Programação Linear - Método simplex

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

20 de Setembro de 2023

Método simplex: ideia chave

Ideia chave:

- O uso de sistemas de equações equivalentes permite tomar as decisões algorítmicas correctas.

A análise de um sistema de equações permite:

- associar uma solução (*solução básica*) admissível diferente a cada sistema de equações equivalente;
- avaliar se essa solução admissível é a solução óptima do modelo; e
- determinar qual deve ser próximo sistema de equações equivalente, se a solução não for óptima.

- O método simplex é um método iterativo que gera uma sequência de soluções admissíveis até atingir uma solução óptima.

Conteúdo

- Transformação de uma Inequação numa Equação e Forma standard
- Sistemas de equações equivalentes
- Solução básica de um sistema de equações
- Resolução de um exemplo

Forma standard do modelo

- O método simplex baseia-se numa definição do domínio que usa equações, em vez de inequações.

Transformação na forma standard (usando variáveis adicionais)

$$\begin{aligned} \max z &= \boldsymbol{cx} \\ & \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max z &= \boldsymbol{cx} \\ & \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

sendo $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}_+^{m \times 1}$ um vector da mesma dimensão que $\boldsymbol{b}$.

- O conjunto de soluções $\boldsymbol{x}$ admissíveis é igual nos 2 modelos.

Transformação de uma Inequação numa Equação

- Qualquer inequação do tipo $\leq$ pode ser transformada numa equação (equivalente), introduzindo uma variável adicional, designada por *variável de folga*, com valor não-negativo.

- Exemplo:

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 & \leq 120 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 + 1s_1 & = 120 \\ x_1, x_2, s_1 & \geq 0 \end{array}\right.$$

- A quantidade de recurso disponível é 120.
- O valor da função linear $3x_1 + 2x_2$ é a quantidade de recurso usado na solução $(x_1, x_2)^\top$.
- O valor de s_1 (variável de folga) é a quantidade não usada (ou folga) do recurso na solução $(x_1, x_2)^\top$.

Exemplo: transformação na forma standard

Modelo original

- Variáveis de decisão: x_1, x_2.

$$\begin{array}{rrcrcr} \max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\ & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\ & 1x_1 & & & \leq & 30 \\ & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2 \geq 0} & & \end{array}$$

Modelo na forma standard (equivalente ao modelo original)

- Variáveis de decisão: x_1, x_2.
- Variáveis de folga: s_1, s_2, s_3.

$$\begin{array}{rrcrrrrcr} \max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & & & & \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\ & 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\ & 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} & & & & \end{array}$$

Exemplo: sistemas de equações equivalentes

- Dois sistemas de equações equivalentes (o segundo resulta de substituir a variável x_1 nas 2 primeiras equações usando a igualdade $x_1 = 30 - s_3$) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array}\right. \qquad (1)$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} & + & 2x_2 & +1s_1 & & -3s_3 & = & 30 \\ & + & 2x_2 & & +1s_2 & -1s_3 & = & 50 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array}\right. \qquad (2)$$

Exemplo: sistemas de equações equivalentes

- Dois sistemas de equações equivalentes (o segundo resulta de substituir a variável x_1 nas 2 primeiras equações usando a igualdade $x_1 = 30 - s_3$) :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array}\right. \qquad (1)$$

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} & + & 2x_2 & +1s_1 & & -3s_3 & = & 30 \\ & + & 2x_2 & & +1s_2 & -1s_3 & = & 50 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array}\right. \qquad (2)$$

- Qualquer solução que obedeça ao sistema de equações (1) obedece também ao sistema de equações (2).
- Exercício: verificar que $\boldsymbol{x}_A$ e $\boldsymbol{x}_B$ obedecem aos 2 sistemas de equações equivalentes:

$$\boldsymbol{x}_A = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_A^\top = (0, 0, 120, 80, 30)^\top$$
$$\boldsymbol{x}_B = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_B^\top = (30, 0, 30, 50, 0)^\top$$

