Métodos Numéricos
Integração numérica

Ana Maria A. C. Rocha

Departamento de Produção e Sistemas

Universidade do Minho

arocha@dps.uminho.pt

Objetivo da **integração numérica**

Calcular uma aproximação numérica a

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

(integral **definido**)

- função integranda f definida em $[a, b]$,
- limites a e b finitos.

Aplicação a casos em que:

▶ a primitiva de f não pode vir expressa em termos de funções elementares;

▶ ▶ a expressão da função integranda f é demasiado complicada;

▶ ▶ ▶ a função integranda é conhecida apenas para um conjunto discreto de pontos.

Integração numérica

Se $p_n(x)$ for uma aproximação polinomial a $f(x)$, então

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

é aproximado por

$$\int_a^b p_n(x)\,dx.$$

Se $e_n(x)$ é o erro da aproximação polinomial $e_n(x) = f(x) - p_n(x)$, então

$$\Rightarrow \; I = \int_a^b p_n(x)\,dx + \int_a^b e_n(x)\,dx$$

$$I = \int_a^b p_n(x)\,dx + \textbf{erro de integração}$$

Fórmulas (simples) de Newton-Cotes

O polinómio interpolador de Lagrange, de grau $\leq n$, é

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x)\, f(x_j)$$

com $f(x_j) = p_n(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$ (para os $n+1$ pontos de $[a, b]$).
Usando o polinómio $p_n(x)$ para aproximar a função $f(x)$,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b p_n(x)\, dx = \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) \right) dx \\ &= \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b L_j(x)dx \right)}_{\omega_j} f(x_j) = \sum_{j=0}^{n} \omega_j\, f(x_j) \qquad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

Fórmulas (simples) de Newton-Cotes

Os coeficientes ω_j

- dependem da escolha dos pontos $x_j \ \ (j = 0, 1, \ldots, n)$ através dos polinómios $L_j(x)$,
- são independentes dos valores de $f(x)$:

$$\begin{aligned}
\omega_j &= \int_a^b L_j(x)\,dx \\
&= \int_a^b \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}\,dx
\end{aligned}$$

Fórmulas (simples) de Newton-Cotes

Para **pontos igualmente espaçados** em $[a, b]$:

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

com $$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\Downarrow$$

Fórmulas (simples) (ou regras) de Newton-Cotes

Regra do rectângulo

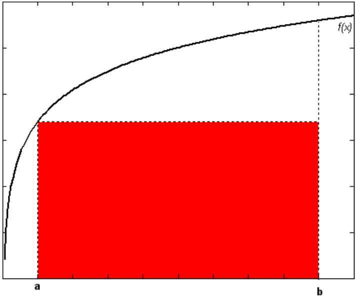
$$\textbf{n=0} \Rightarrow \textbf{1} \text{ ponto} : x_0 = a, \ L_0(x) = 1, \ \omega_0 = \int_a^b L_0(x)dx = b - a$$

de (1) $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a)}$$

com erro

$$\boxed{e_R = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta), \ \eta \in [a, b]}$$



Regra do ponto médio

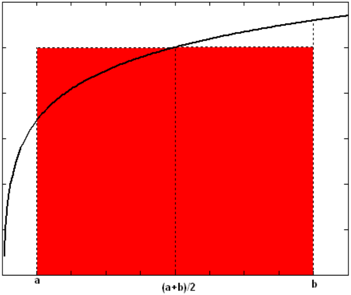
$$\textbf{n=0} \Rightarrow \textbf{1} \text{ ponto} : x_0 = \frac{a+b}{2},\; L_0(x) = 1,\; \omega_0 = \int_a^b L_0(x)dx = b - a$$

de (1) $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

com erro

$$\boxed{e_M = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta),\; \eta \in [a,b]}$$



Regra do trapézio

$$\mathbf{n=1} \ \Rightarrow \mathbf{2} \text{ pontos} : x_0 = a \text{ e } x_1 = b$$

