicular a la superficie, el flujo es nulo cuando la superficie es paralela al campo magnético.

4. Una espira rectangular está situada en un campo magnético uniforme, representado por las flechas de la figura. Razona si el amperímetro indicará paso de corriente:
A) Si la espira gira alrededor del eje Y.
B) Si gira alrededor del eje X.
C) Si se desplaza a lo largo de cualquier de los ejes X o Y.

(P.A.U. Sep. 04)



Solución: B



La ley de Faraday - Lenz dice que se inducirá una corriente que se oponga a la variación de flujo a través de la espira. La f.e.m. de esa corriente será igual a la variación de flujo magnético respecto al tiempo.

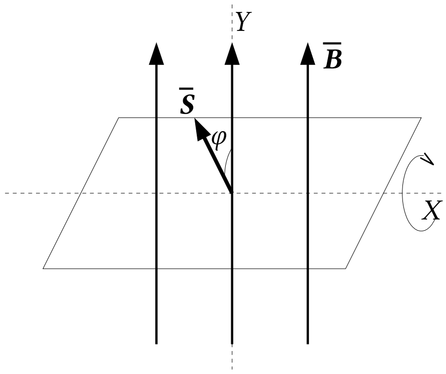
$$\varepsilon = \frac{-\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}$$

El flujo magnético es el producto escalar del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ campo magnético por el vector $\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a la superficie delimitada por la espira.

$$\Phi = \overline{\boldsymbol{B}} \cdot \overline{\boldsymbol{S}} = B \cdot S \cdot \cos \varphi$$

Cuando la espira gira alrededor del eje Y, el flujo magnético no varía, puesto que es nulo todo el tiempo: las líneas del campo magnético no atraviesan la superficie de la espira ni cuando la espira está en reposo ni cuando gira alrededor del eje Y, pues son siempre paralelas al plano de la espira. El ángulo φ vale siempre π/2 rad y el cos π/2 = 0.

Pero cuando la espira gira alrededor del eje X, las líneas de campo atraviesan la superficie plana delimitada por la espira, variando el flujo magnético desde 0 hasta un máximo cuando la espira está en el plano XZ perpendicular al eje Y que es el del campo magnético. Luego vuelve a disminuir hasta hacerse nulo cuando haya girado π rad. Al desplazarse la espira, siempre paralelamente a las líneas de campo, el flujo seguirá siendo nulo en todos los casos.



5. Una espira está situada en el plano XY y es atravesada por un campo magnético constante $\overline{\boldsymbol{B}}$ en dirección del eje Z. Se induce una fuerza electromotriz:
A) Si la espira se mueve en el plano XY.
B) Si la espira gira alrededor de un eje perpendicular a la espira.
C) Si se anula gradualmente el campo $\overline{\boldsymbol{B}}$.

(P.A.U. Sep. 12)

Solución: C

La ley de Faraday - Lenz dice que se inducirá una corriente que se oponga a la variación de flujo a través de la espira. La f.e.m. de esa corriente será igual a la variación de flujo magnético respecto al tiempo.

$$\varepsilon=\frac{-\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}$$

El flujo magnético es el producto escalar del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ campo magnético por el vector $\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a la superficie delimitada por la espira.

$$\Phi = \overline{\boldsymbol{B}} \cdot \overline{\boldsymbol{S}} = B \cdot S \cdot \cos \varphi$$

Si se anula gradualmente el campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$, se produce una variación de flujo magnético Φ y una fuerza electromotriz inducida, que, por la ley de Lenz, se opondrá a la disminución del flujo magnético que atraviesa la espira.

Las otras opciones:
A: Falsa. Si la espira se mueve en el plano XY que la contiene, no se produce variación de campo magnético ni de la superficie atravesada por él (a no ser que la espira salga de la zona del campo). Si el el flujo magnético a través de la espira no varía, no se producirá ninguna f.e.m. inducida.
C: Falsa. Si la espira gira alrededor del eje Z, el flujo magnético no varía, puesto que la superficie atravesada es siempre la misma.

6. Según la ley de Faraday - Lenz, un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ induce fuerza electromotriz en una espira plana:
A) Si un $\overline{\boldsymbol{B}}$ constante atraviesa al plano de la espira en reposo.
B) Si un $\overline{\boldsymbol{B}}$ variable es paralelo al plano de la espira.
C) Si un $\overline{\boldsymbol{B}}$ variable atraviesa el plano de la espira en reposo.

(P.A.U. Jun. 10)

Solución: C

La ley de Faraday - Lenz dice que se inducirá una corriente que se oponga a la variación de flujo a través de la espira. La f.e.m. de esa corriente será igual a la variación de flujo magnético respeto al tiempo.

$$\varepsilon=\frac{-\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}$$

El flujo magnético es el producto escalar del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ campo magnético por el vector $\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a la superficie delimitada por la espira

$$\Phi = \overline{\boldsymbol{B}} \cdot \overline{\boldsymbol{S}} = B \cdot S \cdot \cos \varphi$$

Si un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ variable atraviesa el plano de la espira en reposo, el ángulo $\varphi \neq 90°$, por lo que $\cos \varphi \neq 0$. Si B es variable, su derivada no es nula y existirá una f.e.m.

