Programação Linear - algoritmo simplex: degenerescência

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

15 de Março de 2023

antes

- O método Simplex foi aplicado para resolver um problema de programação linear.

Guião

- Há situações especiais que é necessário analisar com detalhe, para definir completamente as decisões e acções do algoritmo simplex:
  - vértice admissível inicial não disponível;
  - vértices degenerados.

depois

- Vemos a implementação do algoritmo simplex usando matrizes.

Algoritmo 1 algoritmo simplex (esquema)

```
input: A, b, c                                                    ▷ modelo
  if existir solução admissível then
      construir solução admissível inicial
  else
      return problema é impossível
  end if
  while existirem variáveis atractivas do
      seleccionar coluna pivô: é a da variável mais atractiva
      if todos coeficientes coluna pivô ≤ 0 then
          return solução óptima é ilimitada
      else
          seleccionar linha pivô: é a da menor razão
                    ▷ (em caso de empate, próxima solução é degenerada)
      end if
      efectuar pivô para obter nova solução         ▷ eliminação de Gauss
  end while
  return solução óptima
```

Finitude do algoritmo simplex

- Quando não há degenerescência, o algoritmo simplex converge para a solução óptima (finita) num número finito de pivôs, porque ...

Finitude do algoritmo simplex

- Quando não há degenerescência, o algoritmo simplex converge para a solução óptima (finita) num número finito de pivôs, porque ... a soma de um número infinito de valores positivos (há um aumento do valor da função objectivo em cada pivô) não pode ter um valor finito.

Finitude do algoritmo simplex

- Quando não há degenerescência, o algoritmo simplex converge para a solução óptima (finita) num número finito de pivôs, porque ... a soma de um número infinito de valores positivos (há um aumento do valor da função objectivo em cada pivô) não pode ter um valor finito.

- Quando há degenerescência, o algoritmo simplex pode entrar em ciclo quando se usam algumas regras de selecção do elemento pivô.

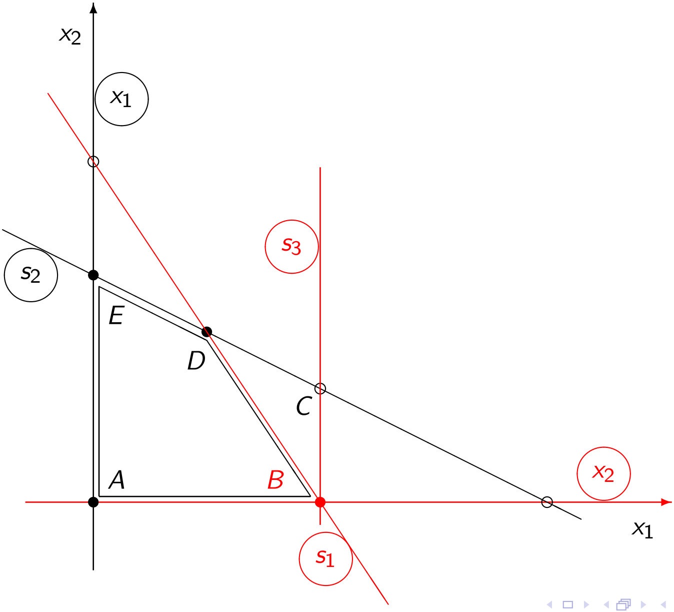
Finitude do algoritmo simplex

- Quando não há degenerescência, o algoritmo simplex converge para a solução óptima (finita) num número finito de pivôs, porque ... a soma de um número infinito de valores positivos (há um aumento do valor da função objectivo em cada pivô) não pode ter um valor finito.

- Quando há degenerescência, o algoritmo simplex pode entrar em ciclo quando se usam algumas regras de selecção do elemento pivô.
- Mas há uma regra que garante a convergência.

