Programação Linear - algoritmo simplex: vértice inicial

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

18 de outubro de 2023

antes

- O método Simplex foi aplicado para resolver um problema de programação linear.

Guião

- Há situações especiais que é necessário analisar com detalhe, para definir completamente as decisões e acções do algoritmo simplex:
  - vértice admissível inicial não disponível;

depois

- Vemos a implementação do algoritmo simplex usando matrizes.

Conteúdo

Vértice admissível inicial

- E se não estiver imediatamente disponível um vértice admissível (quadro simplex) inicial?
- É necessário obter um, o que se consegue resolvendo o problema em 2 Fases:
  - Fase I: obter um vértice admissível inicial
  - Fase II: aplicar algoritmo simplex

- Para ilustrar essa situação, vamos usar um exemplo em que, por haver restrições do tipo $\geq$, não é possível identificar imediatamente um vértice admissível inicial.

Um problema com restrições de $\geq$ e de minimização

$$
\begin{array}{lccccccc}
\min z = & 120y_3 & + & 80y_4 & + & 30y_5 & & \\
 & 3y_3 & + & 1y_4 & + & 1y_5 & \geq & 12 \\
 & 2y_3 & + & 2y_4 & & & \geq & 10 \\
 & \multicolumn{7}{l}{y_3, y_4, y_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Transformação na forma standard

$$
\begin{array}{lcl}
\min z & = & \boldsymbol{cx} \\
 & & \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b} \\
 & & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{lcl}
\min z & = & \boldsymbol{cx} \\
 & & \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \\
 & & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

sendo $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_+^{m\times 1}$ um vector de variáveis de folga da mesma dimensão que $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.

Este problema está relacionado com um problema que vimos antes. Mais tarde, vamos explorar a relação entre os dois problemas.

Transformação de uma Inequação numa Equação

- Qualquer inequação do tipo $\geq$ pode ser transformada numa equação (equivalente), introduzindo uma variável adicional, designada por *variável de folga*, com valor não-negativo.

- Exemplo:

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x_1+2x_2 & \geq 120 \\ x_1,x_2 & \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 3x_1+2x_2-1u_1 & =120 \\ x_1,x_2,u_1 & \geq 0 \end{array}\right.$$

- O número de unidades necessárias é 120.
- O número de unidades produzidas numa solução $(x_1,x_2)^\top$ é igual ao valor da função linear: $3x_1+2x_2$.
- O valor de u_1 (variável de folga) é o número de unidades produzidas em excesso.
- Há autores que designam estas variáveis por *variáveis de excesso*.

Exemplo: transformação na forma standard

Modelo original

- Variáveis de decisão: y_3, y_4, y_5.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\min z = & 120y_3 & + & 80y_4 & + & 30y_5 & & \\
 & 3y_3 & + & 1y_4 & + & 1y_5 & \geq & 12 \\
 & 2y_3 & + & 2y_4 & & & \geq & 10 \\
 & \multicolumn{7}{l}{y_3, y_4, y_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Modelo na forma standard (equivalente ao modelo original)

- Variáveis de decisão: y_3, y_4, y_5.
- Variáveis de excesso: y_1, y_2.

$$
\begin{array}{lrrcrcrcrl}
\min z = & & & & 120y_3 & + & 80y_4 & + & 30y_5 & \\
 & {\color{red}-1y_1} & & + & 3y_3 & + & 1y_4 & + & 1y_5 & = 12 \\
 & & {\color{red}-1y_2} & + & 2y_3 & + & 2y_4 & & & = 10 \\
 & \multicolumn{9}{l}{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Não há um vértice admissível inicial, porque ...

- o lado direito é positivo e não há uma matriz identidade no quadro:

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
	0	-1	0	3	1	1	12
	0	0	-1	2	2	0	10

Lembrete: antes havia um vértice admissível inicial, porque:

- as restrições eram todas de $\leq$ (havia uma matriz identidade $\boldsymbol{I}_{m \times m}$), e
- os coeficientes do lado direito eram todos ≥ 0.

Não há um vértice admissível inicial, porque ...

- o lado direito é positivo e não há uma matriz identidade no quadro:

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10

Lembrete: antes havia um vértice admissível inicial, porque:

- as restrições eram todas de $\leq$ (havia uma matriz identidade $\boldsymbol{I}_{m \times m}$), e
- os coeficientes do lado direito eram todos ≥ 0.

- Adicionar ao modelo *variáveis artificiais* gera uma matriz identidade,
- mas o vértice resultante não é admissível para o problema original,
- porque os valores das variáveis artificiais (básicas) são positivos,
- e portanto as restrições do problema original não são respeitadas.

Método das 2 fases: estratégia

Fase I

- após adicionar ao modelo as variáveis artificiais,
- resolver um *problema auxiliar* com uma função objectivo que visa tornar os valores dessas variáveis nulos, e assim obter um vértice admissível inicial para o problema original.

