Aunque las cuestiones son de tipo test y no se pide razonar la opción elegida ni se puede valorar el razonamiento realizado, en estas soluciones se intenta aportar un razonamiento breve de cómo se ha obtenido y cálculos numéricos.
Esto es un borrador donde se hacen razonamientos breves y se citan algunos diagramas, pero inicialmente hay pocos diagramas hechos, que es recomendable hacer y son útiles, y se intentarán añadir en revisiones.
Las soluciones son oficiosas de la fase local de Madrid; otras comunidades sí publican soluciones oficiales a los problemas de sus fases locales. Se comenzó por la fase de 2013 y es la que concentra comentarios sobre detalles al realizar la parte experimental, que a veces se citan en otros puntos del documento. Los problemas se colocan en orden cronológico inverso.

Madrid 2017

1. Respuesta a) 6:00. Se asume que están lo suficientemente cerca para considerar que el Sol sale a la misma hora en ambas localidades A y B (razonable ya que se indica caminando) y que la velocidad de ambos es constante pero no idéntica. Llamamos x a la hora de salida expresada en horas respecto medianoche, y t a la hora también respecto medianoche. Llamamos d a la distancia entre A y B, la posición de cada uno es una recta y tomando origen en A, $x_A=v_A\cdot(t-x)$, $x_B=d-v_B(t-x)$; de modo que en la salida (t=x), tenemos $x_A=0$ y $x_B=d$.
Si t=12 (encuentro): $x_A=x_B$: $v_A\cdot(12-x)=d - v_B\cdot(12-x)$ [1]
Si t=16 (llegada de A): $x_A=d$: $d=v_A\cdot(16-x)$ [2]
Si t=21 (llegada de B): $x_B=0$: $0=d-v_B\cdot(21-x)$ [3]
Tenemos 3 ecuaciones con 4 incógnitas (d, v_A, v_B, x), pero solamente necesitamos conocer x.
Combinamos 2ª y 3ª haciendo desaparecer d
$v_A\cdot(16-x)=v_B\cdot(21-x)$ [4]
Despejamos d de la tercera y sustituimos en la primera
$v_A\cdot(12-x)=v_B\cdot(21-x)-v_B\cdot(12-x)$
$v_A\cdot(12-x)=9\cdot v_B\cdot$ [5]
Dividimos término a término cuarta y quinta

$$\frac{16-x}{12-x}=\frac{21-x}{9}\Rightarrow 144-9x=252-33x+x^2\Rightarrow x^2-24x+108=0\Rightarrow \begin{matrix}x=6\\x=18\end{matrix}$$ No válida x=18.

Comentario: en julio 2017 descubro la historia problema en un post de Francis Villatoro ***http://francis.naukas.com/2010/06/04/d-e-p-vladimir-igorevich-arnold-siempre-la-verdad-aunque-escandalice/*** *a través de este tuit* ***https://twitter.com/omalaled/status/886497864070950912*** *donde aportan otras resoluciones.*

2. Respuesta 6) 680. Usando 2ª Ley de Newton y conociendo masa y aceleración de cada bloque calculamos fuerzas totales sobre cada bloque
Bloque superior F=m·a=20·4=80 N.
Bloque inferior F=m·a=100·6=600 N.
Si ambas masas no tienen la misma aceleración es porque hay más fuerzas, que supone rozamiento entre ellas. Si no hubiera rozamiento la masa superior estaría en reposo / su aceleración estaría desligada del movimiento de la masa inferior. Al moverse el bloque inferior hacia la derecha (asumimos que no hay rozamiento de bloque inferior con el suelo) por inercia el bloque superior tendería a no ser arrastrado, y la fuerza de rozamiento lo arrastra junto al bloque inferior, por lo que va en el sentido de la fuerza aplicada sobre el bloque inferior, hacia la derecha en diagrama. La única fuerza en eje horizontal que actúa sobre el bloque superior y lo empuja es el rozamiento con el inferior, por lo que sabemos que son 80 N. Sobre el bloque inferior actúa la reacción a la fuerza de rozamiento anterior, lo que lo frena. Ignorando rozamiento con el suelo las fuerzas en eje horizontal que actúan sobre el bloque inferior son reacción del rozamiento (-80 N) y fuerza aplicada, y la suma de ambas debe ser 600 N, por lo que la fuerza aplicada total deben ser 680 N.

3. Respuesta c) 77,4. Utilizamos el teorema de las fuerzas vivas $\Delta E_c=W_{TOTAL}$

$$W=\int_0^{0,75}\vec{F}\cdot\vec{dx}=\int_0^{0,75}0,1(200-x)\,dx=\left[0,1\left(200x-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^{0,75}=0,1\left(200\cdot 0,75-\frac{0,75^2}{2}\right)=14,97\,J$$

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2E_c}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 14,97}{0,005}}=77,4\,m/s$$

4. Respuesta d) 58,3. El momento angular es constante, por lo que podemos plantear para afelio y perihelio

$$r_a \cancel{m} v_a=r_p \cancel{m} v_p\Rightarrow\frac{r_p}{r_a}=\frac{v_a}{v_p}$$

Para conocer la velocidad en el afelio utilizamos la 3ª Ley de Kepler (que maneja semieje mayor, no necesariamente radio ya que la órbita de Halley es elíptica) y el hecho de que la Tierra orbita respecto al Sol como el cometa Halley

$$\frac{T^2_{Halley}}{T^2_{Tierra}}=\frac{a^3_{Halley}}{a^3_{Tierra}}\Rightarrow a_{Halley}=a_{Tierra}\sqrt[3]{\frac{T^2_{Halley}}{T^2_{Tierra}}}=\sqrt[3]{\frac{75^2}{1^2}}a_{Tierra}=17{,}8\,UA$$

Por geometría, para el cometa Halley $r_a=2\cdot a_{Halley}-r_p=35{,}1\,UA$

Sustituyendo $\frac{r_p}{r_a}=\frac{35{,}1}{0{,}6}=58{,}5$

*(Son datos reales y se pueden validar en **https://es.wikipedia.org/wiki/Cometa_Halley**)*

5. Respuesta a) 8,92. Utilizando la 3ª Ley de Kepler, cuya expresión podemos deducir igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en órbitas circulares

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{T^2GM}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{(9{,}84\cdot 3600)^2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}97\cdot 10^{27}}{4\cdot\pi^2}}=1{,}59\cdot 10^8\,m=1{,}59\cdot 10^5\,km=15{,}9(10^4\,km)$$ 7

Se pregunta la altura

h=$R_{órbita}$-R_{medio}=15,9-6,99=8,91 (10^4 km)

6. Respuesta d) 1,11. Igualando fuerza centrípeta y fuerza elástica, obtenemos el alargamiento

$$F_c=F_e\Rightarrow m\omega^2R=k\cdot\Delta x\Rightarrow 1\cdot 10^2\cdot(1+\Delta x)=1000\cdot\Delta x\Rightarrow\Delta x=\frac{100}{900}=0{,}11\,m\Rightarrow R=1{,}11\,m$$

7. Respuesta a) 1357. Al unir las gotas estamos sumando cargas y volúmenes.

Usamos subíndice 1 para las gotas iniciales y 2 para la gota final

$$Q_2=50\cdot Q_1$$

$$50\cdot\frac{4}{3}\pi R_1^3=\frac{4}{3}\pi R_2^3\Rightarrow R_2=\sqrt[3]{50}\,R_1\approx 3{,}68\,R_1$$

Utilizando la expresión de la carga de un condensador esférico $C=4\pi\varepsilon R$ y la definición de capacidad

$$C_2=\frac{Q_2}{V_2}\Rightarrow V_2=\frac{Q_2}{C_2}=\frac{50\cdot\cancel{C_1}V_1}{\sqrt[3]{50}\cancel{C_1}}=\frac{50\cdot 100}{\sqrt[3]{50}}=1357\,V$$

8. Respuesta d) +2,0 **k**. Calculamos la fuerza magnética $\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B})=q\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\10&20&0\\0{,}1&0&0\end{vmatrix}=-2\cdot q\vec{k}\,N$

Tiene dirección de eje z, sentido hacia z negativas. La fuerza eléctrica tiene que tener misma dirección y sentido opuesto, por lo que será hacia z positivas. Como la carga es positiva, fuerza y campo eléctrico tienen mismo sentido. En módulo F=qE → E=F/q = 2 N

>Dadas las opciones basta con elegir dirección y sentido correcto, no es necesario calcular módulo.

9. Respuesta a) 0,2. Si tomamos como eje x horizontal y eje y vertical, utilizando la regla de la mano derecha podemos ver dirección y sentido del campo creado por cada conductor.

A: Dirección eje y, sentido y positivas.

B: Dirección formando -45º con eje x, sentido de las agujas del reloj en el diagrama.

Los módulos son

$$B_A=\frac{\mu_0 I_A}{2\pi d}=\frac{4\pi 10^{-7}1}{2\pi 1}=2\cdot 10^{-7}T=0{,}2\,\mu T$$

$$B_B=\frac{\mu_0 I_B}{2\pi 2d}=\frac{4\pi 10^{-7}2}{2\pi 2}=2\cdot 10^{-7}T=0{,}2\,\mu T$$

El campo total tendrá como componente x la componente x de B_B, y como componente y la resta de B_A y la componente y de B_B.

$$B_{Bx}=B_{By}=B_B\cdot\cos 45^o=\frac{0{,}2}{\sqrt{2}}\mu T$$

El módulo total

$$B=\sqrt{\left(\frac{0{,}2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(0{,}2-\frac{0{,}2}{\sqrt{2}}\right)^2}=0{,}153\,\mu T$$ Elegimos opción a, redondeo con 1 cifra significativa.

10. Respuesta c) 15,5. Utilizando la variación de la intensidad con la distancia, usando A para el punto asociado a 100 dB y B para el punto asociado a 80 dB.

$$\frac{I_A}{I_B}=\frac{r_B^2}{r_A^2}\Rightarrow\frac{\cancel{I_0}10^{\frac{100}{10}}}{\cancel{I_0}10^{\frac{80}{10}}}=\frac{(x+100)^2}{x^2}\Rightarrow 100x^2=x^2+200x+10000\Rightarrow -99x^2+200x+10000=0$$

$$x=\frac{-200\pm\sqrt{200^2-4\cdot(-99)\cdot 10000}}{2\cdot(-99)}=\frac{-200\pm 2000}{-198}=\begin{matrix}11{,}1\,m\\ negativo\end{matrix}$$

Asumiendo propagación isótropa con ondas esféricas

$$I_A=I_0 10^{\frac{100}{10}}=10^{-2}W/m^2\Rightarrow I_A=\frac{P}{4\pi x^2}\Rightarrow P=I_A\cdot 4\pi x^2=10^{-2}\cdot 4\pi 11{,}1^2\approx 15{,}5W$$

11. Respuesta d) 120º. Al refractarse en el paso de aire → agua el rayo se acerca a la normal, y tras reflejarse en el fondo del acuario incidirá en el paso agua → aire con el mismo ángulo respecto a la normal, por lo que en la salida al aire volverá a formar 60º con la normal que es el ángulo con el que incidió.

12. Respuesta b) 7,9. Al formarse la imagen con el espejo cóncavo la consideramos invertida, y planteamos con aumento negativo (usamos expresiones que asumen aproximación paraxial, y convenio de signos según norma DIN 1335: s'=-30 cm)

$$A=\frac{y'}{y}=\frac{-300}{4}=-75\quad \text{Para espejos}\quad A=\frac{-s'}{s}\Rightarrow s=\frac{-s'}{A}=\frac{-300}{75}=-4\,cm$$

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}=\frac{2}{R}\Rightarrow R=\frac{2}{\frac{1}{-300}+\frac{1}{-4}}\approx -7{,}9\,cm$$ Elegimos opción b tomando el módulo.

Problema de desarrollo D1.

Se trata de una composición de velocidades. Se debe expresar la distancia en función del ángulo con el que reme respecto al ángulo de la corriente (enunciado no aclara la dirección, simplemente indica que la canoa atraviesa el río); se podría pensar directamente en remar en dirección perpendicular a la orilla, pero eso minimizaría el tiempo, no la distancia recorrida. Se puede pensar que remando con cierto ángulo (sí que asumimos que se rema siempre en la misma dirección y sentido), remando "parcialmente contra de la corriente" se conseguirá que la barca se mueva de manera "más transversal" a la orilla y la distancia recorrida sea más cercana a los 100 m de ancho.

Tomamos eje x paralelo a la orilla, eje y perpendicular, y origen de coordenadas en el punto de partida.

Tomamos ángulo θ como el formado por el vector de velocidad de remado con el eje x.

Las ecuaciones de movimiento serán (t en s):

Eje x: $x=v_x t = (7\cdot\cos\theta + 10)\cdot t$

Eje y: $y=v_y t = 7\cdot\text{sen}\theta\cdot t$

La distancia recorrida en un instante t es $d=\sqrt{x^2+y^2}=t\cdot\sqrt{(7\cdot\cos\theta+10)^2+(7\cdot sen\,\theta)^2}$

$$d=t\cdot\sqrt{7^2((\cos\theta)^2+(sen\,\theta)^2)+10^2+140\cos\theta}=t\cdot\sqrt{149+140\cos\theta}$$

Usamos el tiempo asociado a cruzar, cuando y=100 m $100=7\cdot sen\,\theta\cdot t\Rightarrow t=\frac{100}{7\cdot sen\,\theta}$

Combinando ambas expresiones $d=\frac{100}{7}\frac{\sqrt{149+140\cos\theta}}{sen\,\theta}$

Buscamos un mínimo

$$\frac{\partial d}{\partial\theta}=\frac{100}{7}\left(\frac{70\cdot(-sen\,\theta)}{\sqrt{149+140\cos\theta}}\cdot sen\,\theta-\frac{\sqrt{149+140\cos\theta}\cdot\cos\theta}{(sen\,\theta)^2}\right)=0$$

$$-70\,sen^2\theta-(149+140\cos\theta)\cdot\cos\theta=0$$

$$-70(1-\cos^2\theta)=149\cos\theta+140\cos^2\theta$$

$$70\cos^2\theta+149\cos^2\theta+70=0$$

Cambiamos variable z=cos θ y resolvemos la ecuación de 2º grado

$$z=\frac{-149\pm\sqrt{149^2-4\cdot 70\cdot 70}}{2\cdot 70}=\frac{-149\pm 51}{140}=\begin{matrix}\cancel{-1{,}42857}\\ -0{,}7\end{matrix}$$

Cualitativamente podemos ver que $\theta=arcos(-0{,}7)\approx 134^o$

Sustituyendo $d=\frac{100}{7}\frac{\sqrt{149+140(-0{,}7)}}{\sqrt{(1-0{,}7^2)}}\approx 143\,m$

Podemos validar que si se remara transversalmente la distancia sería mayor $d=\frac{100}{7}\frac{\sqrt{149}}{1}\approx 174\,m$

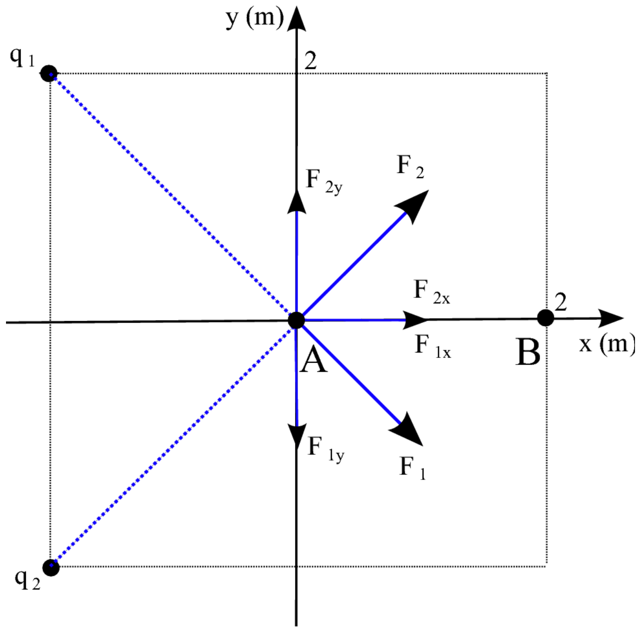
Problema de desarrollo D2.

Si está en equilibrio el peso es igual al empuje. Dado que el equilibrio es totalmente sumergido, sabemos que la masa de agua desalojada es exactamente la masa de la esfera, por lo que podemos calcular su radio.

$m=\rho_{Agua}\cdot V_{esfera}\Rightarrow 1{,}25=1000\cdot\frac{4}{3}\pi R_{ext}^3\Rightarrow R_{ext}=\sqrt[3]{\frac{1{,}25\cdot 3}{4\pi 1000}}=0{,}0668\,m=6{,}68\,cm$ Igualando empuje y peso

$$\rho_{Al}\left(\frac{4}{3}\pi R_{ext}^3-\frac{4}{3}\pi R_{\text{int}}^3\right)=1{,}25\Rightarrow R_{\text{int}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1{,}25}{2699}-\frac{1{,}25}{1000}\right)\cdot\frac{(-3)}{4\pi}}=0{,}0573\,m=5{,}72\,cm$$

Problema de desarrollo D3.



a) La fuerza la obtenemos por superposición: realizamos un diagrama donde representamos los dos vértices con las cargas que llamamos q_1 y q_2. Se puede ver que en el punto central del cuadrado se cancelan componentes y de la fuerza y la componente x, por la geometría, es el doble de la componente x asociada a una única carga.

Al ser todas las cargas negativas la fuerza es repulsiva, dirección y sentido según diagrama, y en módulo

$$|F|=2K\frac{ee}{d^2}\cos 45^o=2\cdot 9\cdot 10^9\cdot\frac{(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{(\sqrt{2})^2}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|F|=1{,}63\cdot 10^{-28}N$$

Vectorialmente $\vec{F}=1{,}63\cdot 10^{-28}\vec{i}\,N$

b) Se expulsa por el extremo opuesto al lado en el que están los electrones en vértices consecutivos, punto B del diagrama.

Se pregunta por trabajo realizado para expulsarlo: calculamos el trabajo realizado por el campo.

$$W_{A\to B}=-\Delta E_p=-q\Delta V=-q(V(B)-V(A))$$

Calculamos la diferencia de potencial entre los puntos A y B, usando superposición.

$$V(A)=V_1(A)+V_2(A)=2K\frac{e}{d_{1A}}=2\cdot 9\cdot 10^9\cdot\frac{(-1{,}6\cdot 10^{-19})}{\sqrt{2}}=-2{,}036\cdot 10^{-9}V$$

$$V(B)=V_1(B)+V_2(B)=2K\frac{e}{d_{1B}}=2\cdot 9\cdot 10^9\cdot\frac{(-1{,}6\cdot 10^{-19})}{\sqrt{5}}=-1{,}288\cdot 10^{-9}V$$

$$W_{A\to B}=-(-1{,}6\cdot 10^{-9})\cdot(-1{,}288\cdot 10^{-9}-(-2{,}036\cdot 10^{-9}))=1{,}197\cdot 10^{-28}J$$

Se trata de alejar una carga negativa de cargas negativas: es un trabajo a favor del campo y el trabajo realizado por el campo es positivo.

c) Utilizando el teorema de las fuerzas vivas, el trabajo realizado es igual a la variación de energía cinética, y como inicialmente estaba en reposo, igualamos la energía a energía cinética del electrón al salir del cuadrado.

$$\Delta E_c=W_{total}\Rightarrow\frac{1}{2}mv^2=W\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2W}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}197\cdot 10^{-28}}{9\cdot 10^{-31}}}=16{,}3\,m/s$$

Problema de desarrollo D4.

a) Utilizamos ley de Faraday, planteando una expresión para el flujo. $\Phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}$ Tomamos eje x en el sentido de avance de la espira, tomando t=0 en el instante en el que la espira empieza abandonar la zona con campo magnético, por lo que x=v·t. Al ser la espira plana perpendicular al campo y este uniforme en toda la espira podemos plantear $\Phi=B\cdot a\cdot(b-x)=B\cdot a\cdot(b-v\cdot t)$

Usando la ley de Faraday $\varepsilon=\frac{-d\Phi}{dt}=B\cdot a\cdot v$

Usando la ley de Ohm $V=R\cdot I\Rightarrow B\cdot a\cdot v=R\cdot I\Rightarrow B=\frac{R\cdot I}{a\cdot v}=\frac{0{,}02\cdot 0{,}2}{0{,}08\cdot 6}=0{,}0083\,T=8{,}3\,mT$

>En este caso el dato de anchura b no se utiliza, estaría asociado al tiempo que dura la corriente inducida, que siendo a velocidad constante será t=b/v=0,2/6=0,033 s
>No se pide el sentido de la corriente, pero dado que el flujo disminuye al abandonar la región con campo, la corriente inducida será tal que intente oponerse a esa disminución, por lo que será en el sentido de las agujas del reloj en el diagrama.
b) El planteamiento sería similar, pero ahora el lado de la espira que interviene en la expresión es b en lugar de a, y ahora se conoce el valor de B (el obtenido en apartado a) y se pide v.

$$B\cdot b\cdot v=R\cdot I\Rightarrow v=\frac{R\cdot I}{B\cdot b}=\frac{0{,}02\cdot 0{,}2}{0{,}0083\cdot 0{,}2}=0{,}0083\,T=2{,}4\,m/s$$

Problemas de tratamiento de datos experimentales 1. Propagación de errores

a) Usamos análisis dimensional; L distancia, M masa, T tiempo, q temperatura
Enunciado indica unidades de K es $W\cdot m^{-1}\cdot {}^oC^{-1}$: la potencia W es energía por unidad de tiempo, y la energía es trabajo, fuerza por desplazamiento, siendo la fuerza masa por aceleración, por lo que dimensionalmente la potencia es

$$W=\left[\frac{M\cdot\frac{L}{T^2}\cdot L}{T}\right]=\left[\frac{M\cdot L^2}{T^3}\right]$$

Aplicándolo a todo

$$Q=K\cdot A\cdot\frac{\Delta T}{L}\Rightarrow\left[\frac{M\cdot L^2}{T^3}\frac{1}{\cancel{L\cdot q}}\right]\left[\cancel{L^2}\right]\left[\frac{\cancel{q}}{\cancel{L}}\right]=\left[\frac{M\cdot L^2}{T^3}\right]$$