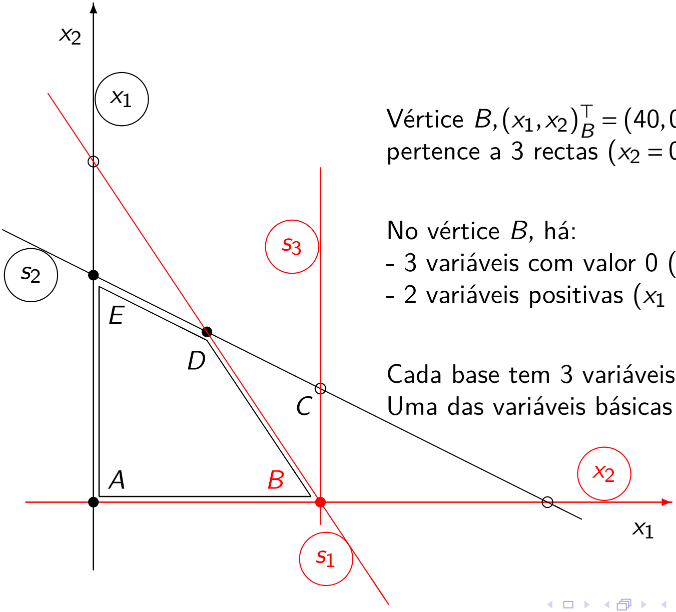
Conteúdo

Exemplo: 3 rectas no espaço a 2 dimensões



Ver mais

Exemplo: 3 rectas no espaço a 2 dimensões



Vértice $B, (x_1, x_2)_B^\top = (40, 0)^\top$, é degenerado; pertence a 3 rectas ($x_2 = 0, s_1 = 0$ e $s_3 = 0$).

No vértice B, há:
- 3 variáveis com valor 0 (x_2, s_1 e s_3) e
- 2 variáveis positivas (x_1 e s_2).

Cada base tem 3 variáveis básicas.
Uma das variáveis básicas é nula.

Ver mais

Vértice degenerado: caracterização no caso geral

- Vimos vértices determinados pela intersecção de $(n-m)$ hiperplanos.

Vértice degenerado: número maior de hiperplanos

- Um vértice *degenerado* pertence a mais do que $(n-m)$ hiperplanos.

- Ocorre quando, depois de fixar $(n-m)$ variáveis não-básicas em 0, na solução do sistema de m equações em ordem a m variáveis básicas, há, pelo menos, uma variável básica com o valor 0.

Vértice degenerado: várias bases, a mesma solução básica ($\equiv$ vértice)

- Um vértice é *degenerado* se várias bases (cada uma correspondendo a um quadro simplex diferente) fornecerem a mesma solução básica.

Exemplo: 3 bases diferentes, a mesma solução básica

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	$\boxed{2}$	1	0	-3	0
s_2	0	0	2	0	1	-1	40
x_1	0	1	0	0	0	1	40
z	1	0	-10	0	0	12	480

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	0
s_2	0	0	0	-1	1	2	40
x_1	0	1	0	0	0	1	40
z	1	0	0	5	0	-3	480

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_2	0	0	4/3	-1/3	1	0	40
s_3	0	0	-2/3	-1/3	0	1	0
x_1	0	1	2/3	1/3	0	0	40
z	1	0	-2	4	0	0	480

Um quadro simplex corresponde a um *vértice degenerado* se houver uma ou mais variáveis básicas com valor 0.

O pivô entre o Quadro 1 e o Quadro 2 é um *pivô degenerado*.

Solução básica (≡ vértice) é sempre $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^\top = (40, 0, 0, 40, 0)^\top$.

Exemplo: resolução

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	$\boxed{3}$	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	40
z	1	-12	-10	0	0	0	0

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	0	1	2/3	1/3	0	0	40
s_2	0	0	$\boxed{4/3}$	-1/3	1	0	40
s_3	0	0	-2/3	-1/3	0	1	0
z	1	0	-2	4	0	0	480

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

Solução óptima $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^\top = (20, 30, 0, 0, 20)^\top$.

Exemplo de execução do algoritmo simplex com ciclo

- O uso das seguintes regras no exemplo devido a Kuhn (citado em Balinski e Tucker (1969)) conduz a um ciclo.