- se se conseguir, prossegue-se para a Fase II
- caso contrário, o problema é impossível.

Fase II

- aplicar o algoritmo simplex com a função objectivo original.

Método das 2 fases

Fase I: adicionar variáveis artificiais, $a_1, a_2, \ldots, a_m$, e minimizar a sua soma

- resolver problema auxiliar ($\mathbf{1}\boldsymbol{a}$ é a soma das variáveis artificiais):

$$\begin{aligned} \min z_a &= \mathbf{1}\boldsymbol{a} \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

sendo $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^{m\times 1}, \mathbf{1} = (1,1,\ldots,1)$ um vector linha com m elementos.

- Se $(z_a^* = 0) \Rightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ (todas as variáveis artificiais $= 0$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ há um solução que obedece às restrições originais $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$, e essa solução é um vértice admissível inicial;
- caso contrário $(z_a^* > 0)$, não é possível obter uma solução que obedeça a todas as restrições originais $\Rightarrow$ problema é impossível.

Fase II: optimizar problema original

- usar o vértice admissível inicial no algoritmo simplex (optimizando a função objectivo original $z = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$).

Fase I: adicionar vars artificiais a_1 e a_2, e $\min z_a$

- Função objectivo da Fase I: $\min z_a \;=\; 1a_1 + 1a_2$.
- Equação da linha da função objectivo: $z_a - 1a_1 - 1a_2 = 0$

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	0	0	0	0	0	- 1	- 1	0

- O quadro não é válido: os coeficientes da linha da função objectivo debaixo da matriz identidade devem ser nulos. ▸ Validar Quadro
- O quadro seguinte é válido; vamos ▸ minimizar a função auxiliar z_a:

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	-1	-1	5	3	1	0	0	22

- Qual o elemento pivô?

Fase I: iterações

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	$\boxed{3}$	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	-1	-1	5	3	1	0	0	22

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
y_3	0	-1/3	0	1	1/3	1/3	1/3	0	4
a_2	0	2/3	-1	0	$\boxed{4/3}$	-2/3	-2/3	1	2
z_a	1	2/3	-1	0	4/3	-2/3	-5/3	0	2

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	1/2	-1/4	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	-1/2	3/4	3/2
z_a	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0

- Fim da primeira fase: o valor da solução óptima: $z_a^* = \min z_a = 0$.
- Foi encontrado um vértice admissível.

Conclusão da Fase I e preparação da Fase II

- O vértice admissível é $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^\top = (0, 0, 7/2, 3/2, 0)^\top$.
- Variáveis artificiais (a_1, a_2) e função objectivo auxiliar (z_a) não são necessárias na Fase II, e podem ser eliminadas.

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3		-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4		1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2

- Na Fase II, iremos optimizar a função objectivo original (z), partindo do vértice admissível encontrado na Fase I.

Fase II: função objectivo original

- Função objectivo da Fase II: min $z = 120y_3 + 80y_4 + 30y_5$.
- Equação da linha da função objectivo: $z - 120y_3 - 80y_4 - 30y_5 = 0$

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
z	1	0	0	-120	-80	-30	0

- O quadro não é válido: os coeficientes da linha da função objectivo debaixo da matriz identidade devem ser nulos.

Validar Quadro

- O quadro seguinte é válido; vamos optimizar a função original z:

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
z	1	-20	-30	0	0	-10	540

- O primeiro vértice admissível encontrado é a solução óptima (problema de minimização e nenhum coeficiente na linha da função objectivo é positivo).

Método das 2 Fases: notas

- A situação que ocorreu no exemplo é excepcional.
- Geralmente, o primeiro vértice admissível encontrado não é a solução óptima, e é necessário fazer iterações para a atingir.

Outras abordagens:

- O Método do Grande M.
- O Método Simplex Dual é uma alternativa nalguns casos (veremos depois).

- A estratégia do Método do Grande M é usar um vértice admissível inicial de um problema com variáveis artificiais e a função objectivo modificada.

Método do Grande M: estratégia

adicionar ao modelo variáveis artificiais com custo muito elevado para

- garantir que tenham um valor nulo na solução óptima do problema:

$$\begin{aligned} \min z_M &= \boldsymbol{cx} + \boldsymbol{ma} \\ & \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

sendo $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^{m \times 1}, \boldsymbol{m} = (M, \ldots, M)$ um vector linha com m elementos.

- Na solução óptima deste problema, dada por $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{a}^*)$:
- se $(\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{0})$ (todas as variáveis artificiais $= 0$) $\Rightarrow \min z_M = \boldsymbol{cx}^*$ e $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ é a solução óptima que obedece às restrições originais;
- caso contrário ($\exists a_i > 0$), não é possível obter uma solução que obedeça a todas as restrições originais $\Rightarrow$ problema é impossível.