Q tiene unidades de de potencia (aunque el símbolo Q pueda sugerir simplemente unidades calor ó energía)

b) El valor es $Q=K\cdot A\cdot\frac{\Delta T}{L}=401\cdot 4{,}8\cdot 10^{-4}\cdot\frac{100}{1{,}2}=16{,}04\,W$

Utilizamos propagación de errores asumiendo valor L exacto (no se indica incertidumbre en enunciado)

$$dQ=\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial A}dA\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial T}dT\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial K}dK\right)^2}\Rightarrow\Delta Q=\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial A}\Delta A\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\Delta T\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K\right)^2}$$

$$\Delta Q=\sqrt{\left(\left(K\frac{\Delta T}{L}\right)\Delta A\right)^2+\left(\left(K\frac{A}{L}\right)\Delta T\right)^2+\left(A\frac{\Delta T}{L}\Delta K\right)^2}$$

$$\Delta Q=\sqrt{\left(\left(401\cdot\frac{100}{1{,}2}\right)0{,}1\cdot 10^{-4}\right)^2+\left(\left(401\frac{4{,}8\cdot 10^{-4}}{1{,}2}\right)0{,}5\right)^2+\left(\left(4{,}8\cdot 10^{-4}\frac{100}{1{,}2}\right)1\right)^2}=0{,}345976\,W$$

Al menos debemos expresar resultado con 2 cifras significativas que es el menor número de cifras significativas de los datos del enunciado $Q=16\pm 1\,W$
Si la incertidumbre obtenida con propagación de errores hubiera sido mayor de 1 W, utilizaríamos la mayor.
c) Si queremos que la incertidumbre sea menor del 4 %, quiere decir que no puede ser mayor de 16,04·0,04 = 0,6416. Asumimos la misma incertidumbre en las otras medidas y planteamos la propagación de errores, pero ahora con tres términos

$$\Delta Q=\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial A}\Delta A\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\Delta T\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L\right)^2}$$

$$\Delta Q^2=\left(\left(K\frac{\Delta T}{L}\right)\Delta A\right)^2+\left(\left(K\frac{A}{L}\right)\Delta T\right)^2+\left(KA\Delta T\left(\frac{-1}{L^2}\right)\Delta L\right)^2$$

$$0{,}6416^2=\left(\left(401\cdot\frac{100}{1{,}2}\right)0{,}1\cdot 10^{-4}\right)^2+\left(\left(401\frac{4{,}8\cdot 10^{-4}}{1{,}2}\right)0{,}5\right)^2+\left(401\cdot 4{,}8\cdot 10^{-4}\cdot\frac{100}{1{,}2^2}\cdot\Delta L\right)^2$$

$$0{,}29355=178{,}6678\cdot(\Delta L)^2\Rightarrow\Delta L=\sqrt{\frac{0{,}29355}{178{,}6678}}=0{,}04053\,m$$

Utilizando una cifra significativa en la incertidumbre $L=1{,}20\pm 0{,}04\,m$

Problemas de tratamiento de datos experimentales 2. Ajuste lineal

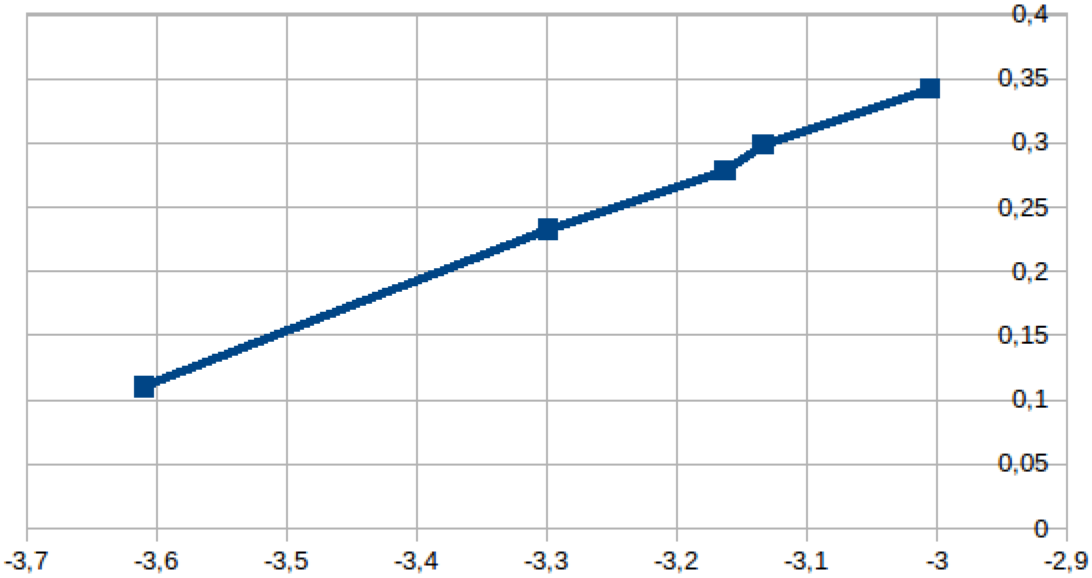
a) Tomamos logaritmos en la expresión original $v=\left(\frac{mg}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\log v=\frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{mg}{K}\right)=\frac{1}{\alpha}\log(mg)-\frac{1}{\alpha}\log K$$

Tenemos una expresión lineal y=mx+n, donde y=log(v), x=log(mg)

b, c y d) Representamos gráficamente, realizando las operaciones previas según transformación apartado a. Usamos dato g=9,81 m/s² dado en enunciados.
Contemplamos que los valores de masa respecto tabla original del enunciado hay que multiplicarlos por 10^{-3} (en anotaciones de enunciados, se indicaría durante la prueba)

v (m/s)	2,2	1,99	1,9	1,71	1,29
m(g)	1,01E-01	7,48E-02	7,00E-02	5,12E-02	2,50E-02
log(v)	0,34242	0,29885	0,27875	0,23300	0,11059
log(m·g)	-3,00616	-3,13443	-3,16323	-3,29906	-3,61039



Vemos que es aproximadamente una recta
Realizamos el ajuste por mínimos cuadrados
http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+%7B%7B-3.00616,+0.34242%7D,%7B-3.13443,0.29885%7D,%7B-3.16323,0.27875%7D,%7B-3.29906,0.23300%7D,%7B-3.61039,0.11059%7D%7D

Vemos que se obtiene

$\frac{1}{\alpha}=0{,}384495$

$\alpha=\frac{1}{0{,}384495}$

$\alpha\approx 2{,}600814$

$\frac{1}{\alpha}K=1{,}49951$

$K=1{,}49951\cdot\alpha$

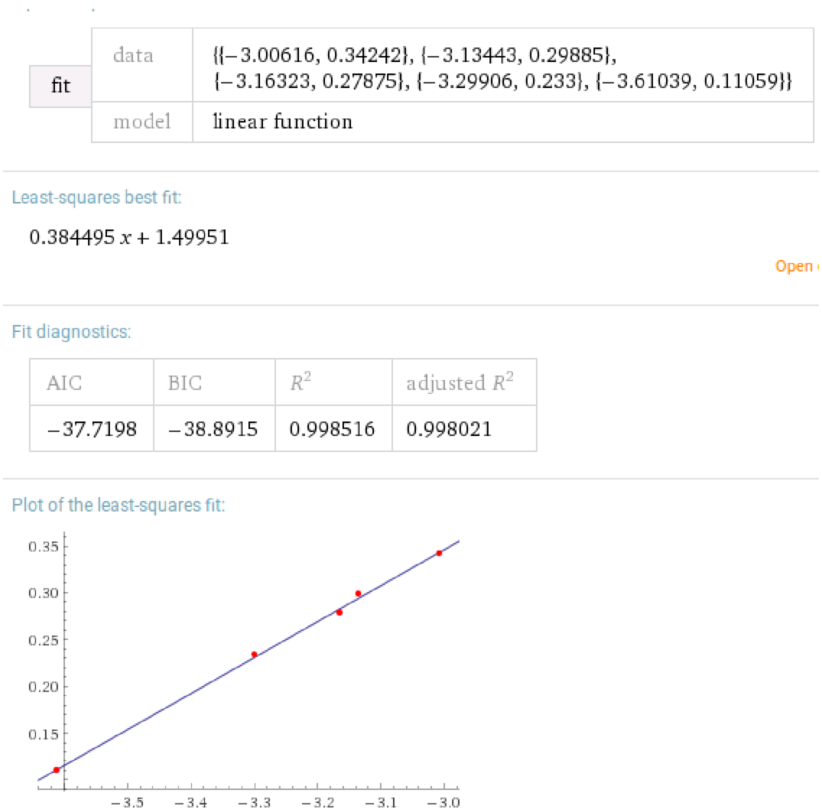
$K=1{,}49951\cdot 2{,}600814$

$K\approx 3{,}8999$

Tomando 3 cifras significativas como en los datos de enunciado tenemos

$\alpha\approx 2{,}60$

$K\approx 3{,}90$



Enunciado indica acompañar dibujo de breve informe sobre la metodología utilizada; se trataría de indicar en qué consiste un ajuste por mínimos cuadrados y cómo se ha realizado el ajuste con la calculadora

Madrid 2016

1. Respuesta c) 66,7. La velocidad media no es en este caso la media de velocidades, ya que ambos tramos son de 50 km, y se ha tardado tiempos distintos. En el primer tramo de 50 km a 40 km/h se ha tardado t=50/40 = 5/4 h. La velocidad media 50=100/(5/4+t)→ t=0,75 h, en 2º tramo v=50/t=66,6 km/h

2. Respuesta b) 4. Con los datos de altura y radio, el ángulo del eje del cono con la pared es de arctan(50/100)=26,6º. Para que la bola esté en equilibrio la componente de la normal vertical debe ser igual en módulo al peso. Esa componente vertical es N·sen(26,6º). La componente de la normal horizontal debe ser igual a la fuerza centrípeta, por lo que N·cos(30º)=mRω^2. Como se pide altura, planteamos tg(26,6º)=R/h
Sustituyendo valores: mg=N·sen(26,6º) → N=mg/sen(26,6º)
(mg/sen(26,6º))·cos(26,6º)=mRω^2 → R=g/(tg(26,6º)·ω^2)=9,81/(tg(26,6º)·(2π5)^2)=0,01985
h=R/tg(26,6º)=0,0396≈0,04 m = 4 cm

3. Respuesta c) 1,27. Para volcarlo sin perder el contacto hay que elevar el centro de masas hasta que esté en el equilibrio inestable, lo que supone aportar energía potencial. Inicialmente apoyado en una cara el centro de masas está en 1,25/2=0,625 m. Cuando esté en equilibrio inestable sobre una arista formando la cara 45º con la horizontal, la altura del centro de masas es $0{,}625\cdot\sqrt{(2)}=0{,}884\,m$
El trabajo asociado a aumentar la altura 0,884-0,625=0,259 m es Ep=mgh=0,5·9,81·0,259=1,27 J

4. Respuesta d) 10,4. Aplicamos conservación del momento lineal para calcular la velocidad del sistema formado por ambas masas que quedan ligadas tras el choque $0{,}01\cdot 50=(0{,}01+0{,}05)\cdot v\Rightarrow v=8{,}33\,m/s$
Aplicando el teorema de las fuerzas vivas $\Delta E_c=W_{total}$ y considerando que la única fuerza que realiza trabajo es el rozamiento de la plastilina sobre el perdigón

$$W_{Froz}=\frac{1}{2}(0{,}01+0{,}05)8{,}33^2-\frac{1}{2}0{,}01\cdot 50^2=-10{,}4\,J$$

Como se indica trabajo que hace el perdigón, por tercera ley de Newton realiza una fuerza sobre la plastilina igual y en sentido opuesto, por lo que el trabajo cambia de signo.
Comentario: enunciado es extraño porque indica "bloque de plastilina… se queda incrustado… despreciando pérdidas caloríficas y el rozamiento", ya que si se queda incrustado es un choque inelástico, la energía cinética no se conserva y hay parte que se disipa en calor.

5. Respuesta c) 3,94. Aplicamos la tercera ley de Kepler, los cuadrados de los periodos son proporcionales al cubo del semieje mayor de la elipse.

$$\frac{T_{Venus}^2}{T_{cometa}^2}=\frac{R_{Venus}^3}{R_{cometa}^3}\Rightarrow R_{cometa}=R_{Venus}\sqrt[3]{\frac{T_{cometa}^2}{T_{Venus}^2}}=1{,}08\cdot 10^6\sqrt[3]{\frac{50^2}{(225/365)^2}}=2{,}02\cdot 10^7\,m$$

Aplicando que distancia en afelio y en perihelio suman el eje mayor de la elipse

$$r_{afelio}=2\cdot R_{cometa}-r_{perihelio}=2\cdot 2{,}02\cdot 10^7-1{,}08\cdot 10^6=3{,}93\cdot 10^7\,m$$

>Enunciado indica potencias de 10^9 km, pero se asume errata, con lo que respuesta sería c.

6. Respuesta b) 13630. Como se habla de radio asumimos órbitas circulares, la energía mecánica en la órbita tiene la expresión $E_m=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_o}$. Al hablar de "enviarlos fuera del campo gravitatorio" implica hacer que escapen, por lo que su energía mecánica sea cero. Si asumimos misma masa de ambos satélites, que el trabajo sea el doble implica que, llamando R_{o1} al radio de 10^4 km $2\frac{1}{2R_{o2}}=\frac{1}{2R_{o1}}\Rightarrow R_{o2}=2R_{o1}$
Operando con los valores numéricos:

$$R_{o2}=20000\,km\Rightarrow h=R_{o2}-R_T=13630\,km$$

7. Respuesta a) 1,8. Para un oscilador $E_m=\frac{1}{2}kA^2$, $k=m\omega^2=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$, $E_m=\frac{1}{2}m4\pi^2\frac{A^2}{T^2}$

lanteamos $E_{m1}=E_{m2}\Rightarrow\frac{1}{2}m4\pi^2\frac{A_1^2}{T^2}=\frac{1}{2}2m4\pi^2\frac{A_2^2}{(T/2)^2}\Rightarrow A_1^2=8A_2^2\Rightarrow A_2=\frac{A_1}{2\sqrt{2}}=\frac{5}{2\sqrt{2}}\approx 1{,}8\,cm$

8. Respuesta a) 3. $\beta=10\log\frac{I}{I_0}$ Aplicando superposición y que los sonidos no son coherentes,

$I_{total}=N\cdot I$, luego $\beta_{total}=10\log\left(N\frac{I}{I_0}\right)=10\log N+10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 84=10\,logN+79\Rightarrow N=10^{\frac{84-79}{10}}\approx 3$

9. Respuesta d) 288. Se habla de 3 cargas pero no se dan más que dos valores; el tercero lo debemos calcular aplicando superposición y usando el dato de que el potencial creado por las tres en (0,0) es 0 V.

$$V(0{,}0)=V(0{,}0)_{15nC(0,3)}+V(0{,}0)_{-15nC(4,3)}+V(0{,}0)_{Q(4,0)}=0\,V$$
$$K\frac{15\cdot10^{-9}}{3}+K\cdot\frac{-15\cdot10^{-9}}{5}+K\cdot\frac{Q}{4}=0$$
$$Q=4\cdot15\cdot10^{-9}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=-8\cdot10^{-9}C$$

Calculamos el potencial de en (4,0) creado por las otras dos cargas:

$$V(4{,}0)=V(4{,}0)_{(0,3)}+V(4{,}0)_{(4,3)}=9\cdot10^{9}\cdot\frac{15\cdot10^{-9}}{5}+9\cdot10^{9}\cdot\frac{-15\cdot10^{-9}}{3}=9\cdot15\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=-18V$$

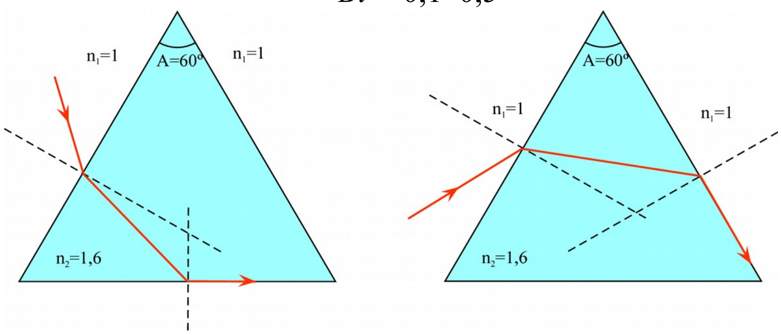
Como ahora vamos a mover Q, calculamos el potencial en (0,0) calculado por las otras dos sin contar Q

$$V(0{,}0)=V(0{,}0)_{(0,3)}+V(0{,}0)_{(4,3)}=9\cdot10^{9}\cdot\frac{15\cdot10^{-9}}{3}+9\cdot10^{9}\cdot\frac{-15\cdot10^{-9}}{5}=9\cdot15\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=18\,V$$

Se pide trabajo necesario para trasladar a la carga Q, asumimos que es trabajo realizado por el campo, por lo que $W_{(4,0)\rightarrow(0,0)}=-\Delta E_p=-Q\Delta V=-(-8\cdot10^{-9})(18-(-18))=288\cdot10^{-9}J$

10. Respuesta d) 72. En este caso la diferencia de potencial no está asociada necesariamente a variación de flujo, sino a fuerza ejercida sobre los electrones de la varilla, que acaba suponiendo una fuerza electromotriz y una diferencia de potencial; realmente $\varepsilon=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$, y en este caso $\varepsilon=Blv$ pero con lo visto en física de 2º de Bachillerato se puede plantear cualitativamente que si hubiese "un rectángulo de conductor ideal sin resistencia e inmóvil que cerrase un circuito", la fuerza electromotriz sería la misma, y en ese caso $|\varepsilon|=\left|\frac{-d\Phi}{dt}\right|=B\,d\frac{(l\cdot(x_0+vt))}{dt}=Blv$. Con valores numéricos $v=\frac{\varepsilon}{Bl}=\frac{1}{0{,}1\cdot0{,}5}=20\,m/s=72\,km/h$

11. Respuesta a) 35,6. Al ser un triángulo equilátero el ángulo que forman sus caras es 60º. Asumimos que el exterior del prisma es aire y tiene n=1. Se puede plantear un pequeño diagrama y ver casuísticas:



-Si el rayo incide por el lado de la normal opuesto al vértice superior, incide en la otra cara que no está horizontal, y en principio saldrá por esa cara a no ser que se produzca reflexión total en esa cara.

-Si el rayo incide por la lado de la normal más cercano al vértice superior, el rayo sale por la cara inferior, a no ser que se produzca reflexión total (sería un diagrama similar, solamente que el lado de la derecha sería la parte inferior "horizontal" que reposa sobre el suelo)

Si se produce reflexión total en la segunda cara, el ángulo de incidencia es

$$sen(i_2)\cdot n_2=sen(90^o)\cdot n_1\Rightarrow i_2=arcsen\left(\frac{1}{1{,}6}\right)=38{,}7^o$$

Si aplicamos trigonometría, en el triángulo formado por el rayo según cruza el prisma, conocemos un ángulo que es de 60º, otro que es (90-38,7)=51,3º, por lo que el otro del triángulo es 180-60-51,3=68,7º, que es (90-r_1), luego el ángulo refractado al entrar en el prisma desde el aire es 21,3º. Aplicando de nuevo la ley de Snell de refracción $sen(i_1)\cdot n_1=sen(21{,}3^o)\cdot n_2\Rightarrow i_1=arcsen\left(sen(21{,}3^o)\cdot\frac{1{,}6}{1}\right)=35{,}5^o$

Enunciado dice "ángulo de incidencia sobre la cara lateral debe tener un valor mínimo"; pángulos de incidencia mayores no se produciría reflexión total, por lo que sería la figura de la izquierda del diagrama.

12. Respuesta c) -13,3. Si la imagen es menor y "derecha" (no invertida), se trata de una lente divergente. Según convenio DIN 1335 tiene distancia focal imagen negativa, potencia negativa, y la posición del objeto es negativa, por lo que s=-15 cm. Utilizando la ecuación de lentes delgadas en m y el aumento

$$A=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{s'}{s}\Rightarrow s'=\frac{s}{3}\qquad\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=P\Rightarrow\frac{1}{-0{,}15/3}-\frac{1}{-15}=-13{,}3\,dioptrías$$

Problema de desarrollo A.

La carga puntual en el centro positiva repele el protón y lo frena, y nos podemos plantear si la carga negativa del exterior también lo frena al atraerlo. Sin embargo, utilizando el teorema de Gauss, el campo eléctrico en una superficie esférica concéntrica con el centro de la esfera sería uniforme en módulo por simetría y solamente dependería de la carga contenida, que es la interior. Por lo tanto la expresión de campo en el interior de la esfera es la misma que si fuera una carga puntual $E=K\frac{Q}{r^2}=9\cdot 10^9\cdot\frac{20\cdot 10^{-9}}{r^2}=\frac{180}{r^2}$

El campo no es uniforme en el interior de la esfera, lo planteamos energéticamente, calculando la diferencia de energía potencial entre el poro de entrada a 0,5 m y el punto de parada a 0,25 m. Lo calculamos primero como potencial

$$\Delta V=\int_{0,5}^{0,25}\vec{E}\cdot\vec{dr}=180\int_{0,5}^{0,25}\frac{-1}{r^2}dr=180[\frac{1}{r}]_{0,5}^{0,25}=180[\frac{1}{0,25}-\frac{1}{0,5}]=360\,V$$

(es una diferencia de potencial positiva, un electrón se movería espontáneamente en esa dirección)

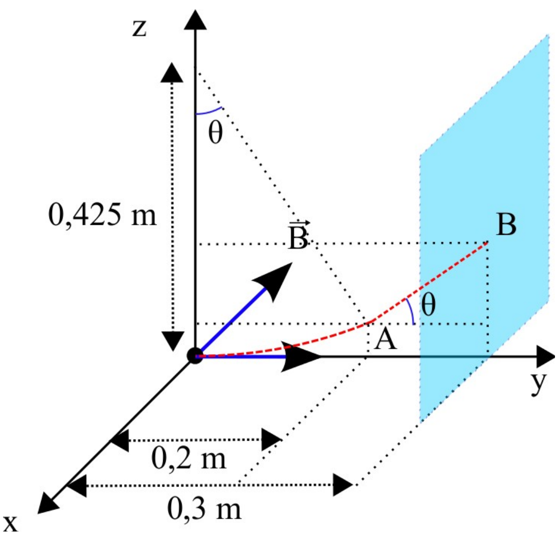
La variación de energía potencial para el protón $\Delta E_p=q\Delta V=1,6\cdot 10^{-19}\cdot 360=5,76\cdot 10^{-17}\,J$

Por conservación de energía es la energía cinética que tenía el protón en la entrada

$$\Delta E_p=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2\Delta E_p}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 5,76\cdot 10^{-17}}{1,7\cdot 10^{-27}}}=2,6\cdot 10^5 m/s$$

>El dato de la carga externa no lo utilizamos

Problema de desarrollo B.