Regras de selecção do elemento pivô:

- seleccionar para coluna pivô a **coluna com o coeficiente mais negativo** na linha da função objectivo;
- seleccionar para linha pivô a **linha com menor razão** e, em caso de empate, seleccionar a linha mais em cima.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	-2	-9	1	9	1	0	0	0
s_2	0	$1/3$	$\mathbf{1}$	$-1/3$	-2	0	1	0	0
s_3	0	2	3	-1	-12	0	0	1	2
z	1	-2	-3	1	12	0	0	0	0

a)

Exemplo: pivôs 1 e 2 do ciclo

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	-2	-9	1	9	1	0	0	0
s_2	0	$1/3$	**1**	$-1/3$	-2	0	1	0	0
s_3	0	2	3	-1	-12	0	0	1	2
z	1	-2	-3	1	12	0	0	0	0

$a)$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	**1**	0	-2	-9	1	9	0	0
x_2	0	**1/3**	1	$-1/3$	-2	0	1	0	0
s_3	0	1	0	0	-6	0	-3	1	2
z	1	-1	0	0	6	0	3	0	0

$b)$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
x_1	0	1	0	-2	-9	1	9	0	0
x_2	0	0	1	$1/3$	**1**	$-1/3$	-2	0	0
s_3	0	0	0	2	3	-1	-12	1	2
z	1	0	0	-2	-3	1	12	0	0

$c)$

Exemplo: pivôs 3 e 4 do ciclo

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
x_1	0	1	0	-2	-9	1	9	0	0
x_2	0	0	1	$1/3$	**1**	$-1/3$	-2	0	0
s_3	0	0	0	2	3	-1	-12	1	2
z	1	0	0	-2	-3	1	12	0	0

$c)$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
x_1	0	1	9	**1**	0	-2	-9	0	0
x_4	0	0	1	**1/3**	1	$-1/3$	-2	0	0
s_3	0	0	-3	1	0	0	-6	1	2
z	1	0	3	-1	0	0	6	0	0

$d)$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	1	9	1	0	-2	-9	0	0
x_4	0	$-1/3$	-2	0	1	$1/3$	**1**	0	0
s_3	0	-1	-12	0	0	2	3	1	2
z	1	1	12	0	0	-2	-3	0	0

$e)$

Exemplo: pivôs 5 e 6 do ciclo

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	1	9	1	0	-2	-9	0	0
x_4	0	$-1/3$	-2	0	1	$1/3$	**1**	0	0
s_3	0	-1	-12	0	0	2	3	1	2
z	1	1	12	0	0	-2	-3	0	0

$e)$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-2	-9	1	9	**1**	0	0	0
s_2	0	$-1/3$	-2	0	1	**1/3**	1	0	0
s_3	0	0	-6	0	-3	1	0	1	2
z	1	0	6	0	3	-1	0	0	0

$f)$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	-2	-9	1	9	1	0	0	0
s_2	0	$1/3$	1	$-1/3$	-2	0	1	0	0
s_3	0	2	3	-1	-12	0	0	1	2
z	1	-2	-3	1	12	0	0	0	0

$g)$

Regra de Bland

Teorema (Bland(1977))

- *Seleccionar para coluna pivô a **coluna com coeficiente negativo e menor índice** e para linha pivô a **linha com menor razão e menor índice** assegura a finitude do algoritmo simplex.*

Antes de fazer a prova do Teorema de Bland, vamos mostrar:

- a direcção de uma aresta num pivô é ortogonal a todas as linhas da matriz $\boldsymbol{A}$; e
- num pivô degenerado, a linha da função objectivo também é ortogonal a uma direcção relacionada.

---

ver Bland, R. "New finite pivoting rules for the simplex method". Mathematics of Operations Research 2 (2): 103 - 107, 1977. doi:10.1287/moor.2.2.103

Direcção da aresta e linhas da matriz $\boldsymbol{A}$ são ortogonais

- Dado o modelo $\max z = \boldsymbol{cx}$, suj. a $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$.

Lema

- *Seja $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ o vector que indica a direcção de uma aresta entre os vértices $\boldsymbol{x}_I$ e $\boldsymbol{x}_F$. Então*

$$\boldsymbol{Ad} = \boldsymbol{0}$$

- Relembrar que, num pivô, há uma só variável não-básica que aumenta, as restantes se mantêm nulas, e que as variáveis básicas se alteram de acordo com o sistema de equações.

Direcção da aresta e linhas da matriz $\boldsymbol{A}$ são ortogonais

Demonstração.

