Programação Linear - dualidade e método simplex dual

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

8 de Novembro de 2022

Dualidade e método simplex dual

antes

- O preço-sombra de uma restrição é um conceito fundamental, relacionado com o valor que se atribui a um recurso.

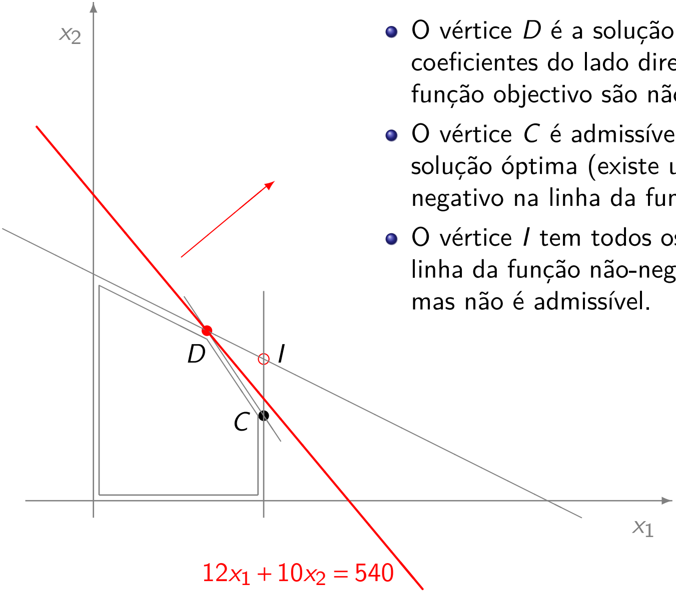
Guião

- Os preços-sombra são os valores óptimos das variáveis de um problema, que se designa por *problema dual*.
- O foco da *Dualidade* é determinar a melhor forma de valorizar a utilização dos recursos disponíveis.
- Quando existe um vértice admissível inicial para esse problema dual, pode usar-se o *método simplex dual*, semelhante ao método simplex.

depois

- O método simplex dual é usado em programação inteira, para reoptimizar o quadro simplex depois de inserir um plano de corte.

Motivação: relembrar o exemplo (de maximização)



- O vértice D é a solução óptima (todos os coeficientes do lado direito e da linha da função objectivo são não-negativos).
- O vértice C é admissível, mas não é a solução óptima (existe um coeficiente negativo na linha da função objectivo).
- O vértice I tem todos os coeficientes da linha da função não-negativos (vamos ver), mas não é admissível.

Decomposição do gradiente da função objectivo $\vec{c}$

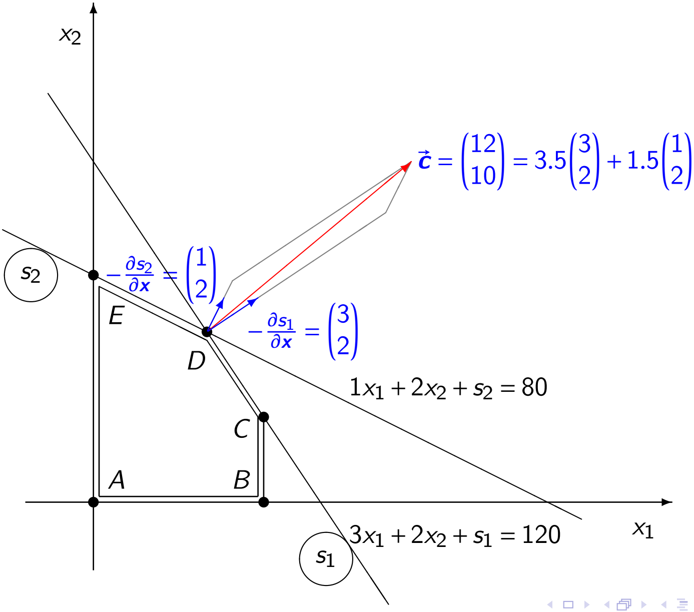
- Em cada vértice, há um conjunto de restrições activas, relativas a recursos que são integralmente usados.

Decompor $\vec{c}$ segundo as direcções dos gradientes das restrições activas

- é equivalente a determinar os valores dos pesos pelos quais se devem multiplicar as funções lineares dessas restrições, de modo a que a adição das funções resultantes tenha como soma a função objectivo.