Como el campo magnético y la velocidad son perpendiculares, usando la ley de Lorentz $\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B})$ vemos que inicialmente la fuerza estará dirigida hacia arriba, y en la zona con campo magnético describirá un arco de circunferencia cuyo radio podemos calcular

$$F_{mag}=F_{cent}\Rightarrow qvB=\frac{mv^2}{R}$$

$$R=\frac{mv}{qB}=\frac{1,7\cdot 10^{-27}\cdot 200\cdot 10^3}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^{-3}}=0,425\,m$$

El radio es mayor de los 20 cm de ancho de la región con campo magnético, por lo que sí sale de ella sin regresar por completar media circunferencia.

Llamamos A al punto de salida de la región con campo magnético, aplicando trigonomería en el diagrama se ve que angularmente ha recorrido un ángulo que tiene

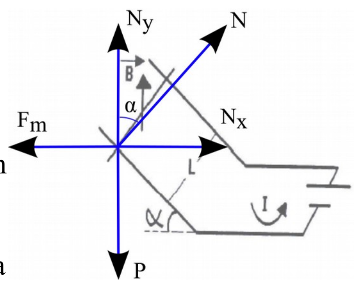
$\theta=arcsen\frac{0,2}{0,425}=28,07^o$ por lo que altura del punto A $h_A=0,425-0,425\cdot\cos(28,07^o)\approx 0,05\,m$

El campo magnético no modifica el módulo de la velocidad, por lo que sabemos que el módulo de la velocidad en el punto A es el mismo, y a partir de ese momento describe un MRU hasta impactar con la pantalla en el punto B. Aplicando trigonometría

$$h_B=h_A+(0,3-0,2)\cdot tg(\theta)=0,05+0,1\cdot tg(28,07^o)\approx 0,10\,m$$

El punto de incidencia sería B (0, 30, 10) en cm.

Problema de desarrollo C.



Representamos todas las fuerzas que actúan sobre el alambre; peso, normal y fuerza asociada a la corriente y el campo magnético según la ley de Laplace $\vec{F}=I(\vec{l}\times\vec{B})$

Se indica que se mueve a velocidad constante, lo que implica que la aceleración es nula, por lo que aplicando la 2ª ley de Newton

(Lo habitual sería tomar eje x en sentido paralelo a la rampa del movimiento, y eje y perpendicular, pero como simplemente queremos igualar para que la suma sea cero, tomamos eje x horizontal y así solamente tenemos que descomponer N, en lugar de dos fuerzas.

Eje y: $N_y-P=0\Rightarrow N\cdot\cos(\alpha)=mg$

Eje x: $N_x-F_m=0\Rightarrow N\cdot sen(\alpha)=IlB$

Si combinamos ambas expresiones (dividimos la 2ª entre la 1ª)

$$tg(\alpha)=\frac{mg}{IlB}\Rightarrow\alpha=arctg(\frac{0,120\cdot 9,81}{10\cdot 0,8\cdot 100\cdot 10^{-3}})=55,8^o$$

Se proporciona dato de corriente y no se proporcionan datos de resistencia, por lo que aunque varíe el flujo no tiene sentido plantear tensión y corriente inducida: se puede asumir que el dato de corriente dado es la corriente total.

Problema de desarrollo D.

a) Planteamos la expresión del flujo, que en el caso de campo uniforme, superficie plana y campo perpendicular tenemos $\Phi=\int\vec{B}\cdot\vec{dS}=...=B\cdot S=B\cdot\pi r^2$

En unidades de SI $\Phi=50\cdot10^{-3}\cdot\pi\cdot(3-0{,}02t)^2=50\cdot10^{-3}\cdot\pi\cdot(9-0{,}12t+0{,}0004t^2)[Wb]$

Usando la ley de Faraday $\varepsilon=\frac{-d\Phi}{dt}=-50\cdot10^{-3}\cdot\pi\cdot(-0{,}12+0{,}0004t)$

Usando la ley de Ohm $I=\frac{V}{R}=\frac{-50\cdot10^{-3}\cdot\pi\cdot(-0{,}12+0{,}0004t)}{5{,}0}$

Para t=1,5 min = 90 s $I=\frac{V}{R}=\frac{-50\cdot10^{-3}\cdot\pi\cdot(-0{,}12+0{,}0004\cdot90)}{5{,}0}\approx-2{,}6\,mA$

b) La energía disipada es E=P·t, siendo P la potencia que para un circuito eléctrico es $P=V\cdot I=V^2/R=RI^2$

Como la intensidad y la tensión varían con el tiempo, tenemos que plantear una integral

$$dE=P\cdot dt\Rightarrow E=\int_0^t P\cdot dt=\frac{1}{5}\int_0^t(1{,}885\cdot10^{-2}-6{,}283\cdot10^{-5}t)^2dt$$

$$E=\frac{1}{5}\int_0^t((1{,}885\cdot10^{-2})^2-2\cdot1{,}885\cdot10^{-2}\cdot6{,}283\cdot10^{-5}t+(6{,}283\cdot10^{-5})^2t^2)dt$$

$$E=\frac{1}{5}((1{,}885\cdot10^{-2})^2t-\frac{(2\cdot1{,}885\cdot10^{-2}\cdot6{,}283\cdot10^{-5})}{2}t^2-\frac{(6{,}283\cdot10^{-5})^2}{3}t^3)$$

$$E(t=1{,}5\,s)=\frac{1}{5}((1{,}885\cdot10^{-2})^2\,1{,}5-\frac{(2\cdot1{,}885\cdot10^{-2}\cdot6{,}283\cdot10^{-5})}{2}1{,}5^2-\frac{(6{,}283\cdot10^{-5})^2}{3}1{,}5^3)$$

$$E(t=1{,}5s)=1{,}06\cdot10^{-4}J$$

Problemas de simulación experimental 1. Propagación de incertidumbres

Usando la expresión de F en función de v

$$F=\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2}$$

Para sustituir valores cambiamos de unidades v a m/s 560 km/h=560/3,6 m/s , 10 km/h=10/3,6 m/s

$$F=0{,}30\cdot(\frac{560}{3{,}6})^2+\frac{3{,}50\cdot10^5}{(560/3{,}6)^2}=7273{,}72\,N$$

$$d\,F=\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial v}dv)^2}\Rightarrow\Delta F=\frac{\partial F}{\partial v}\Delta v$$

$$\Delta F=(2\alpha v-2\frac{\beta}{v^3})\Delta v$$

$$\Delta F=(2\cdot0{,}30\cdot\frac{560}{3{,}6}-2\cdot\frac{3{,}50\cdot10^5}{(560/3{,}6)^3})\cdot\frac{10}{3{,}6}=258{,}74267762660619803477=259\,N$$

Expresando el resultado con dos cifras significativas que es el menor número que tienen los datos del enunciado $F=7300\pm300\,N$

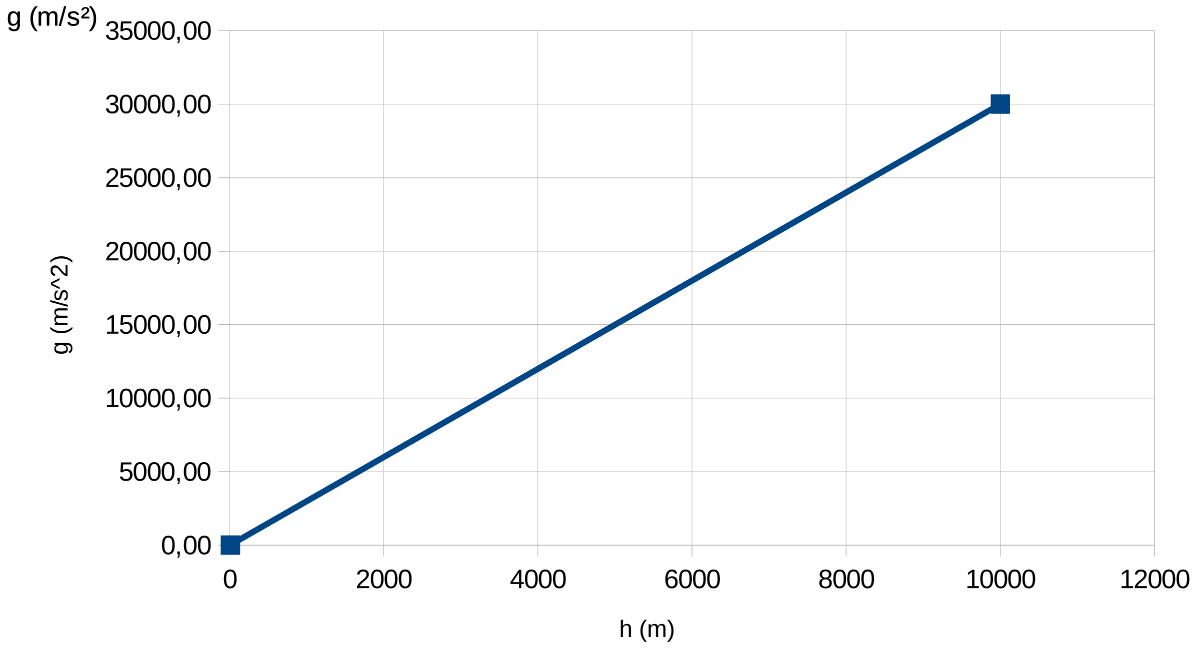
Problemas de simulación experimental 2. Ajuste lineal

Buscamos si son necesarias transformaciones algebraicas para obtener una recta y=ax+b

$g=g_0(1-\frac{2h}{R_T})=-2\frac{g_0}{R_T}h+g_0$ Donde y=g, x=h, $a=-2g_0/R_T$, $b=g_0$

Pasamos todas las magnitudes al Sistema Internacional y representamos

h(m)	10000	30000	40000	70000	90000	100000
g (m/s²)	9,76	9,70	9,69	9,59	9,54	9,51



Vemos que es aproximadamente una recta.
Realizamos el ajuste por mínimos cuadrados
http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+{{10000,+9.76},{30000,9.70},{40000,9.69},{70000,9.59},{90000,9.54},{100000,9.51}}
Se ve que se obtiene
$b=g_0=9{,}78974\ m/s^2$
$a=-2g_0/R_T=-2{,}78947\cdot 10^{-6}$
Operando

$$R_T=-2\frac{g_0}{a}$$

$$R_T=-2\cdot\frac{9{,}78974}{-2{,}78947\cdot 10^{-6}}$$

$$R_T=7{,}019\cdot 10^{6}\,m$$

En este caso no se pide la incertidumbre como en otros casos, podríamos usar sin más el menor número de cifras significativas de los datos del enunciado (3 para g, y 1 para h)

$$g_0=10\,m/s^2$$

$$R_T=7\cdot 10^{6}\,m$$

Para calcular el error podríamos considerar los valores máximos y mínimos de la pendiente, que sobre la gráfica considramos que se obtienen:
Con 30000 y 40000 por un lado
a=(9,69-9,7)/(40000-30000)
$a=-1\cdot 10^{-6}$
Con 40000 y 70000 por otro
a=(9,59-9,69)/(70000-40000)
$a=-3{,}33\cdot 10^{-6}$

fit		
	data	{{10 000, 9.76}, {30 000, 9.7}, {40 000, 9.69}, {70 000, 9.59}, {90 000, 9.54}, {100 000, 9.51}}
	model	linear function

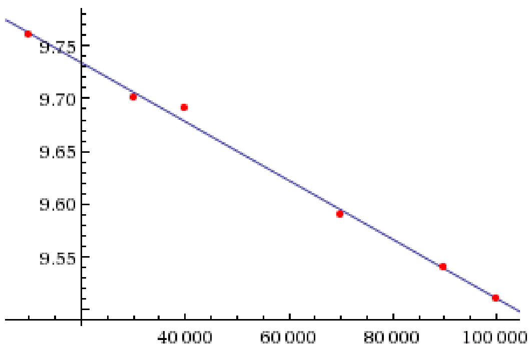
Least-squares best fit:

$9.78974-2.78947\times 10^{-6}\,x$

Fit diagnostics:

AIC	BIC	R^2	adjusted R^2
−38.748	−39.3727	0.995905	0.994881

Plot of the least-squares fit:



Consideramos la incertidumbre en la pendiente como $\Delta p=\frac{1}{2}|p_{máx}-p_{mín}|\Rightarrow\Delta p=\frac{1}{2}|-1\cdot 10^{6}-(-3{,}33\cdot 10^{-6})|\Rightarrow\Delta p=1{,}165\cdot 10^{-6}$

Con la incertidumbre de pendiente calculamos la incertidumbre del punto de corte de manera aproximada
Si $a=p+\Delta p=-2{,}78947\cdot 10^{6}+1{,}165\cdot 10^{-6}=-1{,}62447\cdot 10^{-6}$ Si lo utilizamos con el punto más

alejado 9,51=-1,62447·10^{-6}·100000 + b → $b_{mín}$ = 9,672447
Si $a=p-\Delta p=-2{,}78947\cdot 10^{6}-1{,}165\cdot 10^{-6}=-3{,}95447\cdot 10^{-6}$ Si lo utilizamos con el punto más alejado 9,51=-3,95447·10^{-6}·100000 + b → $b_{máx}$ = 9,905447

$$R_{T\,máx}=-2\cdot\frac{9{,}672447}{-1{,}62447\cdot 10^{-6}}=1{,}19\cdot 10^{7}\,m \qquad R_{T\,mín}=-2\cdot\frac{9{,}905447}{-3{,}95447\cdot 10^{-6}}=5{,}01\cdot 10^{6}m$$

Aproximadamente (en el caso de el radio el error es excesivo, quizá podríamos haber descartado el punto 40000, 9,69 por estar muy lejos de la recta respecto a los demás.

$$g_0=9{,}8+0{,}1\,m/s^2 \qquad R_T=7\cdot 10^{6}+2\cdot 10^{6}m$$

Madrid 2015

1. Respuesta c) 8. La diferencia de tiempo de finalización de los corredores es 3 min 32,57 s del más lento frente a 3 min 31,46 s del más rápido, 1,11 s. Ese tiempo es el que seguirá corriendo el corredor más lento a hasta llegar a la meta. Calculamos la velocidad del más lento $v=\frac{1500}{3\cdot 60+32{,}57}=7{,}0565\,s$. La distancia recorrida es e=v·t=7,0565·1,11=7,8327 m

2. Respuesta a) 4781. Si llamamos A al punto más elevado y B al punto de contacto con el agua, la energía en ambos puntos será la misma, ya que no hay rozamiento. En el punto más alto A no tiene energía cinética, por lo que la energía será solamente potencial. Tomando como referencia h=0 en la superficie del agua, tenemos que Em(B)=Em(A)=Ep(A)=mgh=75·9,81·(10+1,5)=8461 J.
Si llamamos punto C al punto del interior del agua donde se detiene, tenemos que en ese punto solamente tiene energía potencial, y la variación de energía mecánica la podemos asociar al trabajo de la fuerza de frenado del agua.

$$\Delta E_m=W_{F_{NC}}$$
$$mgh_C-(E_m(B))=F_{frenado}\cdot\Delta x\cdot(-1)$$
$$75\cdot 9{,}81\cdot(-2)-8461=-F_{frenado}\cdot 2\Rightarrow F_{frenado}=4966\,N$$

Tomamos la solución más próxima, a) 4781. El valor asociado a la solución b) 4321 se obtiene si no se considera que entre el punto B y C (al descender los 2 m dentro del agua) hay variación de energía potencial.

3. Respuesta d) 80. Al ser un lanzamiento parabólico, en el punto más alto de la trayectoria el vector velocidad será horizontal, y dado que no hay rozamiento podemos plantear que su módulo será igual a módulo horizontal inicial 25,0·cos(45º)=17,68 m/s. En el momento de la explosión, utilizamos la conservación del momento lineal, tanto para las componentes horizontales x como verticales y. Al trozo de 100 g lo llamamos 1 y al otro trozo, de 200 g, lo llamamos 2, por lo que podemos plantear, sustituyendo valores

$$m\cdot v_x=m_1\cdot v_{1x}+m_2\cdot v_{2x}\Rightarrow 0{,}3\cdot 17{,}68=0{,}1\cdot v_{1x}+0{,}2\cdot v_{2x}$$
$$m\cdot v_y=m_1\cdot v_{1y}+m_2\cdot v_{2y}\Rightarrow 0{,}3\cdot 0=0{,}1\cdot v_{1y}+0{,}2\cdot v_{2y}$$

Como se nos indica que el primer trozo cae verticalmente y tarda 1,80 s en caer, calculamos desde qué altura lo hace para calcular v_{1y}. La altura es la asociada al punto más alto de la trayectoria, y se puede calcular teniendo en cuenta que es la misma altura que un lanzamiento vertical con v_y=25,0·sen(45º)=17,68 m/s

$$v^2-v_0^2=2\cdot a\cdot s\Rightarrow 0-17{,}68^2=2\cdot(-9{,}81)\cdot s\Rightarrow s=15{,}93\,m$$

Para el trozo 1 en su caída podemos plantear

$$x=x_1+v_{1y}\cdot t+\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2\Rightarrow 0=15{,}93+v_{1y}\cdot 1{,}80+\frac{1}{2}(-9{,}81)\cdot 1{,}80^2\Rightarrow v_{1y}=-0{,}0378\,m/s$$

>Aproximamos v_{1y}=0, lo que implica que v_{2y}=0, y resolvemos así. Luego validamos esta aproximación.
Como se nos indica que el primer trozo cae verticalmente, sabemos que v_{1x}=0, por lo que podemos sustituir y

$$0{,}3\cdot 17{,}68=0{,}2\cdot v_{2x}\Rightarrow v_{2x}=26{,}52\,m/s$$

Como hemos asumido v_{2y}=0, el trozo 2 también tardará 1,8 s en caer, por lo que podemos calcular cuando espacio recorrerá horizontalmente desde el momento de la explosión: e=v·t=26,52·1,80=47,74 m
Como se pide distancia desde el punto de disparo, y el lanzamiento fue con 45º, calculamos el espacio recorrido hasta el momento de la exposión; el tiempo que tarda en subir al punto más alto es el mismo tiempo que tarda en bajar con velocidad 0, que hemos asumido que son 1,80 s, pero lo podemos comprobar: $v=v_0+at$ → 0=17,68-9,81t → t=1,80 s
En ese tiempo horizontalmente habrá recorrido e=v·t=17,68·1,8=31,82 m
La distancia total es 47,74+31,82=79,56 m
El resultado más próximo es d) 80 m
>Validamos la aproximación: si v_{1y} era negativo, v_{2y} sería positivo, y habría hecho una parábola con un alcance ligeramente mayor. Como la opción de valor más alto de las posibles es d) 80, es correcto asumir

como válido el resultado, ya que no puede ser un alcance menor.

4. Respuesta b) 8,3. Llamamos punto A al punto más alto y B al punto más bajo en superficie, igualmando energías mecánicas al no haber rozamiento

$$E_m(A)=E_m(B)\Rightarrow -G M\frac{\cancel{m}}{(R+R)}=-G M\frac{\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v^2\Rightarrow\frac{GM}{\cancel{2}R}=\frac{v^2}{\cancel{2}}$$

No tenemos como datos G y M, pero podemos plantear que g=GM/R^2 → GM=gR^2

$$v=\sqrt{gR}=\sqrt{11{,}5\cdot 6\cdot 10^6}=8307\,m/s=8{,}3\,km/s$$

5. Respuesta d) 4/3. El trabajo está asociado a la variación de energía potencial, por lo que igualando.

$$\frac{-GM_A\cdot 1}{(R+R)}-\left(\frac{-GM_A\cdot 1}{R}\right)=\frac{-GM_B\cdot 1}{R+2R}-\left(\frac{-GM_B\cdot 1}{R}\right)$$

$$\cancel{G}\frac{M_A}{2\cancel{R}}=\frac{2}{3}\cancel{G}\frac{M_B}{\cancel{R}}\Rightarrow M_A=\frac{4}{3}M_B$$

Como m=d·v, v=(4/3)πR^3, y ambos planetas tienen el mismo radio, la relación entre masas es la misma que entre densidades, por lo que d_A/d_B=4/3.

6. Respuesta b) 3. Como el muelle es el mismo, tiene una constante elástica única, y podemos plantear

$$K=m_1\cdot\omega_1^2=m_1\cdot(2\pi 10)^2$$

$$K=(m_1+m_2)\cdot\omega_2^2=(m_1+m_2)\cdot(2\pi 5)^2$$

$$m_1\cdot 100=(m_1+m_2)\cdot 25\Rightarrow 100=\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)25\Rightarrow\frac{m_2}{m_1}=\frac{100-25}{25}=3$$

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow I=I_0\cdot 10^{\frac{\beta}{10}}=10^{-12}\cdot 10^{\frac{103}{100}}=0{,}02\,W/m^2$$

7. Respuesta c) 36,2. $I=\frac{P}{S}\Rightarrow P=I\cdot 4\cdot\pi\cdot R^2=0{,}02\cdot 4\cdot\pi\cdot 3{,}8^2=3{,}63\,W$

$$P=\frac{E}{t}\Rightarrow E=P\cdot t=36{,}3\,J$$

8. Respuesta a) 0,05. La carga de cada una se distribuye de manera uniforme en su superficie. Al contectar las esferas con un conductor de capacidad despreciable, éste no retiene carga, y la se distribuye carga entre ambas, y en el nuevo equilibrio ambas se encuentran al mismo potencial.

