



Conjuntos Numéricos

Os conjuntos numéricos compõem uma parte fundamental da Matemática, notadamente no contexto de aplicação a outros campos de estudo. Atualmente tais conjuntos englobam os números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos, denotados respectivamente por \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} . Os três primeiros podem ser apresentados de maneira direta e simples, como na sequência:

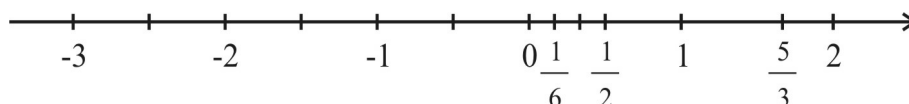
$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q} : p \text{ e } q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}\end{aligned}$$

Note que os dois primeiros conjuntos são apresentados com forte apelo ao bom senso e a uma espécie de noção intuitiva de recursão, propriedade intrínseca ao conjunto dos números naturais, "escondida" às vezes sob o apelido de existência de sucessor. Quanto ao conjunto dos números racionais, a apresentação usa o conjunto dos inteiros (\mathbb{Z}) e introduz uma simbologia que é a da fração, que por sua vez precisa de uma informação adicional: a equivalência. Duas frações são ditas equivalentes ou iguais de acordo com o seguinte:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \iff mq = np$$

neste caso dizemos que representam o mesmo número racional. Também se torna necessário, no sentido de fazer com que os números racionais englobem os inteiros, que se faça a convenção de que as frações de denominador 1 representem o número inteiro correspondente ao seu numerador.

A construção do conjunto dos números reais é extremamente técnica e foge do escopo de qualquer texto introdutório de Matemática. Apresentaremos \mathbb{R} como sendo o conjunto dos números identificados com os pontos da reta numérica. Esta forma se deve ao fato de que os números racionais são identificados de forma simples com pontos da reta numérica, usando os conhecimentos de Geometria Plana, como ilustrado a seguir.



O conjunto dos números complexos, \mathbb{C} será estudado mais adiante.

1 Operações com números

As operações com números são as usuais, denominadas de Adição e Multiplicação, ficando subentendidas as operações definidas a partir destas (subtração e divisão). São supostas conhecidas as regras ou algoritmos. São supostas conhecidas as operações com números inteiros, porisso apenas apresentamos as definições de adição e multiplicação de frações e enunciamos logo em seguida as propriedades básicas.

Definição 1 *Dados os números racionais $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ definimos*

$$r + s = \frac{mq + np}{nq}$$

e

$$r \times s = \frac{mp}{nq}$$

Observação 1 *Para os números reais a , b e c são válidas as propriedades a seguir:*

- (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Associatividade da Adição)
- (ii) $a + b = b + a$ (Comutatividade da Adição)
- (iii) $a + 0 = a$ (Existência de Elemento Neutro da Adição)
- (iv) $\exists -a \in \mathbb{R}$ satisfazendo à relação $a + (-a) = 0$ (Existência de Opostos)
- (v) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Associatividade da Multiplicação)
- (vi) $a \cdot b = b \cdot a$ (Comutatividade da Multiplicação)
- (vii) $a \cdot 1 = a$ (Existência de Elemento Neutro da Multiplicação)
- (viii) $\exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ satisfazendo à relação $a \cdot (a^{-1}) = 1$ (Existência de Inversos)
- (ix) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributividade)

Estas propriedades têm por objetivo completar a apresentação do conjunto dos números reais e são úteis no estudo das expressões algébricas.

2 Potenciação e Radiciação

A potenciação é uma operação que pode ser considerada como notação simplificada de certas operações. No caso de expoentes inteiros positivos isto é feito de maneira recursiva. Uma operação (ou um raciocínio) está na forma recursiva, quando é definida inicialmente para um número inteiro e, a partir daí se define usando o conceito de sucessor, como no exemplo que segue.

Definição 2 *Seja a um número real não nulo e n um inteiro não negativo (ou natural). Neste caso define-se a^n da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a. \end{aligned}$$

Exemplo 1 $3^1 = 3^0 \cdot 3 = 3$

Exemplo 2 $3^5 = 3^4 \cdot 3 = (3^3 \cdot 3) \cdot 3 = [(3^2 \cdot 3) \cdot 3] \cdot 3 = \{[(3^1 \cdot 3) \cdot 3] \cdot 3\} \cdot 3.$

Na definição apresentada, o número a é denominado base e n é o expoente, enquanto o resultado é denominado potência. Observe também que, no caso de expoente positivo, a potência corresponde ao produto cujos fatores são iguais à base e o número deles é o expoente. A exigência de que a base seja não nula tem uma razão especial que será estudada nos exercícios. Para manter coerência com as propriedades conhecidas das potências, define-se potência com expoentes inteiros negativos da seguinte maneira.

Definição 3 *Seja a um número real não nulo e n um inteiro positivo (ou natural). Neste caso define-se*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplo 3 $7^{-1} = \frac{1}{7}$

Exemplo 4 $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Exemplo 5 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$ (verifique).

A definição de radiciação, apesar de simples, é indireta, mas é necessária quando se pretende definir expoente racional.

Definição 4 *Sejam a e b números reais não nulos, de mesmo sinal e n um inteiro positivo. Se $b^n = a$, então define-se*

$$\sqrt[n]{a} = b.$$

A partir da radiciação se define expoente fracionário.

Exemplo 6 $\sqrt[5]{-32} = -2; \sqrt[4]{81} = 3$

Definição 5 *Se a é um número real não negativo e $r = \frac{m}{n}$, então define-se*

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}$$

Observação 2 não há coerência na definição dada, se admitirmos a negativo, por exemplo, se $a = -1$ e $n = 3$, sabendo que

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

teríamos:

$$a^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

e também

$$a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$$

que é uma contradição inadmissível.

Observação 3 Para os números reais não negativos a , e b e para os números racionais r e s , são válidas as propriedades a seguir:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s} & \text{(iii)} \quad (a^r)^s = a^{rs} & \text{(v)} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \\ \text{(ii)} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} & \text{(iv)} \quad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r & \end{array}$$

Observação 4 Para expoentes inteiros positivos as propriedades (i), (iii) e (iv) são válidas, mesmo que as bases envolvidas sejam negativas ou nulas.

Exemplos 1 Confira os exemplos a seguir

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad 2^2 \cdot 2^6 = 2^{2+6} = 2^8. & \text{(d)} \quad (2 \cdot 3)^4 = 2^4 \times 3^4 = 1296 \\ \text{(b)} \quad \frac{5^2}{5^5} = 5^{2-5} = 5^3 & \\ \text{(c)} \quad \left(3^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} & \text{(e)} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} \end{array}$$

Exercícios 1 Calcule:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad 2^5 & \text{(d)} \quad (-2)^6 & \text{(g)} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \\ \text{(b)} \quad (-2)^5 & \text{(e)} \quad 1^{18} & \\ \text{(c)} \quad -2^5 & \text{(f)} \quad 0^4 & \text{(h)} \quad (0, 01)^3 \end{array}$$

Exercícios 2 Simplifique as expressões:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \frac{2^5}{4^{\frac{3}{2}}} \times 3^4 \times 128^{\frac{2}{3}} & \text{(c)} \quad \sqrt[5]{1} + \sqrt[6]{0} + \sqrt[4]{81} & \text{(f)} \quad \frac{2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} \\ & \text{(d)} \quad \sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-125} - \sqrt[3]{64} & \\ \text{(b)} \quad 2^5 \cdot 2^{-3} & \text{(e)} \quad 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} & \text{(g)} \quad (3^2)^{\frac{5}{6}} \end{array}$$

Expressões Algébricas

Existem basicamente dois tipos de problemas em que o uso de expressões algébricas simplifica sua resolução: aqueles em que se procura um ou mais valores numéricos satisfazendo

certas relações estabelecidas (equações ou inequações) e aqueles em que se busca descrever o comportamento de parâmetros interdependentes. Nos dois casos, os valores numéricos ou os parâmetros são representados por letras do alfabeto sendo estas, no primeiro caso, denominadas incógnitas e, no segundo caso, variáveis. O uso de expoentes simplifica a escrita das expressões algébricas. Dentre as expressões algébricas serão estudadas as expressões polinomiais com "poucas" variáveis.