Assumindo que o vértice não é degenerado, a decomposição é única.

Vértice D: gradiente $\vec{c}$ está contido no cone



Vértice D (intersecção das rectas $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$)

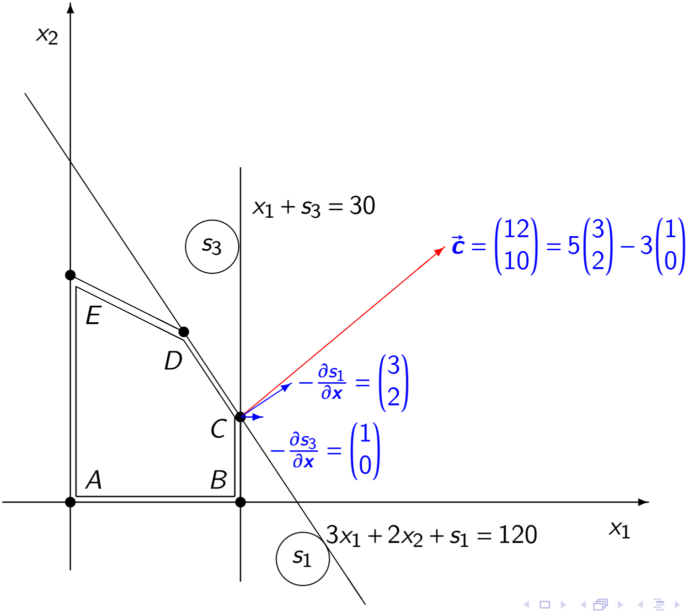
- Do lado esquerdo, obtemos a função objectivo:

$$
\begin{array}{rrcrcrr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & & \\
\hline\hline
 & -1x_1 & & & \leq & 0 & (0) \\
 & & & -1x_2 & \leq & 0 & (0) \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 & (3.5) \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 & (1.5) \\
 & 1x_1 & & & \leq & 30 & (0) \\
\hline
 & 12x_1 & + & 10x_2 & \leq & 540 &
\end{array}
$$

- e, do lado direito, obtemos 540; como os valores dos pesos são todos não-negativos, a 'inequação-soma' é válida.

- Qualquer solução que obedeça às restrições obedece também à 'inequação-soma' $\Longrightarrow$ O valor do óptimo não pode exceder 540.

Vértice C : o gradiente $\vec{c}$ não está contido no cone



Vértice C (intersecção das rectas $s_1 = 0$ e $s_3 = 0$)

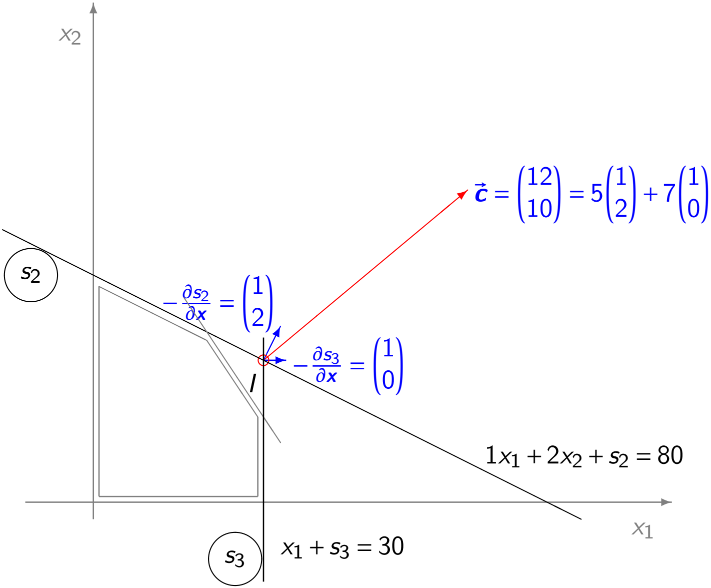
- Do lado esquerdo, obtemos a função objectivo:

$$
\begin{array}{rrcrcrr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & & \\
\hline\hline
 & -1x_1 & & & \leq & 0 & (0) \\
 & & & -1x_2 & \leq & 0 & (0) \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 & (5) \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 & (0) \\
 & 1x_1 & & & \leq & 30 & (-3) \\
\hline
 & 12x_1 & + & 10x_2 & \not\leq & 510 &
\end{array}
$$

- mas a 'inequação-soma' não é válida, porque um dos pesos é negativo.

