



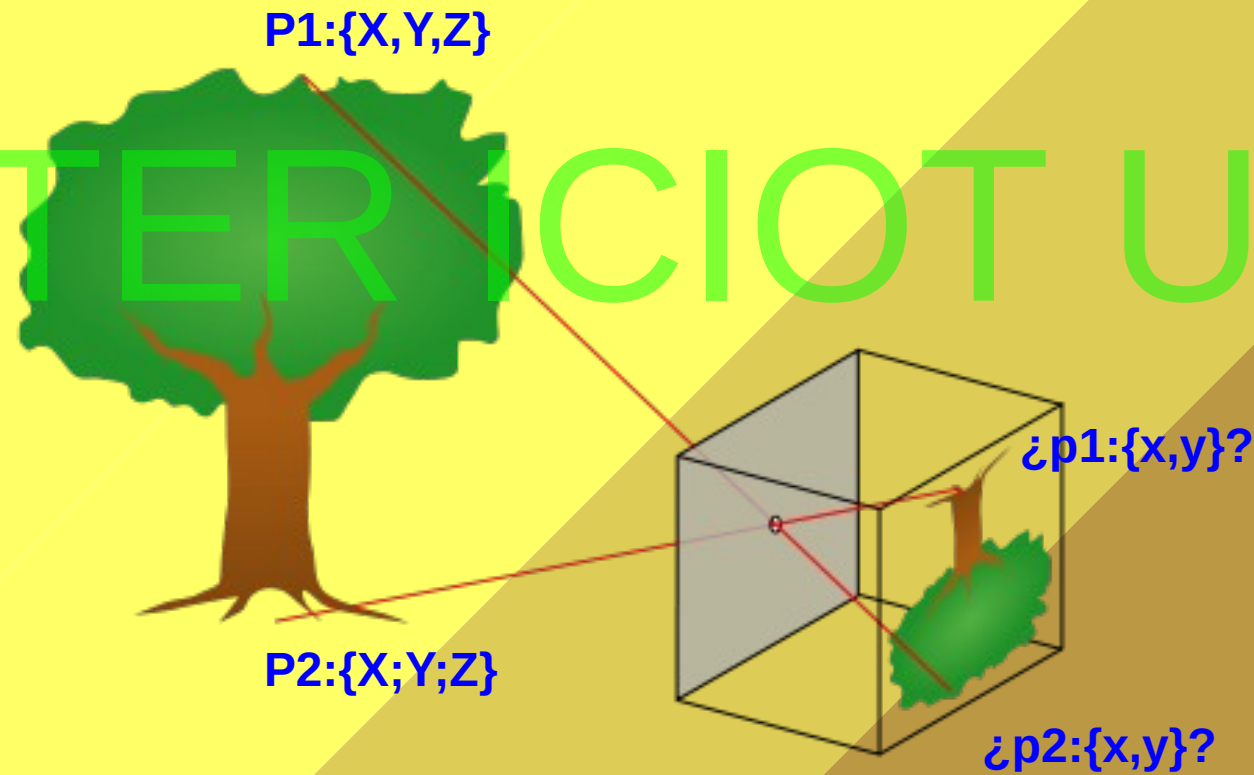
FSIV

MASTER ICOT UCO

Lección: modelo proyectivo.

Motivación

- ¿Dónde se verán los puntos 3D en el plano imagen?



Visión 3D

- Contenidos:
 - **Modelo pin-hole: parámetros intrínsecos.**
 - Relación de la cámara con el mundo: parámetros extrínsecos.
 - Calibración de la cámara.

MAESTRICIOT UCO

Modelo Pin-Hole

- La cámara ideal.

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{f} = \frac{X}{Z} \rightarrow x = f \times \frac{X}{Z}$$