Sistemas de equações equivalentes

Os 2 sistemas de equações equivalentes, cada um deles correspondendo a uma partição diferente do conjunto de variáveis, em *variáveis dependentes* e em *variáveis independentes*:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & + & 2x_2 & +1s_1 & & -3s_3 & = & 30 \\ & + & 2x_2 & & +1s_2 & -1s_3 & = & 50 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array}\right.$$

podem ser escritos como:

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} s_1 & = & 120 & -3\,x_1 & -2\,x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1\,x_1 & -2\,x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1\,x_1 & \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrrr} s_1 & = & 30 & -2\,x_2 & +3\,s_3 \\ s_2 & = & 50 & -2\,x_2 & +1\,s_3 \\ x_1 & = & 30 & & -1\,s_3 \end{array}\right.$$

Método simplex: ideia chave

Ideia chave:

- O uso de sistemas de equações equivalentes permite tomar as decisões algorítmicas correctas.

A análise de um sistema de equações permite:

- associar uma solução (*solução básica*) admissível diferente a cada sistema de equações equivalente;
- avaliar se essa solução admissível é a solução óptima do modelo; e
- determinar qual deve ser próximo sistema de equações equivalente, se a solução não for óptima.

- O método simplex é um método iterativo que gera uma sequência de soluções admissíveis até atingir uma solução óptima.

A solução básica associada a um dado sistema de equações é uma das soluções de um sistema de equações em que as variáveis:

- independentes têm o valor 0, e as
- dependentes têm os valores determinados pela resolução do sistema de equações, de uma forma trivial.

A aplicação da regra aos 2 sistemas de equações equivalentes:

$$\left\{\begin{array}{lclrlrl} s_1 & = & 120 & -3 & x_1 & -2 & x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1 & x_1 & -2 & x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1 & x_1 & & \\ & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lclrlrl} s_1 & = & 30 & -2 & x_2 & +3 & s_3 \\ s_2 & = & 50 & -2 & x_2 & +1 & s_3 \\ x_1 & = & 30 & & & -1 & s_3 \\ & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

fornece as seguintes *soluções básicas admissíveis*, respectivamente:

$$\boldsymbol{x}_A = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_A^\top = (0, 0, 120, 80, 30)^\top$$
$$\boldsymbol{x}_B = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_B^\top = (30, 0, 30, 50, 0)^\top$$

Vamos usar:

variáveis básicas (a azul)	$\equiv$	variáveis dependentes
variáveis não-básicas (a vermelho)	$\equiv$	variáveis independentes

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} s_1 & = & 120 & -3\,x_1 & -2\,x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1\,x_1 & -2\,x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1\,x_1 & \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrrr} s_1 & = & 30 & -2\,x_2 & +3\,s_3 \\ s_2 & = & 50 & -2\,x_2 & +1\,s_3 \\ x_1 & = & 30 & & -1\,s_3 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

$$
\begin{array}{rrcrrrrcr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & & & & \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
& 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
& 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Vamos considerar também a equação da função objectivo e ...

formalizar o problema como $\max z$ obedecendo a:

$$
\begin{array}{rrcrrrrcr}
& 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
& 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
& 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\
z & -12x_1 & - & 10x_2 & & & & = & 0 \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 1, a solução básica do sistema de equações é: $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_1^\top = (0, 0, 120, 80, 30)^\top$ e $z_1 = 0$.
- Será que há alguma solução melhor?

$$\left\{ \begin{array}{ccrrr} s_1 & = & 120 & -3\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1\ x_1 & \\ z & = & 0 & +12\ x_1 & +10\ x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array} \right.$$

iteração 1

- Na iteração 1, a solução básica do sistema de equações é: $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_1^\top = (0, 0, 120, 80, 30)^\top$ e $z_1 = 0$.
- Será que há alguma solução melhor?

$$\left\{ \begin{array}{rcrrr} s_1 & = & 120 & -3\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1\ x_1 & \\ z & = & 0 & +12\ x_1 & +10\ x_2 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array} \right.$$

- Sim, por exemplo, se o valor de x_1 aumentar, mantendo $x_2 = 0$, o valor de z aumenta.

iteração 1

- Na iteração 1, a solução básica do sistema de equações é: $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_1^\top = (0, 0, 120, 80, 30)^\top$ e $z_1 = 0$.
- Será que há alguma solução melhor?

