Métodos Numéricos
Sistemas de equações lineares

Ana Maria A. C. Rocha

Departamento de Produção e Sistemas

Universidade do Minho

arocha@dps.uminho.pt

Sistemas de equações lineares

A forma geral do problema

sistema de equações lineares de ordem n – é

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = & b_3 \\ \ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = & b_n \end{array}\right.$$

ou na forma simplificada

$$Ax = b$$

Sistema de equações lineares

▷ $A_{n\times n}$ - matriz dos coeficientes do sistema com n linhas e n colunas,

▷ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - vetor solução,

▷ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ - termo independente,

▷ $(A|b)$ - matriz ampliada do sistema.

Existência e unicidade da solução

- O sistema de equações lineares tem sempre solução?
- A solução é única ?

Depende de $c(A)$ - caraterística da matriz A - número de linhas ou colunas linearmente independentes (sistema quadrado).

Seja $c\,(A|b)$ a caraterística da matriz ampliada.

$\star$ Existe uma relação direta entre $c(A)$,
o determinante de A ($det(A)$)
e a existência da inversa de A (A^{-1}):

Existência e unicidade da solução (cont.)

$$\text{se } c(A) = n \begin{cases} det(A) \neq 0 \\ A^{-1} \text{ existe} \\ \text{sistema possível e determinado (solução única)} \end{cases}$$

$$\text{se } c(A) < n \begin{cases} det(A) = 0 \\ A^{-1} \text{ não existe} \\ \begin{cases} \text{se } c(A) = c(A|b) \begin{cases} \text{sistema possível} \\ \text{e indeterminado} \\ \text{(infinidade de soluções)} \end{cases} \\ \text{se } c(A) < c(A|b) \begin{cases} \text{sistema impossível} \\ \text{(não tem solução)} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Exemplos - análise da caraterística

Sistema com $c(A) = 2$ (as linhas de A são linearmente independentes)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{array}\right)$$ (sistema possível e determinado)

Sistema com $c(A) < 2$ e $c(A|b) = 1$ (a 1ª linha de $[A|b]$ é o dobro da segunda)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$ (sistema possível e indeterminado)

Sistema com $c(A) < 2$ e $c(A) < c(A|b)(= 2)$ (a 1ª linha de $[A]$ é o dobro da segunda, mas a de $[A|b]$ não)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$ (sistema impossível)

Métodos de resolução

$$Ax = b$$

- **métodos diretos**
  - ▷ sistema de pequena ou média dimensão,
  - ▷ a solução exata é obtida ao fim de um número finito de operações.

- **métodos iterativos**
  - ▷ para sistemas de grandes dimensões (milhares ou milhões de equações !),
  - ▷ a solução exata é obtida ao fim de um número infinito de operações.

Método direto de eliminação de Gauss com pivotagem parcial (EGPP)

Passo 1. transformar $Ax = b$ em $Ux = c$ usando as operações elementares - a partir da matriz ampliada $(A|b)$:

- troca de duas linhas paralelas;
- multiplicação de uma linha por um escalar $\neq 0$;
- substituição de uma linha pela que dela se obtém adicionando o produto de outra linha paralela por um escalar.

U é uma matriz triangular superior

- os sistemas $Ax = b$ e $Ux = c$ são equivalentes - têm a mesma solução;

Passo 2. resolver $Ux = c$ por substituição inversa.

Exemplo

Resolver o sistema de equações lineares, com $n = 3$, usando **6** casas decimais:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3 \\ 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \end{array} \right. .$$

Passo 1: A matriz ampliada é

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \end{array} \right)$$

Como a dimensão do sistema é $n = 3 \;\Rightarrow\;$ passo 1. tem $n - 1 = 2$ etapas.

Exemplo (cont.)