- nota: sabemos que há soluções admissíveis com valor da função objectivo maior do que 510.

Vértice I : não admissível e gradiente contido no cone



Vértice I (intersecção das rectas $s_2 = 0$ e $s_3 = 0$)

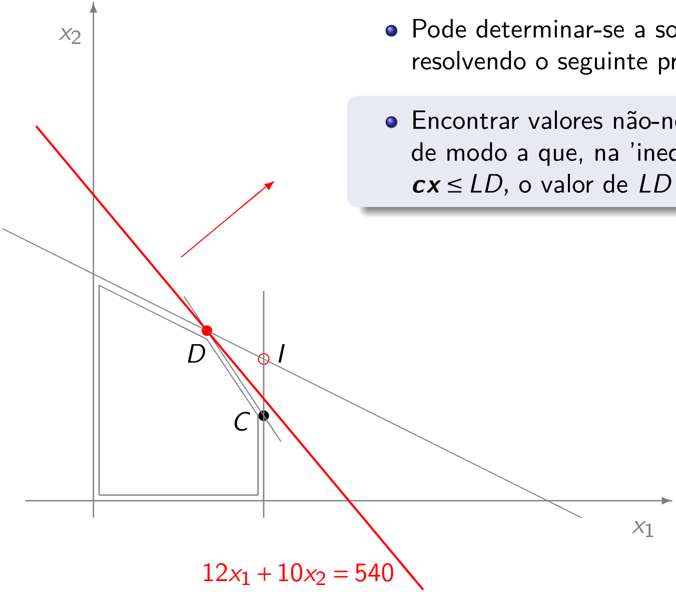
- Do lado esquerdo, obtemos a função objectivo:

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & & \\
\hline\hline
 & -1x_1 & & & \leq & 0 & (0) \\
 & & & -1x_2 & \leq & 0 & (0) \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 & (0) \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 & (5) \\
 & 1x_1 & & & \leq & 30 & (7) \\
\hline
 & 12x_1 & + & 10x_2 & \leq & 610 &
\end{array}
$$

- e, do lado direito, obtemos 610; como os valores dos pesos são todos não-negativos, a 'inequação-soma' é válida,

- mas o vértice I não é um vértice admissível.

Uma nova estratégia de resolução



- Pode determinar-se a solução óptima resolvendo o seguinte problema:

- Encontrar valores não-negativos de pesos de modo a que, na 'inequação-soma' $\boldsymbol{cx} \leq LD$, o valor de LD seja mínimo.

Uma condição de optimalidade

- O quadro simplex associado ao vértice determinado pela matriz $\boldsymbol{B}$ (resultante de um conjunto de variáveis básicas) é:

$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

É condição de optimalidade, num problema de maximização, que

- todos os elementos dos vectores $\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$ sejam ≥ 0.

- O valor da função objectivo do vértice é $\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Objectivo na nova estratégia:

- Encontrar o valor mínimo da função objectivo quando o domínio é o conjunto de soluções que cumprem esta condição de optimalidade.

Formulação

- A matriz $\boldsymbol{A}$ e o vector $\boldsymbol{c}$ são dados do problema.
- Só $\boldsymbol{c_B B^{-1}}$ é que representa uma escolha, que resulta da matriz $\boldsymbol{B}$.

Vamos designar por $\boldsymbol{y}$ o vector de variáveis de decisão:

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) = \boldsymbol{c_B B^{-1}}$$

$\boldsymbol{B^{-1}A}$	$\boldsymbol{B^{-1}}$	$\boldsymbol{B^{-1}b}$
$\boldsymbol{c_B B^{-1} A - c}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1}}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1} b}$

- A condição de optimalidade (maximização) é
- A função objectivo que associa um valor a cada solução $\boldsymbol{y}$ é

Formulação

- A matriz $\boldsymbol{A}$ e o vector $\boldsymbol{c}$ são dados do problema.
- Só $\boldsymbol{c_B B^{-1}}$ é que representa uma escolha, que resulta da matriz $\boldsymbol{B}$.