- Os pontos da aresta no pivô são:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_I + \theta\ \boldsymbol{d}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$$

- Quando $\theta = \theta_{\max}$, o ponto é o vértice $\boldsymbol{x}_F$.
- Ambos os vértices obedecem ao sistema de equações:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_I = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_F = \boldsymbol{b}$$

- Como todos os pontos da aresta pertencem ao domínio:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_I + \theta \boldsymbol{d}) &= \boldsymbol{b}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{\max} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_I + \boldsymbol{A}\theta \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{b}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{\max} \\ \theta \boldsymbol{A}\boldsymbol{d} &= \boldsymbol{0}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{\max} \end{aligned}$$

- Como a relação é verdadeira para valores de θ positivos:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$$

Exemplo: direcção da aresta $[CD]$ (s_3 aumenta)

- No vértice C, as equações que relacionam o valor das variáveis são:

$$\left\{\begin{array}{lcrrr} x_2 & = & 15 & -0.5\ s_1 & +1.5\ s_3 \\ s_2 & = & 20 & +1\ s_1 & -2\ s_3 \\ x_1 & = & 30 & & -1\ s_3 \end{array}\right.$$

- para caminhar para o vértice D, a variável não-básica s_3 aumenta e s_1 mantém-se igual a 0:

$$\left\{\begin{array}{lcrr} x_2 & = & 15 & +1.5\ s_3 \\ s_2 & = & 20 & -2\ s_3 \\ x_1 & = & 30 & -1\ s_3 \end{array}\right.$$

- o que é equivalente ao seguinte conjunto de equações usando θ para representar o incremento:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta . \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Exemplo: direcção da aresta $[CD]$ (s_3 aumenta)

- No vértice C, as equações que relacionam o valor das variáveis são:

$$\begin{cases} x_2 = 15 - 0.5\, s_1 + 1.5\, s_3 \\ s_2 = 20 + 1\, s_1 - 2\, s_3 \\ x_1 = 30 - 1\, s_3 \end{cases}$$

- para caminhar para o vértice D, a variável não-básica s_3 aumenta e s_1 mantém-se igual a 0:

$$\begin{cases} x_2 = 15 + 1.5\, s_3 \\ s_2 = 20 - 2\, s_3 \\ x_1 = 30 - 1\, s_3 \end{cases}$$

- o que é equivalente ao seguinte conjunto de equações usando θ para representar o incremento:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta. \begin{pmatrix} \\ \\ 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo: direcção da aresta $[CD]$ (s_3 aumenta)

- No vértice C, as equações que relacionam o valor das variáveis são:

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x_2 & = & 15 & -0.5\ s_1 & +1.5\ s_3 \\ s_2 & = & 20 & +1\ s_1 & -2\ s_3 \\ x_1 & = & 30 & & -1\ s_3 \end{array}\right.$$

- para caminhar para o vértice D, a variável não-básica s_3 aumenta e s_1 mantém-se igual a 0:

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x_2 & = & 15 & +1.5\ s_3 \\ s_2 & = & 20 & -2\ s_3 \\ x_1 & = & 30 & -1\ s_3 \end{array}\right.$$

- o que é equivalente ao seguinte conjunto de equações usando θ para representar o incremento:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta. \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo: direcção da aresta $[CD]$ (s_3 aumenta)

- No vértice C, as equações que relacionam o valor das variáveis são:

$$\begin{cases} x_2 = 15 - 0.5\, s_1 + 1.5\, s_3 \\ s_2 = 20 + 1\, s_1 - 2\, s_3 \\ x_1 = 30 - 1\, s_3 \end{cases}$$

- para caminhar para o vértice D, a variável não-básica s_3 aumenta e s_1 mantém-se igual a 0:

$$\begin{cases} x_2 = 15 + 1.5\, s_3 \\ s_2 = 20 - 2\, s_3 \\ x_1 = 30 - 1\, s_3 \end{cases}$$

- o que é equivalente ao seguinte conjunto de equações usando θ para representar o incremento:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta. \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z = 510 + \theta.\ 3$$

Direcção $\boldsymbol{d}$ com coeficientes do quadro simplex

- A prova usa os coeficientes do quadro simplex. Os elementos do vector $-\boldsymbol{d}$ têm o mesmo sinal dos coeficientes do quadro simplex:

coeficiente	variável
> 0	diminui
< 0	aumenta
$= 0$	mantém-se

- Exemplo: Linhas de $\boldsymbol{A}$ do quadro simplex do vértice C e direcção $-\boldsymbol{d}$ do pivô com aumento da variável s_3 :