- **Etapa 1:**
  - colocar 'pivot' na posição $(1, 1)$ (maior módulo),
  - trocar as linhas 1 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{3} & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{array}\right)$$

  - Para reduzir a zero os elementos 0.1 e 0.3, calculam-se os escalares - denominados multiplicadores: $m_{21} = -\frac{0.1}{\mathbf{3}} = -0.033333$; $m_{31} = -\frac{0.3}{\mathbf{3}} = -0.1$

    Nota: $|\text{multiplicador}| \leq 1$ conserva estabilidade numérica.

Exemplo (cont.)

$\triangleright$ $m_{21}\times$ (linha 1) + linha 2 e $m_{31}\times$ (linha 1) + linha 3 $\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & \mathbf{7.003333} & -0.293333 & -19.561664 \\ 0 & -0.19 & 10.02 & 70.615 \end{array}\right)$$

- **Etapa 2:** colocar 'pivot' na posição $(2,2)$ (elemento de maior módulo)
  - não é preciso trocar linhas,
  - reduzir a zero o elemento -0.19, calcula $m_{32} = -\frac{-0.19}{\mathbf{7.003333}} = 0.027130$

$\triangleright$ $m_{32}\times$ (linha 2) + linha 3 $\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 & -19.561664 \\ 0 & 0 & 10.012042 & 70.084292 \end{array}\right)$$

- A matriz ampliada está já na forma $(U|c)$ que corresponde ao sistema $Ux = c$.

Exemplo (cont.)

Passo 2: Para resolver o sistema $Ux = c$ por substituição inversa (de baixo para cima):

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 3x_1 & -0.1x_2 & -0.2x_3 & = & 7.85 \\ & 7.003333x_2 & -0.293333x_3 & = & -19.561664 \\ & & 10.012042x_3 & = & 70.084292 \end{array}\right.$$

$$x_3 = \frac{70.084292}{10.012042} = 7\ ,$$

$$x_2 = \frac{-19.561664 + 0.293333(7)}{7.003333} = -2.5\ ,$$

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.2(7) + 0.1(-2.5)}{3} = 3.$$

$$\text{solução: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Cálculo do determinante de uma matriz A

- utiliza-se EGPP para transformar A à forma U,

- $det(A) = (-1)^s \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$

  sendo s o número de trocas de linhas efetuadas na transformação de A em U.

Exemplo

Calcular o determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 & 10 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 3 & -0.1 & -0.2 \end{pmatrix}$$

Por EGPP $(A) \rightarrow (U)$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.012042 \end{pmatrix}$$

$det(A) = (-1)^1 \times 3 \times 7.003333 \times 10.012042 = -210.352994.$

Exercício 1

Um engenheiro supervisiona a produção de 3 marcas de automóveis. Para a sua produção, são necessários 3 tipos de materiais: metal, tecido e borracha. As quantidades para produzir um carro de cada marca são:

carro	metal (lb/carro)	tecido (lb/carro)	borracha (lb/carro)
1	1500	25	100
2	1700	33	120
3	1900	42	160

Estão disponíveis por dia, respetivamente 106000, 2170, 8200 lb de metal, tecido e borracha. Quantos automóveis podem ser produzidos por dia?

a) Resolva o sistema por um método direto e estável (usando 4 casas decimais nos cálculos).

b) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.

Resolução do Exercício 1

O sistema a resolver é dado por

$$\begin{cases} 1500x_1 + 1700x_2 + 1900x_3 = 106000 \\ 25x_1 + 33x_2 + 42x_3 = 2170 \\ 100x_1 + 120x_2 + 160x_3 = 8200 \end{cases}$$

(a)

$$U = \begin{pmatrix} 1500.00000 & 1700.00000 & 1900.00000 \\ 0.00000 & 6.66667 & 33.33333 \\ 0.00000 & 0.00000 & -13.00000 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 106000.00000 \\ 1133.33333 \\ -390.00000 \end{pmatrix}$$

$x^* = (10, 20, 30)^T$

(b) $\det = 130000$