Vamos designar por $\boldsymbol{y}$ o vector de variáveis de decisão:

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) = \boldsymbol{c_B B^{-1}}$$

$\boldsymbol{B^{-1}A}$	$\boldsymbol{B^{-1}}$	$\boldsymbol{B^{-1}b}$
$\boldsymbol{c_B B^{-1}A - c}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1}}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1}b}$

- A condição de optimalidade (maximização) é $\boldsymbol{yA - c \geq 0}$ e $\boldsymbol{y \geq 0}$.
- A função objectivo que associa um valor a cada solução $\boldsymbol{y}$ é

Formulação

- A matriz $\boldsymbol{A}$ e o vector $\boldsymbol{c}$ são dados do problema.
- Só $\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ é que representa uma escolha, que resulta da matriz $\boldsymbol{B}$.

Vamos designar por $\boldsymbol{y}$ o vector de variáveis de decisão:

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$$

$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

- A condição de optimalidade (maximização) é $\boldsymbol{yA} - \boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$.
- A função objectivo que associa um valor a cada solução $\boldsymbol{y}$ é $\boldsymbol{yb}$.
- O modelo para encontrar o valor mínimo é:

Formulação

- A matriz $\boldsymbol{A}$ e o vector $\boldsymbol{c}$ são dados do problema.
- Só $\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ é que representa uma escolha, que resulta da matriz $\boldsymbol{B}$.

Vamos designar por $\boldsymbol{y}$ o vector de variáveis de decisão:

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_m) = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$$

$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

- A condição de optimalidade (maximização) é $\boldsymbol{yA} - \boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$.
- A função objectivo que associa um valor a cada solução $\boldsymbol{y}$ é $\boldsymbol{yb}$.
- O modelo para encontrar o valor mínimo é:

$$\begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{yb} \\ \text{suj. a} & \boldsymbol{yA} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

- Este problema designa-se por *problema dual*.

Exemplo

PRIMAL : max $\boldsymbol{cx}$ suj. a $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$	$\begin{array}{llllll} \max & 12x_1 & +10x_2 & & \\ \text{suj. a} & 3x_1 & +2x_2 & \le & 120 \\ & 1x_1 & +2x_2 & \le & 80 \\ & 1x_1 & & \le & 30 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$
DUAL : min $\boldsymbol{yb}$ suj. a $\boldsymbol{yA} \ge \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$	$\begin{array}{ll} \min & \begin{bmatrix} y_3 & y_4 & y_5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} \\ \text{suj. a} & \begin{bmatrix} y_3 & y_4 & y_5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 12 & 10 \end{bmatrix} \\ & y_3, y_4, y_5 \ge 0 \end{array}$
	$\begin{array}{llllll} \min & 120y_3 & +80y_4 & +30y_5 & & \\ \text{suj. a} & 3y_3 & +1y_4 & +1y_5 & \ge & 12 \\ & 2y_3 & +2y_4 & & \ge & 10 \\ & y_3, y_4, y_5 \ge 0 \end{array}$

- Vamos designar o problema original por *problema primal*.

Para construir o problema dual,

PRIMAL	DUAL
$\max \; \boldsymbol{cx}$ suj. a $\; \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\min \; \boldsymbol{yb}$ suj. a $\; \boldsymbol{yA} \geq \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
$\max \; 12x_1 + 10x_2$ suj. a $\; 3x_1 + 2x_2 \leq 120$ $1x_1 + 2x_2 \leq 80$ $1x_1 \leq 30$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\min \; 120y_3 + 80y_4 + 30y_5$ suj. a $\; 3y_3 + 1y_4 + 1y_5 \geq 12$ $2y_3 + 2y_4 \geq 10$ $y_3, y_4, y_5 \geq 0$

o problema original deve estar na *Forma Canónica:*

- Problema de max com todas as restrições do tipo de $\leq$.