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} s_1 & = & 120 & -3\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1\ x_1 & \\ z & = & 0 & +12\ x_1 & +10\ x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Sim, por exemplo, se o valor de x_1 aumentar, mantendo $x_2 = 0$, o valor de z aumenta.
- Quanto podemos aumentar x_1 permanecendo a solução admissível?

iteração 1

- Na iteração 1, a solução básica do sistema de equações é: $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_1^\top = (0, 0, 120, 80, 30)^\top$ e $z_1 = 0$.
- Será que há alguma solução melhor?

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} s_1 & = & 120 & -3\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1\ x_1 & \\ z & = & 0 & +12\ x_1 & +10\ x_2 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Sim, por exemplo, se o valor de x_1 aumentar, mantendo $x_2 = 0$, o valor de z aumenta.
- Quanto podemos aumentar x_1 permanecendo a solução admissível?
- O valor de x_1 pode aumentar até 30 (diminuindo s_3 até 0).

iteração 1

- Na iteração 1, a solução básica do sistema de equações é: $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_1^\top = (0, 0, 120, 80, 30)^\top$ e $z_1 = 0$.
- Será que há alguma solução melhor?

$$\left\{ \begin{array}{rcrrr} s_1 & = & 120 & -3\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1\ x_1 & \\ z & = & 0 & +12\ x_1 & +10\ x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array} \right.$$

- Sim, por exemplo, se o valor de x_1 aumentar, mantendo $x_2 = 0$, o valor de z aumenta.
- Quanto podemos aumentar x_1 permanecendo a solução admissível?
- O valor de x_1 pode aumentar até 30 (diminuindo s_3 até 0).
- Vamos reescrever as equações usando eliminação de Gauss.

iteração 1

- Na iteração 1, a solução básica do sistema de equações é: $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_1^\top = (0, 0, 120, 80, 30)^\top$ e $z_1 = 0$.
- Será que há alguma solução melhor?

$$\left\{\begin{array}{ccrrr} s_1 & = & 120 & -3\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1\ x_1 & \\ z & = & 0 & +12\ x_1 & +10\ x_2 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Sim, por exemplo, se o valor de x_1 aumentar, mantendo $x_2 = 0$, o valor de z aumenta.
- Quanto podemos aumentar x_1 permanecendo a solução admissível?
- O valor de x_1 pode aumentar até 30 (diminuindo s_3 até 0).
- Vamos reescrever as equações usando eliminação de Gauss.
- Nota: $s_3 = 30 - 1x_1$, *i.e.*, $x_1 = 30 - 1s_3$

iteração 2

- Vamos eliminar x_1 do lado direito usando $x_1 = 30 - 1s_3$.

$$\begin{cases} s_1 & = & 120 & -3\,(30 - 1s_3) & -2\,x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1\,(30 - 1s_3) & -2\,x_2 \\ x_1 & = & & (30 - 1s_3) & \\ z & = & 0 & +12\,(30 - 1s_3) & +10\,x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{cases}$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} s_1 & = & 30 & -2\,x_2 & +3\,s_3 \\ s_2 & = & 50 & -2\,x_2 & +1\,s_3 \\ x_1 & = & 30 & & -1\,s_3 \\ z & = & 360 & +10\,x_2 & -12\,s_3 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{cases}$$