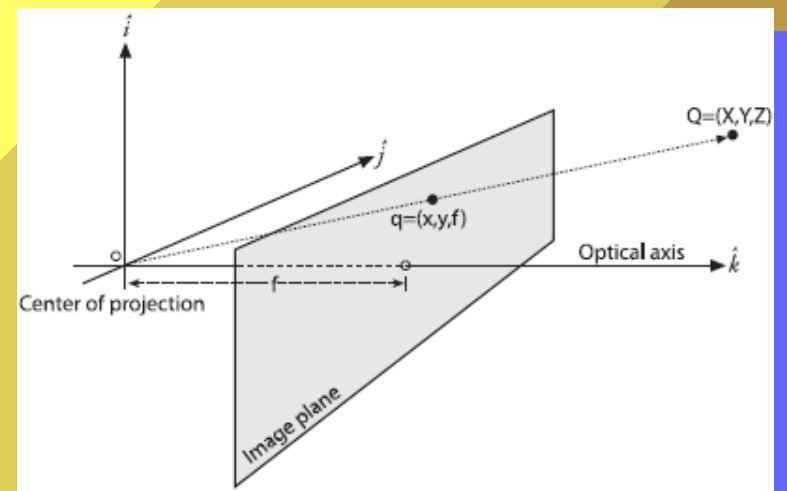
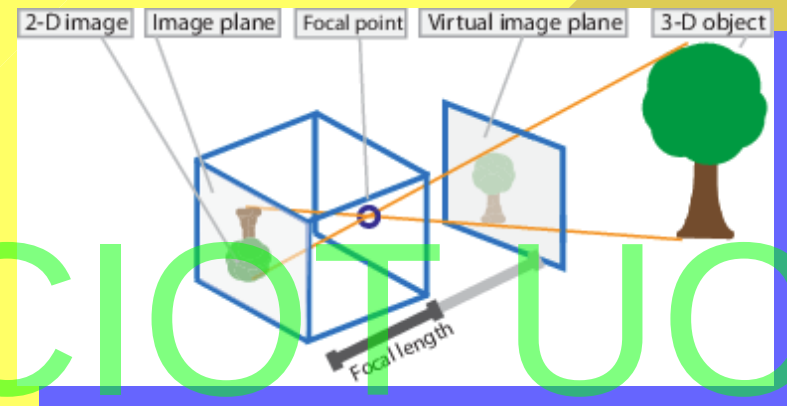
$$\frac{y}{f} = \frac{Y}{Z} \rightarrow y = f \times \frac{Y}{Z}$$

Expresado de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u/w \\ v/w \end{bmatrix}$$

Paso de coordenada homogéneas a normales.



Modelo Pin-Hole

- En realidad necesitamos mejorar el modelo.
 - El centro de la imagen no coincide con el centro proyectivo.
 - Queremos coordenadas discretas.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad x = \frac{u}{w}, \quad y = \frac{v}{w}$$

Modelo Pin-Hole

- Además la lente introduce distorsiones geométricas.



Lo que llega al sensor

La realidad

Modelo Pin-Hole

- Parámetros intrínsecos. 

Parámetros intrínsecos

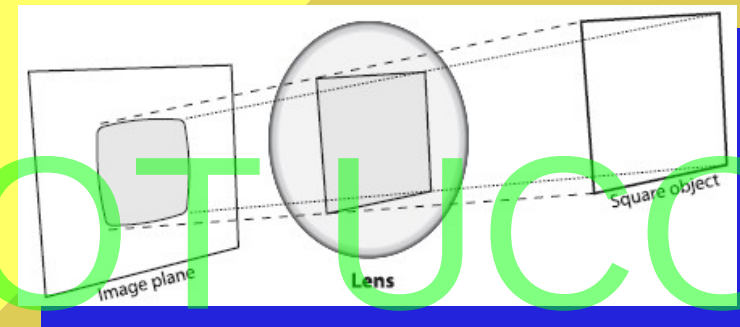
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad x = \frac{u}{w}, \quad y = \frac{v}{w}$$

$$x_{\text{corregida}} = x \left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 \right) + 2 * p_1 xy + p_2 (r^2 + 2 x^2)$$

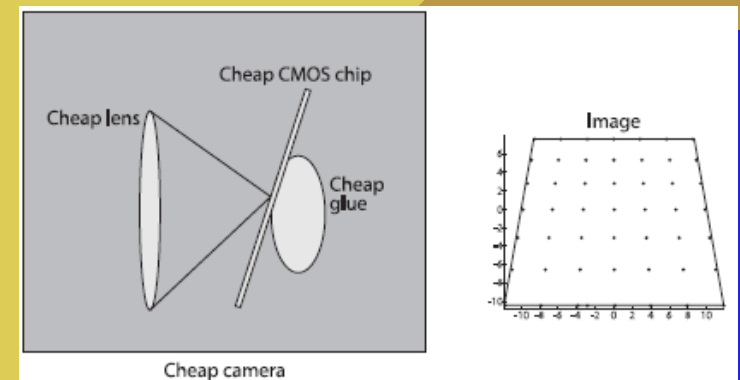
$$y_{\text{corregida}} = y \left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 \right) + 2 * p_2 xy + p_1 (r^2 + 2 y^2)$$