O dual do dual é o primal

- Partindo do problema dual, e colocando-o na Forma Canónica:

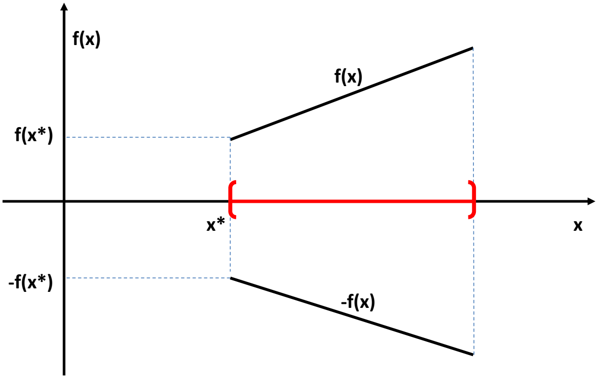
DUAL	DUAL na Forma Canónica
$\begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{yb} \\ \text{suj. a} & \boldsymbol{yA} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$	$\begin{array}{rl} -\max & -\boldsymbol{yb} \\ \text{suj. a} & -\boldsymbol{yA} \leq -\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$
$\begin{array}{lrrrrr} \min & 120y_3 & +80y_4 & +30y_5 & & \\ \text{suj. a} & 3y_3 & +1y_4 & +1y_5 & \geq & 12 \\ & 2y_3 & +2y_4 & & \geq & 10 \\ & \multicolumn{5}{c}{y_3, y_4, y_5 \geq 0} \end{array}$	$\begin{array}{lrrrrr} -\max & -120y_3 & -80y_4 & -30y_5 & & \\ \text{suj. a} & -3y_3 & -1y_4 & -1y_5 & \leq & -12 \\ & -2y_3 & -2y_4 & & \leq & -10 \\ & \multicolumn{5}{c}{y_3, y_4, y_5 \geq 0} \end{array}$

- se se usar a regra do *slide* anterior, obtém-se o problema primal.

Portanto, basta usar a seguinte regra:

- O dual de um Problema de min com <u>todas</u> as restrições de $\geq$ é um Problema de max com <u>todas</u> as restrições de $\leq$.

- Qualquer problema de minimização, em que se pretende $\min f(\boldsymbol{x})$, pode ser transformado num problema de maximização, em que se optimiza a função objectivo simétrica da original, $\max -f(\boldsymbol{x})$:



- Solução óptima $\boldsymbol{x}^*$ é a mesma, mas o valor da função objectivo da solução óptima é o simétrico $f(\boldsymbol{x}^*) = \min f(\boldsymbol{x}) = -\max -f(\boldsymbol{x})$

Uma condição de optimalidade

- O quadro simplex associado ao vértice determinado pela matriz $\boldsymbol{B}$ (resultante de um conjunto de variáveis básicas) é:

$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

É condição de optimalidade, num problema de maximização, que

- todos os elementos dos vectores $\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ sejam ≥ 0.

- O valor da função objectivo do vértice é $\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Objectivo na nova estratégia:

- Encontrar o valor mínimo da função objectivo quando o domínio é o conjunto de soluções que cumprem esta condição de optimalidade.

Formulação

- A matriz $\boldsymbol{A}$ e o vector $\boldsymbol{c}$ são dados do problema.
- Só $\boldsymbol{c_B B^{-1}}$ é que representa uma escolha, que resulta da matriz $\boldsymbol{B}$.

Vamos designar por $\boldsymbol{y}$ o vector de variáveis de decisão:

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) = \boldsymbol{c_B B^{-1}}$$

$\boldsymbol{B^{-1}A}$	$\boldsymbol{B^{-1}}$	$\boldsymbol{B^{-1}b}$
$\boldsymbol{c_B B^{-1}A - c}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1}}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1}b}$

- A condição de optimalidade (maximização) é
- A função objectivo que associa um valor a cada solução $\boldsymbol{y}$ é

Formulação

- A matriz $\boldsymbol{A}$ e o vector $\boldsymbol{c}$ são dados do problema.
- Só $\boldsymbol{c_B B^{-1}}$ é que representa uma escolha, que resulta da matriz $\boldsymbol{B}$.

Vamos designar por $\boldsymbol{y}$ o vector de variáveis de decisão:

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) = \boldsymbol{c_B B^{-1}}$$

$\boldsymbol{B^{-1}A}$	$\boldsymbol{B^{-1}}$	$\boldsymbol{B^{-1}b}$
$\boldsymbol{c_B B^{-1}A - c}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1}}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1}b}$

- A condição de optimalidade (maximização) é $\boldsymbol{yA - c \geq 0}$ e $\boldsymbol{y \geq 0}$.
- A função objectivo que associa um valor a cada solução $\boldsymbol{y}$ é

Formulação

- A matriz $\boldsymbol{A}$ e o vector $\boldsymbol{c}$ são dados do problema.
- Só $\boldsymbol{c_B B^{-1}}$ é que representa uma escolha, que resulta da matriz $\boldsymbol{B}$.