- Na iteração 2, $\boldsymbol{x}_2 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_2^\top = (30, 0, 30, 50, 0)^\top$ e $z_2 = 360$.

iteração 2

- Vamos eliminar x_1 do lado direito usando $x_1 = 30 - 1s_3$.

$$\left\{\begin{array}{rclrlrl} s_1 & = & 120 & -3 & (30 - 1s_3) & -2 & x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1 & (30 - 1s_3) & -2 & x_2 \\ x_1 & = & & & (30 - 1s_3) & & \\ z & = & 0 & +12 & (30 - 1s_3) & +10 & x_2 \\ & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\left\{\begin{array}{rclrlrl} s_1 & = & 30 & -2 & x_2 & +3 & s_3 \\ s_2 & = & 50 & -2 & x_2 & +1 & s_3 \\ x_1 & = & 30 & & & -1 & s_3 \\ z & = & 360 & +10 & x_2 & -12 & s_3 \\ & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Na iteração 2, $\boldsymbol{x}_2 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_2^\top = (30, 0, 30, 50, 0)^\top$ e $z_2 = 360$.
- Podemos aumentar o valor de z aumentando x_2 e mantendo $s_3 = 0$.

iteração 2

- Vamos eliminar x_1 do lado direito usando $x_1 = 30 - 1s_3$.

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} s_1 & = & 120 & -3\,(30-1s_3) & -2\,x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1\,(30-1s_3) & -2\,x_2 \\ x_1 & = & & (30-1s_3) & \\ z & = & 0 & +12\,(30-1s_3) & +10\,x_2 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} s_1 & = & 30 & -2\,x_2 & +3\,s_3 \\ s_2 & = & 50 & -2\,x_2 & +1\,s_3 \\ x_1 & = & 30 & & -1\,s_3 \\ z & = & 360 & +10\,x_2 & -12\,s_3 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Na iteração 2, $\mathbf{x}_2 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_2^\top = (30, 0, 30, 50, 0)^\top$ e $z_2 = 360$.
- Podemos aumentar o valor de z aumentando x_2 e mantendo $s_3 = 0$.
- O valor de x_2 pode aumentar até 15 (diminuindo s_1 até 0).

- Vamos eliminar x_1 do lado direito usando $x_1 = 30 - 1s_3$.

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3\,(30 - 1s_3) - 2\,x_2 \\ s_2 = 80 - 1\,(30 - 1s_3) - 2\,x_2 \\ x_1 = (30 - 1s_3) \\ z = 0 + 12\,(30 - 1s_3) + 10\,x_2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} s_1 = 30 - 2\,x_2 + 3\,s_3 \\ s_2 = 50 - 2\,x_2 + 1\,s_3 \\ x_1 = 30 - 1\,s_3 \\ z = 360 + 10\,x_2 - 12\,s_3 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Na iteração 2, $\boldsymbol{x}_2 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_2^\top = (30, 0, 30, 50, 0)^\top$ e $z_2 = 360$.
- Podemos aumentar o valor de z aumentando x_2 e mantendo $s_3 = 0$.
- O valor de x_2 pode aumentar até 15 (diminuindo s_1 até 0).
- Nota: $s_1 = 30 - 2x_2 + 3s_3$, *i.e.*, $x_2 = 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3$

iteração 3

- Vamos eliminar x_2 do lado direito usando $x_2 = 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3$.

$$\left\{\begin{array}{rclrlrl} x_2 & = & & & (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) & & \\ s_2 & = & 50 & -2 & (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) & +1 & s_3 \\ x_1 & = & 30 & & & -1 & s_3 \\ z & = & 360 & +10 & (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) & -12 & s_3 \\ & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\left\{\begin{array}{rclrlrl} x_2 & = & 15 & -0.5 & s_1 & +1.5 & s_3 \\ s_2 & = & 20 & +1 & s_1 & -2 & s_3 \\ x_1 & = & 30 & & & -1 & s_3 \\ z & = & 510 & -5 & s_1 & +3 & s_3 \\ & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Na iteração 3, $\boldsymbol{x}_3 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_3^\top = (30, 15, 0, 20, 0)^\top$ e $z_3 = 510$.