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\cline{2-6}
 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & -1.5 & \\
 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
\cline{2-6}
-\boldsymbol{d} = [& 1 & -1.5 & 0 & +2 & -1 &]^\top
\end{array}
$$

- O segundo elemento do vector $-\boldsymbol{d}$ indica que x_2 aumenta 1.5 unidades por cada unidade de aumento de s_3 no pivô.
- Exercício: verificar que $\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}$.

Matriz $\boldsymbol{A}$ aumentada com a linha da função objectivo $\boldsymbol{c}$

- O modelo é equivalente a $\max z$, suj. a $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, $z - \boldsymbol{cx} = 0$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$.
- Vamos designar a matriz aumentada por $\boldsymbol{A}'$, e o vector das variáveis $\boldsymbol{x}$ aumentado com z por $\boldsymbol{x}'$.

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}'$$

- Exemplo:

$$\begin{array}{r|cccccc|l}
 & z & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & -1.5 & \\
 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & +2 & \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & +1 & \\
 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & -3 & \\
\hline
-\boldsymbol{d}' = [& -3 & +1 & -1.5 & 0 & +2 & -1 &]^\top
\end{array}$$

- O primeiro elemento do vector $-\boldsymbol{d}'$ indica que z aumenta 3 unidades por cada unidade de aumento de s_3 no pivô.

Pivô degenerado: valor da função objectivo

- Num pivô degenerado, o valor da função objectivo $\tilde{z}$ não se altera, pelo que $\boldsymbol{b}'_{\boldsymbol{x}_I} = \boldsymbol{b}'_{\boldsymbol{x}_F}$.
- Portanto, $\boldsymbol{A}'(-\boldsymbol{d}') = \boldsymbol{0}$ (todas as linhas da matriz $\boldsymbol{A}'$ são ortogonais ao vector $-\boldsymbol{d}'$).
- Exercício: verificar para o seguinte exemplo:

$$
\begin{array}{r|cccccc|l}
 & z & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & -1.5 & \\
 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & +2 & \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & +1 & \\
 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & -3 & \\
\hline
-\boldsymbol{d}' = [& -3 & +1 & -1.5 & 0 & +2 & -1 &]^\top
\end{array}
$$

- (diz-se que $-\boldsymbol{d}'$ pertence ao complemento ortogonal do espaço das linhas de $\boldsymbol{A}'$).

Prova do Teorema de Bland

Demonstração.

Prova por contradição (Bland(1977)):

- Vamos assumir que:
  - P_1) a execução com a regra de Bland origina um ciclo; e
  - P_2) $\boldsymbol{A}'(-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}$, como acontece em pivôs degenerados.

  e verificar que existe uma contradição.
- Vamos usar um problema apenas com o conjunto (ordenado por índice) $T = \{p, \ldots, q\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ das variáveis que entram e saem da base no ciclo.
- Seja q o maior índice, e vamos analisar o quadro simplex em que x_q entra na base e o quadro simplex em que x_q sai da base.

$\square$

Quadro em que x_q entra na base

- Vamos analisar os sinais dos coeficientes do vector $\tilde{\boldsymbol{c}}$, dos elementos da linha da função objectivo:

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & z & x_p & x_j & x_q & \\
\hline
 & 0 & & & & 0 \\
 & & & & & \\
 & 0 & & & & 0 \\
 & & & & & \\
 & 0 & & & & 0 \\
\hline
z & 1 & & \tilde{c}_j & \tilde{c}_q &
\end{array}
$$

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = [\quad 1 \qquad\qquad\qquad\qquad]$$

- Os coeficientes das variáveis básicas são nulos na linha da função objectivo.