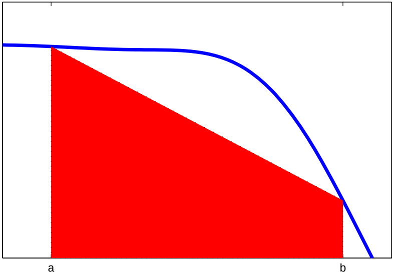
$$L_0(x) = \frac{x-b}{a-b}, \ L_1(x) = \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow \int_a^b L_0(x)dx = \int_a^b L_1(x)dx = \frac{b-a}{2}$$

de (1) $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]}$$

com erro

$$\boxed{e_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \ \eta \in [a,b]}$$



Regra de Simpson

$$\mathbf{n{=}2} \Rightarrow \mathbf{3} \text{ pontos} : x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2} \text{ e } x_2 = b$$

$$L_0(x) = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)},\ L_1(x) = \cdots,\ L_2(x) = \cdots$$

$$\int_a^b L_0(x)dx = \frac{b-a}{6} = \int_a^b L_2(x)dx$$

$$\int_a^b L_1(x)dx = \frac{4(b-a)}{6}$$

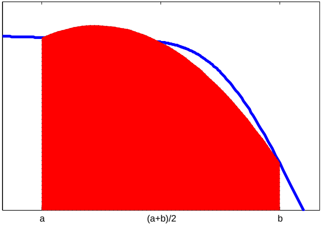
Regra de Simpson (cont.)

de (1) $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]}$$

com erro

$$\boxed{e_S = -\frac{(b-a)^5}{32}\frac{1}{90}f^{(iv)}(\eta), \eta \in [a,b]}$$



Regra dos três oitavos

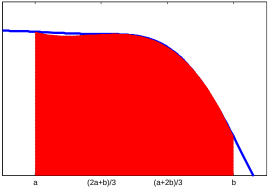
$$\mathbf{n=3} \Rightarrow \mathbf{4} \text{ pontos} : x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{3},\ x_2 = a + 2\frac{b-a}{3},\ x_3 = b$$

de (1) $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right]}$$

com erro

$$\boxed{e_{3/8} = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(iv)}(\eta), \eta \in [a, b]}$$



Erros de truncatura

Erros das fórmulas de integração numérica:

• se a derivada de ordem $n+1$ de $f(x)$ é contínua em $[a,b]$ e se os $x_j,\ j=0,1,\ldots,n$ pertencem ao intervalo $[a,b]$, $\Rightarrow \exists\ \eta$ em $[a,b]$ tal que o erro de aproximar $f(x)$ pelo polinómio $p_n(x)$ é

$$e_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!},$$

• e, o **erro** na integração é dado por:

$$\textbf{erro} = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)f^{(n+1)}(\eta)dx$$

Esta fórmula pode ser simplificada, usando o teorema do valor médio.

Considerações sobre o erro de truncatura

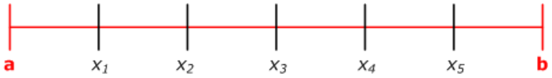
- O comportamento do **erro** depende da derivada de ordem $n+1$ da função, dependendo também do valor seleccionado para n;
- se o resultado obtido por uma fórmula (simples) de Newton-Cotes não é satisfatório - erro de truncatura muito grande -, é possível aumentar o valor de $n \Leftrightarrow$ aumentar o número de pontos e o grau do polinómio que aproxima $f(x)$;
- não é sempre verdade que quanto maior for n, maior é a precisão do resultado numérico;
- para polinómios de grau elevado, os erros da aproximação podem ser também grandes;
- para diminuir o erro da integração, podemos diminuir o valor de $(b-a)$ **?** (!! o intervalo é fixo !!)

Fórmulas compostas

Solução para melhorar a aproximação ao integral:

1. dividir o intervalo (fixo) $[a, b]$ em subintervalos que se podem tornar tão pequenos quanto for necessário;
2. em cada subintervalo aproximar $f(x)$ por um polinómio adequado, de grau baixo.