La carga total es 7 nC -19 nC=-12 nC

No necesitamos cálculos para calcular la distribución de carga: ambas son iguales, tienen la misma capacidad, por lo que en equilibrio cada una tendrá la mitada de carga, -6 nC. Una vez que las esferas tengan cada una esa carga, se repelerán entre ellas, produciendo tensión en el cable. Para calcular la tensión asumimos modelo puntual: asumimos toda la carga de cada esfera situada en su centro, y como no se da el radio de la esfera y se indica que es pequeña, lo ignoramos

Utilizando la ley de Coulomb $F=K\frac{Q_1 Q_2}{R^2}=9\cdot 10^9\cdot\frac{-6\cdot 10^{-9}\cdot -6\cdot 10^{-8}}{0{,}008^2}=0{,}005\,N$

La opción más próxima es a) 0,05.

9. Respuesta c) 5,6. Si realizamos un diagrama podemos razonar que el campo generado por el conductor en (0,-3) va dirigido hacia x positivas, y que el campo generado por el conductor en (4,0) hacia y positivas, y es este segundo el que hay que anular para conseguir lo indicado en el enunciado.

El conductor situado en (4,-3) tendrá que tener una corriente dirigida hacia z positivas, de modo que genere un campo que tenga componente x negativa y componente y negativa.

Igualando componente positiva del campo generado por conductor en (0,-3) y componente negativa del campo generado por conductor en (4.-3), que es encuentra a una distancia de 5 m que se calcula con Pitágoras. Para proyectar el campo generado por el conductor en (4,-3) sobre el eje x multiplicamos por el coseno, que se puede razonar que es igual a 3/5. $\frac{\cancel{\mu_0}I}{\cancel{2\pi}5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{\cancel{\mu_0}2}{\cancel{2\pi}3}\Rightarrow I=\frac{50}{9}=5{,}6\,A$

10. Respuesta c) 90. El enunciado no indica que haya un conductor en el origen que cierre el circuito (o que ambos conductores se crucen en el origen) y que haga que al desplazarse la varilla aumente la superficie y el flujo, hacemos planteamiento general. Si realizamos un diagrama asumiendo lo anterior podemos razonar que la superficie es un trapecio S=l·x+x·x·tan(15º)/2=x(l + x·tan(15º)/2), siendo l la separación entre raíles en el origen. Se indica que la varilla móvil parte del origen, por lo que x=v·t.

$$\Phi=B\cdot S\cdot cos(\alpha)=B\cdot v\cdot t(l+v\cdot t\cdot tan(15^o)/2)=B\cdot v\cdot(l\cdot t+v\tan(15^o)t^2/2)$$
$$\varepsilon=\frac{-d\Phi}{dt}=-B\cdot v(l+v\tan(15^o)\cdot t)$$
$$\varepsilon(t=5s)=0{,}42\cdot 0{,}40(l+0{,}40\cdot\tan(15^o)\cdot 5)=[expresado\,en\,V]=168\cdot l+90[expresado\,en\,mV]$$

No se indica la separación entre raíles, así que si asumimos l=0 m (se cruzan en origen), la respuesta es c)

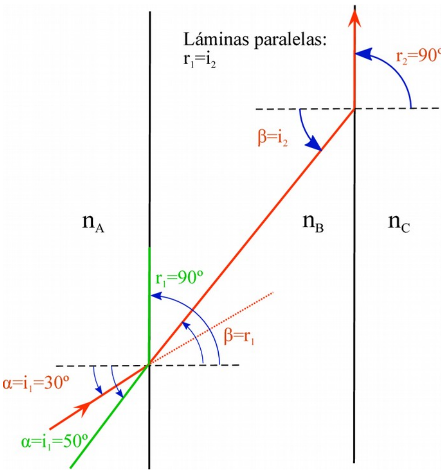
11. Respuesta a) 0,38. Asumimos que al hablar de α en el enunciado se hace referencia al ángulo de incidencia en cada caso: de A a B y de B a C, y lo que se está dando es el ángulo límite en cada caso.

Planteamos una reflexión total entre el medio A y B $n_A\cdot sen(50^o)=n_B\cdot sen(90^o)\Rightarrow n_B=n_A\cdot sen(50^o)$

Planteamos una reflexión total entre el medio B y C $n_B\cdot sen(30^o)=n_c\cdot sen(90^o)\Rightarrow n_B=\frac{n_C}{sen(30^o)}$

Igualando $n_A\cdot sen(50^o)=\frac{n_C}{sen(30^o)}\Rightarrow\frac{n_C}{n_A}=sen(50^o)\cdot sen(30^o)=0{,}38$

Comentario: enunciado es confuso porque indica "incide en B con un ángulo α, ... y en C entraría solamente si α<30º" Si interpretamos literalmente el enunciado, α está asociado solamente al paso de A a B, $n_B<n_A$ y hay reflexión total con un ángulo α=50º, y si el ángulo α=30º no hay reflexión total en paso de A a B, pero sí en paso de B a C. Con esa interpretación la reflexión total entre A y B nos da la misma expresión, pero para la refracción en el paso de A a B y luego reflexión total en paso de B a C (llamamos β al ángulo de incidencia en C desde B) nos daría:



De A a B, : $n_A\cdot sen(30^o)=n_B\cdot sen(\beta)$

De B a C: $n_B\cdot sen(\beta)=n_c\cdot sen(90^o)\Rightarrow n_B\cdot sen(\beta)=n_c$

Combinando: $n_A\cdot sen(30^o)=n_C\Rightarrow\frac{n_C}{n_A}=0{,}5$ *que no es ninguna de las soluciones propuestas.*

12. Respuesta d) 93,3. Utilizando el convenio de signos DIN, s=-20,0 cm. En el caso de espejo plano, s'_{espejo}=20,0 cm. Como esa imagen está 15 cm más cerca del espejo, la imagen inicial estaba en s'=35 cm

Utilizando la ecuación de espejo

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}=\frac{2}{R}\Rightarrow\frac{1}{35}+\frac{1}{(-20)}=\frac{2}{R}\Rightarrow R=-2\cdot 46{,}7=93{,}3\,cm$$

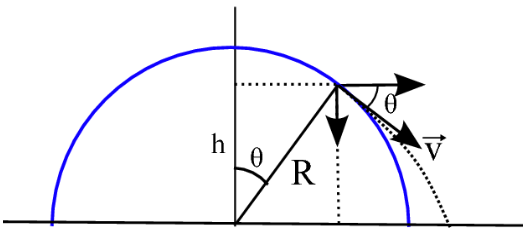
Problema 1.

Teoría (máximo 5 líneas): la partícula que cae deja de estar en contacto cuando tiene cierta velocidad y la componente de la fuerza de la gravedad que curva la trayectoria no es lo suficientemente grande y deja de haber normal. Se considera partícula puntual; no se gasta energía en hacerla rodar sobre su eje mientras cae sobre la semiesfera. El punto superior es un equilibrio inestable, pero se asume que comienza con v=0.

Cálculos (1 folio): si realizamos un diagrama del instante en el que se pierde el contacto, la partícula lleva cierta v, está "en contacto pero sin normal" habiendo recorrido un ángulo desde la vertical θ, y descendido hasta una altura h. En cualquier momento la altura respecto al plano horizontal XY es h=R·cos(θ).

Se puede razonar que justo en ese instante la componente radial de la fuerza de la gravedad es la fuerza centrípeta, y que esa componente radia es F=mg·cos(θ).

Si igualamos a la fuerza centrípeta



$$F_c=F_{gradial}\Rightarrow \cancel{m}\frac{v^2}{R}=\cancel{m}g\cos(\theta)\Rightarrow\frac{v^2}{\cancel{R}}=g\frac{h}{\cancel{R}}$$

Para calcular la relación entre h y v, utilizamos la conservación de energía mecánica entre el punto superior y el punto a altura h, cuando ha descendido una altura R-h.

$$\cancel{m}gR=\cancel{m}gh+\frac{1}{2}\cancel{m}v^2\Rightarrow g(R-h)=\frac{v^2}{2}$$

Igualando $\cancel{g}h=2\cancel{g}(R-h)\Rightarrow h+2h=2R\Rightarrow h=\frac{2}{3}R=\frac{2}{3}6{,}0=4{,}0\,m$

Una vez calculada esta altura, calcular la distancia a la base de la semiesfera del punto en el que impacta en

el plano XY es realizar los cálculos asociados a un tiro parabólico, con velocidad inicial dirigida hacia abajo con un ángulo igual a θ=arcos(4/6)=48,19º. Tomamos referencia z=0 en el plano xy.
El módulo de velocidad inicial es $v=\sqrt{gh}=\sqrt{9{,}81\cdot 4}=6{,}26\,m/s$

$$z=z_0+v_{0z}\cdot t+\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2\Rightarrow 0=4-6{,}26\cdot sen(48{,}19^o)\cdot t+\frac{1}{2}(-9{,}81)\cdot t^2\Rightarrow -4{,}905\,t^2-4{,}67\,t+4=0$$

$$t=\frac{4{,}67\pm\sqrt{(4{,}67^2-4\cdot(-4{,}905)\cdot 4)}}{2\cdot(-4{,}905)}=\frac{4{,}67\pm 10{,}01}{-9{,}81}=\begin{matrix}\cancel{-1{,}5\,s}\\ 0{,}55\,s\end{matrix}$$

Horizontalmente habrá recorrido: x=v·t=6,26·cos(48,19º)·0,55=2,30 m
Como se pide la distancia a la base de la semiesfera, calculamos cual era la distancia inicial:
x=6·sen(48,19º)=4,47 m
La distancia total al centro de la semiesfera sería 4,47+2,30=6,77 m, pero como se pide a la base de la semiesfera de radio 6 m, sería 0,77 m. Cualitativamente podemos validar que debe ser un punto cercano.

Problema 2.

Teoría (máximo 5 líneas): la componente de velocidad paralela al campo no es alterada, y la componente perpendicular hace que describa una trayectoria circular, por lo que la trayectoria es helicoidal. Se puede hacer analogía con movimiento cargas en auroras boreales, pero aquí el campo magnético es uniforme.
Asumimos que el haz tiene su eje paralelo al campo: los electrones cercanos al centro de haz describen círculos pequeños, y los exteriores mayores, pero el tiempo de giro es el mismo R=mv/qB, ω=v/R=qB/m.
Cálculos (máximo 1 folio): se indica un ángulo de 30º que tomamos como el ángulo en el vértice del cono, por lo que será el doble del ángulo que forma el vector velocidad de los electrones más externos del haz con el campo magnético. Por lo tanto el módulo de la componente de velocidad perpendicular al campo será v·sen(15º).
Se indica energía y haz de electrones, pero tomamos la energía asociada a cada electrón. Si utilizamos conservación de la energía, la velocidad del electrón es la asociada a la diferencia de potencial con la que ha sido acelerado, inicialmente desde el reposo:

$$E_c=|q|V=\frac{1}{2}m v^2\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2|q|V}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 100\cdot 10^3}{9{,}11\cdot 10^{-31}}}=1{,}874\cdot 10^8\,m/s$$

La componente radial perpendicular al campo será $1{,}874\cdot 10^8\cdot sen(15º)=4{,}85\cdot 10^7$ m/s
La componente paralela al campo será $1{,}874\cdot 10^8\cdot cos(15º)=1{,}81\cdot 10^8$ m/s
Para el radio de curvatura utilizamos solamente la componente perpendicular al campo

Igualando fuerza magnética y centrípeta $m\frac{v^2}{R}=|q|vB\Rightarrow R=\frac{mv}{|q|B}=\frac{9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 4{,}85\cdot 10^7}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}01}=0{,}028\,m$

Validamos a nivel de física de 2º de Bachillerato, la velocidad es próxima a la de la luz en el vacío, es relativista, ya que $\beta=\frac{v}{c}=\frac{1{,}874\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}=0{,}62$ $\quad\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}62^2}}\approx 1{,}27$

La resistencia del electrón a ser acelerado a altas velocidades es mayor, lo que se puede interpretar cualitativamente como que su masa inercial es mayor "masa relativista", y alcanzaría una velocidad algo menor, ya que en ese cálculo de velocidad de ha asumido m constante y con el valor de reposo.
Por lo tanto

$$E_c=|q|V=\gamma m_0 c^2-m_0 c^2=m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)$$

$$\frac{|q|V}{m_0 c^2}+1=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow\frac{1}{\frac{|q|V}{m_0c^2}+1}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Rightarrow\left(\frac{1}{\frac{|q|V}{m_0c^2}+1}\right)^2-1=\frac{-v^2}{c^2}$$

$$v=c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{|q|V}{m_0c^2}+1}\right)^2}=3\cdot 10^8\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 100\cdot 10^3}{9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot(3\cdot 10^8)^2}+1}\right)^2}=1{,}64\cdot 10^8\,m/s$$

(Validación lógica del resultado: menor, aumenta inercia y no se acelera tanto)
Con ese nuevo valor tenemos para el módulo global de la velocidad

$$\beta=\frac{v}{c}=\frac{1{,}64\cdot 10^{8}}{3\cdot 10^{8}}=0{,}55 \qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}55^{2}}}=1{,}20$$

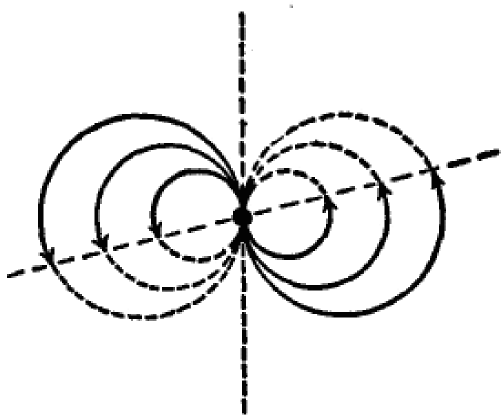
La componente radial perpendicular al campo será $1{,}64\cdot 10^8\cdot$sen(15º)=$4{,}24\cdot 10^7$ m/s
La componente paralela al campo será $1{,}64\cdot 10^8\cdot$cos(15º)=$1{,}58\cdot 10^8$ m/s

$$m\frac{v^{2}}{R}=|q|vB\Rightarrow R=\frac{\gamma m_{0}v}{|q|B\sin(\theta)}=\frac{1{,}20\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 4{,}24\cdot 10^{7}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}01}=0{,}029\,m$$

Ese será el radio asociado a los electrones más externos del haz, para los electrones más internos el radio será menor.
Calculamos el periodo de giro, el tiempo para completar una circunferencia, que es el mismo para todos los electrones del haz

$$\omega=\frac{v}{R}=\frac{|q|B}{m}=\frac{|q|B}{\gamma m_{0}}=\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}01}{1{,}20\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}}=1{,}46\cdot 10^{9}\,rad/s$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{1{,}46\cdot 10^{9}}=4{,}3\cdot 10^{-9}\,s$$


Magnetic Focusing
http://www.vias.org/basicradio/basic_radio_22_09.html

Si representamos la trayectoria de los electrones desde su eje, tendremos algo similar a la figura (no se indica el ancho del cono, pero podemos asumir que el valor del campo está ajustado para que haya un “enfoque” en el que los electrones quedan suficientemente juntos. No tenemos en cuenta la repulsión entre los electrones por el hecho de estar muy próximos al enfocar el haz.
De acuerdo al diagrama, calculamos el tiempo que los electrones recorren media circunferencia, que será el mismo para todos ellos, y con ese tiempo calculamos la distancia recorrida en la dirección del haz.
El tiempo en recorrer media circunferencia es

$$T_{1/2\,circunferencia}=4{,}3\cdot 10^{-9}=2\,2{,}15\cdot 10^{-9}\,s$$

Si utilizamos la velocidad en sentido paralelo al campo, $e=v\cdot t=1{,}58\cdot 10^{8}\cdot 2{,}15\cdot 10^{-9}=0{,}34\,m=34\,cm$

Problema 3.

Teoría (máximo 5 líneas): como las esferas son concéntricas, utilizando el teorema de Gauss podemos calcular el campo creado en su exterior, que depende solamente de la carga interior, y por simetría sabemos que es radial, y las superficies equipotenciales son esferas. Necesitamos calcular potencial para calcular trabajo, por lo que usamos la expresión de capacidad de una esfera cargada cilíndrico, con lo que podremos calcular el potencial en cada esfera.
Cálculos (máximo 1 folio): Llamamos punto A al situado a 50 cm y B al situado a 80 cm.
Utilizando la expresión de la capacidad de una esfera cargada C=4$\pi\varepsilon_0$R, y C=Q/V, V=Q/C, planteamos teniendo en cuenta que el dato el enunciado es K=1/4$\pi\varepsilon_0$

$$V_{interior}=K\frac{Q_{interior}}{R_{interior}}=9\cdot 10^{9}\frac{3\cdot 10^{-9}}{0{,}3}=90\,V$$

$$V_{exterior}=K\frac{Q_{exterior}}{R_{exterior}}=9\cdot 10^{9}\frac{-10\cdot 10^{-9}}{1}=-90\,V$$

Por la simetría asumimos que el potencial es constante en superficies concéntricas, y que su dependencia con el radio es 1/r al igual que para una carga puntual, por lo que podemos plantear que sigue una ecuación
V=a + b·1/r
V(r=$r_{interior}$) = 90 =a+b/0,3
V(r=$r_{exterior}$) = -90=a+b/1
Si restamos primera menos segunda:
180=b·(1/0,3-1) → b=77,14
Sustituyendo en la segunda a=-90-77,14=-167,14
Por lo que tenemos una expresión para r con valores intermedios que en los extremos tiene los valores dados:

$$V(r)=-167{,}14+\frac{77{,}14}{r}\,[para\;0{,}3<r<1\,m]$$

Validamos: V(r=0,3 m) = 90 V, V(r=1 m)=-90 V
Calculamos ahora el potencial en los dos puntos indicados

$$V(B)=-167{,}14+\frac{77{,}14}{0{,}8}=-70{,}72\,V$$
$$V(A)=-167{,}14+\frac{77{,}14}{0{,}5}=-12{,}86\,V$$
$$\Delta V=V(B)-V(A)=-70{,}72-(-12{,}86)=-57{,}86\,V$$
$$W_{A\to B}=-q\,\Delta V=-(-7\cdot 10^{-6})\cdot(-57{,}86)=-4\cdot 10^{-4}\,J$$

El trabajo realizado por el campo eléctrico es negativo: la diferencia de potencial es negativa, va hacia potencial menor (número negativo más grande), y se trata de una carga negativa. El trabajo es en contra del campo, no lo realiza el campo.

Referencia: http://laplace.us.es/wiki/index.php/Condensador_esf%C3%A9rico

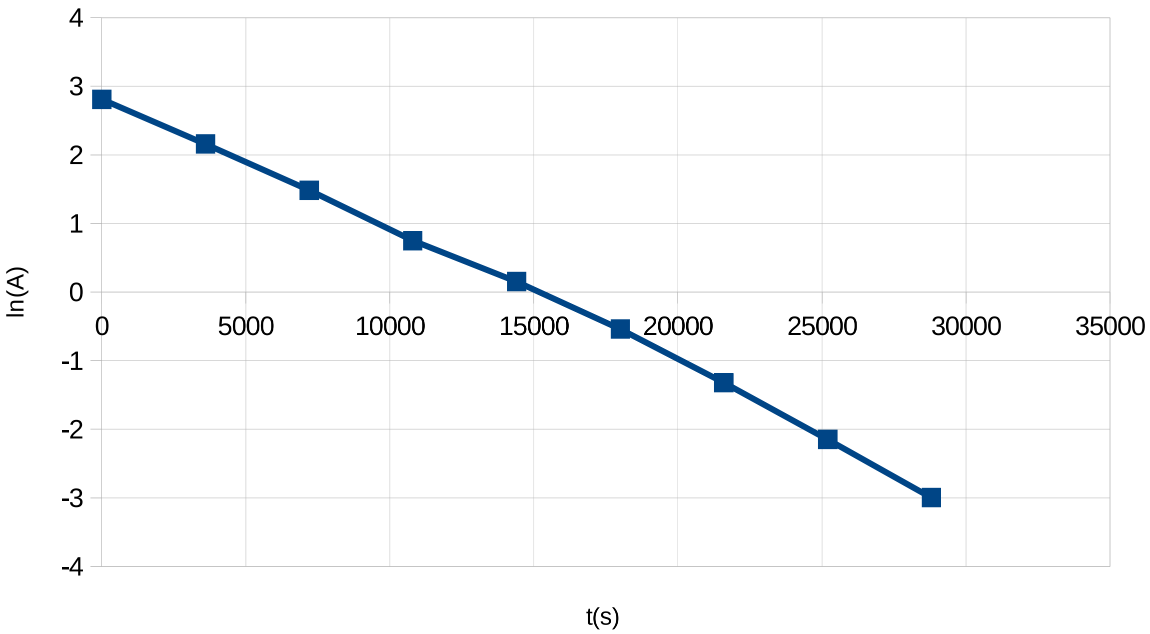
Problema experimental 1.

a) Como la expresión es exponencial, para obtener la expresión de una recta tomamos logaritmo, con lo que llegamos a $\ln(A)=\ln(A_0)-t/\tau$, donde podemos llamar $y=\ln(A)$, $x=t$, por lo que tenemos una recta $y=ax+b$ siendo $a=-1/\tau$ y $b=\ln(A_0)$.

b) Realizamos los cálculos teniendo en cuenta que las medidas de cuentas son número de desintegraciones durante 1 minuto.

t(horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Cuentas	997	520	265	127	70	35	16	7	3
t(s)	0	3600	7200	10800	14400	18000	21600	25200	28800
A (emis/s)	16,6	8,67	4,42	2,12	1,17	0,58	0,27	0,12	0,05
ln(A)	2,81	2,16	1,49	0,75	0,15	-0,54	-1,32	-2,15	-3,00

Si lo representamos gráficamente vemos que sí se ajusta a una recta
(en la hoja inicial de la prueba indica *“El problema 1 se resolverá en dicha hoja de papel milimetrado”*)



c) Para trazar la recta de ajuste realizamos el ajuste por mínimos cuadrados, utilizando la función estadística de la calculadora (ver resolución problema experimental Madrid 2013)

Si lo realizamos con wolframalpha http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+{{0%2C+2.81}%2C{3600%2C2.16}%2C{7200%2C1.49}%2C{10800%2C0.75}%2C{14400%2C0.15}%2C{18000%2C-0.54}%2C{21600%2C-1.32}%2C{25200%2C-2.15}%2C{28800%2C-3.00}}

Se ve que
$a=-1/\tau=-0{,}000199444$, luego la vida media (vida promedio) es $\tau=$ 5013,9... s

fit	data	{{0, 2.81}, {3600, 2.16}, {7200, 1.49}, {10 800, 0.75}, {14 400, 0.15}, {18 000, −0.54}, {21 600, −1.32}, {25 200, −2.15}, {28 800, −3.}}
	model	linear function

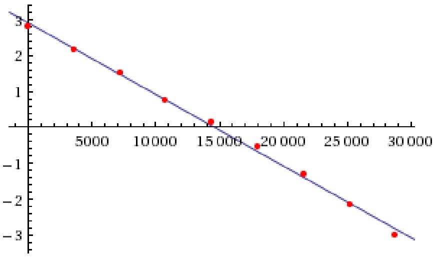
Least-squares best fit:

$2.91089 - 0.000199444\,x$

Fit diagnostics:

AIC	BIC	R^2	adjusted R^2
−11.1649	−10.5732	0.997477	0.997116

Plot of the least-squares fit:



Para calcular la incertidumbre reutilizamos la idea indicada en la solución de Aragón 2011:
"Cuando se quiere hacer una estimación "manual" de la incertidumbre de una pendiente, normalmente se trazan las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a la serie de puntos experimentales y se obtiene la incertidumbre como

$$\Delta p=\frac{1}{2}(p_{máx}-p_{mín})$$

Viendo la gráfica tomamos pendiente máxima entre los quinto y noveno punto, y pendiente mínima entre el primero y el quinto .