Vamos designar por $\boldsymbol{y}$ o vector de variáveis de decisão:

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) = \boldsymbol{c_B B^{-1}}$$

$\boldsymbol{B^{-1}A}$	$\boldsymbol{B^{-1}}$	$\boldsymbol{B^{-1}b}$
$\boldsymbol{c_B B^{-1} A - c}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1}}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1} b}$

- A condição de optimalidade (maximização) é $\boldsymbol{yA - c \geq 0}$ e $\boldsymbol{y \geq 0}$.
- A função objectivo que associa um valor a cada solução $\boldsymbol{y}$ é $\boldsymbol{yb}$.
- O modelo para encontrar o valor mínimo é:

Formulação

- A matriz $\boldsymbol{A}$ e o vector $\boldsymbol{c}$ são dados do problema.
- Só $\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$ é que representa uma escolha, que resulta da matriz $\boldsymbol{B}$.

Vamos designar por $\boldsymbol{y}$ o vector de variáveis de decisão:

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) = \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$$

$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

- A condição de optimalidade (maximização) é $\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$.
- A função objectivo que associa um valor a cada solução $\boldsymbol{y}$ é $\boldsymbol{y}\boldsymbol{b}$.
- O modelo para encontrar o valor mínimo é:

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{y}\boldsymbol{b} \\ \text{suj. a} & \boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

- Este problema designa-se por *problema dual*.

Exemplo

$PRIMAL:$ max $\boldsymbol{cx}$ suj. a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\begin{array}{lrrcr} \max & 12x_1 & +10x_2 & & \\ \text{suj. a} & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 120 \\ & 1x_1 & +2x_2 & \leq & 80 \\ & 1x_1 & & \leq & 30 \\ & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$
$DUAL:$ min $\boldsymbol{yb}$ suj. a $\boldsymbol{yA} \geq \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$	$\begin{array}{ll} \min & \begin{bmatrix} y_3 & y_4 & y_5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} \\ \text{suj. a} & \begin{bmatrix} y_3 & y_4 & y_5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 12 & 10 \end{bmatrix} \\ & y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{array}$
	$\begin{array}{lrrrcr} \min & 120y_3 & +80y_4 & +30y_5 & & \\ \text{suj. a} & 3y_3 & +1y_4 & +1y_5 & \geq & 12 \\ & 2y_3 & +2y_4 & & \geq & 10 \\ & \multicolumn{5}{l}{y_3, y_4, y_5 \geq 0} \end{array}$

- Vamos designar o problema original por *problema primal*.

Elementos do vector $\boldsymbol{c_B B^{-1} A - c}$ são as folgas do dual

Problema dual

$$\begin{aligned} \min z &= \boldsymbol{yb} \\ & \boldsymbol{yA} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \min z &= \boldsymbol{yb} \\ & \boldsymbol{yA} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

sendo $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_+^{1\times n}$ um vector de variáveis de folga da mesma dimensão que $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

As variáveis do problema dual são:

- variáveis de decisão: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c_B B^{-1}}$,
- variáveis de folga: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c_B B^{-1} A} - \boldsymbol{c}$ $\qquad (\boldsymbol{u} = \boldsymbol{yA} - \boldsymbol{c})$.

- Solução do problema dual é admissível quando $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$.

Resolver o primal também resolve o dual,

porque o quadro simplex da resolução do primal fornece os valores de:

- variáveis de decisão do dual $\boldsymbol{c_B B^{-1}}$: $\boldsymbol{y}^* = (y_3, y_4, y_5)^* = (3.5, 1.5, 0)$
- variáveis de folga do dual $\boldsymbol{c_B B^{-1} A - c}$: $\boldsymbol{u}^* = (u_1, u_2)^* = (0, 0)$
- função objectivo da solução dual $(\boldsymbol{c_B B^{-1}})\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{y}^* \boldsymbol{b} = 540$.

Solução óptima:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	**0**	**0**	**3.5**	**1.5**	**0**	540

Método simplex dual

- Estratégia
- Algoritmo
- Exemplo

Método simplex dual: estratégia

Estratégia:

- O *método simplex dual* percorre uma sequência de vértices admissíveis para o problema dual até atingir uma solução que seja admissível para o primal.