Quadro em que x_q entra na base

- Vamos analisar os sinais dos coeficientes do vector $\tilde{\boldsymbol{c}}$, dos elementos da linha da função objectivo:

	z	x_p	x_j	x_q	
	0				0
	0				0
	0				0
z	1		$\tilde{c}_j$	$\tilde{c}_q$	

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = [\quad 1 \quad \geq 0 \quad \geq 0 \quad \geq 0 \quad \geq 0 \quad \geq 0 \quad \geq 0 \quad < 0 \quad]$$

- Os coeficientes das variáveis básicas são nulos na linha da função objectivo.
- Dado que se selecciona, de entre as variáveis com coeficientes negativos na linha da função objectivo, a de menor índice, então todos os coeficientes são ≥ 0, com excepção do coeficiente da variável x_q, que é < 0.

Quadro em que x_q sai na base

- Vamos designar por x_t $(t < q)$ a variável que entra na base.
- Vamos analisar os sinais dos coeficientes do vector $-\boldsymbol{d}'$, construído com informação da coluna de x_t.

	z	x_p	x_t	x_q		
x_{B_1}	0		$\tilde{a}_{1t}$	0	0	
$\dots$						
$x_q = x_{B_r}$	0		$\tilde{a}_{rt}$	1	0	(linha r)
$\dots$						
x_{B_m}	0		$\tilde{a}_{mt}$	0	0	
z	1		$\tilde{c}_t$	0		

$$-\boldsymbol{d}' = [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]^\top$$

Quadro em que x_q sai na base

- Vamos designar por x_t $(t < q)$ a variável que entra na base.
- Vamos analisar os sinais dos coeficientes do vector $-\boldsymbol{d}'$, construído com informação da coluna de x_t.

	z	x_p	x_t	x_q		
x_{B_1}	0		$\tilde{a}_{1t}$	0	0	
$\dots$						
$x_q = x_{B_r}$	0		$\tilde{a}_{rt}$	1	0	(linha r)
$\dots$						
x_{B_m}	0		$\tilde{a}_{mt}$	0	0	
z	1		$\tilde{c}_t$	0		

$$-\boldsymbol{d}' = [\quad < 0 \qquad\qquad]^\top$$

Quadro em que x_q sai na base

- Vamos designar por x_t $(t < q)$ a variável que entra na base.
- Vamos analisar os sinais dos coeficientes do vector $-\boldsymbol{d}'$, construído com informação da coluna de x_t.

	z	x_p	x_t	x_q		
x_{B_1}	0		$\tilde{a}_{1t}$	0	0	
$\dots$						
$x_q = x_{B_r}$	0		$\tilde{a}_{rt}$	1	0	(linha r)
$\dots$						
x_{B_m}	0		$\tilde{a}_{mt}$	0	0	
z	1		$\tilde{c}_t$	0		

$$-\boldsymbol{d}' = [\quad < 0 \qquad\qquad -1 \qquad\qquad]^\top$$

Quadro em que x_q sai na base

- Vamos designar por x_t $(t < q)$ a variável que entra na base.
- Vamos analisar os sinais dos coeficientes do vector $-\boldsymbol{d}'$, construído com informação da coluna de x_t.

	z	x_p	x_t	x_q		
x_{B_1}	0		$\tilde{a}_{1t}$	0	0	
$\ldots$						
$x_q = x_{B_r}$	0		$\tilde{a}_{rt}$	1	0	(linha r)
$\ldots$						
x_{B_m}	0		$\tilde{a}_{mt}$	0	0	
z	1		$\tilde{c}_t$	0		

$$-\boldsymbol{d}' = [\quad < 0 \quad\quad -1 \quad\quad > 0 \quad]^\top$$

Quadro em que x_q sai na base

- Vamos designar por x_t $(t < q)$ a variável que entra na base.
- Vamos analisar os sinais dos coeficientes do vector $-\boldsymbol{d}'$, construído com informação da coluna de x_t.

	z	x_p	x_t	x_q		
x_{B_1}	0		$\tilde{a}_{1t}$	0	0	
$\dots$						
$x_q = x_{B_r}$	0		$\tilde{a}_{rt}$	1	0	(linha r)
$\dots$						
x_{B_m}	0		$\tilde{a}_{mt}$	0	0	
z	1		$\tilde{c}_t$	0		

$$-\boldsymbol{d}' = [\quad <0 \quad \leq 0 \quad \leq 0 \quad \leq 0 \quad -1 \quad \leq 0 \quad \leq 0 \quad >0 \quad]^\top$$