- O valor da penalidade M deve ser suficientemente grande para, quando existe uma solução admissível (com $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$), o seu valor ser melhor do que o de qualquer solução com uma var. artificial positiva.

Método do Grande M: exemplo

- Função objectivo: min $z_M = 120y_3 + 80y_4 + 30y_5 + Ma_1 + Ma_2$.
- Eq. da linha da f. obj.: $z_M - 120y_3 - 80y_4 - 30y_5 - Ma_1 - Ma_2 = 0$.
- O quadro não é válido: os coeficientes da linha da função objectivo debaixo da matriz identidade devem ser nulos.

	z_M	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_M	1	0	0	-120	-80	-30	-M	-M	0

- O quadro seguinte é válido; vamos optimizar a função z_M:

	z_M	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	$\boxed{3}$	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_M	1	-M	-M	-120 +5M	-80 +3M	-30 +M	0	0	22 M

- Apenas se faz esta referência. Não iremos utilizar este método.

Método do Grande M: escolha do valor de M

Se o valor de M for muito grande,

- pode haver perda de informação, resultante da representação dos números em computador.
- Os coeficientes de custo são representados por reais de dupla precisão com um número finito de casas decimais.
- Exemplo:

$$\begin{aligned} c_1 &= 3,141592653589793 2e+00 \\ M &= 1,0000000000000000e+40 \\ M+c_1 &= 1,0000000000000000e+40 \end{aligned}$$

Se o valor de M for muito pequeno,

- pode ocorrer que nem todas as variáveis artificiais sejam nulas na solução óptima.

Conclusão

- Quando não existe um vértice adicional, é necessário resolver um problema auxiliar cujo resultado indica se existe, pelo menos, um vértice admissível ou se o modelo não tem solução.
- Isso completa a prova de:

Theorem (Fundamental de Programação Linear)

Dado um problema de programação linear, se não existir uma solução óptima com valor finito, então ou o problema é impossível ou a solução óptima é ilimitada.

Apêndices

Algoritmo simplex de minimização

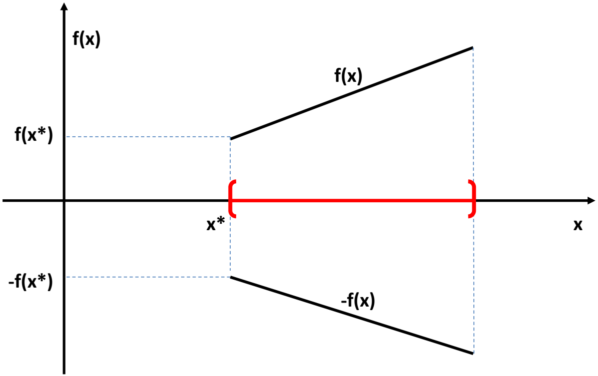
Lembrete: no algoritmo simplex de minimização:

- a coluna pivô é a coluna com o coeficiente mais positivo na linha da função objectivo,
- a solução é óptima se não existir nenhum coeficiente positivo na linha da função objectivo.

NOTA: Em alternativa a usar um algoritmo de minimização, podemos usar um algoritmo simplex de maximização para maximizar a função simétrica da função objectivo.

(cont.)

- Qualquer problema de minimização, em que se pretende $\min f(\boldsymbol{x})$, pode ser transformado num problema de maximização, em que se optimiza a função objectivo simétrica da original, $\max -f(\boldsymbol{x})$:



- Solução óptima $\boldsymbol{x}^*$ é a mesma, mas o valor da função objectivo da solução óptima é o simétrico $f(\boldsymbol{x}^*) = \min f(\boldsymbol{x}) = -\max -f(\boldsymbol{x})$

I - Obter quadro válido: folha de rascunho

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	0	0	0	0	0	- 1	- 1	0

- Exprimir a função objectivo z_a em função das variáveis não-básicas y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 usando eliminação de Gauss: somar à linha de z_a as linhas de a_1 e a_2.

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
$(+1)$*linha de z_a	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
$(+1)$*linha de a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
$(+1)$*linha de a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	-1	-1	5	3	1	0	0	22

- O quadro seguinte é válido:

Voltar

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	-1	-1	5	3	1	0	0	22

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
z	1	0	0	-120	-80	-30	0

- Exprimir a função objectivo z em função das variáveis não-básicas y_1, y_2 e y_5 usando eliminação de Gauss: somar à linha de z as linhas de y_3 e y_4 multiplicadas por constantes adequadas.

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
(+1)*linha de z	1	0	0	-120	-80	-30	0
(+120)*linha de y_3	0	-60	30	120	0	60	420
(+80)*linha de y_4	0	40	-60	0	80	-40	120
z	1	-20	-30	0	0	-10	540

- O quadro seguinte é válido:

Voltar

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
z	1	-20	-30	0	0	-10	540

Fim