- Assumpção: conhece-se um vértice admissível para o problema dual.

Algoritmo simplex dual (informal)

- seleccionar um vértice inicial admissível para o problema dual
- enquanto (o vértice não for admissível para o problema primal)

  mudar para um vértice adjacente mais próximo de uma solução admissível para o primal

No método simplex dual não se optimiza,

- o que se faz é resolver um *problema de admissibilidade.*

Condições de optimalidade

Vimos que:

um quadro simplex de maximização é óptimo se:

- os coeficientes do lado direito forem todos ≥ 0,
- os coeficientes da linha da função objectivo forem todos ≥ 0, e
- a matriz identidade existir.

- Formalmente, como iremos depois provar:

Teorema

A solução de um problema de Programação Linear é óptima se e só se:

- for admissível para o problema primal,
- for admissível para o problema dual, e
- obedecer ao teorema da folga complementar.

Aplicação do método simplex dual

Colocar o problema na forma canónica (max, ≤)

$$\begin{aligned} \min z &= \boldsymbol{cx} \\ & \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \min z &= \boldsymbol{cx} \\ & \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

- Obter restrições do tipo ≤ (*i.e.*, matriz $\boldsymbol{I}_{m \times m}$ no quadro simplex):

$$\begin{aligned} \min z &= \boldsymbol{cx} \\ & -\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

- Transformar num problema de maximização:

$$\begin{aligned} -\max(-z) &= -\boldsymbol{cx} \\ & -\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Se o problema inicial de minimização tiver $\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}$,

- o quadro simplex apresenta uma *solução dual* admissível.

Exemplo (quadro simplex de maximização)

- Dado o quadro simplex sem uma matriz identidade ($\boldsymbol{I}_{m\times m}$) em que a função objectivo é expressa como $\max(-z) = -\boldsymbol{cx}$:

	$(-z)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
	0	-1	0	3	1	1	12
	0	0	-1	2	2	0	10
$(-z)$	1	0	0	+120	+80	+30	0

- obtém-se a $\boldsymbol{I}_{m\times m}$ multiplicando as equações das restrições por (-1):

	$(-z)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_1	0	1	0	-3	-1	-1	-12
y_2	0	0	1	-2	-2	0	-10
$(-z)$	1	0	0	+120	+80	+30	0

A selecção do elemento pivô no método simplex dual destina-se a:

- procurar obter uma *solução primal* admissível (lado direito ≥ 0);
- manter a *solução dual* admissível (linha função objectivo ≥ 0).

Exemplo: primeiro pivô do método simplex dual

- nota: o elemento pivô tem sempre valor **negativo**. porquê?

	$(-z)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_1	0	1	0	-3	-1	$\boxed{-1}$	-12
y_2	0	0	1	-2	-2	0	-10
$(-z)$	1	0	0	$+120$	$+80$	$+30$	0

- Linha pivô: linha de y_1 (coeficiente mais negativo é -12).
- Coluna pivô: coluna de y_5 (menor valor absoluto das razões negativas é 30):
  - coluna de $y_3 : \left|+120/-3\right| = 40$
  - coluna de $y_4 : \left|+80/-1\right| = 80$
  - coluna de $y_5 : \left|+30/-1\right| = 30$

	$(-z)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_5	0	-1	0	3	1	1	12
y_2	0	0	1	-2	-2	0	-10
$(-z)$	1	$+30$	0	$+30$	$+50$	0	-360

Exemplo: restantes iterações do método simplex dual

	$(-z)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_5	0	-1	0	3	1	1	12
y_2	0	0	1	$\boxed{-2}$	-2	0	-10
$(-z)$	1	+30	0	+30	+50	0	-360

	$(-z)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_5	0	-1	1.5	0	$\boxed{-2}$	1	-3
y_3	0	0	-0.5	1	1	0	5
$(-z)$	1	+30	+15	0	+20	0	-510

	$(-z)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_4	0	0.5	-0.75	0	1	-0.5	1.5
y_3	0	-0.5	0.25	1	0	0.5	3.5
$(-z)$	1	+20	+30	0	0	+10	-540

- Solução óptima é $y_3 = 3.5, y_4 = 1.5$, e restantes variáveis iguais a 0.
- Valor da solução óptima: $\min \boldsymbol{cx} = -\max -\boldsymbol{cx} = -(-540) = 540$.