3 Polinômios

Os polinômios são expressões algébricas obtidas com o uso da adição, subtração e multiplicação (incluindo potenciação com expoentes inteiros). São exemplos de polinômios:

$$3xyz^3 - 7x^2 + 1, s^4 + 13t - 1, 55, ax^2 - bx + c, 12xyz^2$$

Observação 5 Quando não há de fato adição ou subtração, o polinômio tem o nome de monômio. Os monômios formam os termos dos polinômios. O fator numérico do termo ou do monômio é denominado coeficiente e a soma dos expoentes das variáveis é o grau do monômio ou do termo. O grau do polinômio é o maior dentre os graus de seus termos.

Para simplificar a classificação dos polinômios, convencionou-se considerar as primeiras letras do alfabeto como sendo constantes, reservando as letras finais para desempenharem o papel de variáveis. Assim, por exemplo, para se referir a qualquer polinômio de grau três na variável x , se diz "polinômio da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ". As operações com polinômios são definidas partindo das operações com números e, exceto a existência de inversos, as demais propriedades continuam válidas para os polinômios.

Também se consideram números como parte da coleção dos polinômios. O número zero, 0, é também denominado polinômio nulo enquanto que os demais números são os polinômios inversíveis ou de grau zero.

Outra observação: na multiplicação de polinômios, o grau do produto é a soma dos graus dos fatores correspondentes. como no exemplo

$$(2x^4 - 3x^2 + 5)(3x^2 - 5x + 1) = 6x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 15x^3 + 12x^2 - 25x + 5$$

Observe que os graus dos fatores são 4 e 2, respectivamente e o do produto é 6 que é a soma $4 + 2$.

As propriedades das operações com polinômios têm analogia com as correspondentes dos inteiros, inclusive quanto ao Algoritmo da Divisão e à fatoração. Desse modo, uma parte dos polinômios admite fatoração. Por fatoração, entende-se um produto em que cada fator é um polinômio de grau positivo.

3.1 Produtos Notáveis

Alguns problemas envolvendo polinômios têm sua resolução simplificada com o uso de produtos notáveis. A seguir apresentamos alguns deles. Uma igualdade de expressões algébricas expressa uma condição ou exigência a respeito das variáveis envolvidas e tem

o nome de equação. Nem toda substituição de valores de variáveis por números em uma equação a torna verdadeira. No extremo oposto dessa observação, isto é, quando qualquer substituição torna verdadeira a equação, então esta é denominada identidade. Uma identidade também significa que um membro da igualdade pode ser obtido a partir do outro mediante sucessivas aplicações das propriedades das operações das expressões algébricas. As equações serão estudadas num tópico à parte. Quanto às identidades, estudamos a seguir algumas que, pela sua importância na fatoração de polinômios têm o nome de produtos notáveis.

Observação 6 *As seguintes propriedades são válidas para as expressões algébricas envolvidas:*

$$(a) \quad (x + a)(x - a) = x^2 - a^2.$$

$$(c) \quad (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) = x^3 \pm a^3$$

$$(b) \quad (x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$$

$$(d) \quad (x \pm a)^3 = x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3$$

Nos produtos notáveis, x e a podem ser substituídos por expressões algébricas e funcionam como método direto de obtenção de certos produtos. Esse tipo de problema tem, na maioria das vezes, apenas um papel de estabelecer familiaridade com o assunto, no intuito de facilitar a compreensão simples de métodos de fatoração de polinômios.

Exemplos 2 *Nos exemplos a seguir se utilizam os produtos notáveis para obtenção direta dos resultados.*

$$(a) \quad (3xy^2 + 2xy) \cdot (3xy^2 - 2xy) = (3xy^2)^2 - (2xy)^2 = 9x^2y^4 - 4x^2y^2$$

$$(b) \quad (2x^2y + 3xy)^2 = (2x^2y)^2 + 2 \cdot (2x^2y)(3xy) + (3xy)^2 = 4x^4y^2 + 12x^3y^2 + 9x^2y^2$$

$$(c) \quad (2x + y) [(2x)^2 - (2x)y + y^2] = (2x)^3 + y^3 = 8x^3 + y^3$$

$$(d) \quad (5x + 3y)^3 = (5x)^3 + 3(3y)(5x)^2 + 3(3y)^2(5x) + (3y)^3$$

Exercícios 3 *Desenvolva as expressões com o uso de produtos notáveis.*

$$(a) \quad (4x + 7y)(4x - 7y)$$

$$(e) \quad (3x^2y + 5x)(9x^4y^2 - 15x^3y + 25x^2)$$

$$(b) \quad (2xy^2 + 5)^2$$

$$(f) \quad (2x + 3y)^3$$

$$(c) \quad (3x^2y - 5x)^2$$

$$(d) \quad (3x^2y - 5x)(9x^4y^2 + 15x^3y + 25x^2)$$

$$(g) \quad (x^2 + 4)(x^2 - 4)$$

3.2 Fatoração

Fatorar um número inteiro significa escrevê-lo como um produto de inteiros. Se cada fator puder, por sua vez, ser fatorado, o processo continua. Este procedimento não se repete indefinidamente: para no momento em que os fatores são primos, isto é, não admitirem fatoração não trivial (uma fatoração é dita trivial se um dos fatores é uma

unidade (1 ou -1) e o outro é o próprio número ou seu oposto). Com os polinômios há muita semelhança com os problemas de fatoração. Em primeiro lugar, é imediato que o processo de fatoração de um polinômio não poderia ser feito indefinidamente se se quizer fatorar com polinômios de grau menor que o próprio, por conta da aditividade do grau na multiplicação de polinômios. Inicialmente se considera como fatoração um produto em que cada fator tem grau maior que zero. Consideram-se os números não nulos como unidades, o que significa que admitem inversos. Por outro lado, o conjunto dos coeficientes também influi nas possibilidades de fatoração. Assim, enquanto que, no conjunto dos polinômios com coeficientes reais o polinômio $x^2 - 2$ se fatora como

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}),$$

o mesmo não acontece no conjunto dos polinômios com coeficientes racionais. Trabalharemos apenas com os polinômios a coeficientes inteiros e consideraremos apenas as fatorações cujos fatores sejam polinômios a coeficientes racionais.

3.2.1 Regras simples de fatoração

As regras a seguir são úteis como orientação para obter a fatoração de um polinômio. A primeira delas se baseia na propriedade distributiva enquanto as outras se baseiam nos produtos notáveis.

1. Fator monômio comum. Se os coeficientes dos termos de um polinômio têm um fator comum, digamos d , então o monômio de coeficiente d e cujas variáveis são as variáveis do polinômio, com os menores expoentes é denominado fator monômio comum e podemos iniciar a fatoração, como no exemplo

$$36x^3y^2z - 30x^2y + 42x^4y = 6x^2y(6xyz - 5 + 7x^2).$$

Note que o fator entre parêntesis não está na ordem padrão.

2. Diferença de quadrados. Se um polinômio se escreve como diferença de quadrados de dois monômios ou, numa situação mais complexa, como diferença de quadrados de dois outros polinômios, então o polinômio se escreve como o produto da soma pela diferença destes, como no exemplo

$$25x^4y^6 - 4x^2 = (5x^2y^3 + 2x)(5x^2y^3 - 2x).$$

Note que um monômio é um quadrado quando o seu coeficiente é um quadrado e, simultaneamente, os expoentes das variáveis são números pares.

3. Trinômio quadrado perfeito. Um trinômio da forma

$$M^2 \pm 2MN + N^2,$$

onde M e N são monômios, então ele se escreve na forma

$$M^2 \pm 2MN + N^2 = (M \pm N)^2,$$

como no exemplo a seguir

$$25x^2y^6 + 20xy^3 + 4 = (5xy^3 + 2)^2.$$

Observe que o quadrado do monômio $M = 5xy^3$ é $25x^2y^6$, o quadrado do monômio $N = 2$ é 4 e o dobro do produto MN é $2MN = 2 \times (5xy^3) \times 2 = 20xy^3$, o que mostra a igualdade.