$p_{máx}=(-3{,}00-0{,}15)/(28800-14400)=-0{,}00021875\ s^{-1}$

$p_{mín}=(0{,}15-2{,}81)/(14400)=-0{,}0001847\ s^{-1}$

$$\Delta p=\frac{1}{2}(-0{,}0002187524-(-0{,}0001847))=-1{,}7\cdot 10^{-5}\,cm/s^2$$

Podemos plantear $p=-1/\tau \rightarrow \tau=-1/p$

$$\Delta\tau=\frac{\partial\tau}{\partial p}\cdot\Delta p=\frac{1}{p^2}\cdot\Delta p=\frac{1}{(-0{,}000199444)^2}\cdot(-1{,}7\cdot 10^{-5})=427\,s$$

Indicamos el error con una única cifra significativa y llegamos a
τ= 5000 ±400 s

Problema experimental 2.

a) Utilizamos la expresión para lentes delgadas, y convenio de signos DIN 1335; s=-15,00 cm; s'=30,20 cm

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}\Rightarrow\frac{1}{30{,}20}-\frac{1}{-15}=\frac{1}{f'}\Rightarrow f'=10{,}02\,cm$$

b) Expresamos f' en función de las otras variables, s y s'

$$f'=\frac{1}{\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}}=\frac{s'\cdot s}{s-s'}$$

$$d\,f'=\sqrt{\left(\frac{\partial f'}{\partial s}ds\right)^2+\left(\frac{\partial f'}{\partial s'}ds'\right)^2}\Rightarrow\Delta f'=\sqrt{\left(\frac{\partial f'}{\partial s}\Delta s\right)^2+\left(\frac{\partial f'}{\partial s'}\Delta s'\right)^2}$$

$$\Delta f'=\sqrt{\frac{(s'\cdot(s-s')-(s'\cdot s)\cdot 1)}{(s-s')^2}\cdot\Delta s+\frac{(s\cdot(s-s')-(s'\cdot s)\cdot(-1))}{(s-s')^2}\cdot\Delta s'}$$

$$\Delta f'=\sqrt{\left(\frac{(30{,}2\cdot(-15-30{,}2)-(30{,}20\cdot(-15)\cdot 1))}{(-15-30{,}2)^2}\cdot 0{,}15\right)^2+\left(\frac{(-15\cdot(-15-30{,}2)-(30{,}2\cdot(-15))\cdot(-1))}{(-15-30{,}2)^2}\cdot 0{,}15\right)^2}$$

$$\Delta f'=\sqrt{0{,}009375900724675022 49+0{,}0002728938918934726}=0{,}0982...$$

Indicamos el error con una única cifra significativa y llegamos a
f'= 10,0±0,1 cm

Madrid 2014

1. Respuesta c) 80. Se pide distancia recorrida desde t=0, y es un movimiento donde la ecuación s(t) es una parábola, MRUA por enunciado, avanza y retrocede, donde la ecuación de velocidad es v=20-10t, y se detiene a los 2 s, instante en el que su posición es $s(t=2\ s)=80+20\cdot 2-5\cdot 2^2=100$ m, luego avanza 20 m. $s(t=6\ s)=80+20\cdot 6-5\cdot 6^2=20$ m, luego retrocede 60 m y la distancia total recorrida es 20+60=80 m.

2. Respuesta d) 1,21. Se trata de un MRUA, $x=x_0 + v_0t+ ½ a t^2$
La aceleración de frenado es la asociada a la fuerza de rozamiento, cuyo valor es $F_r=\mu N$, siendo la normal la reacción que ejerce la mesa sobre el objeto. Como el sistema no es inercial, además de la normal asociada al peso, la fuerza normal tiene un término adicional asociado a la fuerzas inerciales, cuyo valor es m·ai, siendo a_i la aceleración del sistema no inercial.
No se indica el valor de g, pero tomamos 9,8 m/s^2
$a=-F_r/m= -\mu N/m=-\mu(mg+m\cdot a_i)/m-0,13\cdot(9,8+1)\cdot 0,5/0,5=-1,404\ m/s^2$
Sustituyendo $2=0+2,5t+0,5(-1,404)t^2 \rightarrow 0,702t^2-2,5t+2=0$

$$t=\frac{2,5\pm\sqrt{(-2,5)^2-4\cdot 0,702\cdot 2}}{2\cdot 0,702}=\frac{2,5\pm 0,796}{1,404}=\begin{matrix}t=1,21\,s\\ t=2,35\,s\end{matrix}$$

Tomamos el tiempo más pequeño de los dos, ya que es el asociado a la llegada al borde. El otro tiempo estaría asociado a un supuesto retorno a la posición del borde si la mesa fuese más larga y se mantuviese la aceleración negativa, lo que no tiene sentido en este caso.
3. Respuesta b) 1/6. El módulo del impulso de ambos cuerpos es igual al módulo del momento lineal antes del choque, que tiene sentido opuesto. $I=F\cdot\Delta t=\Delta p$. Asumimos que ambos parten del reposo, por lo que $p_1=F_1\cdot t$ y $p_2=-F_2\cdot t$, tomando como sentido positivo el del movimiento del cuerpo al que se aplica F_1.
En la colisión quedan pegados, por lo que $p_1+p_2=(m_1+m_2)\cdot v$. Como $m_1=m_2=m$ y $F_1/F_2=3/2$, $F_2=(2/3)F_1$
tenemos que $\left(1-\frac{2}{3}\right)F_1\cdot t=2m\cdot v \rightarrow v=\frac{1}{6}\frac{F_1 t}{m}$
4. Respuesta b) 1,7. Si se deja caer con la altura mínima, la altura tiene que ser tal que en el primer looping tenga suficiente velocidad para que la fuerza centrípeta asociada exclusivamente al peso sea suficiente para que realice el looping, sin que haya normal que ejerzan los carriles ni el asiento en el punto más alto.
$F_{c1}=mv_1^2/R_1=mg \rightarrow v_1^2=gR_1$.
Igualando energías potencial en el punto inicial y potencial más cinética en el punto más alto del primer looping tenemos $mgh=mg2R_1+ ½\ mv_1^2 \rightarrow gh=g2R_1+ ½\ gR_1 =gR_1(2+ ½) \rightarrow h=5/2\ R_1$
El segundo looping es más bajo, por lo que sí habrá fuerza normal; calculamos la velocidad mediante la conservación de la energía entre el punto inicial y el punto más alto del segundo looping:
$mgh=mg2R_2 + ½\ mv_2^2 \rightarrow v_2^2=2(gh-g2R_2)=2g(5/2\ R_1 -2R_2)=2\cdot g\cdot(2,5\cdot 10-2\cdot 7,5)=\cdot 20g$
(lo dejamos en unidades mg como indica el enunciado; aquí se da el valor de g pero no es necesario usarlo)
En el punto más alto de este segundo looping tenemos
$F_{c2}=mv_2^2/R_2= mg+ N \rightarrow N=mv_2^2/R_2- mg= m20g/R_2-mg=mg(20/R_2-1)=mg(20/7,5-1)=1,7mg$
5. Respuesta b) 7. Utilizando la tercera ley de Kepler, $\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{R_1^3}{R_2^3}$, donde R_1 sería el radio en el caso de órbita circular y R_2 sería el semieje mayor de la elipse en el caso de órbita elíptica.
De la elipse se nos da el perigeo, que es una distancia inferior al semieje mayor; es la distancia desde el foco al punto de corte más cercano de la elipse con su eje mayor. Por lo tanto sabemos que $R_2>R_1$ y tendremos $T_2>T_1$ por lo que será $T_2=8T_1$. Sustituyendo

$$R_2^3=\frac{T_2^2}{T_1^2}\cdot R_1^3=64\,R_1^3\Rightarrow R_2=\sqrt[3]{64}\,R_1=4\,R_1$$

R_1 coincide con el perigeo de la órbita elíptica, y R_2 es el semieje mayor. El valor total del eje mayor sería $2R_2=8R_1$, y la distancia desde el foco al apogeo será $7R_1$.
6. Respuesta c) 8534. La energía potencial que hay que aportar para subir el objeto e 1000 toneladas es $E=mg_0h=1000\cdot 10^3\cdot 9,81\cdot 400=3,924\cdot 10^9$ J (asumimos que en 400 m el valor de g se mantiene en g_0, no varía significativamente, y hemos tomando como referencia 0 en el suelo, por lo que es el valor de incremento de energía, la aportada)
La energía mecánica que tiene un satélite en órbita circular tiene la siguiente expresión, a la que se puede llegar igualando fuerza centrípeta y gravitatoria: $E_m=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_{órbita}}$
No se nos da el valor de G ni M, pero podemos expresarlo en función de g_0 y R_T que sí son datos

$$g_0=G\frac{M}{R_T^2}\Rightarrow GM=g_0R_T^2$$

Si calculamos la energía de satelización, que es la diferencia de energía mecánica entre la órbita y el suelo (y en el suelo ignoramos el hecho de la rotación de que la Tierra sobre su eje aporta energía cinética y solamente consideramos energía potencial) tenemos

$$\Delta E_m=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_{órbita}}-(-G\frac{Mm}{R_T})=GM\,m(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2\,R_{órbita}})=g_0\,R_T^2\,m(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2\,R_{órbita}})$$

$$\frac{-1}{2\,R_{órbita}}=\frac{\Delta E_m}{g_0\,R_T^2\,m}-\frac{1}{R_T}=\frac{3{,}924\cdot 10^9}{9{,}81\cdot(6400\cdot 10^3)^2 100}-\frac{1}{2\cdot 6400\cdot 10^3}=-5{,}86\cdot 10^{-8}$$

$$R_{órbita}=\frac{1}{2\cdot 5{,}86\cdot 10^{-8}}\approx 8{,}53\cdot 10^6\,m$$

7. Respuesta c) 1392. La energía mecánica que tiene un satélite en órbita circular tiene la siguiente expresión, a la que se puede llegar igualando fuerza centrípeta y gravitatoria: $E_m=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_{órbita}}$

No se nos da el valor de G ni M, pero podemos expresarlo en función de g_0 y R_T que sí son datos

$$g_0=G\frac{M}{R_T^2}\Rightarrow GM=g_0\,R_T^2$$

Si calculamos la energía de cambio de órbita, es la diferencia de energía mecánica entre la órbita superior y la inferior, y tenemos (llamamos $R_{órbita}$ al radio de la órbita inicial, que es la suma de radio terrestre y la altura sobre superficie indicada en enunciado), y que altura doble no implica radio de óbita doble

$$\Delta E_m=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_{órbita\,superior}}-(\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_{órbita}})=\frac{GMm}{2}(\frac{1}{R_{órbita}}-\frac{1}{R_{órbita}+h})=\frac{g_0 R_T^2 m}{2}(\frac{1}{R_{órbita}}-\frac{1}{R_{órbita}+h})$$

$$\Delta E_m=\frac{9{,}81\cdot(6400\cdot 10^3)^2\,300}{2}(\frac{1}{6400\cdot 10^3+10000\cdot 10^3}-\frac{1}{6400\cdot 10^3+2\cdot 10000\cdot 10^3})\approx 1{,}392\cdot 10^9\,J$$

8. Respuesta a) 1000. Se indica energía inicial y que se desprecia el rozamiento, por lo que se está dando la energía total del oscilador que se mantiene constante. La energía mecánica total es igual a la energía potencial máxima, por lo que $E_{m\,máx}=\frac{1}{2}K\,A^2\Rightarrow A=\sqrt{\frac{2\,E_{m\,máx}}{K}}=\sqrt{\frac{2\cdot 25}{2{,}0\cdot 10^4}}=0{,}05\,m$

La máxima fuerza recuperadora está asociada a la elongación máxima, y usando ley de Hooke

$$|F_{máx}|=K\,A=2{,}0\cdot 10^4\cdot 0{,}05=1000\,N$$

9. Respuesta b) 6. Para el mismo punto del espacio tenemos $\Delta\phi=\omega\,\Delta t\Rightarrow\omega=\frac{3\pi/5}{0{,}3}=2\pi\,rad/s$

Para el mismo instante de tiempo tenemos $\Delta\phi=k\,\Delta x\Rightarrow\Delta x=\frac{3\pi/5}{k}$

Utilizamos la relación $v=\frac{\lambda}{T}=\frac{\omega}{k}\Rightarrow k=\frac{\omega}{v}$, sustituyendo $\Delta x=\frac{3\pi/5}{2\pi/20}=6\,m$

10. Respuesta c) -7. Para que tres cargas estén en equilibrio, la única opción es que estén en una línea recta, la carga central tenga un signo y las otras dos signos opuestos y del mismo valor y estén a la misma distancia. La carga central atrae a las otras dos cargas, pero al mismo tiempo esas dos cargas se repelen entre sí, por lo que se puede alcanzar el equilibrio. Como se indica que la carga menor de las tres es +1 C, esa es la carga central, y las otras dos cargas tienen que tener un valor negativo (pero mayor en valor absoluto para que tenga sentido la afirmación del enunciado de que la carga "menor" sea de + 1 C. Según este criterio quedarían dos opciones: -7 C y -8 C. En el primer caso cada una de las otras dos cargas serían de -4 C, y en el segundo caso cada una de las otras dos cargas sería de -4,5 C; en ningún momento el enunciado indica que las cargas puntuales no pueden tener carga no entera expresada en Culombios, pero como no hay otro criterio para elegir, asumiendo eso la respuesta correcta sería la c) -7 C.

Podemos realizar la comprobación y comprobar que están en equilibrio si ambas cargas están equidistantes de la carga central, sea cual sea esa distancia. Las fuerzas que actuarían sobre cada una de las cargas de -4 C en los extremos y que tendrían sentidos opuestos serían:

La fuerza atractiva ejercida por la carga central sería $K\frac{-4\cdot 1}{d_1^2}$

La fuerza repulsiva ejercida por la carga en el otro extremo sería $K\frac{(-4)\cdot(-4)}{(d_1+d_2)^2}$

Sumando ambas e igualando a cero:

$$-K\left(\frac{-4}{d_1^2}+\frac{16}{(d_1+d_2)^2}\right)=0\Rightarrow\frac{2}{d_1}=\frac{4}{d_1+d_2}\Rightarrow d_1=d_2$$

11. Respuesta b) 9,6 .Carga total asumimos que es positiva, y sean las esferas conductoras o aislantes, en equilibrio la carga de cada una se distribuye de manera uniforme en su superficie. Al conectar las esferas con un conductor de capacidad despreciable, éste no retiene carga, y la se distribuye carga entre ambas, y en el nuevo equilibrio ambas se encuentran al mismo potencial.
Al ser una cuestión lo planteamos de manera sencilla, no consideramos en absoluto la dimensión del conductor respecto al tamaño de las esferas, realmente habría repulsión la distribución de cargas no sería uniforme.
Utilizando la expresión de la capacidad de una esfera cargada $C=4\pi\varepsilon_0 R$, y $C=Q/V$, planteamos

$$V_1=V_2=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}=\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\Rightarrow\frac{Q_1}{R_1}=\frac{Q_2}{R_2}$$

Planteamos un sistema de ecuaciones sabiendo que la carga total es 20 nC

$$\frac{Q_1}{0{,}10}=\frac{Q_2}{0{,}15}\Rightarrow Q_2=1{,}5\,Q_1$$

$$Q_1+Q_2=20\cdot10^{-9}\Rightarrow 2{,}5Q_1=20\cdot10^{-9}\Rightarrow Q_1=8\cdot10^{-9}\,C\;y\;Q_2=1{,}2\cdot10^{-8}\,C$$

Una vez que las esferas tengan cada una esa carga, se repelerán entre ellas, produciendo tensión en el cable. Para calcular la tensión asumimos modelo puntual: asumimos toda la carga de cada esfera situada en su centro, por lo que la distancia total entre esferas será 0,10+0,05+0,15=0,3 m

Utilizando la ley de Coulomb $F=K\frac{Q_1Q_2}{R^2}=9\cdot10^9\cdot\frac{8\cdot10^{-9}\cdot1{,}2\cdot10^{-8}}{0{,}3^2}=9{,}6\cdot10^{-6}\,N$

12. Respuesta d) 4,8. La velocidad del electrón es la asociada a la diferencia de potencial con la que ha sido acelerado, inicialmente desde el reposo:

$$E_c=|q|V=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2|q|V}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot20\cdot10^3}{9{,}1\cdot10^{-31}}}=8{,}386\cdot10^7\,m/s$$

Como el campo magnético no es perpendicular a la velocidad, la trayectoria será helicoidal: para el radio de curvatura utilizamos solamente la componente perpendicular a la velocidad, que es 0,1·sen(75º)
Igualando fuerza magnética y centrípeta

$$m\frac{v^2}{R}=|q|vB\sin(\theta)\Rightarrow R=\frac{mv}{|q|B\sin(\theta)}=\frac{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot8{,}386\cdot10^7}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot0{,}1\cdot sen(75)}=0{,}0049\,m$$

Según esto elegiríamos la opción d, que es 4,8 mm, pero puestos a validar a nivel de física de 2º de Bachillerato, la velocidad es próxima a la de la luz en el vacío, es relativista, ya que

$$\beta=\frac{v}{c}=\frac{8{,}39\cdot10^7}{3\cdot10^8}=0{,}28\qquad\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}28^2}}=1{,}042$$

La resistencia del electrón a ser acelerado a altas velocidades es mayor, lo que se puede interpretar cualitativamente como que su masa inercial es mayor "masa relativista", y alcanzaría una velocidad algo menor, ya que en ese cálculo de velocidad de ha asumido m constante y con el valor de reposo.
Por lo tanto

$$E_c=|q|V=\gamma m_0c^2-m_0c^2=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)$$

$$\frac{|q|V}{m_0c^2}+1=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow\frac{1}{\frac{|q|V}{m_0c^2}+1}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Rightarrow\left(\frac{1}{\frac{|q|V}{m_0c^2}+1}\right)^2-1=\frac{-v^2}{c^2}$$

$$v=c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{|q|V}{m_0c^2}+1}\right)^2}=3\cdot10^8\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot20\cdot10^3}{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot(3\cdot10^8)^2}+1}\right)^2}=8{,}15\cdot10^7\,m/s$$

(Validación lógica del resultado: ligeramente menor, aumenta inercia y no se acelera tanto)
Con ese nuevo valor tenemos

$$\beta=\frac{v}{c}=\frac{8{,}15\cdot 10^{7}}{3\cdot 10^{8}}=0{,}27 \qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}27^{2}}}=1{,}039$$

$$m\frac{v^{2}}{R}=|q|vB\sin(\theta)\Rightarrow R=\frac{\gamma m_{0}v}{|q|B\sin(\theta)}=\frac{1{,}039\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 8{,}15\cdot 10^{7}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}1\cdot sen(75)}=0{,}050\,m$$

El radio sería ligeramente mayor ya que tiene más inercia, pero no nos hace cambiar de opción de respuesta.

13. Respuesta d) 0,85. El flujo es $\Phi=B\cdot S=B\cdot\pi\cdot R^{2}$

El radio inicialmente son 0,2 m, y aumenta 0,005 m/s, luego R=0,2+0,005·t

Sustituyendo $\Phi=B\cdot S=B\cdot\pi\cdot(0{,}2+0{,}005\cdot t)^{2}=B\cdot\pi\cdot(0{,}005^{2}t^{2}+2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}005\,t+0{,}2^{2})$

La fuerza electromotriz es $\varepsilon=\frac{-d\Phi}{dt}=-B\cdot\pi\cdot(2\cdot 0{,}005^{2}t+2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}005)$

$$\varepsilon(t=5\,s)=0{,}12\cdot\pi\cdot(2\cdot 0{,}005^{2}\cdot 5+2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}005)=8{,}5\cdot 10^{-4}\,V$$

14. Respuesta a) 4º,8. Tratamos el prisma como dos refracciones. En la salida del prisma el rayo incidirá con el ángulo límite, que será $\theta_{límite}=arcsen(\frac{1}{1{,}5})=41{,}8^{o}$

Por geometría, si forma ese ángulo con la normal a la cara de salida, y el prisma tiene 45º, en el triángulo formado por vértice+punto salida+punto entrada podemos plantear, teniendo en cuenta que los ánguos se miden desde la normal, 45+(90-41,8)+x=180 → x=86,8º. El ángulo con la normal en el interior del prisma, que será el ángulo refractado, será 90-86,8=3,2º

Utilizando la ley de Snell, el ángulo incidente será 1·sen(i)=1,5·sen(3,2º) → i=arsen(1,5·sen(3,2º))=4,8º

15. Respuesta c) 25. Se utiliza el término “derecha” para indicar “no invertida”. Para que la imagen sea no invertida y genere una imagen menor (el aumento +2/3 es menor que la unidad), se trata de una lente divergente. Usamos la ecuación de la lente delgada podemos plantear

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \qquad A=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{s'}{s}\Rightarrow s'=\frac{2}{3}s$$

Como la posición del objeto es s=-5 cm, tenemos

$$\frac{1}{f'}=\frac{1}{\frac{2}{3}\cdot(-5)}-\frac{1}{-5}=\frac{-3}{10}+\frac{2}{10}=\frac{-1}{10}$$

Si cambiamos el tipo de lente (utilizamos un subíndice para diferenciar) pero con la mismo valor absoluto de potencia, tenemos que $1/f'=-1/f_2'$. Si ahora tenemos que el aumento es -2/3, planteamos para calcular la posición del objeto:

$$\frac{1}{f_{2}'}=\frac{1}{s_{2}'}-\frac{1}{s_{2}}\Rightarrow\frac{1}{10}=\frac{1}{\frac{-2}{3}s}-\frac{1}{s}\Rightarrow\frac{1}{10}=\frac{-3-2}{2s}\Rightarrow s=\frac{-50}{2}=-25\,cm$$

En las opciones de la cuestión no aparece el signo menos, se indica “distancia objeto” y asumimos que hace referencia al módulo.