$$r = x^2 + y^2$$

Distorsión radial



Distorsión tangencial



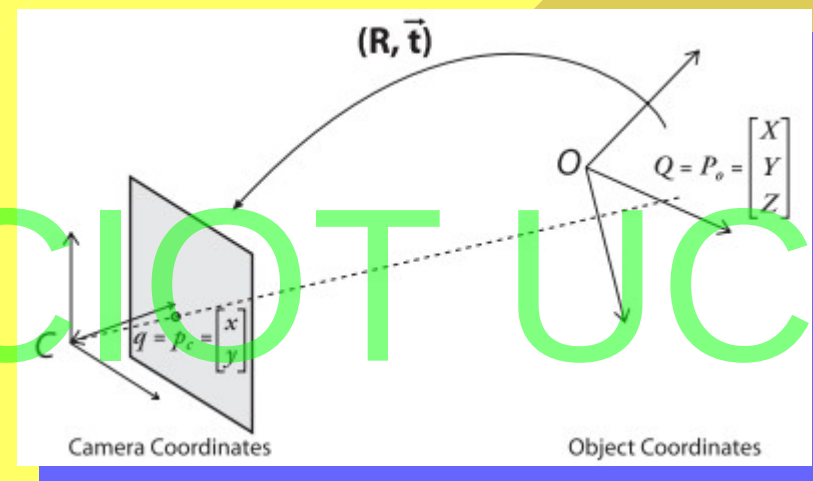
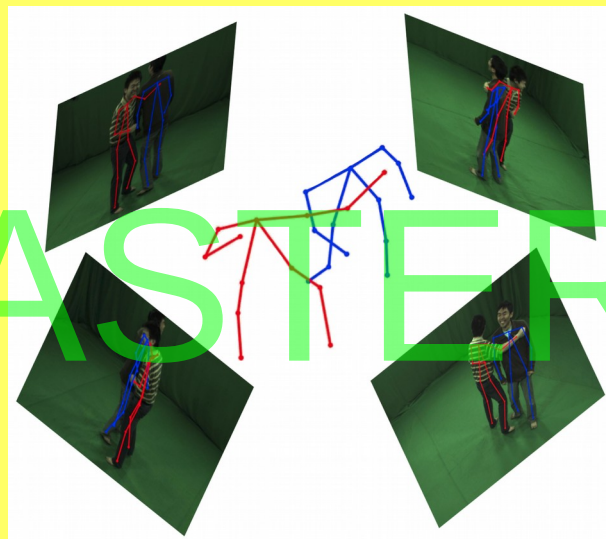
Visión 3D

- Contenidos:
 - Modelo pin-hole: parámetros intrínsecos.
 - **Relación de la cámara con el mundo:** parámetros extrínsecos.
 - Calibración de la cámara.

MAESTRICIOT UCO

Relación con el mundo

- Parámetros extrínsecos. ☰

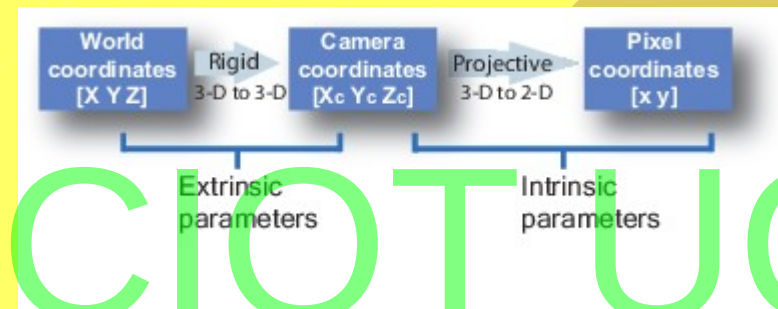
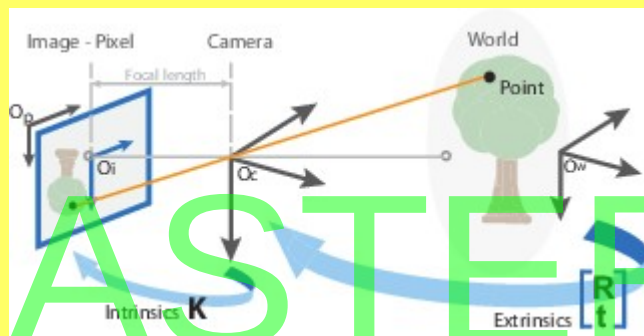


$$P_c = R_x R_y R_z (P_w - T) \rightarrow R P_w - RT \rightarrow \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R = R_x R_y R_z, \quad R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \dots$$

Relación con el mundo

- Poniendo todo junto: Matriz Proyectiva.