4. Soma ou diferença de cubos. Neste caso, usa-se a Observação 6 item (c) da página 6 para fatorar, como nos exemplos

$$\begin{aligned} 125x^3y^9 - 8 &= (5xy^3 - 2)(25x^2y^6 + 10xy^3 + 4) \\ 125x^3y^9 + 8 &= (5xy^3 + 2)(25x^2y^6 - 10xy^3 + 4) \end{aligned}$$

Exercícios 4 *Fatore os polinômios*

- | | | |
|------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| (a) $4x^2 + 4xy + y^2$ | (d) $9x^2 + 24x^3y + 16x^4y^2$ | (g) $x^2 - 4y^2$ |
| (b) $4x^2 - 4xy + y^2$ | (e) $27x^3 + 8x^6y^3$ | (h) $8x^3 + y^3 + 6xy^2 + 12x^2y$ |
| (c) $32x^4y^2 - 18x^2$ | (f) $8x^3y^6 - 27y^3$ | (i) $8x^3 - y^3 + 6xy^2 - 12x^2y$ |

Equações

As equações são igualdades entre expressões algébricas. Conseqüentemente uma equação consiste em uma afirmação ou ainda uma restrição a respeito das variáveis envolvidas. Assim, por exemplo, as expressões algébricas $3x + 5$ e $2x + 3$ não fazem restrição ao valor que se pode atribuir à variável x , uma vez que nada afirmam a respeito. Se se atribui o valor 1 à variável x , a primeira expressão corresponde ao número 8, enquanto que a segunda corresponde ao número 5 e tudo está resolvido. No entanto, quando se escreve

$$3x + 5 = 2x + 3$$

e se atribui o mesmo valor a x , a igualdade correspondente a essa substituição seria

$$8 = 5$$

que não faz parte das sentenças escolhidas como verdadeiras, ou seja, o valor 1 atribuído a x não faz com que a igualdade seja verdadeira.

A menos que seja explicitado, denominam-se incógnitas as variáveis que compõem a equação. Uma solução de uma equação consiste numa família de valores atribuídos às incógnitas que tornam a igualdade verdadeira.

Exemplo 7 *A equação*

$$3x^2y - 5y^2z + 57 = \sqrt{2x^4 + 7}$$

é uma equação nas incógnitas x , y e z . Também se diz que é uma equação em x , y e z . Neste caso, uma solução consiste num terno de valores (x, y, z) que tornam a equação uma igualdade de fato. Desse modo, o terno $(1, 2, 3)$ é solução conforme os cálculos

$$\begin{aligned} 3 \times 1^2 \times 2 - 5 \times 2^2 \times 3 + 57 &= 6 - 60 + 57 \\ &= 3 \\ \sqrt{2 \times 1^2 + 7} &= \sqrt{2 + 7} = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Observe que o terno $(2, 1, 3)$ não é solução, o que ilustra a importância da ordem dos valores.

Há dois tipos de problemas envolvendo equações: **1)** verificar se determinados valores para as variáveis formam uma solução e **2)** encontrar soluções da equação. Inicialmente estudaremos o primeiro tipo de problema

4 Equações Polinomiais

Uma equação é polinomial se as expressões envolvidas são polinômios. Neste caso, após a simplificação (estudada adiante), o maior grau dos polinômios envolvidos é o grau da equação. Também serão estudadas as equações a uma ou duas variáveis.

Exercícios 5 Em cada problema a seguir são dados valores às variáveis e pede-se que verifique se os valores dados são soluções das respectivas equações.

- | | |
|---|---|
| (a) $4x^2 + 4xy + y^2 = 25$; $(x, y) = (2, 1)$ | (f) $27x^3 + 8x^6 = 35$; $x = 1$ |
| (b) $4x^2 - 4xy + y^2 = 16$; $(x, y) = (1, 6)$. | (g) $x^2 - 4y^2 = 12$; $(x, y) = (4, 1)$ |
| (c) $32x^4y^2 - 18x^2 = 12$, $(x, y) = (1, 0)$ | (h) $x^2 - 4y^2 = 12$; $(x, y) = (1, 4)$ |
| (d) $32x^4y^2 - 18x^2 = 18$; $(x, y) = (1, 0)$ | (i) $4x^2 - 4xy + y^2 = 16$; $(x, y) = (6, 1)$. |
| (e) $27x^3 + 8x^6 = 2$; $x = 1$ | |

Funções

As funções são relações estabelecidas entre duas ou mais variáveis, de modo que o valor de uma delas fica determinado a partir dos valores atribuídos às demais. e se diz simplifadamente que aquela "é função" das últimas. Outra forma de ver as funções consiste em interpretá-las como regras de associação entre as variáveis, inspirando a notação padrão $x \mapsto y$ para indicar que a cada valor atribuído à variável x se associa um valor **determinado** à variável y . Estudaremos as funções tentando visualizá-las das duas maneiras, em ambos os casos olhando-as dentro do produto cartesiano.

5 Produto Cartesiano

O termo "Cartesiano" vem de *Cartesius*, nome em Latim do filósofo e matemático francês René Descartes é uma construção formal de conjuntos a partir de outros conjuntos, expressa da forma que segue. Considere os conjuntos A e B . O produto cartesiano de A por B é denotado e definido assim

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$$

significando que o produto cartesiano consiste de todos os símbolos construídos por pares de valores atribuídos às variáveis x e y de modo que cada valor atribuído a x faça parte do conjunto A e cada valor atribuído a y faça parte do conjunto B . Deve-se observar que nesse tipo de simbologia não são dadas interpretações aos símbolos.

Exemplo 8 *Suponha que o conjunto A seja constituído pelos números 1, 3, 5, 7 e 8, e que o conjunto B seja constituído pelos números 0, 1 e 8. Neste caso, estes conjuntos podem também ser escritos da maneira seguinte*

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 5, 7, 8\} \\ B &= \{0, 1, 8\} \end{aligned}$$

e o produto cartesiano $A \times B$ é constituído pelos símbolos $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 8)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 8)$, $(5, 0)$, $(5, 1)$, $(5, 8)$, $(7, 0)$, $(7, 1)$, $(7, 8)$, $(8, 0)$, $(8, 1)$ e $(8, 8)$ ou ainda

$$A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (1, 8), (3, 0), (3, 1), (3, 8), (5, 0), (5, 1), (5, 8), (7, 0), (7, 1), (7, 8), (8, 0), (8, 1), (8, 8)\}$$

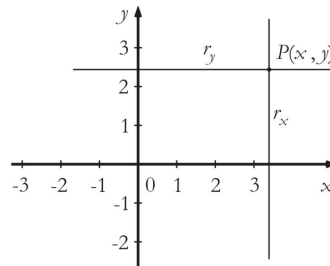
O único produto cartesiano que estudaremos será o produto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, também denotado por \mathbb{R}^2 que é descrito formalmente por

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

Observe que não se fez uma lista completa dos elementos que constituem tal conjunto dada a impossibilidade disto ser feito. Este produto é interpretado como sendo um plano, denominado plano cartesiano, mediante a correspondência descrita assim:

- (i) traçam-se, no plano, duas retas que representam os números reais, de modo que
- as origens (ou seja, os pontos que representam o número 0 em cada reta) coincidam;
 - um deles tem a direção considerada horizontal, com o sentido positivo apontando para a direita (denominado eixo x) e o outro é perpendicular a este (direção portanto considerada vertical), com o sentido positivo apontado para cima (denominado eixo y).
- (ii) a cada par (x, y) que constitui o produto cartesiano \mathbb{R}^2 associa-se o ponto do plano que é a interseção das retas r_x e r_y sendo

- r_x a reta vertical que passa pelo ponto que corresponde ao valor da variável x do eixo x .
- r_y a reta horizontal que passa pelo ponto que corresponde ao valor da variável y do eixo y .