Problema 1. Si la piedrecita (que asumimos puntual) es lanzada con velocidad inicial horizontal, describirá una trayectoria parabólica. Para que no caiga en la bola de piedra, se trata de que la trayectoria de esa parábola no pase por la bola de piedra, siendo el único punto en común el punto de salida.

Planteamos ecuaciones, tomando como origen de coordenadas el centro de la esfera, eje x horizontal y eje y vertical (el punto de salida será x=0, y=0,15 m)

Ecuación trayectoria de la piedrecita:

Eje x: x=vt

Eje y: $y=0{,}15+\frac{1}{2}(-9{,}81)t^2$

Trayectoria: $y=0{,}15+\frac{1}{2}(-9{,}81)\,x^2/v^2$

Ecuación contorno de la esfera: $x^2+y^2=0{,}15^2$

Igualando ambas, y expresando el resultado final con 3 cifras significativas (las que tienen los datos 30,0 y 9,81)

$$x^2+\left(0{,}15-4{,}905\frac{x^2}{v^2}\right)^2=0{,}0225$$

$$x^2+0{,}0225-1{,}4715\frac{x^2}{v^2}+24{,}059025\frac{x^4}{v^4}=0{,}0225$$

$$x^2\left(1-\frac{1{,}4715}{v^2}+24{,}059025\frac{x^2}{v^4}\right)=0$$

Además de la solución x=0 ya conocida, puede haber una solución para el segundo término en función del valor de v

$x^2=v^4\cdot\frac{\left(\frac{1{,}4715}{v^2}-1\right)}{24{,}059025}$ Para que no tenga solución $\frac{1{,}4715}{v^2}-1<0\Rightarrow v^2>1{,}4715\Rightarrow v>1{,}21\,m/s$

Problema 2.

Realizamos los cálculos teniendo en cuenta las cifras significativas de los datos del enunciado.
Como al comenzar a oscilar la elongación es máxima, podríamos plantear como ecuación del movimiento armónico simple x(t')=Acos(ωt'), de modo que para t'=0, fuese x=A. Sin embargo se nos indica que para t=0, $x=2{,}0\cdot10^{-2}$ m, luego podemos plantear $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ conde $t=t'+t_0$ de modo que cuando t=0 se tiene $t'=-t_0$, siendo t_0 el tiempo que ha tardado en avanzar desde x=10,0 cm hasta x=2,0 cm. La cantidad $-\omega t_0$ la podemos ver también como el desfase inicial, φ_0 en la expresión $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

$$x(t'=-t_0)=2{,}0\cdot10^{-2}=1{,}00\cdot10^{-1}\cos\left(\frac{2\pi}{1{,}50\cdot10^1}(-t_0)\right)\Rightarrow t_0\approx-3{,}27\,s\,,\phi_0\approx-1{,}37\,rad$$

En todo momento podemos plantear usando la ley de Hooke y la segunda ley de Newton que ma=-Kx, luego siendo t= 2,0 s. (Planteamos directamente $a=-\omega^2x$, sin necesidad de calcular antes K; realmente el dato de la masa del enunciado no lo utilizamos)

$$a(t)=\frac{-K}{m}A\cdot\cos(\omega t+\phi_0)=-\omega^2A\cdot\cos(\omega t+\phi_0)$$

$$a(t=2{,}0\,s)=-\left(\frac{2\pi}{1{,}50\cdot10^1}\right)^2\cdot1{,}00\cdot10^{-1}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{1{,}50\cdot10^1}2-1{,}37\right)=-0{,}0151\,m/s^2=-1{,}51\,cm/s^2$$

La aceleración es negativa, tiene el mismo sentido que la fuerza, la elongación es positiva y la fuerza recuperadora intenta llevar a la partícula al equilibrio, y está dirigida hacia x negativas.

Problema 3. Se podría pensar que dado que en en equilibrio en la carga de cada una se distribuye de manera uniforme en su superficie, al conectar las esferas con un conductor de capacidad despreciable, éste no retiene carga, y la carga se distribuye entre ambas, y en el nuevo equilibrio ambas se encuentran al mismo potencial, planteando capacidades y el problema parece similar a la cuestión 11, pero hay una diferencia fundamental: ahora las esferas son concéntricas.
Aplicando Gauss con una superficie gaussiana esférica interior a la esfera exterior podemos razonar que la carga interna es nula, al igual que si fuera un conductor macizo, el conductor que une ambas esferas conductoras permite movilidad de carga: si la carga interna no fuese nula, habría campo y por lo tanto desplazamiento de cargas a través del conductor que una la esfera interior y exterior, por lo que no sería una situación estática
Al ser problema aquí sí hubiera tiempo sí habría que deducir la expresión de la capacidad de una esfera, pero la aplicamos directamente $C=4\pi\varepsilon_0R$, y C=Q/V, planteamos asumiendo carga positiva total 6 nC

Aunque no es dato del enunciado usamos la constante de Coulomb $K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\cdot10^9\,N\,m^2C^{-2}$

$$V=\frac{Q}{C}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R}=K\frac{Q}{R}=9\cdot10^9\cdot\frac{6\cdot10^{-9}}{0{,}04}=\frac{36}{0{,}04}=900\,V$$

El enunciado pide el potencial en la superficie de menor radio, y el potencial es el mismo en todo el “interior” de la esfera mayor, por lo que es de 900 V

Problema experimental 1.

Aunque se habla de difracción/interferencia, se dan las expresiones e incertidumbres y se trata de un problema de cálculo de propagación de error.
θ=21º 6' = 21,1º; Δθ= 2'=0,03º
$N=600\text{ mm}^{-1} = 6{,}00\cdot10^5\text{ m}^{-1}$ $\Delta N=1\text{ mm}^{-1} = 1000\text{ m}^{-1}$

$$\lambda=d\,sen\,\theta=\frac{sen\,\theta}{N}=\frac{sen(21,1)}{6\cdot 10^5}\approx 6\cdot 10^{-7}m=6000\,\mathring{A}$$

$$d\lambda=\sqrt{(\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}d\theta)^2+(\frac{\partial\lambda}{\partial N}dN)^2}\Rightarrow\Delta\lambda=\sqrt{(\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\Delta\theta)^2+(\frac{\partial\lambda}{\partial N}\Delta)^2}$$

$$\Delta\lambda=\sqrt{(\frac{\cos\theta}{N}\Delta\theta)^2+(\frac{-sen\,\theta}{N^2}\Delta N)^2}\Rightarrow\Delta\lambda=\sqrt{(\frac{\cos(21,1)}{6,00\cdot 10^5}3\cdot 10^{-2})^2+(\frac{-sen(21,1)}{(6,00\cdot 10^5)^2}1\cdot 10^{-3})^2}$$

$$\Delta\lambda=4,9976...\cdot 10^{-8}m$$

Utilizando una única cifra significativa para el error $\Delta\lambda=5\cdot 10^{-8}m=500\,\mathring{A}$

El valor será $\lambda=6000\pm 500\,\mathring{A}$

Problema experimental 2.

a) Se nos pide una regresión lineal de la ecuación con la que obtener g $T=2\pi(\frac{L}{g})^{1/2}$

Se nos dan medidas de L y T, hay que hacer algún tipo de "manipulación" matemática para llegar a la ecuación de una recta, que tiene el aspecto y=ax+b. No hay una regla fijo para hacerlo, se trata de ver cada caso, y en este caso en concreto, si expresamos L en función de T, tenemos

$$L=\frac{g}{4\pi^2}T^2$$

Se ve que es la ecuación de una recta y=ax+b donde y=L, x =T^2, a=$g/4\pi^2$ (es la pendiente de la recta) y b=0 (ordenada en el origen). Calculando la pendiente mediante regresión lineal podremos obtener el valor de g.

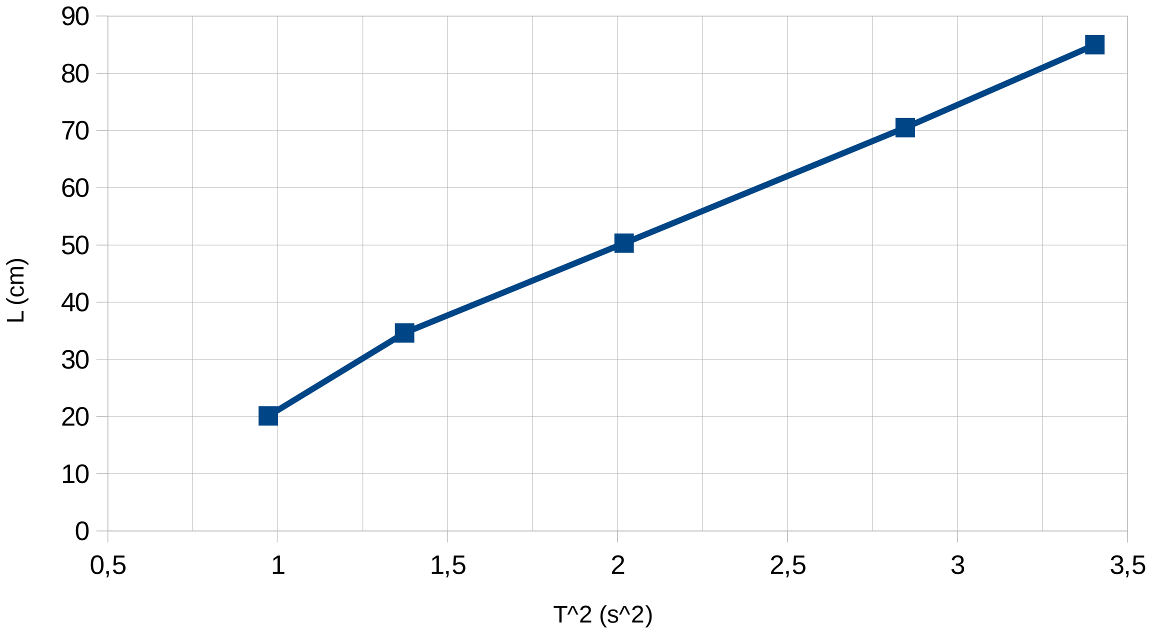
b) Calculamos los valores de T^2 a partir de los datos dados.

Enunciado indica que se mide el tiempo para 40 oscilaciones, pero también se indica "una vez calculados los valores medios del periodo para cada longitud", por lo que puede surgir la duda de si el valor de T proporcionado requiere o no dividir por 40. Podemos sustituir en la expresión el valor de g=9,81 para una longitud y comprobar que no es necesario dividir por 40.

En el resultado de la operación mantenemos el mismo número de cifras significativas que el dato inicial.

L(cm)	85,0	70,5	50,3	34,6	20,1
T(s)	1,845	1,687	1,421	1,172	0,986
T^2 (s^2)	3,404	2,846	2,019	1,374	0,972

Representamos y vemos que es aproximadamente una recta (**en el enunciado se indica "en papel milimetrado"**)



c) Realizamos la regresión lineal (ver comentarios generales en resolución de problema experimental 2013)
http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+{{3.404%2C85.0}%2C{2.846%2C70.5}%2C{2.019%2C50.3}%2C{1.374%2C34.6}%2C{0.972%2C20.1}}

Vemos que es una recta que aproximadamente pasa por el origen, y cuyo valor de pendiente es 26,0017=g/4π²

fit	data	{{3.404, 85.}, {2.846, 70.5}, {2.019, 50.3}, {1.374, 34.6}, {0.972, 20.1}}
	model	linear function

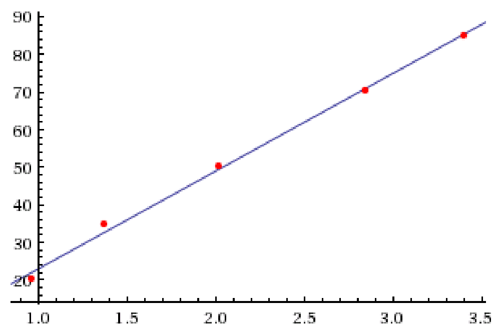
Least-squares best fit:

$26.0017\,x - 3.10155$

Fit diagnostics:

AIC	BIC	R^2	adjusted R^2
23.313	22.1413	0.99661	0.99548

Plot of the least-squares fit:



Por lo que tenemos
g=1026,5... cm/s²
(relativamente cercano al valor de que podríamos esperar de 981 cm/s²)
Inicialmente tomamos 3 cifras significativas, que es el número menor de cifras significativas que tienen las medidas, y podríamos indicar 1,03·10³ cm/s².
Como el enunciado pide calcular g con su incertidumbre, podemos aprovechar la representación gráfica. Reutilizando la idea indicada en la solución de Aragón 2011:
"Cuando se quiere hacer una estimación "manual" de la incertidumbre de una pendiente, normalmente se trazan las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a la serie de puntos experimentales y se obtiene la incertidumbre como $\Delta p=\frac{1}{2}(p_{máx}-p_{mín})$ "

Viendo la gráfica tomamos pendiente máxima entre los dos primeros puntos, y pendiente mínima entre el segundo punto y el punto 3.
$p_{máx}$=(34,6-20,1)/(1,374-0,972)=36 cm/s²
$p_{mín}$=(50,3-34,6)/(2,019-1,374)=24 cm/s²

$$\Delta p=\frac{1}{2}(36-24)=6\,cm/s^2$$

Por lo tanto el error en g será

$$\Delta g=6\cdot 4\cdot\pi^2=237\,cm/s^2$$

Indicamos el error con una única cifra significativa y llegamos a
g=1000 ±200 cm/s² , intervalo que incluye el valor que podríamos esperar de 981 cm/s².

Madrid 2013

1. Respuesta c) 1140. Si la velocidad es constante, la fuerza neta es nula, luego la fuerza de rozamiento es igual a la fuerza que actúa. Como para fuerza constante W=F·d=3800·300=1,14·10⁶ J = 1140 kJ

2. Respuesta d) 100 keV. Si la $m_p=400m_e$ y vp=v_e/2, $E_{cp}=\frac{1}{2}m_p v_p^2=\frac{1}{2}400\,m_e(\frac{v_e^2}{2^2})=100\,E_{ce}$

3. Respuesta b) m/M. No se indica si hay pérdidas, asumimos que no las hay. Por la conservación del momento mv=Mv', luego v'=(m/M)v, luego $E_{c'}=\frac{1}{2}M\,v'^2=\frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}v^2=\frac{1}{2}m\,v^2\frac{m}{M}=\frac{m}{M}E_c$

4. Respuesta d) 5/2. La velocidad mínima posible para no caerse implica que la fuerza del peso es la única centrípeta en el punto más alto, $mg=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow v^2=\frac{g}{R}$ No se indica si hay pérdidas, asumimos que no las hay, y aplicamos conservación de energía mecánica. Igualando energía potencial en el punto inicial y suma de potencial y cinética en lo alto del bucle $\cancel{mg}\,h=\cancel{mg}\,2R+\frac{1}{2}\frac{\cancel{mg}}{R}\Rightarrow h=5\frac{R}{2}$

5. Respuesta d) 4/3 (GπRρ). $m=\rho\cdot V=\rho\frac{4}{3}\pi R^3$ $g=\frac{GM}{R^2}=G\rho\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{R^2}=\frac{4}{3}(G\pi R\rho)$

6. Respuesta c) x/√2. $g=\frac{GM}{R^2}\Rightarrow\frac{g_0}{g_x}=\frac{R_x^2}{R_0^2}\Rightarrow\frac{10,0}{5,0}=\frac{x^2}{R_0^2}\Rightarrow x=\sqrt{2}\,R_0\Rightarrow R_0=\frac{x}{\sqrt{2}}$
Ojo: enunciado indica "se encuentra a una distancia x de su centro", luego es distancia total, no confundir

con la altura respecto al radio en superficie R_0.

7. Respuesta d) 2√2 v. $v_e=\sqrt{2G\frac{M}{R}}=\sqrt{2G\rho(4/3)\pi\frac{R^3}{R}}=\sqrt{\frac{8}{3}G\rho\pi R^2}=K'R\sqrt{\rho}$

$v_{e'}=K'2R\sqrt{2\rho}=2\sqrt{2}v_e$

8. Respuesta e) 10. Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita tenemos que

$\frac{GMm}{R^2}=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R}$ $\frac{v_{Ganímedes}}{v_{Luna}}=\sqrt{\frac{M_{Júpiter}}{M_{Tierra}}\cdot\frac{R_{órbital\,Luna}}{R_{órbita\,Ganímedes}}}=\sqrt{\frac{300}{2{,}8}}\approx 10$

9. Respuesta d) 3,0. La velocidad máxima es Aω=0,12·2,5=0,30 m/s

10. Respuesta a) ½(λa^2). Se trata de un movimiento armónico simple, y la energía total es igual a la energía potencial máxima, ½Kx^2, y en este caso la constante recuperadora es λ, y para x=a que es la elongación máxima se tiene $E_{máx}=E_{total}=\frac{1}{2}\lambda a^2$

11. Respuesta c) 150. $\Delta\phi=k\Delta x=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\Rightarrow\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 0{,}050\Rightarrow\lambda=0{,}3\,m$

$v=\lambda f=0{,}3\cdot 500=150\,m/s$

12. Respuesta B. Al estar situada la imagen a una distancia inferior al foco, la imagen es virtual, y la línea B de datos es la única que cumple $A=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\Rightarrow 4=\frac{24}{6}=\frac{20}{5}$

13. Respuesta c) 500 W. Corriente del generador P=VI → $100\cdot10^3=10\cdot10^3\cdot I$ → I=10 A. $P=R\cdot I^2=5\cdot10^2=500$ W

14. Respuesta d) 100. El trabajo realizado en un campo conservativo depende solamente de la diferencia de potencial, no del camino, por lo que no afecta el ángulo. $W=qV=10^{-6}\cdot100=10\text{-}4$ J = 100 μJ

15. Respuesta d) 9,0·10-7. Para la fuerza ejercida entre dos conductores rectilíneos separados una distancia d se llega a la expresión $F_{12}=\mu_0\frac{I_1I_2}{2\pi d}$. Con nuevos datos $F_{12'}=\mu_0\frac{I_{1'}I_{2'}}{2\pi d'}=F_{12}\cdot\frac{3\cdot3}{2}=4{,}5F_{12}$

16. Respuesta b) 2Vq/d. Si las placas están a potenciales -V y +V, la diferencia de potencial entre ellas es 2V, y E=2V/d. La fuerza eléctrica será F=qE=q2V/d, que será la que debe compensar el peso.

17. Respuesta a) 4. El campo creado por el hilo a una distancia de 40 cm será

$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}=\frac{4\pi 10^{-7}\cdot 2}{2\pi 0{,}4}=10^{-6}T$. Como la espira es pequeña, asumimos el campo uniforme en toda ella.

Comentario: espira coplanaria hace referencia a que no es un solenoide en el que hay que considerar su longitud, todas las espiras están muy juntas, y la superficie a considerar es S=N·s.

El flujo será $\Phi=B\cdot S=B\cdot N\cdot s=B\cdot 100\cdot\pi\cdot(\frac{0{,}05}{2})^2$, y la fuerza electromotriz

$$\varepsilon=\frac{-d\Phi}{dt}=-S\frac{dB}{dt}=-S\cdot\frac{\Delta B}{\Delta t}=-100\cdot\pi\cdot(\frac{0{,}05}{2})^2\frac{(0-10^{-6})}{0{,}050}=3{,}9\cdot10^{-6}V\approx 4\mu V$$

Comentario: el flujo en el resto de la espira es menor, hemos tomado el valor máximo de campo en la espira.

18. Respuesta a) 0. El campo magnético creado por cada bobina en su centro es $B=\frac{\mu N I}{2d}$. Como ambas bobinas son coplanarias, con mismo número de espiras, y tienen sentidos opuestos, el campo total en el centro utilizando el principio de superposición será $B=\frac{\mu}{2}(\frac{3}{0{,}05}-\frac{6}{0{,}1})=0$

PROBLEMA 1.

a) $\rho=\frac{m}{V}$

Pasamos a unidades del Sistema internacional tal y como se pide:
Masa: 4 cifras significativas, se indica balanza electrónica, la precisión es de centésimas de gramo, así que podríamos indicar que es 36,23 ± 0,01 g. En unidades SI $m=3{,}623\cdot10^{-2}\pm10^{-5}$ kg
Diámetro: 2 cifras significativas, se indica regla graduada en milímetros, la precisión la tomamos como de 1 milímetro (se podría plantear tomar medio milímetro), 2,1 ± 0,1 cm = 0,021 ± 0,001 m.
En ambos casos la incertidumbre se plantea con una única cifra significativa.

Volumen $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

Operamos expresando en notación científica (no imprescindible), y el resultado no puede tener más cifras significativas que los datos de partida, por lo que nos quedamos con dos.