- Para a variável que sai da base ser a variável x_q, $d_q = \tilde{a}_{rt} > 0$, porque o elemento pivô é sempre positivo;
- todos os elementos $\tilde{a}_{it} \leq 0$, $t < q$, porque, de outro modo, a variável que sairia da base seria uma com menor índice.

	z	x_p	x_t	x_q		
x_{B_1}	0		$\tilde{a}_{1t}$	0	0	
$\dots$						
$x_q = x_{B_r}$	0		$\tilde{a}_{rt}$	1	0	(linha r)
$\dots$						
x_{B_m}	0		$\tilde{a}_{mt}$	0	0	
z	1		$\tilde{c}_t$	0		

$$-\boldsymbol{d}' = [\quad <0 \quad \leq 0 \quad \leq 0 \quad \leq 0 \quad -1 \quad \leq 0 \quad \leq 0 \quad >0 \quad]^\top$$

$$\begin{array}{rcll}
d_1 & = & \tilde{c}_t & \text{, a variável } x_t \text{ é atractiva;} \\
d_q & = & \tilde{a}_{rt} & \text{, o elemento pivô é positivo;} \\
d_t & = & -1 & \text{, a variável } x_t \text{ é a variável não-básica que aumenta de valor;} \\
 & & & \text{(o coeficiente é -1, justamente indicando que aumenta).} \\
d_j & = & 0 & \text{, para todas as restantes variáveis não básicas } j \ (j \neq t) \\
d_{B_i} & = & \tilde{a}_{it} & \text{, para todas as variáveis básicas } B_i \text{, da linha } i \text{ do quadro.}
\end{array}$$

Análise do produto escalar de $\widetilde{\boldsymbol{c}} \cdot (-\boldsymbol{d}')$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & z & x_p & & & x_t & & & x_q & \\
\widetilde{\boldsymbol{c}} = & [& 1 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & < 0 &] \\
-\boldsymbol{d}' = & [& < 0 & \leq 0 & \leq 0 & \leq 0 & -1 & \leq 0 & \leq 0 & > 0 &]
\end{array}
$$

- Contradição: assumimos $P_1 \wedge P_2$, mas isso implica $\neg P_2$:
  - P_1) a execução com a regra de Bland origina um ciclo; e
  - P_2) $\boldsymbol{A}'(-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}$, como acontece em pivôs degenerados;

porque $\widetilde{\boldsymbol{c}} \cdot (-\boldsymbol{d}') < 0$, dado que há termos do produto escalar que são negativos, e não há termos positivos (q.e.d.).

Resolução do exemplo de Kuhn com regra de Bland

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	-2	-9	1	9	1	0	0	0
s_2	0	**1/3**	1	$-1/3$	-2	0	1	0	0
s_3	0	2	3	-1	-12	0	0	1	2
z	1	-2	-3	1	12	0	0	0	0

$a)$

	z	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$s1$	$s2$	$s3$	
s_1	0	0	-3	-1	-3	1	6	0	0
x_1	0	1	3	-1	-6	0	3	0	0
s_3	0	0	-3	**1**	0	0	-6	1	2
z	1	0	3	-1	0	0	6	0	0

$b)$

	z	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$s1$	$s2$	$s3$	
s_1	0	0	-6	0	-3	1	0	1	2
x_1	0	1	0	0	-6	0	-3	1	2
x_3	0	0	-3	1	0	0	-6	1	2
z	1	0	0	0	0	0	0	1	2

$c)$

Complexidade do algoritmo simplex

- Há um exemplo especialmente construído (um hipercubo deformado no espaço a n−dimensões), em que o algoritmo simplex percorre todos os vértices quando se usa a regra de Dantzig.
- No espaço a 3 dimensões, percorre os $2^3 = 8$ vértices do cubo.
- No pior caso, o algoritmo simplex é exponencial.
- Em termos de comportamento médio, há estudos computacionais de implementações do algoritmo simplex em que o número de iterações se aproxima bem de $(m+n)/2$.

Klee V, Minty GJ (1972) How good is the simplex algorithm? In: Shisha O. (ed.) Inequalities: III. Academic Press, New York.

Vanderbei, Linear Programming: Foundations and Extensions, International Series in Operations Research & Management Science, 2014.