iteração 3

- Vamos eliminar x_2 do lado direito usando $x_2 = 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3$.

$$\begin{cases} x_2 = (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) \\ s_2 = 50 - 2\,(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) + 1\, s_3 \\ x_1 = 30 - 1\, s_3 \\ z = 360 + 10\,(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) - 12\, s_3 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} x_2 = 15 - 0.5\, s_1 + 1.5\, s_3 \\ s_2 = 20 + 1\, s_1 - 2\, s_3 \\ x_1 = 30 - 1\, s_3 \\ z = 510 - 5\, s_1 + 3\, s_3 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Na iteração 3, $\boldsymbol{x}_3 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_3^\top = (30, 15, 0, 20, 0)^\top$ e $z_3 = 510$.
- Podemos aumentar o valor de z aumentando s_3 e mantendo $s_1 = 0$.

iteração 3

- Vamos eliminar x_2 do lado direito usando $x_2 = 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3$.

$$\begin{cases} x_2 & = & & (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) & \\ s_2 & = & 50 & -2\,(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) & +1\ s_3 \\ x_1 & = & 30 & & -1\ s_3 \\ z & = & 360 & +10\,(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) & -12\ s_3 \\ & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 & & \end{cases}$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} x_2 & = & 15 & -0.5\ s_1 & +1.5\ s_3 \\ s_2 & = & 20 & +1\ s_1 & -2\ s_3 \\ x_1 & = & 30 & & -1\ s_3 \\ z & = & 510 & -5\ s_1 & +3\ s_3 \\ & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 & & \end{cases}$$

- Na iteração 3, $\boldsymbol{x}_3 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_3^\top = (30, 15, 0, 20, 0)^\top$ e $z_3 = 510$.
- Podemos aumentar o valor de z aumentando s_3 e mantendo $s_1 = 0$.
- O valor de s_3 pode aumentar até 10 (diminuindo s_2 até 0).

- Vamos eliminar x_2 do lado direito usando $x_2 = 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3$.

$$
\begin{cases}
x_2 = (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) \\
s_2 = 50 \; -2\,(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) \; +1\,s_3 \\
x_1 = 30 \; -1\,s_3 \\
z = 360 \; +10\,(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) \; -12\,s_3 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{cases}
$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$
\begin{cases}
x_2 = 15 \; -0.5\,s_1 \; +1.5\,s_3 \\
s_2 = 20 \; +1\,s_1 \; -2\,s_3 \\
x_1 = 30 \; -1\,s_3 \\
z = 510 \; -5\,s_1 \; +3\,s_3 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{cases}
$$

- Na iteração 3, $\boldsymbol{x}_3 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_3^\top = (30, 15, 0, 20, 0)^\top$ e $z_3 = 510$.
- Podemos aumentar o valor de z aumentando s_3 e mantendo $s_1 = 0$.
- O valor de s_3 pode aumentar até 10 (diminuindo s_2 até 0).
- Nota: $s_2 = 20 + 1s_1 - 2s_3$, *i.e.*, $s_3 = 10 + 0.5s_1 - 0.5s_2$

iteração 4

- Vamos eliminar s_3 do lado direito usando $s_3 = 10 + 0.5s_1 - 0.5s_2$.

$$\left\{\begin{array}{rcrrl} x_2 & = & 15 & -0.5\ s_1 & +1.5\ (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ s_3 & = & & & (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ x_1 & = & 30 & & -1\ (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ z & = & 510 & -5\ s_1 & +3\ (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x_2 & = & 30 & +0.25\ s_1 & -0.75\ s_2 \\ s_3 & = & 10 & +0.5\ s_1 & -0.5\ s_2 \\ x_1 & = & 20 & -0.5\ s_1 & +0.5\ s_2 \\ z & = & 540 & -3.5\ s_1 & -1.5\ s_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Na iteração 4, $\boldsymbol{x}_4 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_4^\top = (20, 30, 0, 0, 10)^\top$ e $z_4 = 540$.