Densidad $\rho=\frac{3{,}623\cdot 10^{-2}}{\frac{4}{3}\pi(\frac{0{,}021}{2})^3}=7471{,}56927530854294124608\Rightarrow\rho=7{,}5\cdot 10^3\frac{kg}{m^3}$

b) Si utilizamos la expresión final de la densidad $\rho=\frac{3}{4}\frac{2^3}{\pi}\frac{m}{D^3}=\frac{6}{\pi}\frac{m}{D^3}$

Utilizamos el error absoluto máximo, considerando medidas independientes

$$d\rho=\sqrt{(\frac{\partial\rho}{\partial m}dm)^2+(\frac{\partial\rho}{\partial D}dD)^2}\Rightarrow\Delta\rho=\sqrt{(\frac{\partial\rho}{\partial m}\Delta m)^2+(\frac{\partial\rho}{\partial D}\Delta D)^2}$$

$$\Delta\rho=\sqrt{(\frac{6}{\pi}\frac{\Delta m}{D^3})^2+(\frac{6}{\pi}m\frac{(-3)}{D^4}\Delta D)^2}\Rightarrow\Delta\rho=\sqrt{(\frac{6}{\pi}\frac{10^{-5}}{0{,}021^3})^2+(\frac{6}{\pi}3{,}621\cdot 10^{-2}\frac{(-3)}{0{,}021^4}0{,}001)^2}$$

$$\Delta\rho=1066{,}78\frac{kg}{m^3}$$

Utilizando una única cifra significativa para el error $\Delta\rho=10^3\frac{kg}{m^3}\Rightarrow\rho=7\cdot 10^3\pm 10^3\frac{kg}{m^3}$

Si hubiéramos aproximado la expresión, el resultado es muy similar

$$d\rho=\frac{\partial\rho}{\partial m}dm+\frac{\partial V}{\partial D}dD\Rightarrow\Delta\rho=\left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|\Delta m+\left|\frac{\partial V}{\partial D}\right|\Delta D$$

$$\Delta\rho=\frac{6}{\pi}\frac{\Delta m}{D^3}+\frac{6}{\pi}m\frac{3}{D^4}\Delta D\Rightarrow\Delta\rho=\frac{6}{\pi}\frac{10^{-5}}{0{,}021^3}+\frac{6}{\pi}3{,}621\cdot 10^{-2}\frac{3}{0{,}021^4}0{,}001$$

$$\Delta\rho=1068{,}84\frac{kg}{m^3}$$

PROBLEMA 2.

a) Las medidas de tiempo tienen 2 cifras significativas, la precisión es de décimas de segundo, , así que podríamos indicar que son 6,3 ± 0,1 s.

Las medidas de tiempo son independientes, el valor más probable es la media aritmética

$$\bar{t}=\frac{\Sigma t_i}{n}=\frac{6{,}3+6{,}4+6{,}4+6{,}4+6{,}5+6{,}5+6{,}6+6{,}6+6{,}6+6{,}7}{10}=6{,}5\,s$$

El error más probable es el error cuadrático medio

$$\Delta t=\sqrt{\frac{\Sigma(t_i-\bar{t})^2}{n(n-1)}}$$

$$\Delta t=\sqrt{\frac{(6{,}3-6{,}5)^2+(6{,}4-6{,}5)^2+(6{,}4-6{,}5)^2+(6{,}4-6{,}5)^2+(6{,}5-6{,}5)^2+(6{,}5-6{,}5)^2+(6{,}6-6{,}5)^2+(6{,}6-6{,}5)^2+(6{,}6-6{,}5)^2+(6{,}7-6{,}5)^2}{10\cdot 9}}$$

$$\Delta t=0{,}03944053188733077362\Rightarrow\Delta t=0{,}04\,s$$

Como el error cuadrático medio es menor que el error instrumental asociado a la precisión de las medidas, de modo que tomamos como resultado t=6,5 ± 0,1 s

b) Realizamos los cálculos de propagación de error. Se trata de un MRUA, y necesitamos una expresión que realacione aceleración, distancia recorrida (asumimos velocidad inicial nula) y tiempo.

$L=½\,a\,t^2\rightarrow a=2L/t^2=2\cdot 1{,}18/6{,}5^2=0{,}055857988..\ m/s^2$.

Utilizamos el error absoluto máximo, considerando medidas independientes

$$da=\sqrt{(\frac{\partial a}{\partial L}dL)^2+(\frac{\partial a}{\partial t}dt)^2}\Rightarrow\Delta a=\sqrt{(\frac{\partial a}{\partial L}\Delta L)^2+(\frac{\partial a}{\partial t}\Delta t)^2}$$

$$\Delta a=\sqrt{(\frac{2}{t^2}\Delta L)^2+(2L\frac{(-2)}{t^3}\Delta t)^2}\Rightarrow\Delta a=\sqrt{(\frac{2}{6{,}5^2}0{,}02)^2+(2\cdot 1{,}18\cdot\frac{2}{6{,}5^3}0{,}1)^2}$$

$$\Delta a=0{,}00196221\Rightarrow\Delta a=0{,}002\,m/s^2$$

Utilizando una única cifra significativa para el error a=0,056± 0,002 m/s^2

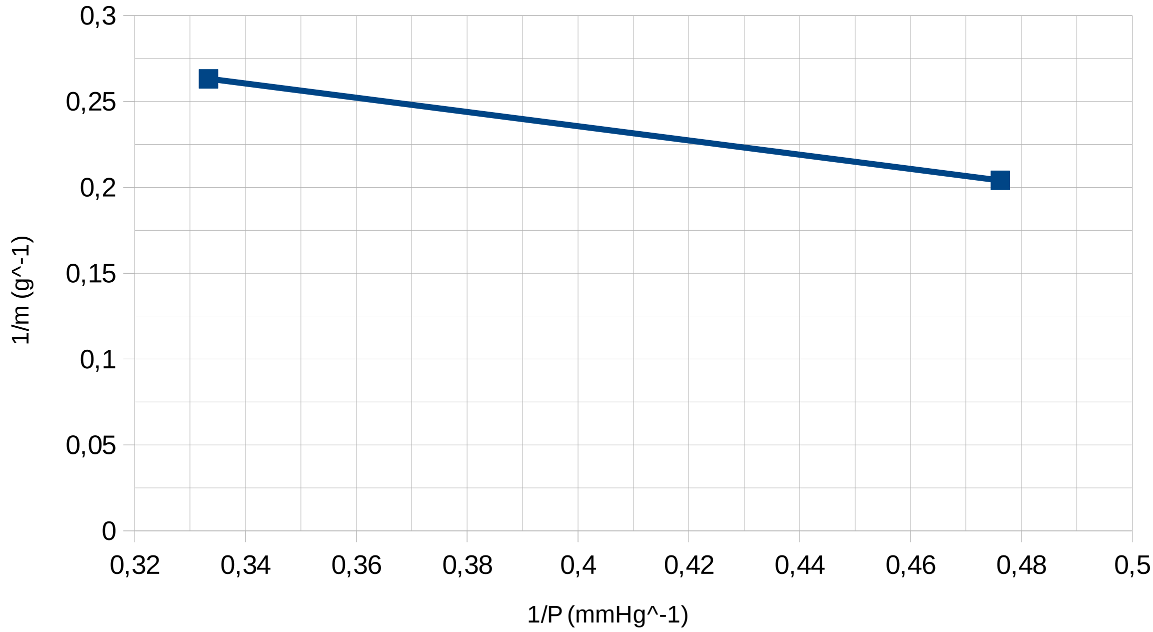
PROBLEMA 3.

a) Se nos pide una representación lineal de la ecuación $m=\frac{kbP}{1+bP}$

Hay que hacer algún tipo de "manipulación" matemática para llegar a la ecuación de una recta, que tiene el aspecto y=ax+b. No hay una regla fijo para hacerlo, se trata de ver cada caso, y en este caso en concreto, si invertimos ambos lados de la igualdad llegamos a $\frac{1}{m}=\frac{1+bP}{kbP}=\frac{1}{kb}\frac{1}{P}+\frac{1}{k}$ que es la ecuación de una recta y=ax+b donde y=1/m, x = 1/P, a=1/kb (es la pendiente de la recta) y b=1/k (ordenada en el origen)
Calculamos los valores de 1/P y de 1/m a partir de los datos dados.
En el resultado de la operación mantenemos el mismo número de cifras significativas que el dato inicial.

P(mmHg)	2,1	4,9	10,4	21,0	29,2	45,0
m(g)	3,0	3,8	4,3	4,7	4,8	4,9
1/P ($mmHg^{-1}$)	0,48	0,20	0,0962	0,0476	0,0342	0,0222
1/m (g^{-1})	0,33	0,26	0,233	0,213	0,208	0,204

Representamos y vemos que es aproximadamente una recta



b) Cualitativamente, dentro de cierto margen de error experimental, vemos que es una recta luego sí se cumple la ecuación de Langmuir, pero se pide demostrar mediante un análisis de regresión lineal, que supone buscar la línea recta que mejor se ajusta a los datos experimentales, con una indicación de correlación que indica en qué medida se aproximan a una recta.
La manipulación de datos se suele hacer informáticamente, y por ejemplo se incluye el resultado obtenido con wolframalpha en su versión web gratuita (resultado accesible en esta url:
http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+

{{0.48%2C+0.33}%2C{0.20%2C0.26}%2C{0.0962%2C0.233}%2C{0.0476%2C0.213}%2C{0.0342%2C0.208}%2C{0.0222%2C0.204}})
Se aprecia que se tiene un valor de correlación R muy próximo a 1, luego es muy correcto asumir el ajuste a una recta.
Pero lo tenemos que hacer manualmente, tal y como se podría hacer durante la prueba
¿Cómo hacerlo? En la solución de la fase local de Aragón de 2011, se da el ajuste por realizado sin incluir los pasos detallados que se harían en el examen, ya que se dice por ejemplo *"Un ajuste analítico, empleando el método de "mínimos cuadrados", conduce a... Los puntos se ajustan muy bien a una línea recta de pendiente p = 1,97 (calculada por "mínimos cuadrados")"* pero no se aportan los cálculos, en cierto modo se asume que se sabe cómo hacer.
Comento dos ideas sobre cómo estimar esa recta y=ax+b manualmente y la calidad de la estimación, que se pueden hacer en un tiempo razonable manualmente:
A. Con una calculadora convencional, que no tiene tiene funciones asociadas a análisis de datos, se puede hacer una estimación de la pendiente cogiendo dos puntos alejados, por ejemplo el primero y el tercero (no cogemos el último ya que se aprecia que hay puntos por encima de la esa recta, y así hacemos que la recta esté "más cerca de todos los puntos"), con lo que se tendría que la pendiente es
$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0{,}33-0{,}213}{0{,}48-0{,}0476}\approx 0{,}271$ (resultado similar al obtenido informáticamente). Para calcular el valor de b se puede usar esa pendiente y un punto alejado del origen (0,48; 0,0222)
y=ax+b → 0,33=0,271·0,48+b → b=0,2 (resultado similar al obtenido informáticamente)
Para realizar el análisis de regresión lineal, podríamos calcular los valores de y estimados que están asociados a cada valor de x según la ecuación obtenida de esta recta, y calcular las diferencias con los valores obtenidos de y, calculando $r=\frac{\Sigma(x_i-x)(y_i-y)}{\sqrt{\Sigma(x_i-x)^2}\sqrt{\Sigma(y_i-y)^2}}$
B. Con una calculadora con funciones estadísticas (por ejemplo CASIO fx-82MS que es muy habitual).
Se usa modo regresión (indicado con REG): [mode][3]
Borramos inicialmente la memoria estadística [shift][CLR][1][=]
Introducimos datos con <datos x> ['] <datos y> [DT] (la tecla DT es M+ en modo REG, cada vez que introducimos datos nos indica en pantalla n, el número de parejas de datos introducidas)
Obtenemos el coeficiente de correlación R con [shift][S-VAR][>][>][3]
La recta se nombra como y=Bx+A, y se pueden obtener los valores:
Valor de pendiente B: [shift][S-VAR][>][>][2] = 0,273
Valor de ordenada en origen A: [shift][S-VAR][>][>][1] = 0,2
c) El valor máximo de la masa absorbida es k (que en la ecuación es el valor asociado a P infinita), y en la gráfica y ecuación de la recta el valor de 1/k es el valor de la ordenada en el origen, que es el valor asociado a 1/P igual a cero.
Como ya hemos obtenido la ecuación de la recta (por centrarse en cálculo numérico no hemos puesto unidades en las constantes, aunque las tendrían), el valor de 1/k=0,20 (g^{-1}), luego el valor máximo de masa absorbida sería 5,0 g. No se pide la estimación del error, que requeriría la estimación del error en la regresión lineal, que tiene su propia expresión
Referencias:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/unidades/medidas/medidas.htm
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/regresion/regresion.htm

Madrid 2012

Enunciado indica "Tómese, donde se necesite, g = 9,81 m s^{-2}"
1. Respuesta d). Tomamos referencia en el punto de partida del policía, y t=0 cuando inicia el movimiento.
$s_{policía}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 15^2+3\cdot 15\cdot(t-15)$ $s_{coche}=\frac{108}{3{,}6}\cdot t$ En el encuentro coinciden ambos, igualando
$$s_{policía}=s_{coche}\Rightarrow 337{,}5+45t-675=30t\Rightarrow 15t=337{,}5\Rightarrow t=\frac{337{,}5}{15}=22{,}5\,s$$
2. Respuesta c). Planteamos la velocidad del barco 3,33 m/s como la hipotenusa de un triángulo donde la velocidad transversal son 1,11 m/s , y el otro cateto sería la componente de velocidad en la dirección hacia el puerto, que valdrá: 3,33·cos(arcsen(1,11/3,33))=3,1396 m/s. El tiempo en recorrer los 3000 m será 3000/3,1396 = 956 s
3. Respuesta a). No hay rozamiento, luego la única fuerza centrípeta que curva la trayectoria de la bola es la

tensión de la cuerda, y esa tensión máxima estará asociado al radio mínimo. Igualando $F_c = T = m\frac{v^2}{R}$

Necesitamos conocer la velocidad de la bola en esa circunferencia de radio mínimo: será la asociada a la situación inicial, ya que al no haber rozamiento se mantendrá, y será $v = \omega R = 2\cdot\pi\cdot 1 = 2\pi\, m/s$

Sustituyendo $105 = 0{,}5\cdot\frac{(2\cdot\pi)^2}{R} \Rightarrow R = \frac{2\cdot\pi^2}{105} \approx 0{,}19\, m$ El valor más cercano es 21 cm.

4. Respuesta a. Tomamos referencia con altura cero en el punto donde el motor empieza a actuar, y la altura de 91,7 m la consideramos desde ese punto, por lo que sube 66,7 m una vez que el motor deja de actuar, pero el rozamiento con el aire está actuando los 91,7 m.
Nombrando dos puntos B (punto más alto) y A (en referencia antes de que actuase el motor) se puede plantear de dos maneras equivalentes:
-Por teorema de las fuerzas vivas, el trabajo total es igual a la variación de la energía cinética
Trabajo realizado por la fuerza del motor es W=F·Δx=9·25=225 J.
Trabajo realizado por el peso W=F·Δx·cos(180º)=-0,2·9,81·91,7=-179,9 J
Trabajo realizado por el rozamiento W=F·Δx·cos(180º)=- F·91,7 J
225-179,9-F·91,7=0 → F=0,49 N
-Por conservación de energía, la variación de energía mecánica es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas, que son la fuerza del motor y la del rozamiento
B: Ep=179,9 J, y con Ec=0
A: Ep=0 y con Ec=0
179,9=225-F·91,7 → F=0,49 N

5. Respuesta c. Dado que el momento angular es constante podemos plantear

$$r_a \cancel{m} v_a = r_p \cancel{m} v_p \Rightarrow \frac{v_a}{v_p} = \frac{r_p}{r_a} = \frac{7{,}2}{0{,}6} = 12$$

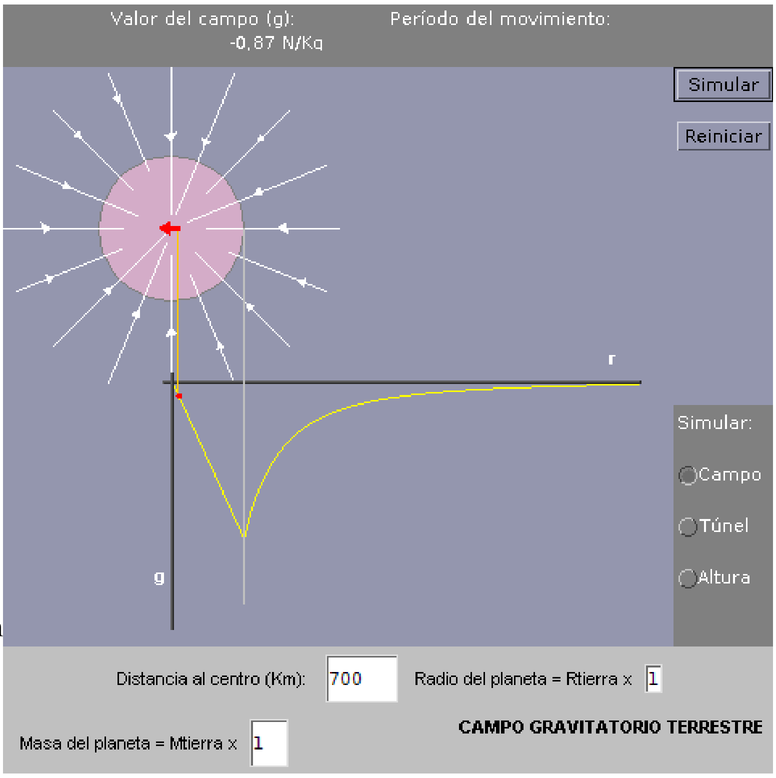
$$\frac{E_{ca}}{E_{cp}} = \frac{\frac{1}{2}m v_a^2}{\frac{1}{2}m v_p^2} = \left(\frac{v_a}{v_p}\right)^2 = 12^2 = 144 \quad \frac{E_{pa}}{E_{pp}} = \frac{-G\frac{Mm}{r_a}}{-G\frac{Mm}{r_p}} = \frac{r_p}{r_a} = 12 \quad \frac{E_{ca}/E_{cp}}{E_{pa}/E_{pp}} = \frac{144}{12} = 12$$

6. Respuesta b. (Ver resolución de problema 1 de olimpiada Madrid 2015) h=(2/3)·R=2·15/3=10 m

7. ***"Respuesta d" (ver comentarios)***. Si utilizamos la ley de gravitación universal, recordando los valores de G y de la masa de la Tierra (que no eran datos, el único dato es g=9,81 m/s^2)

$$Peso = F = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow 1 = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot\frac{1}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}} = 2\cdot 10^7\, m$$

Lo que parece inconsistente e indicaría que ninguna respuesta de las cuatro opciones es válida, pero hay que pensar que hemos usado una expresión que es válida para el exterior de la Tierra. Recordando el valor del radio de la Tierra, 6,37·10^6 m, vemos que las cuatro opciones son menores. En el interior de la Tierra, asumiendo densidad uniforme y una esfera perfecta, se puede comprobar que el campo varía linealmente desde 0 en el centro hasta el valor de 9,81 m/s^2 en la superficie, por lo que dado que P=m·g, vemos que para que peso y masa sean numéricamente 1, necesitamos un valor de g=1 m/s^2, aunque en este caso es más claro utilizar las unidades equivalentes alternativas 1 N/kg. Como la variación es lineal podemos plantear una proporción y tenemos 6,37·10^6/9,81=x/1 → x = 6,5·10^5 m = 650 km.



El valor no coincide con ninguno de los 4 propuestos, pero el valor más próximo es

el d, que es el mayor, aunque hay una diferencia de un orden de magnitud.
Se incluye una imagen de
http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales_didacticos/campo_gravitatorio_prob/applet2.html
para validar que aproximadamente la solución están cercana a los 700 km.
8. Respuesta d. El trabajo está asociado a la diferencia de energía potencial, y como es el trabajo realizado por el ascensor el sentido es el opuesto al trabajo realizado por la fuerza de la gravedad.

$$W_{A\rightarrow B}=E_{pB}-E_{pA}=\frac{-GMm}{r_B}-\left(\frac{-GMm}{r_A}\right)=GMm\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

Si la altura es R, la distancia es 2R

$$W_{A\rightarrow B(R,M)}=GMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{2R}\right)=GMm\frac{(2-1)}{2R}=\frac{GMm}{2R}$$

$$W_{A\rightarrow C(3R/2,M)}=GMm\left(\frac{1}{3R/2}-\frac{1}{R_C}\right)$$

Igualando

$$\frac{GMm}{2R}=GMm\left(\frac{1}{3R/2}-\frac{1}{R_C}\right)\Rightarrow\frac{1}{2R}-\frac{2}{3R}=\frac{-1}{R_C}\Rightarrow\frac{(3-4)}{6R}=\frac{-1}{R_C}\Rightarrow R_C=6R$$

Si la distancia es 6R, la altura es 6R-3R/2=(12R-3R)/2=9R/2
9. ***"Respuesta d" (ver comentarios)***. El paquete al caer y chocar con el náufrago+tablón queda unido formado un único sistema paquete+náufrago+tablón que se mueven juntos, por lo que el planteamiento tiene que asumir un choque perfectamente inelástico, y tenemos que considerar conservación de momento lineal, no hay conservación de energía cinética en el choque.
El paquete aportará cierta energía cinética al tablón que lo empujará hacia abajo (junto con el náufrago y el propio paquete), hasta que tras descender en el agua se detenga. La altura de caída del paquete que es lo que tenemos que averiguar está relacionada con la velocidad con la que el paquete llega al tablón y con la energía cinética que transfiere al tablón (vía conservación de momento lineal, ya que es un choque inelástico y habrá ciertas pérdidas).
Para calcular qué energía debe aportar el choque del paquete calculamos la variación de energía mecánica entre las dos posiciones del tablón. Podemos plantear que la E_m está asociada a E_p, tanto gravitatoria como E_p "de empuje", ya que el cuerpo al sumergirlo tiene una energía asociada a su posición, y podríamos definir una Ep asociada. En cualquier caso se ve que las fuerzas gravitatoria y de empuje son conservativas; almacenan E_p llevando el sistema a una posición que "devuelven" cuando el sistema regresa a esa posición. La E_p gravitatoria aumenta al subir (almacenamos energía al subir un objeto que devuelve cuando cae), y la E_p de empuje aumenta al bajar (almacenamos energía al bajar un objeto en el fluido que devuelve cuando sube).
Tomamos referencia de energía potencial en el punto en el que el sistema está totalmente sumergido con la superficie del tablón coincidiendo con la superficie del agua. El centro de masas (que no calculamos, de lo único que conocemos el volumen es del tablón; el náufrago y el paquete lo tendríamos que modelar puntualmente en la superficie del tablón o a una altura arbitraria) es el punto donde tomamos referencia Ep=0.
Nombramos dos situaciones:
B: En el momento en el que el tablón (unido a náufrago y paquete) se detiene con su superficie coincidiendo con la superficie del agua
$E_c=0$, $E_{pg}=0$, $E_{pempuje}$=(mismo valor que la E_{pg} en la situación A, al no haber pérdidas)
A: Justo tras el impacto (consideramos el paquete ya apoyado en el tablón y contribuye al peso, pero no se ha empezado a mover)
$E_c=0$, $E_{pg}=M_{total}\cdot g\cdot h$, $E_{pempuje}=0$
Para calcular la altura, consideramos que el centro de gravedad del sistema de masas ha bajado la misma altura que baja la cara superior del tablón. Consideramos que antes de caer el paquete el sistema está en equilibrio y el empuje es igual al peso, lo que nos permite calcular qué parte del tablón asoma desde la superficie del agua. Calculamos la masa del tablón, m=d·V=550·3·2·0,5=1650 kg.
(Comentario personal: la masa del tablón parece elevada, y se debe al grosor de 0,5 m, que es un "bloque de madera" más que un tablón)
El peso total del tablón, del náufrago y del paquete es de (1650+80+20)·9,81=17167,5 N.
Llamamos x a la distancia vertical del tablón, en su lado más estrecho, que está sumergida en equilibrio.
$E=V_{desalojado}\cdot d_{fluido}\cdot g \rightarrow$ 17167,5=(3·2·x)·1100·9,81 → x=0,265 m.
Están sumergidos 26,5 cm y sobre el agua 23,5 cm.