Por exemplo, para $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_5 < b$:



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} \cdots + \int_{x_1}^{x_2} \cdots + \int_{x_2}^{x_3} \cdots + \int_{x_3}^{x_4} \cdots + \int_{x_4}^{x_5} \cdots + \int_{x_5}^{b} \cdots$$

$\Rightarrow$ fórmulas compostas

Fórmula composta do trapézio

Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais de comprimento $h = \dfrac{b-a}{n}$,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \right\}$$

com $x_j = a + jh$ e $j = 0, 1, \ldots, n$. Usando a regra do trapézio em cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \left[f(x_j) + f(x_{j+1}) \right] = \frac{1}{2} h \left[f_j + f_{j+1} \right]$$

com erro

$$e_{T_j} = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_j), \text{ com } \eta_j \in [x_j, x_{j+1}].$$

Fórmula composta do trapézio

Somando as contribuições dos n subintervalos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x)dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} h \left[f_j + f_{j+1} \right] \right\} = \frac{1}{2} h \left[f_0 + f_1 + f_1 + f_2 \right.$$

$$\left. + \quad f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-2} + f_{n-1} + f_{n-1} + f_n \right]$$

$$\boxed{T(h) = \frac{h}{2} \left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n \right]}$$

Fórmula composta do trapézio

Somando também os erros:

$$\begin{aligned} e_{CT} &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ -\tfrac{h^3}{12} f''(\eta_j) \right\} \\ &= -\tfrac{h^3}{12} \{ f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1}) \} \\ &= -\frac{h^2}{12} \frac{(b-a)}{n} \, n \, f''(\eta) \\ &= -\frac{h^2}{12} (b-a) f''(\eta) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{e_{CT} = -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\eta), \quad \eta \in [a, b]}$$

Fórmula composta de Simpson

Cada contribuição necessita de dois subintervalos. Assim, $n = 2m$; $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{b-a}{2m}$ e existem m contribuições. Em cada **par** de subintervalos usa-se a regra de Simpson:

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)dx &\approx \tfrac{x_{j+1}-x_{j-1}}{6}\left[f_{j-1} + 4f_j + f_{j+1}\right] \\ &= \tfrac{2h}{6}\left[f_{j-1} + 4f_j + f_{j+1}\right] \end{aligned}$$

com erro

$$e_{S_j} = -\frac{(2h)^5}{32 \times 90} f^{(iv)}(\eta_j), \text{ com } \eta_j \in [x_{j-1}, x_{j+1}].$$

Fórmula composta de Simpson

Somando as m contribuições:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{m \text{ termos}} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)dx \\
&\approx \sum_{j=1(2 \text{ em } 2)}^{n-1} \left\{ \frac{h}{3} \left[f_{j-1} + 4f_j + f_{j+1} \right] \right\} \\
&= \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2 + f_2 + 4f_3 + f_4 + f_4 + 4f_5 + f_6 \\
&\quad + \cdots + f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]
\end{aligned}$$

$$\boxed{S(h) = \frac{h}{3} \left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n \right]}$$

Fórmula composta de Simpson

Somando os erros:

$$\begin{aligned} e_{CS} &= \sum_{m \text{ termos}} \left\{ -\frac{2^5\, h^5}{32 \times 90} f^{(iv)}(\eta_j) \right\} \\ &= -\frac{h^5}{90} \left\{ f^{(iv)}(\eta_1) + f^{(iv)}(\eta_3) + f^{(iv)}(\eta_5) + \cdots + f^{(iv)}(\eta_{n-1}) \right\} \\ &= -\frac{h^4}{90} \frac{(b-a)}{2m} \, m \, f^{(iv)}(\eta) \\ &= -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(iv)}(\eta) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{e_{CS} = -\frac{h^4}{180}(b-a) f^{(iv)}(\eta), \quad \eta \in [a, b]}$$

Fórmula composta dos três oitavos

Cada contribuição necessita de três subintervalos. Assim, $n = 3r$; $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{3r}$ e existem r contribuições. Em cada conjunto **de 3** subintervalos usa-se a regra dos 3 oitavos:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+2}} f(x)dx \approx \frac{x_{j+2} - x_{j-1}}{8} [f_{j-1} + 3f_j + 3f_{j+1} + f_{j+2}]$$
$$= \frac{3h}{8} [f_{j-1} + 3f_j + 3f_{j+1} + f_{j+2}]$$

com erro

$$e_{3/8_j} = -\frac{(3h)^5}{6480} f^{(iv)}(\eta_j), \text{ com } \eta_j \in [x_{j-1}, x_{j+2}].$$