Matriz de proyección P:

$$P = M \cdot [R|t]$$

$$x = P X$$

$$\vec{v} = P^+ x$$

$$r = C_0 + \lambda \vec{v}$$

$$P^+ P = I$$

Matriz P

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x & 0 \\ 0 & f_y & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & t_x \\ r_4 & r_5 & r_6 & t_y \\ r_7 & r_8 & r_9 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{ext} \\ Y_{ext} \\ Z_{ext} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x'_c = [x/w, y/w]$$

Visión 3D

- Contenidos:
 - Modelo pin-hole: parámetros intrínsecos.
 - Relación de la cámara con el mundo: parámetros extrínsecos.
 - **Calibración de la cámara.**

MASTERCICLOT UCO

El proceso de calibración

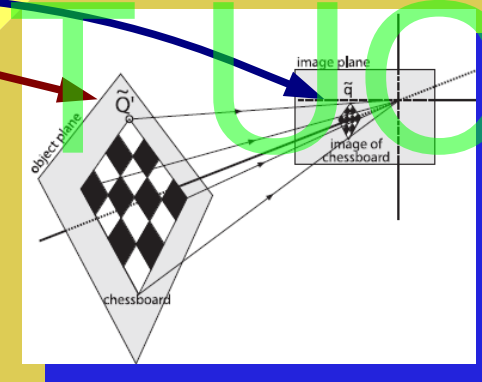
• Homografías (I):

- Define un mapeo proyectivo de un plano en otro, por ejemplo un patrón de calibración sobre la imagen.

$$\tilde{Q} = [X, Y, Z, 1]^t$$

$$\tilde{q} = [x, y, 1]^t$$

$$\tilde{q} = sH \tilde{Q}$$



- **H** tiene dos partes:
 - Física: localiza el plano $W = [RT]$ (6 incógnitas)
 - Proyectiva: matriz **M**. (4 incógnitas).

$$\tilde{q} = sMW \tilde{Q} = sM [RT] \tilde{Q}$$

El proceso de calibración

• Homografías (II):

- **H** tiene dos partes:

- Física: localiza el plano **W**=[RT].
- Proyectiva: matriz **M**.

$$\tilde{q} = sMW \quad \tilde{Q} = sM[RT]\tilde{Q}$$

- Como el patrón es plano podemos asumir que $Z=0$

- De esta forma $H=MW$ es una matriz 3x3. Tenemos:

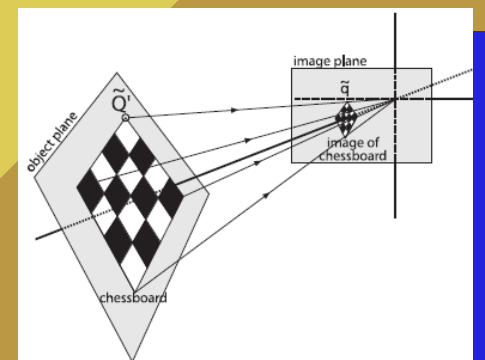
- 4 parámetros intrínsecos comunes (M)
- 6 parámetros extrínsecos por vista (W)

- Cada vista K nos da 2 (x,y)*N (puntos) ecuaciones pero 6 nuevas incógnitas

- Así tenemos: $2 \cdot N \cdot K \geq 4 + 6 \cdot K \rightarrow (N-3) \cdot K \geq 2$

- Necesitamos al menos dos vistas ya que **sólo son informativos cuatro puntos** por vista para la homografía y $(N=4-3)K \geq 2 \rightarrow K > 1$.

$$W = [R_1 R_2 R_3 T] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [R_1 R_2 T] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$



