Programação Linear - poliedros e método simplex

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

28 de setembro de 2023

antes

- Os vértices do poliedro são importantes, porque existe uma solução óptima de um problema de programação linear que é um vértice $^{(*)}$.

Guião

- *Vértice* é um conceito do âmbito da geometria;
- na álgebra, o equivalente é a *solução básica admissível* do sistema de equações que descreve o domínio do modelo.
- Vamos caracterizar faces, vértices e arestas de um poliedro.
- Um simplex é um poliedro definido por um vértice e os vértices que lhe são adjacentes.
- Identifica-se se um vértice é óptimo analisando como varia o valor da função objectivo ao longo das arestas incidentes no vértice.

depois

- O algoritmo simplex determina a sequência de vértices a explorar.

(*) quando o poliedro tem vértices (o que acontece sempre que há restrições do tipo ≥ 0) e quando a solução óptima não é ilimitada.

Identificação de vértices de um poliedro

Modelo original

- Variáveis de decisão: x_1, x_2.

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
\text{suj. a} & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\
 & 1x_1 & & & \leq & 30 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

Quais dos seguintes pontos são vértices do domínio (região admissível)?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Sim ☐ Não ☐

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$ Sim ☐ Não ☐

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$ Sim ☐ Não ☐

Transformação de uma Inequação numa Equação

- Qualquer inequação do tipo $\leq$ pode ser transformada numa equação (equivalente), introduzindo uma variável adicional, designada por *variável de folga*, com valor não-negativo.

- Exemplo:

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 & \leq 120 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 + 1s_1 & = 120 \\ x_1, x_2, s_1 & \geq 0 \end{array}\right.$$

- A quantidade de recurso disponível é 120.
- O valor da função linear $3x_1 + 2x_2$ é a quantidade de recurso usado na solução $(x_1, x_2)^\top$.
- O valor de s_1 (variável de folga) é a quantidade não usada (ou folga) do recurso na solução $(x_1, x_2)^\top$.

Transformação de uma Inequação numa Equação

- Qualquer inequação do tipo $\leq$ pode ser transformada numa equação (equivalente), introduzindo uma variável adicional, designada por *variável de folga*, com valor não-negativo.

- Exemplo:

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 & \leq 120 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 + 1s_1 & = 120 \\ x_1, x_2, s_1 & \geq 0 \end{array}\right.$$

- A quantidade de recurso disponível é 120.
- O valor da função linear $3x_1 + 2x_2$ é a quantidade de recurso usado na solução $(x_1, x_2)^\top$.
- O valor de s_1 (variável de folga) é a quantidade não usada (ou folga) do recurso na solução $(x_1, x_2)^\top$.

nota: análise da restrição $3x_1 + 2x_2 + s_1 = 120$

- As equações $s_1 = 0$ e $3x_1 + 2x_2 = 120$ descrevem a mesma recta.
- Essa recta suporta uma **face** do poliedro.

Exemplo: transformação na forma standard

Modelo original

- Variáveis de decisão: x_1, x_2.

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\
& 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\
& 1x_1 & & & \leq & 30 \\
& \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2 \geq 0} & &
\end{array}
$$

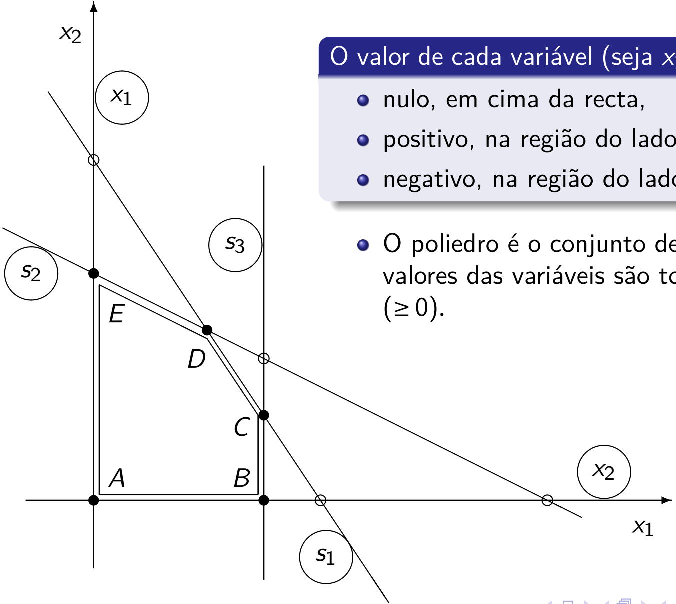
Modelo na forma standard (equivalente ao modelo original)