Fórmula composta dos três oitavos

Somando todas as r contribuições:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{r \text{ termos}} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+2}} f(x)dx$$

$$\approx \sum_{j=1(3 \text{ em } 3)}^{n-2} \left\{ \frac{3h}{8} \left[f_{j-1} + 3f_j + 3f_{j+1} + f_{j+2} \right] \right\}$$

$$= \frac{3h}{8} [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3 + f_3 + 3f_4 + 3f_5 + f_6$$

$$\cdots + f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n]$$

$$\boxed{3/8(h) = \frac{3h}{8} [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + \cdots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n]}$$

Fórmula composta dos três oitavos

Somando os erros:

$$\begin{aligned}
e_{CS} &= \sum_{r \text{ termos}} \left\{ -\frac{(3h)^5}{6480} f^{(iv)}(\eta_j) \right\} \\
&= -\frac{(3h)^5}{6480} \left\{ f^{(iv)}(\eta_1) + f^{(iv)}(\eta_4) + f^{(iv)}(\eta_7) + \cdots + f^{(iv)}(\eta_{n-1}) \right\} \\
&= -\frac{81 \times 3\, h^4}{6480} \, \frac{(b-a)}{3r} \, r\, f^{(iv)}(\eta) \\
&= -\frac{h^4}{80}(b-a) f^{(iv)}(\eta)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{e_{C3/8} = -\frac{h^4}{80}(b-a) f^{(iv)}(\eta), \quad \eta \in [a, b]}$$

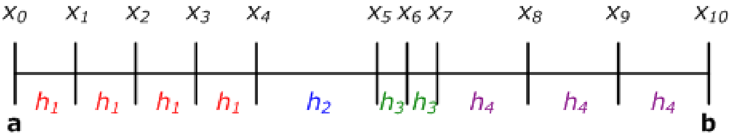
Aplicação das fórmulas de integração a intervalos com amplitudes não constantes

- O que se deve fazer quando os pontos do intervalo $[a, b]$ não estão todos igualmente espaçados **?**

Solução:

agrupar subintervalos com amplitudes iguais e aplicar em cada grupo uma fórmula de integração.

Por exemplo:



Aplicação das fórmulas de integração a intervalos com amplitudes não constantes

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_{10}} f(x)dx \\
&= \int_{x_0}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_5} f(x)dx + \int_{x_5}^{x_7} f(x)dx + \int_{x_7}^{x_{10}} f(x)dx \\
&\ \text{por exemplo} \\
&\approx \underbrace{S(h_1)}_{n=4} + \underbrace{T(h_2)}_{n=1} + \underbrace{S(h_3)}_{n=2} + \underbrace{3/8(h_4)}_{n=3}
\end{aligned}
$$

Como escolher a melhor fórmula

- As diferentes fórmulas de Newton-Cotes podem ser usadas no intervalo de integração $[a, b]$, desde que cada uma (simples ou composta) seja usada em regiões com pontos igualmente espaçados.
- Em cada subintervalo de pontos igualmente espaçados, a fórmula mais adequada deve ser escolhida tendo em conta o número de pontos $(n+1)$ ou subintervalos (n) e a precisão desejada.

Condição mais adequada de aplicabilidade:

Se o número de subintervalos n

- é múltiplo de 2 - usa-se Simpson
- é múltiplo de 3 - usa-se 3 oitavos
- não é múltiplo de 2, nem é múltiplo de 3 - usa-se trapézio.

Como escolher a melhor fórmula (cont.)

Em cada um dos casos, a escolha deve ter em conta os erros de truncatura:

$$e_{CT} = -\frac{h^2}{12}(b-a)\, f''(\eta), \qquad e_{CT} \leq \frac{h^2}{12}(b-a)\, M_2$$

$$e_{CS} = -\frac{h^4}{180}(b-a)\, f^{(iv)}(\eta), \qquad e_{CS} \leq \frac{h^4}{180}(b-a)\, M_4$$

$$e_{C3/8} = -\frac{h^4}{80}(b-a)\, f^{(iv)}(\eta), \qquad e_{C3/8} \leq \frac{h^4}{80}(b-a)\, M_4$$

$\eta \in [a, b]$

M_2 majorante de f''

M_4 majorante de $f^{(iv)}$

Exercício 1

Dada a tabela de valores da função f,

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.9	1.2	1.5	1.6	1.8	2.1
f_i	1	1.1	1.2	1.3	1.5	1.7	2.0	2.5	2.7	3.0	3.5	4.0	5.0

1. calcule o melhor possível, usando toda a informação da tabela

$$\int_0^{2.1} f(x)dx$$

2. estime o erro de truncatura cometido na aproximação calculada na alínea anterior.
3. Selecione o maior número possível de pontos da tabela por forma a obter um conjunto de pontos igualmente espaçados, para calcular $\int_0^{2.1} f(x)dx$ usando **uma única** fórmula composta de integração.