Algoritmo simplex dual (problema de maximização):

Algoritmo 1 algoritmo simplex dual (esquema)

input: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ ▷ modelo

construir solução dual admissível inicial (todos os coeficientes da linha da função objectivo do quadro são não-negativos, *i.e.*, $\geq \mathbf{0}$)

while existirem coeficientes negativos do lado direito **do**

  seleccionar linha pivô (coeficiente lado direito mais negativo) ▷ (em caso de empate, escolha arbitrária)

  if todos coeficientes linha pivô ≥ 0 **then**

    return problema é impossível

  else

    seleccionar coluna pivô (menor valor absoluto da razão) ▷ razão (coef. linha f.objectivo)/(coef. linha pivô)

  end if

  efectuar pivô para obter nova solução ▷ eliminação de Gauss

end while

return solução óptima

▸ Método Simplex Dual ou 2 Fases?

Um problema (primal) é impossível se existir:

- uma linha com um coeficiente negativo do lado direito e com todos os coeficientes das variáveis não-básicas não-negativos (≥ 0).
- nota: a linha não tem nenhum elemento pivô **negativo**.

- Exemplo:

	$(-z)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_1	0	1	0	3	1	1	-12
y_2	0	0	1	-2	-2	0	-10
$(-z)$	1	0	0	+120	+80	+30	0

- Na linha de y_1, os coeficientes das variáveis y_3, y_4 e y_5 são todos ≥ 0.
- O problema é impossível, porque nenhum conjunto de valores de $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$ satisfaz a restrição: $y_1 + 3y_3 + y_4 + y_5 = -12$.

Conclusão

- No método simplex (primal), os quadros simplex mantêm uma solução primal admissível, e procura-se encontrar uma solução dual admissível.
- No método simplex dual, os quadros simplex mantêm uma solução dual admissível, e procura-se encontrar uma solução primal admissível.
- Se o quadro inicial não tiver nem uma solução primal admissível, nem uma solução dual admissível, então o método das 2 Fases é uma estratégia de solução.

Apêndice

Método Simplex Dual ou 2 Fases?

- O método simplex dual só pode ser usado se os coeficientes da linha da função objectivo do quadro simplex de maximização forem todos não-negativos (≥ 0).
- Caso haja algum coeficiente da linha da função objectivo que não tenha o sinal devido, o Método Simplex Dual não pode ser usado;
- é necessário recorrer ao Método das 2 Fases, ou seja, usar a primeira fase para obter uma solução admissível inicial para o problema primal, e depois usar o método simplex (primal).

Voltar

O valor da solução óptima $c_B B^{-1} b$

Cálculos no primal e no dual, respectivamente:

- $c_B \, (B^{-1} b)$ = f(valor vars decisão (c_{ij}), nível vars decisão (x_{ij}))
- $(c_B B^{-1}) \, b$ = f(valor recursos (y_i), nível recursos (b_i))

- Exemplo:

```
      max:  12x1 +10x2;
tmaquina:   3x1 + 2x2<=120;
maodobra:   1x1 + 2x2<= 80;
material:   1x1      <= 30;
```

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	**0**	**0**	**3.5**	**1.5**	**0**	540

- Uso de recursos e *valor dos recursos*:

	act.1	act.2	folga		qtd.rec.	valor rec.
tmaquina:	3(20)	+2(30)		=	120	120(3.5)
maodobra:	1(20)	+2(30)		=	80	+80(1.5)
material:	1(20)		+10	=	30	+30(0)
valor f.obj.:	12(20)	+10(30)				= 540

Exemplo

PRIMAL : max $\boldsymbol{cx}$ suj. a $-\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$	$\begin{array}{lrrll} \max & 12x_1 & +10x_2 & & \\ \text{suj. a} & -x_1 & & \leq & 0 \\ & & -x_2 & \leq & 0 \\ & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 120 \\ & 1x_1 & +2x_2 & \leq & 80 \\ & 1x_1 & & \leq & 30 \end{array}$
DUAL : min $\boldsymbol{yb}$ suj. a $-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{yA} = \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$	$\min \quad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix}$ $\text{suj. a} \quad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 10 \end{bmatrix}$ $u_1, u_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$

Fim