A partir dos conhecimentos de Geometria Euclidiana Plana, pode-se concluir que a correspondência assim construída é bijetora, o que faz do plano uma representação perfeita do produto cartesiano \mathbb{R}^2 .

6 Funções

Uma função do conjunto A no conjunto B é um subconjunto f do produto cartesiano $A \times B$, que satisfaz às condições:

- f tem pelo menos um ponto (x_0, y_0) ;
- dado o ponto $(x_0, y_0) \in f$, nenhum outro ponto de primeira coordenada x_0 pertence a f .

O conjunto dos valores de $x \in A$ que comparecem como primeira coordenadas de pontos de f é denominado *domínio* de f , denotado por $D(f)$ ou D_f . Se $(x_0, y_0) \in f$, então se diz que y_0 é o valor de f no ponto x_0 e se escreve $y_0 = f(x_0)$. O conjunto de todos os valores de f é a imagem de f , denotado por $\text{Im}(f)$. Nesse caso, a função f é descrita assim

$$\begin{aligned} f : D_f &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Nosso objetivo é o de estudar as funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , denominadas funções reais de uma variável real. Essas funções serão apresentadas como equações nas variáveis x e y , que vinculam seus valores. Esse vínculo pode ser apresentado de forma explícita, ou seja, na forma $y = f(x)$, ou na forma implícita, como na equação $x^2 + y^2 = 25$.

6.1 Funções especiais

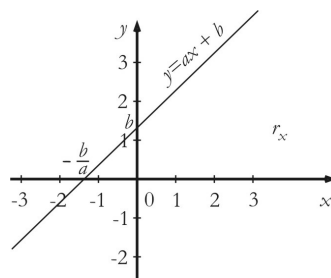
Neste ponto estudaremos alguns tipos especiais de funções e os métodos de fazer um esboço de seus gráficos. São as funções lineares, as funções quadráticas, as funções logarítmicas e a função exponencial.

6.1.1 Funções lineares

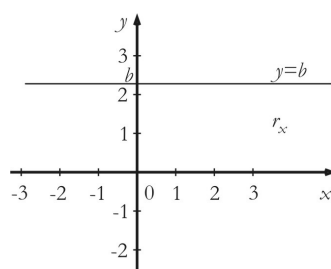
As funções lineares são as funções da forma

$$y = ax + b$$

onde a e b são números reais fixos. Uma tal função consiste de pontos de uma linha reta, daí o nome função linear, como ilustra a figura.

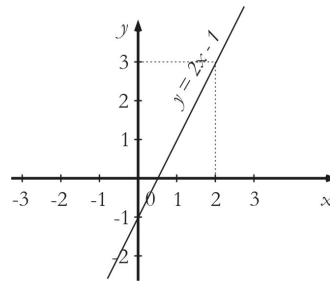


Se $a = 0$, então a função é denominada função constante, uma vez que para cada $x \in \mathbb{R}$ está associado sempre o mesmo valor, b , pela função. Seu gráfico é uma reta horizontal (ou seja, paralela ao eixo x) como ilustra a figura.



Sabendo que o gráfico de uma função linear é uma linha reta, o esboço é uma tarefa simples pois sua determinação é feita com a obtenção de dois de seus pontos, obtidos com a substituição de dois valores quaisquer para a variável x , na equação que a define, como no exemplo.

Exemplo 9 Para obter o gráfico da função $y = 2x - 1$, atribuindo os valores 0 e 2 à variável x , obtemos os pontos $(0, -1)$ e $(2, 3)$ e obtemos o seguinte esboço.



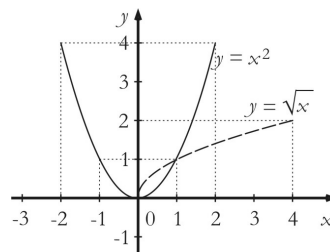
Exemplo 10 *Um caso particular das funções lineares é a função identidade, definida por $y = x$ e seu gráfico é a diagonal do primeiro e terceiro quadrantes do plano \mathbb{R}^2 .*

6.1.2 Funções quadráticas

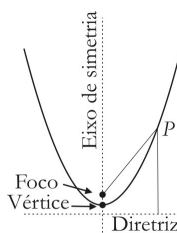
As funções quadráticas são aquelas em que a uma das variáveis é expressa como um polinômio de grau dois na outra. Assim, temos efetivamente dois tipos possíveis: $y = ax^2 + bx + c$, ou então $y = \sqrt{ax + b} + c$, onde $a \neq 0$. Como padrão a literatura considera como função quadrática apenas o primeiro tipo mas, de fato, o segundo também é, uma vez que, dentro do domínio, podemos expressar x em função de y , assim: $x = \frac{1}{a}y^2 - \frac{2c}{a}y + \frac{c^2 - b}{a}$ que garante, por analogia entre as expressões, que os gráficos são semelhantes. Um esboço do gráfico de uma função quadrática por analogia com o do gráfico da função $y = x^2$, que por sua vez pode ser obtido mediante as seguintes observações:

- O valor da expressão x^2 é sempre positivo ou nulo, caso se atribua o valor zero à variável x .
- O gráfico é simétrico em relação ao eixo x , uma vez que o valor de x^2 não se altera pela troca de sinal do valor atribuído a x .
- O valor da expressão x^2 aumenta mais rapidamente que o valor absoluto de x .

Com essas observações e usando alguns valores, pode-se concluir que os gráficos das funções $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ têm o seguinte esboço:



Observação 7 *A título de ilustração, a parábola é uma figura plana definida a partir de uma reta denominada diretriz e de um ponto denominado foco. Nesse caso, a parábola consiste dos pontos do plano cuja distância ao foco é sempre igual à distância à diretriz, como ilustrado a seguir. Munido dos conceitos de Geometria Analítica e dessa definição, mostra-se que uma parábola de diretriz horizontal ou vertical é descrita por equações do tipo $y = ax^2 + bx + c$ e $x = ay^2 + by + c$ respectivamente. Um espelho de forma parabólica reflete todos os raios paralelos a seu eixo de simetria na direção do foco. Essa observação permite uma vasta gama de aplicação, inclusive na área de saúde: há um tipo de intervenção, denominada Litotripsia extra-corpórea por ondas de choque que utiliza essa propriedade para quebrar cálculos renais.*



De volta às equações

Na primeira apresentação das equações descrevemos o conceito de solução (também denominada de raiz) de uma equação. Ficou nas entrelinhas que uma solução consiste de valor(es) atribuído(s) à(s) variável(eis) que torna a equação verdadeira. Dessa forma, considerando a condição (ou restrição) que é a equação, ela de fato define um conjunto dentro do universo em questão que é denominado conjunto solução. O número de incógnitas define o universo citado. A título de exemplo, a equação $x^2 - 9 = 0$, por ter uma única incógnita, define um conjunto "dentro" do conjunto dos números reais e diz-se que o universo é o conjunto dos números reais, enquanto que a equação $x^2 + y^2 = 4$, por ter duas incógnitas, define um conjunto dentro do conjunto dos pares ordenados (x, y) de \mathbb{R}^2 , ou do plano cartesiano tal como foi identificado. Quanto às equações, nosso interesse é, de agora em diante, descrever o conjunto solução ou conjunto das raízes de certos tipos de equações ou de sistemas de equações. O conjunto de todas as soluções de uma equação é denominado conjunto solução da equação. Para isso, identificaremos de certa forma o conjunto solução com a equação. Assim, duas equações serão consideradas equivalentes se têm o mesmo conjunto solução. Resolver uma equação ou um sistema de equações significa obter uma equação ou sistema equivalente, de modo que os valores possíveis das variáveis são descritos de maneira evidente.