Resolução do Exercício 1

(a) Espaçamentos não constantes $\Rightarrow$

combinar as várias fórmulas de acordo com o número de subintervalos em cada conjunto de pontos igualmente espaçados

$$\int_0^{2.1} f(x)dx = \int_0^{0.6} f(x)dx + \int_{0.6}^{1.5} f(x)dx + \int_{1.5}^{1.6} f(x)dx + \int_{1.6}^{1.8} f(x)dx + \int_{1.8}^{2.1} f(x)dx$$

$$\int_0^{2.1} f(x)dx \approx \underbrace{S(0.1)}_{n=6} + \underbrace{3/8(0.3)}_{n=3} + \underbrace{T(0.1)}_{n=1} + \underbrace{T(0.2)}_{n=1} + \underbrace{T(0.3)}_{n=1}$$

Resolução do Exercício 1 (cont.)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2.1} f(x)dx &\approx \frac{0.1}{3}\left[1 + 4(1.1) + 2(1.2) + 4(1.3) + 2(1.5) + 4(1.7) + 2.0\right] \\
&+ \frac{1.5-0.6}{8}\left[2 + 3(2.5) + 3(2.7) + 3.0\right] \\
&+ \frac{0.1}{2}\left[3.0 + 3.5\right] + \frac{0.2}{2}\left[3.5 + 4.0\right] + \frac{0.3}{2}\left[4.0 + 5.0\right] \\
&\approx 0.8267 + 2.3175 + 0.325 + 0.75 + 1.35 = 5.5692
\end{aligned}$$

Resolução do Exercício 1 (cont.)

(b) O cálculo do erro da alínea a), envolve a soma dos erros cometidos pela aplicação de cada uma das fórmulas de integração.

– Para $[0, 0.6] \rightarrow e_{CS}(0.1) = -\dfrac{(0.1)^4}{180}(0.6-0)f^{(iv)}(\eta),\ \eta \in [0, 0.6]$

x_i	f_i	dd$_1$	dd$_2$	dd$_3$	dd$_4$
0	1				
		1			
0.1	1.1		0		
		1		0	
0.2	1.2		0		41.6668
		1		16.6667	
0.3	1.3		5		−83.3335
		2		−16.6667	
0.4	1.5		0		83.3335
		2		16.6667	
0.5	1.7		5		
		3			
0.6	2.0				

$f^{(iv)}(\eta) \approx \max|\text{dd}_4| \times 4! \leq 83.3335 \times 4!$

$|e_{CS}(0.1)| \leq \dfrac{(0.1)^4}{180}(0.6) \times 83.3335 \times 4! = 0.0007$

Resolução do Exercício 1 (cont.)

– Para $[0.6, 1.5] \rightarrow e_{C3/8}(0.3) = -\frac{(0.3)^4}{80}(1.5 - 0.6)f^{(iv)}(\eta),\ \eta \in [0.6, 1.5]$

$$
\begin{array}{cccccc}
x_i & f_i & \mathrm{dd}_1 & \mathrm{dd}_2 & \mathrm{dd}_3 & \mathrm{dd}_4 \\
0.6 & 2.0 & & & & \\
 & & 1.6667 & & & \\
0.9 & 2.5 & & -1.6667 & & \\
 & & 0.6667 & & 2.4691 & \\
1.2 & 2.7 & & 0.5555 & & 11.023 \\
 & & 1 & & 13.4921 & \\
1.5 & 3.0 & & 10 & & \\
 & & 5 & & & \\
1.6 & 3.5 & & & &
\end{array}
$$

$f^{(iv)}(\eta) \approx |\mathrm{dd}_4| \times 4! \leq 11.023 \times 4!$

$|e_{C3/8}(0.3)| \leq \frac{(0.3)^4}{80}(0.9) \times 11.023 \times 4! = 0.024107$

Resolução do Exercício 1 (cont.)