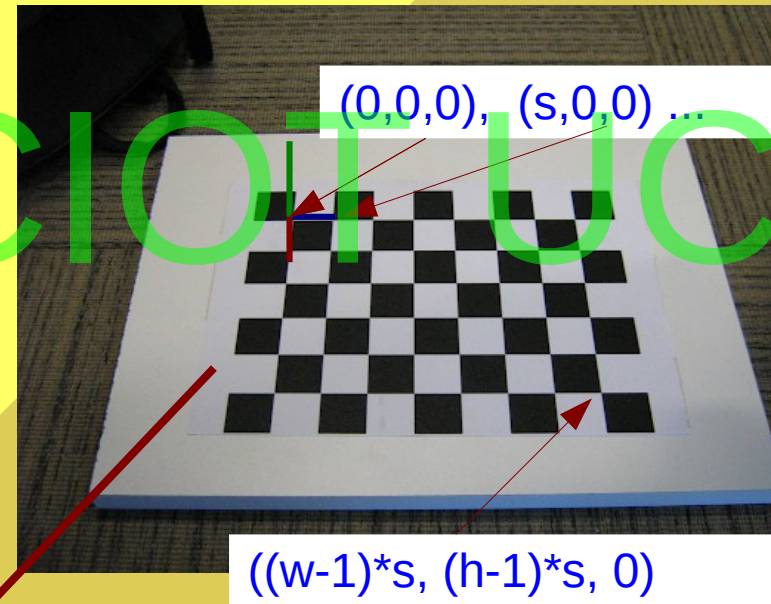
El proceso de calibración

- El patrón de calibración.



$H=5$
 $W=8$
 $S=0.03$ m

$[x_0, y_0] \rightarrow (0, 0, 0)$
 $[x_1, y_1] \rightarrow (s, 0, 0)$
...



El proceso de calibración

- Calibración Intrínseca con OpenCV.

Necesitamos varias (de 7 a 9) vistas del patrón de calibración.

Sólo las esquinas internas del patrón son utilizadas: patrón de 6x5 -> 5x4=20 puntos.

Generar vector de puntos 3D: $\{0,0,0\}, \{s, 0, 0\}, \dots \{0,s,0\}, \{s,s,0\} \dots \{5*s,4*s, 0\}$

Para cada vista:

Detectar patrón y puntos 2D **findChesboardCorners**.

Refinar puntos 2D con **cornerSubPix**.

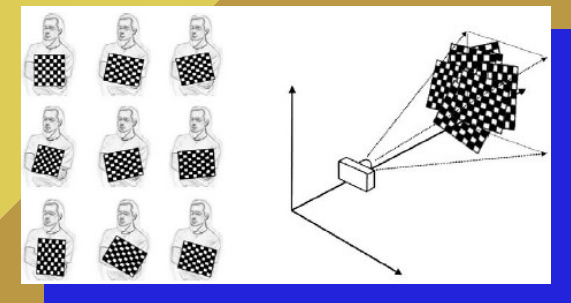
Añadir vector puntos 2D al vector de vectores 2D.

Añadir vector puntos 3D al vector de vectores 3D.

Utilizar **calibrateCamera**.

El valor devuelto es el error de re-proyección (<1).

$$M = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D: [k1, k2, p1, p2, k3]$$



El proceso de calibración

- Calibración Extrínseca con OpenCV.

Necesitamos 1 vista del patrón (se supone que tenemos los parámetros intrínsecos).

Sólo las esquinas internas del patrón son utilizadas: patrón de 6x5 -> 5x4=20 puntos.

Generar vector de puntos 3D: $\{\{0,0,0\}, \{s, 0, 0\}, \dots \{0,s,0\}, \{s,s,0\} \dots \{5*s,4*s, 0\}\}$

Detectar patrón y puntos 2D con **findChesboardCorners**.

Refinar puntos 2D con **cornerSubPix**.

Utilizar **solvePnP**.

Podemos usar **rodriguez()** para pasar de notación “vector rotación” a matriz R y al revés.

Ahora ya puedo proyectar puntos del Mundo en mi cámara: **projectPoints**.

[R|T]

Resumiendo

- Usamos el modelo proyectivo Pin-Hole.
- Los parámetros intrínsecos explican cómo proyectar un punto 3D (sist. coord. de la cámara) en la imagen y corregir la distorsión.
- Los parámetros extrínsecos explican cómo relacionar la cámara con el mundo.
- El proceso de calibración permite obtener todos estos parámetros.

Referencias

- Richard Szeliski, “*Computer Vision: Algorithms and Applications*”, Springer, 2011.
- Adrian Kaehler and Gary Bradski, “*Learning OpenCV 3*”, O’Reilly, 2017.

MASTER ICIOT UCO