Exemplo 11 *A equação $x^2 - 9 = 0$, por mais simples que possa parecer, não apresenta os valores possíveis para a variável x , no entanto, se escrevemos $x = 3$ ou $x = -3$, os valores possíveis para a variável x são descritos de forma evidente. Digamos que resolver a equação inicial consiste em mostrar que ela é equivalente à sentença ' $x = 3$ ou $x = -3$ '.*

Exemplo 12 *Também, por mais simples que possa parecer, não é evidente que, dentro do conjunto dos números reais, a equação $27x^3 - 9x - 52 = 0$, seja equivalente à equação $x = \frac{4}{3}$, sendo que esta última realmente apresenta a única possibilidade de solução, de forma bem mais evidente que a primeira!*

A obtenção de equações equivalentes a uma dada equação é elementare se baseia entre outros, nos seguintes princípios

- Se uma expressão é obtida de outra por uso das propriedades elementares das operações, então a substituição de uma por outra numa equação leva a outra equação equivalente. Por exemplo uma fatoração significa que a expressão fatorada conduz à outra por meio do uso de tais propriedades. Assim, sabendo que $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ é uma fatoração, concluímos que a equação $x^2 - 9 = 0$ é equivalente à equação $(x + 3)(x - 3) = 0$. Ora, essa última equação exhibe um produto de dois números tendo resultado nulo, o que exige que pelo menos um dos fatores seja nulo ou: $x + 3 = 0$ ou $x - 3 = 0$.
- A adição (ou subtração) de um mesmo valor a ambos os membros de uma equação conduz a uma equação equivalente. Exemplos: a equação $x + 3 = 0$ é equivalente à equação $x = -3$ (foi subtraído o número 3 (ou somado o número -3) a ambos os membros da equação), da mesma maneira que se conclue a equivalência entre as equações $x - 3 = 0$ e $x = 3$.
- A multiplicação (ou divisão) de ambos os membros de uma equação por um número real não nulo conduz a uma equação equivalente. O uso deste princípio exige cuidado quando se efetua a divisão por expressões como no exemplo: a equação $x^2 = 2x$ não é equivalente à equação $x = 2$.

6.2 Equações do primeiro grau

As equações do primeiro grau são aquelas do tipo

$$ax + b = 0, a \neq 0$$

e sua resolução é muito simples: a equação $ax + b = 0$ é equivalente à equação

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Essa verificação é simples e direta, mediante o uso dos princípios citados na seção anterior.

Exemplo 13 *A equação $x^2 - 3x + 5 = x^2 - 5x + 11$ é equivalente à equação $2x - 6 = 0$ que é do primeiro grau e tem conjunto solução $S = \{3\}$ (verifique!).*

Exemplo 14 *Outro tipo de problema que surge com freqüência na literatura consiste em apresentar um parâmetro na equação, de modo a ter uma raiz especificada, como a seguir. Sabendo que -3 é raiz da equação $6 - 2(x + 1) = 7 - m$, determine o valor de m .*

6.3 Equações do segundo grau

As equações do segundo grau têm sido utilizadas pelo menos desde o período conhecido na história como babilônico (1700 a1800 AC). O fato é que um papiro desse período foi encontrado e a sua tradução mostrou uma técnica, bastante sofisticada para a época, de obtenção de dois números cuja soma e produto são conhecidos¹. Essa formulação tem atualmente o nome de forma normal de uma equação de segundo grau. Como o nosso objetivo é descrever o conjunto solução, não apresentaremos nenhuma fórmula para obter raízes de uma equação do segundo grau. Só nos interessa a resolução que utiliza a fatoração. Ainda assim, como medida para se ter segurança na obtenção da fatoração, será apresentada a fórmula do discriminante da equação.

Uma equação do segundo grau é uma equação do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0,$$

sendo que consideraremos apenas os casos em que a , b e c são números inteiros. O discriminante é a função dos coeficientes (a , b e c), dada por

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

sendo que a expressão $ax^2 + bx + c$ admite fatoração quando $\Delta \geq 0$ e é irredutível caso contrário. Caso se considere a fatoração no universo dos polinômios a coeficientes racionais, exige-se ainda por cima que Δ seja um quadrado de um número racional.

6.3.1 Fatoração de um trinômio geral do segundo grau

A fatoração de um trinômio do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ é feita com base no produto notável (não apresentado anteriormente)

$$(Ax + B)(Cx + D) = ACx^2 + (BC + AD)x + BD.$$

Quando $a = 1$ o trinômio é denominado mônico e vale a seguinte versão simplificada do Teorema de Gauss

Teorema 6 *As raízes racionais de um polinômio mônico (coeficientes inteiros) são números inteiros.*

Sendo mônico o polinômio, o produto notável apresentado pode ser considerado com $A = C = 1$:

$$(x + B)(x + D) = x^2 + (B + D)x + BD$$

e o trabalho se reduz a procurar um par de números inteiros B e D cuja soma é b e cujo produto é c .

¹O método é descrito assim:

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1. Tome a metade da soma; | 4. tire a raiz quadrada do resultado; |
| 2. tome o quadrado do resultado; | 5. adicione a metade da soma ao resultado e obtenha um dos números. |
| 3. subtraia o produto; | |

Exemplo 15 A expressão $x^2 - 5x + 6$ se fatora assim:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Portanto a equação

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

é equivalente à equação

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$(x - 2) = 0 \text{ ou } (x - 3) = 0,$$

que é equivalente a

$$x = 2 \text{ ou } x = 3$$

sendo portanto o conjunto solução dado por

$$S = \{2, 3\}.$$

Exercícios 6 Fatore os trinômios a seguir.

(a) $x^2 + 2x - 15$

(f) $6x^2 + 5x - 6$

(k) $4x^4 - 120x^2 + 4x^3$

(b) $6x^2 + 9x - 15$

(g) $x^2 + 4x + 1$

(l) $30x^3 + 25x^2 - 30x$

(c) $x^2 - 6x + 10$

(h) $3x^4 - 45x^2 + 6x^3$

(m) $2x^6 - 10x^5 - 28x^4$

(d) $x^2 - 7x - 8$

(i) $2x^3 - 14x^2 - 16x$

(n) $24x^4 + 20x^3 - 24x^2$

(e) $x^2 - 7x + 8$

(j) $x^2 - 5x - 14$

(o) $x^2 - 4x - 21$

6.3.2 Resolvendo uma equação de segundo grau por fatoração

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, se o trinômio $ax^2 + bx + c$, tiver uma fatoração esta consistirá no produto de fatores de grau 1, por conta da propriedade da aditividade dos graus em um produto de polinômios, isto é, a fatoração é do tipo

$$ax^2 + bx + c = (Ax + B)(Cx + D)$$

o que torna a equação original equivalente à equação

$$(Ax + B)(Cx + D) = 0$$

e é evidente que esta última é equivalente à condição $Ax + B = 0$ ou $Cx + D = 0$ que é uma condição que compõe duas equações de primeiro grau. Esse tipo de sentença (que usa o termo "ou") descreve um conjunto denominado união, cujos elementos são precisamente os que estão num dos dois ou em ambos. Se, por outro lado, o trinômio não se fatora, isso significa que a equação inicial não tem raiz. Mas a fatoração depende do universo dos coeficientes, se é o conjunto dos números reais (\mathbb{R}), dos racionais (\mathbb{Q}) ou dos complexos (\mathbb{C}), estes estudados adiante. Estaremos estudando os polinômios a coeficientes racionais embora citaremos entre os exemplos a seguir as outras possibilidades.

Exemplo 16 Considere a equação $x^2 - 6x + 4 = 0$. O discriminante é $\Delta = 20$, que não é um quadrado perfeito, mas é não negativo. A conclusão é que o trinômio $x^2 - 6x + 4$ se fatora dentro da família dos polinômios a coeficientes reais, como ilustrado

$$x^2 - 6x + 4 = (x - 3 - \sqrt{5})(x - 3 + \sqrt{5})$$

o que mostra que a equação tem duas raízes reais, nenhuma delas racional.

Exemplo 17 Considere a equação $x^2 - 8x + 17 = 0$. O discriminante é $\Delta = -4$, que é um negativo. A conclusão é que o trinômio $x^2 - 8x + 17$ não se fatora dentro da família dos polinômios a coeficientes reais. No entanto, esse trinômio se fatora no universo dos polinômios a coeficientes complexos como ilustrado

$$x^2 - 8x + 17 = (x - 4 - i)(x - 4 + i)$$

o que mostra que a equação tem duas raízes complexas, nenhuma delas real.