– Para $[1.5, 1.6] \rightarrow e_{CT}(0.1) = -\dfrac{(0.1)^2}{12}(1.6 - 1.5)f''(\eta),\ \eta \in [1.5, 1.6]$

x_i	f_i	dd_1	dd_2
1.5	3.0		
		5	
1.6	3.5		-8.3333
		2.5	
1.8	4.0		

$f''(\eta) \approx |dd_2| \times 2! \leq 8.3333 \times 2!$

$$|e_{CT}(0.1)| \leq \frac{(0.1)^2}{12}(0.1) \times 8.3333 \times 2! = 0.0013889$$

– Para $[1.6, 1.8] \rightarrow e_{CT}(0.2) = -\dfrac{(0.2)^2}{12}(1.8 - 1.6)f''(\eta),\ \eta \in [1.6, 1.8]$

$f''(\eta) \approx |dd_2| \times 2! \leq 8.3333 \times 2!$

$$|e_{CT}(0.2)| \leq \frac{(0.2)^2}{12}(0.2) \times 8.3333 \times 2! = 0.011111$$

Resolução do Exercício 1 (cont.)

– Para $[1.8, 2.1] \rightarrow e_{CT}(0.3) = -\frac{(0.3)^2}{12}(2.1 - 1.8) f''(\eta), \ \eta \in [1.8, 2.1]$

x_i	f_i	dd$_1$	dd$_2$
1.6	3.5		
		2.5	
1.8	4.0		1.6666
		3.3333	
2.1	5.0		

$f''(\eta) \approx |\mathrm{dd}_2| \times 2! \leq 1.6666 \times 2!$

$|e_{CT}(0.3)| \leq \frac{(0.3)^2}{12}(0.3) \times 1.6666 \times 2! = 0.0075$

Logo, o erro de truncatura total é dado por:

$$|e_T| \leq |e_{CS}(0.1)| + |e_{C3/8}(0.3)| + |e_{CT}(0.1)| + |e_{CT}(0.2)| + |e_{CT}(0.3)|$$

$$e_T \leq 0.044807$$

Resolução do Exercício 1 (cont.)

(c) Para selecionar o maior número possível de pontos da tabela por forma a obter um conjunto de pontos igualmente espaçados
$\Rightarrow$ por escolher o maior h usado anteriormente, ou seja $h = 0.3$
$\Rightarrow$ verificar se se consegue obter um conjunto de pontos igualmente espaçado entre 0 e 2.1 (caso não seja possível, usar múltiplos desse valor)

Como isso é possível, então usam-se os pontos da seguinte tabela:

x_i	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
f_i	1	1.3	2.0	2.5	2.7	3.0	4.0	5.0

Como tem 7 subintervalos, deve ser usada a fórmula composta do trapézio para calcular

$$\int_0^{2.1} f(x)dx \approx \frac{0.3}{2}[1 + 2(1.3) + 2(2.0) + 2(2.5) + 2(2.7) + 2(3.0) + 2(4.0) + 5.0]$$
$$\approx 5.55$$

Exercício 2

Considere a seguinte função dada pela tabela

x_i	1	1.15	1.3	1.45	1.6	1.75	1.9
$f(x_i)$	a	16.8	19.4	22	b	27.6	30.7

e seja $I = \int_1^{1.9} f(x)\,dx$. Ao utilizar as fórmulas compostas de Simpson e dos três oitavos foram obtidas as seguintes aproximações a I, respetivamente $S(0.15) = 20.005$ e $3/8(0.15) = 20.030625$. Determine os valores de a e b. Use 6 casas decimais nos cálculos.

Resolução de Exercício 2

$S(0.15) = 20.005$

$S(0.15) = \frac{0.15}{3}(a + 4 \times 16.8 + 2 \times 19.4 + 4 \times 22 + 2b + 4 \times 27.6 + 30.7) = 20.005 \iff a + 2b = 65$

$3/8(0.15) = 20.030625$

$3/8(0.15) = \frac{3 \times 0.15}{8}(a + 3 \times 16.8 + 3 \times 19.4 + 2 \times 22 + 3b + 3 \times 27.6 + 30.7) = 20.030625 \iff a + 3b = 90$

Resolvendo o sistema por EGPP

$$\begin{cases} a + 2b = 65 \\ a + 3b = 90 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 15 \\ b = 25 \end{cases}$$