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{d(B\cdot S\cdot\cos\varphi)}{\mathrm{d}t}=-S\cdot\operatorname{sen}\varphi\cdot\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\neq 0$$

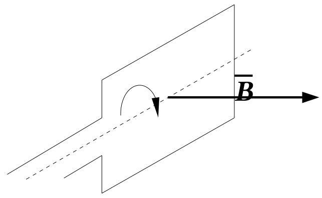
Las otras opciones:
A. Si el campo es constante y la espira está en reposo, todo es constante y la derivada es nula: no hay f.e.m.
B. Si el campo es variable pero es paralelo al plano de la espira, el ángulo entre lo campo $\overline{\boldsymbol{B}}$ y el vector superficie (perpendicular a la espira) es de 90° y cos 90° = 0

7. Para construir un generador elemental de corriente alterna con una bobina y un imán (haz un croquis):
   A) La bobina gira con respecto al campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$.
   B) La sección de la bobina se desplaza paralelamente a $\overline{\boldsymbol{B}}$.
   C) La bobina está fija y es atravesada por un campo $\overline{\boldsymbol{B}}$ constante.

(P.A.U. Sep. 10)

Solución: A

Se produce una corriente inducida, según la Ley de Faraday - Lenz, cuando hay una variación de flujo magnético con el tiempo.



$$\varepsilon=\frac{-\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

El flujo magnético Φ es el producto escalar del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ campo magnético por el vector $\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a la sección de la bobina.

$$\Phi = \overline{\boldsymbol{B}} \cdot \overline{\boldsymbol{S}} = B \cdot S \cdot \cos \varphi$$

Si la bobina gira con una velocidad angular constante

$$\omega=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

respecto a un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$, de forma que el ángulo φ varíe con el tiempo, la derivada del flujo respecto al tiempo es:

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}(B\cdot S\cos\varphi)}{\mathrm{d}t}=-B\cdot S\cdot\frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\mathrm{d}t}=B\cdot S\cdot\omega\cdot\operatorname{sen}\varphi=B\cdot S\cdot\omega\cdot\operatorname{sen}(\varphi_0+\omega\cdot t)$$

Se produce una f.e.m. variable con el tiempo (sinusoidal)

8. Una espira se mueve en el plano XY, donde también hay una zona con un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ constante en dirección $+Z$. Aparece en la espira una corriente en sentido antihorario:
   A) Si la espira entra en la zona de $\overline{\boldsymbol{B}}$.
   B) Cuando sale de esa zona.
   C) Cuando se desplaza por esa zona.

(P.A.U. Sep. 16, Jun. 11)

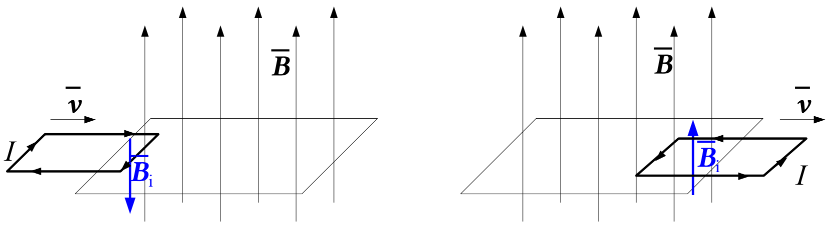
Solución: B

Por la ley de Faraday - Lenz, la fuerza electromotriz ε inducida en una espira es igual al ritmo de variación de flujo magnético Φ que la atraviesa

$$\varepsilon=\frac{-\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

El sentido se oponen a la variación de flujo.
Cuando la espira que se mueve en el plano XY entra en el campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ en dirección $+Z$, se produce una corriente inducida que se oponen al aumento del flujo saliente (visto desde lo extremo del eje Z), por lo

que se producirá una corriente inducida en sentido horario que cree un campo entrante (-*Z*). Al salir del campo, la corriente inducida en sentido antihorario creará un campo magnético saliente que se opone a la disminución del flujo entrante.



◊ ACLARACIONES

Los datos de los enunciados de los problemas no suelen tener un número adecuado de cifras significativas, bien porque el redactor piensa que la Física es una rama de las Matemáticas y los números enteros son números «exactos» (p. ej. la velocidad de la luz: $3·10^8$ m/s cree que es 300 000 000,000000 000 000 000… m/s) o porque aún no se ha enterado de que se puede usar calculadora en el examen y le parece más sencillo usar $3·10^8$ que 299 792 458 m/s).
Por eso he supuesto que los datos tienen un número de cifras significativas razonables, casi siempre tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en ciertos casos, con una incertidumbre desmedida. Así que cuando tomo un dato como $c = 3·10^8$ m/s y lo reescribo como:
Cifras significativas: 3
$c = 3{,}00·10^8$ m/s
Lo que quiero indicar es que supongo que el dato original tiene tres cifras significativas (no que las tenga en realidad) para poder realizar los cálculos con una incertidumbre más pequeña que la que tendría en ese caso. ($3·10^8$ m/s tiene una sola cifra significativa, y una incertidumbre relativa del 30 %. Como las incertidumbres se suelen acumular a lo largo del cálculo, la incertidumbre final sería inadmisible. Entonces, ¿para qué realizar los cálculos? Con una estimación sería suficiente).

Cuestiones y problemas de las Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo LibreOffice del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, de Óscar Hermida López.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM)

Sumario

Índice de pruebas A.B.A.U. y P.A.U.