Exemplo 18 Considere a equação $x^2 - 13x + 42 = 0$. O discriminante é $\Delta = 1$, que é um quadrado perfeito. A conclusão é que o trinômio $x^2 - 13x + 42$ se fatora dentro da família dos polinômios a coeficientes racionais, como ilustrado

$$x^2 - 13x + 42 = (x - 7)(x - 6)$$

o que mostra que a equação tem duas raízes racionais, descritas pelas equações $x = 7$ e $x = 6$.

Exercícios 7 Resolva, usando fatoração, as equações seguir.

- | | | |
|--------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| (a) $x^2 + 2x - 15 = 0$ | (f) $6x^2 + 5x - 6 = 0$ | (k) $4x^4 - 120x^2 + 4x^3 = 0$ |
| (b) $6x^2 + 9x - 15 = 0$ | (g) $x^2 + 4x + 1 = 0$ | (l) $30x^3 + 25x^2 - 30x = 0$ |
| (c) $x^2 - 6x + 10 = 0$ | (h) $3x^4 - 45x^2 + 6x^3 = 0$ | (m) $2x^6 - 10x^5 - 28x^4 = 0$ |
| (d) $x^2 - 7x - 8 = 0$ | (i) $2x^3 - 14x^2 - 16x = 0$ | (n) $24x^4 + 20x^3 - 24x^2 = 0$ |
| (e) $x^2 - 7x + 8 = 0$ | (j) $x^2 - 5x - 14 = 0$ | (o) $x^2 - 4x - 21 = 0$ |

Sistema de equações lineares

Um sistema de equações consiste na composição de uma ou mais equações. Se todas as equações são de grau 1, dizemos que o sistema é linear. Se uma equação representa uma restrição aos valores possíveis das variáveis envolvidas, cada equação acrescentada representa mais uma restrição. Por outro lado, cada incógnita (ou variável) da equação representa um grau de liberdade a mais. Essa observação permite uma conclusão empírica que corresponde, de certa forma, ao que de fato acontece:

Observação 8 Num sistema linear se o número de equações independentes é m e se o número de incógnitas é n , sendo $m \leq n$, então a diferença $n - m$ é o número de variáveis livres.

Os esclarecimentos sobre os termos *equações independentes* e *número de variáveis livres* serão feitos de forma indireta nos exemplos que seguem, uma vez que isso exige uma análise mais acurada de um sistema.

Exemplo 19 O sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

é constituído de duas equações que são equivalentes. Nesse caso qualquer das duas equações é equivalente ao sistema e dizemos que o número de equações independentes é $m = 1$. Mas o número de incógnitas é $n = 2$. Conclusão: o número de variáveis livres é 1. De fato, no caso presente, podemos atribuir qualquer valor a uma das variáveis e temos possibilidade de encontrar uma solução para o sistema.

Exemplo 20 O sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

é constituído de duas equações que não são equivalentes. Nesse caso, o número de variáveis livres é nulo, ou melhor: não há variável livre. Acontece que um par de valores atribuídos às variáveis, que satisfaça à primeira delas produz o valor 2 para a expressão $4x - 2y$, o que nos faz concluir que o sistema é contraditório, não admitindo portanto solução.

Exemplo 21 O sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$$

é constituído de duas equações que não são equivalentes. Nesse caso, o número de variáveis livres é nulo, ou melhor: não há variável livre. Diferentemente do exemplo anterior, este sistema admite uma única solução, dada por

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

No exemplo 19 temos um sistema que é classificado como indeterminado, significando que é compatível, mas as incógnitas têm uma infinidade de possibilidades, ou seja, o conjunto solução é infinito. O gráfico de uma tal solução consiste do conjunto de pares (x, y) que satisfazem à equação que é equivalente ao sistema, no caso, $2x - y = 1$ por exemplo, que já vimos tratar-se de uma reta. No exemplo 20 temos a situação oposta, em que o sistema é classificado como incompatível e o conjunto solução é o que se denomina conjunto vazio. Já no exemplo 21 temos a situação padrão esperada em que o sistema define de forma inequívoca a única solução possível e sua classificação é como sistema determinado. Graficamente cada equação representa uma reta e portanto a solução é o ponto comum de interseção de ambas.

7 Estudo de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

O estudo a seguir é um método que de certa forma se aplica a sistemas mais gerais (com m equações e n incógnitas, sendo m e n números inteiros positivos quaisquer). Considere o sistema

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

a, b, c, d, e e f números reais. A matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e a matriz ampliada é

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{bmatrix}$$

Neste caso, as duas equações são equivalentes se, e somente se, seus coeficientes são proporcionais, isto é,

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{f}$$

o que, por sua vez, é equivalente a uma linha da matriz \overline{A} ser múltiplo escalar de outra, ou ainda, se existe um número real k , de modo a se ter

$$a = kc, b = kd \text{ e } e = kf$$

Quando isto acontece com a matriz A e não com a matriz \overline{A} , o sistema é incompatível, como acontece no exemplo 20². Quando não há proporcionalidade entre as linhas da matriz A , o mesmo acontece com a matriz \overline{A} , e as duas equações são de fato necessárias para descrever o sistema. A consequência disto é que o sistema é determinado, sendo seu conjunto solução constituído por um único elemento, como no exemplo 21.

Exercícios 8 *Estude cada sistema apresentando as matrizes envolvidas e, caso seja compatível, descreva o conjunto solução.*

(a) $\begin{cases} 5x + 7y = 2 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 10x - 6y = 4 \\ 15x - 9y = 6 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 10x - 6y = 4 \\ 15x - 9y = 3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 5x + y = 29 \\ 10x - 4y = 10 \end{cases}$

²Isto é equivalente a

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b & e \\ d & f \end{bmatrix} = 0$$

$$(e) \begin{cases} 5x + y = 29 \\ 10x + 2y = 58 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} 12x - 6y = 12 \\ 12x + 6y = 60 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 5x + y = 29 \\ 10x + 2y = 57 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} 12x - 6y = 12 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} 12x - 6y = 12 \\ 12x - 6y = 10 \end{cases}$$

Operações simples com números complexos

Os números complexos surgiram diante da impossibilidade de se resolver equações do tipo $x^2 + 1 = 0$ que não tem raiz real. Parte-se da definição de unidade imaginária, i , definida pela equação $i^2 = -1$, o que, de imediato, resolve aquela definição prossegue, de modo a estabelecer as operações respeitando as propriedades das operações de números reais. Assim, um número complexo é definido como sendo uma expressão (simbólica) da forma $z = a + bi$, onde a e $b \in \mathbb{R}$, onde a é denominado parte real de z , ou em símbolos $\text{Re}(z) = a$ e b é denominado parte imaginária de z , em símbolos $\text{Im}(z) = b$. Identificamos os números reais com aqueles números complexos cuja parte imaginária é nula denominando imaginário puro aqueles cuja parte real é nula. As operações, considerando os números complexos $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$ são definidas por

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \end{aligned}$$

Com essas definições pode-se observar que as propriedades listadas na observação 1, página 2. Mostraremos a propriedade (viii). Para isso, se $z = a + bi$, definimos $\bar{z} = a - bi$, denominado conjugado de z . Observe que $z\bar{z} = a^2 + b^2$ que é um número real positivo. O valor absoluto do número z é definido como sendo a raiz quadrada desse valor: $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Finalmente, se z é não nulo, isto significa que a ou b é não nulo. Neste caso, o inverso de z é o número complexo

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i$$

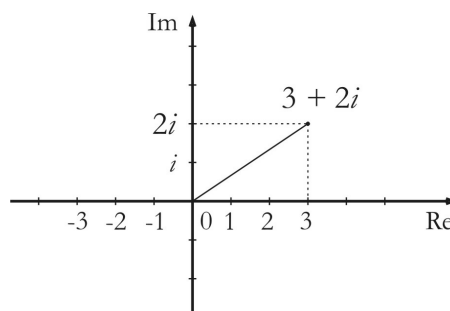
pois

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|} = \frac{z\bar{z}}{|z|} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

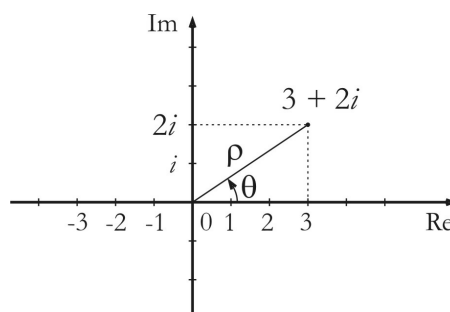
Formalmente o conjunto dos números complexos é definido assim:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a \text{ e } b \in \mathbb{R}\}$$

Graficamente os números complexos $z = a + bi$ são identificados aos pontos (a, b) do plano cartesiano \mathbb{R}^2 , o eixo x denominado eixo real e o eixo y denominado eixo imaginário como na ilustração.