iteração 4

- Vamos eliminar s_3 do lado direito usando $s_3 = 10 + 0.5s_1 - 0.5s_2$.

$$\begin{cases} x_2 &= & 15 & -0.5\ s_1 & +1.5\ (10+0.5s_1-0.5s_2) \\ s_3 &= & & & (10+0.5s_1-0.5s_2) \\ x_1 &= & 30 & & -1\ (10+0.5s_1-0.5s_2) \\ z &= & 510 & -5\ s_1 & +3\ (10+0.5s_1-0.5s_2) \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{cases}$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} x_2 &= & 30 & +0.25\ s_1 & -0.75\ s_2 \\ s_3 &= & 10 & +0.5\ s_1 & -0.5\ s_2 \\ x_1 &= & 20 & -0.5\ s_1 & +0.5\ s_2 \\ z &= & 540 & -3.5\ s_1 & -1.5\ s_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{cases}$$

- Na iteração 4, $\boldsymbol{x}_4 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_4^\top = (20, 30, 0, 0, 10)^\top$ e $z_4 = 540$.
- O valor de z não pode aumentar mais.

iteração 4

- Vamos eliminar s_3 do lado direito usando $s_3 = 10 + 0.5s_1 - 0.5s_2$.

$$\left\{\begin{array}{rcrrl} x_2 & = & 15 & -0.5\ s_1 & +1.5\ (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ s_3 & = & & & (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ x_1 & = & 30 & & -1\ (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ z & = & 510 & -5\ s_1 & +3\ (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x_2 & = & 30 & +0.25\ s_1 & -0.75\ s_2 \\ s_3 & = & 10 & +0.5\ s_1 & -0.5\ s_2 \\ x_1 & = & 20 & -0.5\ s_1 & +0.5\ s_2 \\ z & = & 540 & -3.5\ s_1 & -1.5\ s_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Na iteração 4, $\mathbf{x}_4 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_4^\top = (20, 30, 0, 0, 10)^\top$ e $z_4 = 540$.
- O valor de z não pode aumentar mais.
- A solução $\mathbf{x}_4$ é óptima ($\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_4$) e o seu valor é $z^* = z_4$.

Certificado de optimalidade

- Vamos multiplicar a primeira e a segunda restrições (a que estão associadas as variáveis não-básicas s_1 e s_2) por 3.5 e 1.5, respectivamente, e a terceira restrição por 0.

$$\begin{array}{rrcrlrr}
3.5\;(& 3x_1 & + & 2x_2 &)\leq & 120 & (3.5) \\
1.5\;(& 1x_1 & + & 2x_2 &)\leq & 80 & (1.5) \\
0\;(& 1x_1 & & &)\leq & 30 & (0) \\
\hline
 & 12x_1 & + & 10x_2 & \leq & 540 &
\end{array}$$

- A inequação resultado é $12x_1 + 10x_2 \leq 540$.
- Qualquer solução admissível que obedeça às restrições tem um valor de função objectivo que não pode exceder 540.

Conclusão

- A vantagem do uso de sistemas de equações equivalentes está na identificação fácil de uma solução admissível quando se atribui o valor nulo às variáveis não-básicas e, às variáveis básicas, os valores que resultam da resolução de um sistema de equações, que é determinado.
- Iremos ver que cada sistema de equações equivalente resulta da escolha de uma base, e que as soluções admissíveis que construímos deste modo são designadas por *soluções básicas*.
- Adicionalmente, as soluções básicas correspondem a vértices de poliedros convexos.