Ainda falta identificar se o problema é impossível ...

Teorema (Fundamental de Programação Linear)

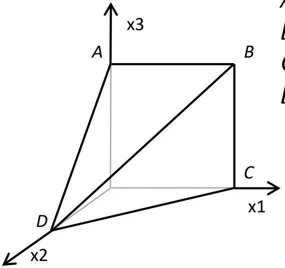
Dado um problema de programação linear, se não existir uma solução óptima com valor finito, então ou o problema é impossível ou a solução óptima é ilimitada.

Conclusão

- A regra de Bland assegura a convergência do algoritmo simplex num número finito de passos.
- Há outros algoritmos para resolver problemas de programação linear, como os métodos de pontos interiores (que são polinomiais).
- O algoritmo simplex permanece competitivo, embora tenham sido identificados exemplos em que os métodos de pontos interiores têm melhor desempenho.

Apêndices

- Num vértice degenerado, pode haver uma *restrição redundante*, *i.e.*, uma restrição que pode ser removida sem alterar o domínio.
- Isso não acontece na generalidade. Há casos em que nenhuma restrição pode ser removida.
- Exemplo: as restrições que definem o vértice $D: x_1 + x_2 \leq 1$, $x_2 + x_3 \leq 1$ e $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ são todas necessárias:



$A: x_2 = 0;\ \ x_1 = 0;\ \ x_2 + x_3 = 1$
$B: x_2 = 0;\ \ x_2 + x_3 = 1;\ \ x_1 + x_2 = 1$
$C: x_2 = 0;\ \ x_3 = 0;\ \ x_1 + x_2 = 1$
$D: x_3 = 0;\ \ x_1 = 0;\ \ x_1 + x_2 = 1;\ \ x_2 + x_3 = 1$(há 4 planos)

	z'	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	$\boxed{2}$	1	0	-3	0
s_2	0	0	2	0	1	-1	40
x_1	0	1	0	0	0	1	40
z'	1	0	-1	0	0	3	120

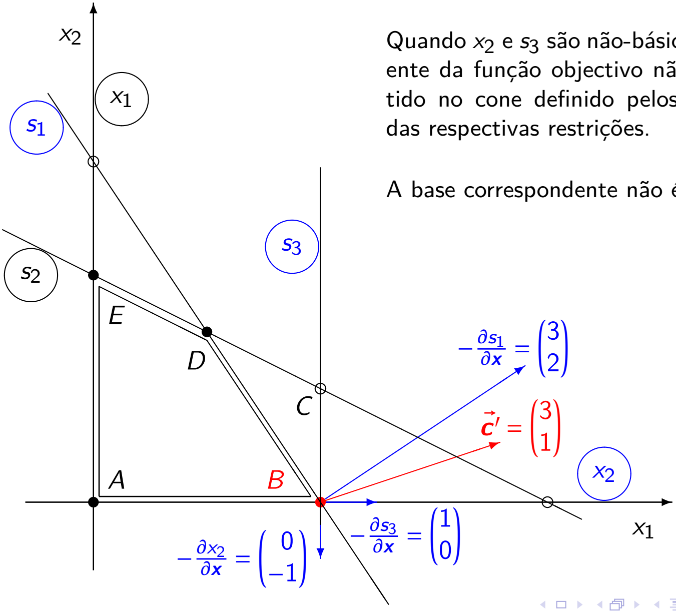
	z'	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	0
s_2	0	0	0	-1	1	2	40
x_1	0	1	0	0	0	1	40
z'	1	0	0	1/2	0	3/2	120

	z'	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_2	0	0	4/3	-1/3	1	0	40
s_3	0	0	-2/3	-1/3	0	1	0
x_1	0	1	2/3	1/3	0	0	40
z'	1	0	1	1	0	0	120

Se $z' = 3x_1 + 1x_2$, uma das três bases da solução básica óptima não é óptima.

O quadro 1 é uma base que não é óptima: é necessário fazer um pivô degenerado para se comprovar que a solução básica (que não se altera quando se faz o pivô) é uma solução óptima.

Interpretação geométrica



Quando x_2 e s_3 são não-básicas, o gradiente da função objectivo não está contido no cone definido pelos gradientes das respectivas restrições.

A base correspondente não é óptima.

Fim