Observação 9 Um número complexo $z = a + bi$ também pode ser identificado ao segmento orientado ligando a origem $(0, 0)$ ao ponto (a, b) do plano. Desse modo um número complexo pode ser descrito pela identificação do comprimento desse segmento ($\rho = |z|$) e do ângulo que ele faz com o eixo real, digamos θ , como na ilustração. Assim, $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ que é denominada forma polar do número complexo z .



Essa representação é útil, pois se pode mostrar que uma potência real de um número complexo pode ter uma fórmula simplificada³:

$$z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

e, correspondentemente, para se obter uma raiz n -ésima, a fórmula seria

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n}\right) \right).$$

Exponenciais e logarítmos

Descreveremos as exponenciais e os logarítmos como funções. As exponenciais podem ser consideradas como sendo expressões que contêm variáveis em expoentes. Pelas definições vistas (cf. definições 2, p. 3 e 5, p. 3), os valores das variáveis ficariam restritos aos números racionais. A maneira de estender os valores possíveis aos números reais utiliza séries de potências, que são generalizações de polinômios, obtidas com técnicas de

³Esta fórmula tem o nome de fórmula de Moivre.

aproximações do Cálculo Diferencial. Apelando para a intuição e para o conhecimento de funções contínuas, diremos que a exponencial é a função contínua $y = \exp(x)$, que tem a seguinte propriedade: se r é um número racional, então $\exp(r) = e^r$, sendo e o número real cujo valor é aproximadamente 2,718⁴. Uma vez feita essa definição, escreve-se $\exp(x) = e^x$, sendo que a variável x pode assumir qualquer valor real. Além disso, pode-se estender também a exponencial para outras bases diferentes do número e , mas para simplificar essa extensão, faremos uso dos logaritmos. Os logaritmos são as funções inversas das exponenciais⁵ e foi usado inicialmente como auxiliares em cálculos numéricos mais complexos, devido às suas propriedades (cf. observação 10 a seguir).

Definição 7 *O logaritmo natural ou neperiano de um número real positivo x , denotado por $\ln x$ ou $\log x$, ou ainda $\log_e x$, é definido por*

$$\ln x = y \iff e^y = x.$$

Observação 10 *O logaritmo natural tem as seguintes propriedades:*

(a) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

(c) $\ln a^r = r \ln a$

(b) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Observação 11 *Para definir exponencial em uma base a diferente de e , usa-se o fato de que as funções \ln e \exp são inversas uma da outra e a propriedade (c) da observação 10⁶. A taxa de variação de uma função exponencial $y = a^x$ em relação à variável x é proporcional a x (cf. o tópico 7 a seguir). Essa propriedade torna a exponencial muito útil em diversas áreas de pesquisa como, por exemplo, na Arqueologia (na estimativa de idades geológicas), nas Ciências Sociais e na Biologia (no estabelecimento de modelos de estudos populacionais).*

Razão, proporção, proporcionalidade

Uma razão é uma fração numérica $\frac{a}{b}$, também escrita na forma $a : b$, em ambos os casos exige-se a e $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$; uma proporção é uma igualdade de duas razões; quando duas

⁴Este valor é o valor limite da soma simbólica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$. Esse número é denominado base dos logaritmos naturais.

⁵Mais uma vez lançamos mão de conhecimentos anteriores, sem estabelecê-los aqui!

⁶A seqüência define o \log_a de um número real positivo x :

$$\begin{aligned} a^r &= e^{\ln a^r} = e^{r \ln a} \\ \therefore \log_a x &= y \iff a^y = x \\ \iff y \ln a &= \ln x \\ \iff \log_a x &= \frac{\ln x}{\ln a} \end{aligned}$$

variáveis têm uma razão constante entre elas, dizemos que é uma proporcionalidade, por exemplo: $\frac{x}{y} = k$ é uma equação que estabelece uma proporcionalidade entre as variáveis x e y . Neste último caso se diz que x varia diretamente com y ou que x é proporcional a y .

Observação 12 (Regras de Proporção) *Dada a proporção*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } a : b = c : d, \quad (*)$$

a e d são os extremos, b e c são os meios e d é a quarta proporcional entre a , b e c . Quando os meios são iguais, digamos

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

c é a terceira proporcional. Ainda com referência à proporção $()$, são válidas as seguintes propriedades:*

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad ad = bc & \text{(c)} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} & \text{(e)} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \\ \text{(b)} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} & \text{(d)} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} & \text{(f)} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \end{array}$$

Permutações e Combinações e o Binômio de Newton

8 Permutações, Combinações e Arranjos

Uma permutação de um conjunto é uma função bijetora do conjunto em si mesmo. Uma permutação nada mais é que uma ordenação dos elementos do conjunto. Assim, se um conjunto tem um elemento, então só há uma permutação, se tiver dois elementos há duas possibilidades. Digamos que o conjunto A seja constituído pelos elementos denominados de a e b . Nesse caso, podemos tomar a ordenação “ ab ” ou “ ba ”. Se acrescentamos um terceiro elemento c ao conjunto A , teremos, para cada ordenação escolhida para os elementos de A , três possibilidades de inserir o elemento c , o que indica haver seis possibilidades de ordenação para o novo conjunto: “ abc ”, “ acb ”, “ cab ”, “ bac ”, “ bca ” e “ cba ”. Note que cada ordenação define uma função bijetora do conjunto $\{a, b, c\}$ em si mesmo, por exemplo a ordenação “ bca ” corresponde à função

$$\sigma : \{a, b, c\} \longrightarrow \{a, b, c\}$$

definida por $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = c$ e $\sigma(c) = a$.

Observação 13 A seqüência do raciocínio utilizado no parágrafo anterior leva à conclusão de que o número de permutações de um conjunto com n elementos (n um número natural) pode ser obtido por um procedimento recursivo (cf. citado à página 3, no parágrafo anterior à Definição 2). Esse número é exatamente o fatorial do número n , como definido a seguir.