Así tenemos que E_{pg}=(1650+80+20)·9,81·0,235=4034,36 J
Em(A)-Em(B)= 4034,36 J
Si igualamos la E_c del náufrago+tablón+paquete que debe aportar el choque del paquete, podemos calcular la velocidad del paquete **si fuera totalmente elástico (como sabemos que es inelástico tendrá que ser un valor mayor de energía del paquete, parte se pierde en calor, y un valor mayor de altura)**
Ec=1/2 $M_{total}\cdot v_{total}^2$; 4034,36=0,5·(1650+80+20)·v^2 =875v^2

$v=\sqrt{\frac{4034,36}{875}}=2,15\,m/s$ Velocidad inicial de náufrago+tablón+paquete

Esa energía cinética la debe aportar el paquete, por lo que que si igualamos la energía mecánica a la energía cinética del paquete (asumimos un choque totalmente inelástico)

4034,36=0,5·20·v^2 ; $v=\sqrt{\frac{4034,36}{10}}=20,09\,m/s$

Como la caída del paquete es un MRUA con la aceleración de la gravedad y velocidad inicial nula, podemos plantear $v^2-v_0^2=2as\Rightarrow s=\frac{v^2}{2a}=\frac{20,09^2}{2\cdot 9,81}=20,6\,m$

La única solución con una altura superior es la d, 23,7 m; el paquete al chocar aportará más energía pero al ser inelástico parte se disipará en calor / se empleará en deformación del paquete.

Comentario: se resuelve por energías y no se utiliza en absoluto el dato de duración del impacto. Vemos cómo sería hacer un planteamiento dinámico usando impulso y momento lineal, pero la solución no se aproxima tanto como en el planteamiento anterior.

Como el tablón+náufrago inicialmente tenían velocidad cero, calculamos la variación de momento (sí usamos valor de velocidad inicial de náufrago + tablón + paquete calculado antes)

$\Delta p=p_{final}-p_{inicial}=(1650+80+20)\cdot 2,15-20\cdot v=3762,5-20v$

Al mismo tiempo la variación de momento lineal es igual al impulso, que depende del tiempo del impacto y de la fuerza aplicada. La fuerza aplicada es la masa del paquete por su aceleración, aceleración que es constante y es la gravedad, por lo que la fuerza es el peso (aunque el paquete lleve velocidad, la fuerza sigue siendo el peso, la contribución de la velocidad se plantea al tratar el momento lineal)

Si el choque es perfectamente inelástico y los cuerpos quedan unidos ¿qué pretende decir el enunciado "Si el impacto dura 0,01 s"? Se puede pensar que es el tiempo que el tablón está bajando y que el paquete lo está "empujando", porque una vez que suba el paquete "ya no es impacto".

$\Delta p=I=F\Delta t\Rightarrow 3742,5-20v=20\cdot 9,81\cdot 0,01\Rightarrow v=\frac{3742,5-20\cdot 9,81\cdot 0,01}{20}=187\,m/s$

Como la caída del paquete es un MRUA con la aceleración de la gravedad y velocidad inicial nula, podemos plantear $v^2-v_0^2=2as\Rightarrow s=\frac{v^2}{2a}=\frac{187^2}{2\cdot 9,81}=1782\,m$

Un valor tan alto es consistente con que una masa tan pequeña tiene que impactar con mucha velocidad para ser capaz de desplazar una masa tan grande.

Ambos resultados no coinciden ya que son planteamientos totalmente distintos, en uno no se utiliza para nada la duración del impacto y el otro se basa precisamente en él.

Viendo la masa tan grande surge pensar de dónde procede: es del tablón, y releyendo los datos del enunciado en modo lógico, un tablón sería de 3 m x 2 m x ***0,05 cm (un grosor de 0,5 m no sería un tablón sino un grueso bloque de madera)****. Si repetimos el planteamiento, la masa del tablón sería de 165 kg, peso 2600 N, 2600=(3·2·x)·1100·9,81 → x=0,04 m, está sumergido 4 cm y sobre el agua 1 cm.*

(165+80+20)·9,81·0,01=26 J, 26=0,5·(165+80+20)·v^2 =132,5v^2 → $v=\sqrt{\frac{26}{132,5}}=0,44\,m/s$

$\Delta p=(165+80+20)\cdot 0,44-20\cdot v=116,6-20v$ $v=\frac{116,6-20\cdot 9,81\cdot 0,01}{20}=5,7\,m/s$

$s=\frac{v^2}{2a}=\frac{5,7^2}{2\cdot 9,81}=1,7\,m$ *No próximo a ninguna de las soluciones propuestas, e irreal para la altura de un helicóptero: a 1,7 ya puestos rescataría al náufrago.*

10. Respuesta b. Al ser adiabático, planteamos que calor cedido por el bloque de aluminio es igual al calor absorbido por el calorímetro y el agua

$$Q_{cedido}=Q_{absorbido}\Rightarrow 300\cdot 0{,}26\cdot(100-T)=(250+50)\cdot 1\cdot(T-12)$$
$$7800-78T=300T-3600\Rightarrow T=\frac{7800+3600}{300+78}=30{,}16\,°C$$

11. ***"Respuesta c" (ver comentarios)***. El trabajo está asociado a la diferencia de energía potencial. Calculamos el potencial en ambos puntos, que llamamos A(4,0; 2,0) y B (0;0), utilizando el principio de superposición:

$$V(A)=V_1(A)+V_2(A)=K\frac{q_1}{r_{1A}}+K\frac{q_2}{r_{2A}}=9\cdot 10^9\left(\frac{8{,}11\cdot 10^{-9}}{4}+\frac{-8{,}11\cdot 10^{-9}}{2}\right)$$
$$V(A)=9\cdot 10^9\frac{(8{,}11\cdot 10^{-9}-2\cdot 8{,}11\cdot 10^{-9})}{4}=-18{,}25\,V$$
$$V(B)=V_1(B)+V_2(B)=K\frac{q_1}{r_{1B}}+K\frac{q_2}{r_{2B}}=-9\cdot 10^9\left(\frac{8{,}11\cdot 10^{-9}}{2}+\frac{-8{,}11\cdot 10^{-9}}{4}\right)$$
$$V(B)=9\cdot 10^9\frac{(2\cdot 8{,}11\cdot 10^{-9}-8{,}11\cdot 10^{-9})}{4}=18{,}25\,V$$
$$W_{A\to B}=-\Delta E_p=-q\Delta V=-q(V(B)-V(A))=-5{,}32\cdot 10^{-9}\cdot(18{,}25-(-18{,}25))=-1{,}94\cdot 10^{-7}\,J$$

Una carga positiva se mueve espontáneamente hacia potenciales menores, y el potencial en B es mayor que en A. El trabajo realizado por el campo es negativo, es en contra del campo, luego se debe realizar externamente al campo", y "el trabajo que hay que realizar externamente para trasladar la carga positiva" sería positivo, ya que lo tendríamos que aportar externamente.

El valor no coincide con ninguno de los 4 propuestos, pero numéricamente se asemeja a las opciones a y c, y entre las 2, optamos por la c, de signo positivo. (Sería correcto si enunciado indicase 5,32 mC)

12. Respuesta c. Si el campo eléctrico es uniforme, podemos plantear $\Delta E_p=qEd$. La pérdida de energía potencial en ese trayecto (el campo va dirigido hacia potenciales menores y la velocidad se indica dirigida en el sentido del campo, por lo que va a transformar en energía cinética) está asociada a la variación de energía potencial, por lo que planteamos (debemos conocer la carga del electrón sin ser dato)

$\Delta E_p=-1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 325\cdot 0{,}154=-8\cdot 10^{-18}$ J

$E_c(B)=E_c(A)+\Delta E_p=1{,}6\cdot 10^{-17}-8\cdot 10^{-18}=8\cdot 10^{-18}$ J. Si lo convertimos a eV (dividiendo por 1,6·10-19), obtenemos una energía de 50 eV.

13. Respuesta a. Dado que la velocidad y el campo forman 90º, podemos expresar el módulo de la fuerza como F=qvB, siendo el B el asociado a un conducto recto indefinido, de módulo $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$

Igualando y sustituyendo

$$F=qv\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\Rightarrow v=\frac{F2\pi d}{q\mu_0 I}=\frac{5{,}0\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot\pi\cdot 10^{-6}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5{,}0}=3{,}125\cdot 10^{-7}\,m/s$$

14. Respuesta c. Si la bobina gira alrededor de uno de sus ejes que es perpendicular al vector campo magnético, podemos plantear el flujo como $\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}_{total}=B\cdot N\cdot S_{espira}\cdot\cos(\omega t)$

$$\omega=50\frac{\cancel{rev}}{s}\cdot\frac{2\pi\,rad}{1\,\cancel{rev}}=100\pi\,rad/s$$

Utilizando la ley de Faraday $\varepsilon=\frac{-d\Phi}{dt}=\omega B N S_{espira}\,sen(\omega t)$

El valor máximo de voltaje es $\varepsilon_{máx}=\omega B N S_{espira}=100\cdot\cancel{\pi}\cdot 1{,}00\cdot 1000\cdot\frac{20}{\cancel{\pi}}\cdot 10^{-4}=200\,V$

Potencia disipada máxima $P=V\cdot I=V^2/R=200^2/500=80$ W

Se pide máximo de potencia disipada, luego es para un valor instantáneo de voltaje y de intensidad, y no hay que considerar voltaje eficaz ni potencia promedio disipada aunque sea una tensión alterna.

15. Respuesta d. El punto de equilibrio es x=30 cm, pero usamos las expresiones habituales con equilibrio en x=0 y luego lo contemplamos al final. La fuerza máxima se produce en los puntos de máxima elongación $|F_{máx}|=k\cdot A$. La energía mecánica total coincide con la energía potencial elástica máxima y con la energía cinética máxima, luego podemos plantear

$$E_m=E_{pmáx}=\frac{1}{2}kA^2 \quad \text{Sustituyendo} \quad E_m=\frac{1}{2}|F_{máx}|A\Rightarrow 0{,}020=\frac{1}{2}0{,}050\cdot A\Rightarrow A=\frac{0{,}020\cdot 2}{0{,}050}=0{,}8\,m$$

De ahí podemos despejar $k=m\omega^2=|F_{máx}|/A=0{,}050/0{,}8=0{,}0625$ N/m

Si $E_{pe}=2E_c$, como $E_m=E_c+E_{pe}=E_c+2E_c$ tenemos que

$$E_m = 3E_c = 3\frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) \Rightarrow 0{,}020 = \frac{3}{2}0{,}0625(0{,}8^2 - x^2) \Rightarrow x^2 = 0{,}8^2 - \frac{0{,}020\cdot 2}{3\cdot 0{,}0625} \Rightarrow x = \pm 0{,}65\,m$$

Pero esa distancia es respecto al punto de equilibrio, que es x=0,3 m, luego serían +0,95 m y -0,35 m
Entre las opciones que se proporcionan, la única válida es la d.
Comentario: no se usa explícitamente información enunciado asociada "t=0" ni valor periodo 2,0 s.

16. Respuesta c. La cuerda se estira hasta el punto en el que toda la energía potencial gravitatoria (que es cinética parcialmente durante la caída) que tiene el saltador se almacena en energía potencial elástica de la cuerda en la posición más baja del salto. Tomando como referencia para energía potencial 0 en el punto en el que el saltador se detiene, antes del salto E_{pg}=mgh=80·9,81·(50+20)=54936 J. Si igualamos energías

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k x^2 \Rightarrow k = \frac{2\cdot 54936}{20^2} = 275\,N/m$$

17. ***"Respuesta b" (ver comentarios)***. Si la propagación es isótropa, la distancia a la que se puede escuchar el sonido de un foco sonoro $I_0 = \frac{P}{4\pi r_{máx}^2} \Rightarrow r_{máx} = \sqrt{\frac{P}{4\pi I_0}}$

Si queremos que la distancia $r_{máx\,P}$ sea el doble que $_{0máx\,5W}$, podemos plantear

$$r_{máx\,P} = 2r_{máx\,5W} \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{4\pi I_0}} = 2\sqrt{\frac{5}{4\pi I_0}} \Rightarrow P = 4\cdot 5 = 20\,W$$

Con este planteamiento no usamos el I_0, que se usaría para cálculos intermedios que no nos interesan. Si lo usásemos

$$r_{máx5W} = \sqrt{\frac{5}{4\pi\cdot 10^{-12}}} = 6{,}3\cdot 10^5\,m \qquad 2\cdot 6{,}3\cdot 10^5 = \sqrt{\frac{P}{4\pi\cdot 10^{-12}}} \Rightarrow P = (2\cdot 6{,}3\cdot 10^5)^2\cdot 4\cdot\pi\cdot 10^{-12} \approx 20\,W$$

Si la potencia total son 20 W, hay que añadir una potencia en el foco de 15 W
El valor no coincide con ninguno de los 4 propuestos, pero tomamos el valor numéricamente asociado que sería b (sería válido si enunciado indicase 0,5 W)

18. Respuesta c. Si utilizamos la ecuación de las lentes delgadas

$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$ y el aumento lateral en las lentes $A = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = As = \frac{2}{3}(-5) = \frac{-10}{3}$

$\frac{-3}{10} - \frac{1}{-5} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{-3+2}{10} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = -10\,cm$ Se trata de una lente divergente

Si usamos una lente inversa, convergente, f'=10 cm, y $A = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = As = \frac{-2}{3}s$

$$\frac{-3}{2s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{-3-2}{2s} = \frac{1}{10} \Rightarrow s = \frac{-50}{2} = -25\,cm$$

Problema experimental EXP1.

a) Para calcular la intensidad de corriente utilizamos la ley de Ohm, I=V/R, pero necesitamos conocer la resistencia, que podemos calcular con los datos de dimensiones y resistividad.
Lo planteamos de manera general en función de los valores dados: tensión V, diámetro D, resistividad ρ y longitud L.

$$R = \rho\frac{L}{S} = \rho\frac{L}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{4}{\pi}\rho\frac{L}{D^2} \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{\pi}{4}\frac{VD^2}{\rho L} = \frac{\pi}{4}\frac{125}{0{,}0175}\frac{10^2}{1{,}00} = 560998{,}7\,A$$

b) En los datos proporcionados no hay incertidumbre en V ni en la resistividad, por lo que los consideramos constantes que no intervienen en la incertidumbre.
Utilizamos el error absoluto máximo, considerando medidas independientes

$$dI = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial L}dL\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial D}dD\right)^2} \Rightarrow \Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial L}\Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial D}\Delta D\right)^2}$$

$$\Delta I = \frac{\pi V}{4\rho}\sqrt{\left(\frac{D^2}{L^2}\Delta L\right)^2 + \left(2\frac{D}{L}\Delta D\right)^2} \Rightarrow \Delta I = \frac{\pi}{4}\frac{125}{0{,}0175}\sqrt{\left(\frac{10^2}{1^2}\cdot 0{,}01\right)^2 + \left(2\cdot\frac{10}{1}0{,}1\right)^2}$$

$$\Delta I = 12544{,}3 \Rightarrow \Delta I = 1{,}25\cdot 10^3\,A$$

Utilizando una única cifra significativa para el error I=661 kA ± 1 kA

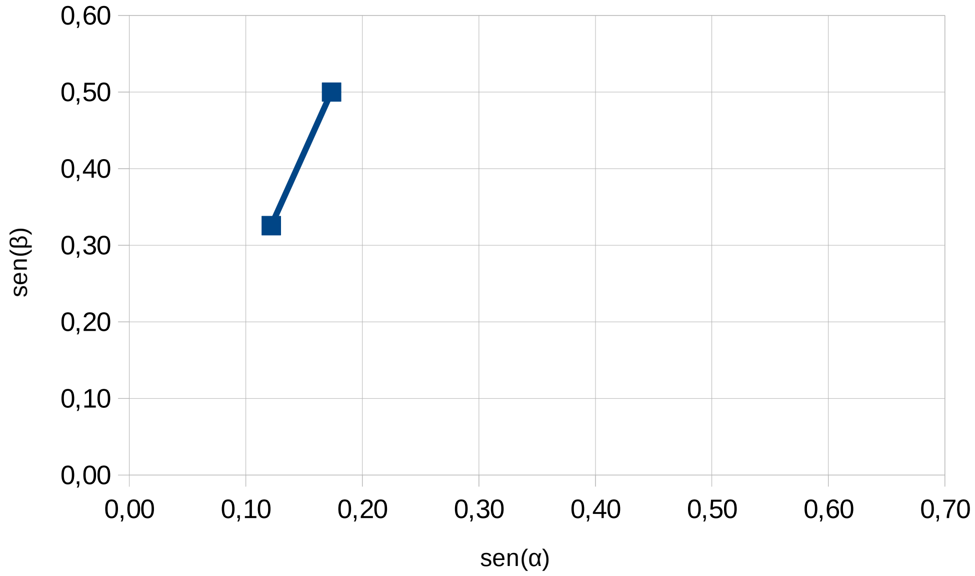
Problema experimental EXP2.

La explicación breve del algoritmo seguido es buscar una relación lineal entre valores asociados a las

medidas obtenidas y el índice de refracción buscado, para realizar una regresión lineal y obtener así su valor.
Si utilizamos la segunda ley de Snell de la refracción $n_1 \cdot sen(\theta_1) = n_2 \cdot sen(\theta_2)$
Tomando propagación de medio 1 a 2, siendo medio 1 el vídrio y medio 2 el aire, podemos plantear, $n_1=n_v$, $n_2=n_a$, $\theta_1=\alpha$, $\theta_2=\beta$, $n_v \cdot sen(\alpha) = sen(\beta)$
Si asociamos y=sen(β) , x=sen(α) , $y = n_v \cdot x$
Tenemos una ecuación de una recta en la que la pendiente es el índice de refracción buscado.
Operamos con los datos

α (º)	7	19	31	38	41
β (º)	10	30	50	70	80
sen(α)	0,12187	0,32557	0,51504	0,61566	0,65606
sen(β)	0,17365	0,50000	0,76604	0,93969	0,98481

Representamos (enunciado indica que se puede utilizar papel milimetrado).



Vemos que es aproximadamente una recta
Realizamos un ajuste por mínimos cuadrados para obtener el valor de índice de refracción más probable.
Lo podemos realizar con la calculadora científica pero lo realizamos aquí con Wolframalpha que nos proporciona al mismo tiempo la representación gráfica
http://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+fit+{{0.12187%2C0.17365}+%2C+{0.32557%2C+0.5}%2C+{0.51504%2C+0.76604}%2C+{0.61566%2C+0.93969}%2C+{0.65606%2C+0.98481}}

Input interpretation:

fit	data	{{0.12187, 0.17365}, {0.32557, 0.5}, {0.51504, 0.76604}, {0.61566, 0.93969}, {0.65606, 0.98481}}
	model	linear function

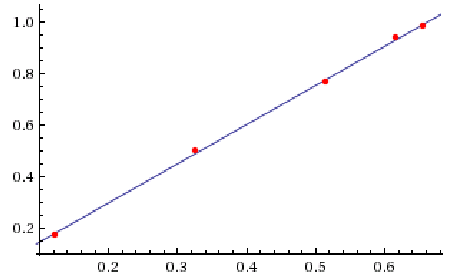
Least-squares best fit:

$1.5203\,x - 0.00649256$

Fit diagnostics:

AIC	BIC	R^2	adjusted R^2
−26.8499	−28.0216	0.999101	0.998801

Plot of the least-squares fit:



Con esto vemos que el valor de n_v es aproximadamente 1,52 que es un valor razonable para el vidrio.

Como el enunciado pide calcularlo con su incertidumbre, podemos aprovechar la representación gráfica. Reutilizando la idea indicada en la solución de Aragón 2011:
"Cuando se quiere hacer una estimación "manual" de la incertidumbre de una pendiente, normalmente se trazan las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a la serie de puntos experimentales y se obtiene la incertidumbre como $\Delta p=\frac{1}{2}(p_{máx}-p_{mín})$ *"*

Viendo la gráfica tomamos pendiente máxima entre los dos primeros puntos, y pendiente mínima entre el segundo punto y el punto 3.
$p_{máx}$=(0,50000-0,17365)/(0,32557-0,12187)=1,602
$p_{mín}$=(0,76604-0,50000)/(0,51504-0,32557)=1,404 cm/s^2

$$\Delta p=\frac{1}{2}(1,602-1,404)=0,099$$

Indicamos la incertidumbre con una única cifra significativa y llegamos a n_v=1,5±0,1