Definição 8 Se n é um número inteiro natural, então o fatorial de n , simbolizado por $n!$, é definido por

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ (n+1)! &= (n+1)n!, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Desse modo, temos:

$$\begin{aligned} 0! &= 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6 \\ 4! &= 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! \end{aligned}$$

O fatorial de n aumenta consideravelmente na medida que se aumenta o valor de n . A título de exemplo,

$$\begin{aligned} 10! &= 3628\ 800 \\ 20! &= 2432\ 902\ 008\ 176\ 640\ 000 \\ 45! &= 119\ 622\ 220\ 865\ 480\ 194\ 561\ 963\ 161\ 495\ 657\ 715\ 064\ 383\ 733\ 760\ 000\ 000\ 000 \end{aligned}$$

No estudo de arranjos, permutações e combinações é importante se ter em mente se a ordem de apresentação dos elementos é fundamental ou não. Já foi visto que uma permutação corresponde a uma ordenação de seus elementos, desse modo, o número de permutações possíveis é o fatorial de n caso o conjunto tenha n elementos. Dados os números naturais m e n , com $m \geq n$, se A é um conjunto com m elementos, então o número de subconjuntos de A com n elementos é denominado combinação de m n e denota-se por $\binom{m}{n}$. Por exemplo, se $A = \{a, b, c\}$, então os subconjuntos de 2 elementos de A constituem a família $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, ou seja, $\binom{3}{2} = 3$. Outro exemplo: se $B = \{a, b, c, d, e\}$, então os subconjuntos de 3 elementos de B constituem a família

$$\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}\},$$

o que indica que $\binom{5}{3} = 10$. Os elementos das famílias de subconjuntos obtidas são as combinações, por exemplo, nesta última família, $\{a, b, c\}$ é uma combinação de 3 elementos do conjunto B . Um arranjo é uma permutação de uma combinação. Desse modo, as ordenações “ abc ” e “ acb ” são arranjos diferentes de 3 elementos do conjunto B , embora os elementos considerados são os mesmos. Neste caso, para encontrar o número de arranjos

de 3 elementos do conjunto B , basta multiplicar o número de combinações obtido por $3! (= 6)$, ou seja, denotando por A_n^m o número de arranjos de n elementos de um conjunto com m elementos, temos: $A_3^5 = 10 \times 3! = 60$. De uma maneira geral, são válidas as seguintes fórmulas, considerando-se a possibilidade $n = 0$:

$$\begin{aligned}\binom{m}{n} &= \frac{m!}{n! \times (m-n)!} \\ A_n^m &= \binom{m}{n} \times n! \\ &= \frac{m!}{(m-n)!}\end{aligned}$$

O número de arranjos também pode ser considerado como o número possível de funções injetoras, como ilustra o exemplo 22 a seguir

Exemplo 22 *Sejam $A = \{0, 1\}$ e $B = \{a, b, c\}$. a tabela a seguir dá os valores das possíveis funções injetoras de A em B*

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
0	a	a	b	b	c	c
1	b	c	c	a	a	b

Outro componente importante na formação de “arranjos” de subconjuntos de um dado conjunto é a repetição de elementos. Apresentaremos apenas o arranjo com repetição. Isto corresponde ao número de possibilidades de se construir funções. Considere os conjuntos A com n elementos e B com m elementos. O número de possíveis funções de A em B corresponde ao número de arranjos com repetição de termos (ou simplesmente arranjos com repetição) de “ n m a m ”.

Exemplo 23 *Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1\}$. a tabela a seguir dá os valores das possíveis funções de B em A*

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$	$f_9(x)$
0	a	a	a	b	b	b	c	c	c
1	a	b	c	a	b	c	a	b	c

Observe que as colunas apresentam na verdade arranjos com repetição dos elementos de A , “tomados 2 a 2”. Já a próxima tabela apresenta os valores das possíveis funções de A em B

x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$	$g_5(x)$	$g_6(x)$	$g_7(x)$	$g_8(x)$
a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1

Novamente, as colunas apresentam arranjos com repetição dos elementos de B , “tomados 3 a 3”.

A notação utilizada para o número possível de arranjos com repetição de m na n é $(AR)_n^m$ e mostra-se que esse valor é dado pela fórmula $(AR)_n^m = m^n$ (confira os resultados dados nas tabelas do exemplo 23, e observe que não é necessário exigir $n \leq m$). Um exemplo curioso é o número de possibilidades de resultados da loteria esportiva. São 13 jogos com três resultados possíveis para cada jogo: coluna 1, coluna 2 ou coluna 3. Se o conjunto dos jogos for denotando por $J = \{j_1, j_2, \dots, j_{13}\}$ e o dos resultados por $R = \{c_1, c_2, c_3\}$, então o conjunto dos resultados possíveis pode ser identificado como a família das funções de J em R , cujo número de elementos é $(AR)_{13}^3 = 3^{13} = 1594323$. Outro exemplo curioso, ligado à probabilidade: Considere as possíveis datas de aniversário (sem levar em conta o ano de nascimento), representadas pelos elementos de um conjunto A com 365 elementos, e 50 pessoas representadas pelos elementos de um conjunto P . Se f é a função cujo valor é a data de aniversário de cada pessoa, $f : P \rightarrow A$, então para não haver coincidência de datas de aniversário, é necessário e suficiente que f seja injetora. O número de possibilidades para f é $(AR)_{365}^{50} = 50^{365}$, enquanto que o número de possibilidades de que não haja coincidência é, conforme a observação que precede o exemplo 22 $A_{50}^{365} = \frac{365!}{(365-50)!} = \frac{365!}{305!}$. A probabilidade de que não haja coincidência é portanto

$$\frac{A_{50}^{365}}{(AR)_{365}^{50}} = \frac{\frac{365!}{305!}}{50^{365}} \approx 2.4138 \times 10^{-469}$$

Conclusão: é quase nula a probabilidade de não haver coincidência.

9 O Binômio de Newton

O Binômio de Newton é o desenvolvimento de expressões algébricas do tipo $(a+x)^n$ com $n \in \mathbb{N}$. Usando as notações da seção 8, o Teorema do Binômio de Newton afirma que

$$\begin{aligned} (a+x)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k} \\ &= x^n + nax^{n-1} + \frac{n!}{2!(n-2)!} a^2 x^{n-2} + \dots \\ &\quad + \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k x^{n-k} + \dots + a^n \end{aligned}$$

Os exemplos a seguir ilustram a fórmula do Binômio de Newton com resultados já conhecidos.

Exemplo 24

$$(a+x)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k x^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 x^0 = \frac{0!}{0!0!} = 1$$

Exemplo 25

$$\begin{aligned}
(a+x)^1 &= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k x^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 x^1 + \binom{1}{1} a^1 x^0 \\
&= \frac{1!}{0!1!} x + \frac{1!}{1!0!} a = x + a
\end{aligned}$$

Exemplo 26

$$\begin{aligned}
(a+x)^2 &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^k x^{2-k} \\
&= \binom{2}{0} a^0 x^2 + \binom{2}{1} a^1 x^1 + \binom{2}{2} a^2 x^0 \\
&= \frac{2!}{0!2!} x^2 + \frac{2!}{1!1!} ax + \frac{2!}{2!1!} a^2 \\
&= x^2 + 2ax + a^2
\end{aligned}$$

Progressões aritméticas e geométricas

Uma função de \mathbb{N} no conjunto dos números reais é denominada sucessão de números. Para se apresentar uma tal função, basta compor a lista de seus valores, desde que se possa ter uma “lei de formação”. Assim, apresentar a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, é equivalente a construir a lista infinita

$$f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$$

ou, para simplificar, escrevendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a_n$,

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

daí o nome sucessão.

Estudaremos apenas dois tipos de sucessões de números: progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG). Para simplificar, usaremos as funções de domínio $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N} | n \neq 0\}$, para ter coerência com a expressão n -ésimo termo da sucessão (a_n) .

Definição 9 Uma sucessão $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de números reais é uma progressão aritmética (PA) se cada termo é obtido do anterior somando-se um valor constante denominado razão.

Exemplo 27 A sucessão $3, 7, 11, 15, 19, \dots$ é uma PA de razão 4.

Fórmulas:

1. n -ésimo termo: se, numa PA, $a_1 = a$ e a razão é d , então $a_n = a + (n - 1) d$.
2. A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada pela fórmula

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \\ &= \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d] \end{aligned}$$

Definição 10 *Uma sucessão $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de números reais é uma progressão geométrica (PG) se cada termo é obtido do anterior multiplicando-se por um valor constante denominado razão.*

Exemplo 28 *A sucessão $2, 6, 18, 54, 162, \dots$ é uma PG de razão 3.*

Fórmulas:

1. n -ésimo termo: se, numa PG, $a_1 = a$ e a razão é r , então $a_n = a \times r^{(n-1)}$.
2. A soma dos n primeiros termos de uma PG é dada pela fórmula

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r \neq 1 \\ &= \frac{ra_n - a}{r - 1}, r \neq 1 \end{aligned}$$