- Variáveis de decisão: x_1, x_2.
- Variáveis de folga: s_1, s_2, s_3.

$$
\begin{array}{rrcrrrrcr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & & & & \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
& 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
& 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\
& \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} & & &
\end{array}
$$

- O conjunto de soluções $\boldsymbol{x}$ admissíveis é igual nos 2 modelos.

Representação do domínio com todas as variáveis



O valor de cada variável (seja x_1, x_2, s_1, s_2 ou s_3) é:

- nulo, em cima da recta,
- positivo, na região do lado do círculo, e
- negativo, na região do lado oposto.

- O poliedro é o conjunto de pontos em que os valores das variáveis são todos não-negativos (≥ 0).

Lembrete: restrições activas

Definition (Restrição activa)

Se uma solução admissível $\tilde{\mathbf{x}}$ ($\tilde{\mathbf{x}} \in X$) obedecer a uma restrição dos tipos ($\mathbf{a}^i \mathbf{x} \leq b_i$ ou $\mathbf{a}^i \mathbf{x} \geq b_i$) como igualdade, i.e., se $\mathbf{a}^i \tilde{\mathbf{x}} = b_i$, diz-se que a restrição é activa em $\tilde{\mathbf{x}}$ (senão, diz-se que a restrição não é activa em $\tilde{\mathbf{x}}$).

Lembrete: restrições activas

Definition (Restrição activa)

Se uma solução admissível $\tilde{\mathbf{x}}$ $(\tilde{\mathbf{x}} \in X)$ *obedecer a uma restrição dos tipos* $(\mathbf{a}^i \mathbf{x} \leq b_i$ *ou* $\mathbf{a}^i \mathbf{x} \geq b_i)$ *como igualdade, i.e., se* $\mathbf{a}^i \tilde{\mathbf{x}} = b_i$*, diz-se que a restrição é activa em* $\tilde{\mathbf{x}}$ *(senão, diz-se que a restrição não é activa em* $\tilde{\mathbf{x}}$*).*

Notas:

A equação $\mathbf{a}^i \mathbf{x} = b_i$ é a equação da fronteira da região definida pela restrição do tipo $\mathbf{a}^i \mathbf{x} \leq b_i$, e também do tipo $\mathbf{a}^i \mathbf{x} \geq b_i$.

Lembrete: restrições activas

Definition (Restrição activa)

Se uma solução admissível $\tilde{\mathbf{x}}$ ($\tilde{\mathbf{x}} \in X$) obedecer a uma restrição dos tipos ($\mathbf{a}^i \mathbf{x} \leq b_i$ ou $\mathbf{a}^i \mathbf{x} \geq b_i$) como igualdade, i.e., se $\mathbf{a}^i \tilde{\mathbf{x}} = b_i$, diz-se que a restrição é activa em $\tilde{\mathbf{x}}$ (senão, diz-se que a restrição não é activa em $\tilde{\mathbf{x}}$).

Notas:

A equação $\mathbf{a}^i \mathbf{x} = b_i$ é a equação da fronteira da região definida pela restrição do tipo $\mathbf{a}^i \mathbf{x} \leq b_i$, e também do tipo $\mathbf{a}^i \mathbf{x} \geq b_i$.

Um caso particular da nota anterior é a equação $x_j = 0$, que é a equação da fronteira da região definida pela restrição de não-negatividade $x_j \geq 0$.

Lembrete: restrições activas

Definition (Restrição activa)

Se uma solução admissível $\tilde{\mathbf{x}}$ ($\tilde{\mathbf{x}} \in X$) obedecer a uma restrição dos tipos ($\mathbf{a}^i\mathbf{x} \leq b_i$ ou $\mathbf{a}^i\mathbf{x} \geq b_i$) como igualdade, i.e., se $\mathbf{a}^i\tilde{\mathbf{x}} = b_i$, diz-se que a restrição é activa em $\tilde{\mathbf{x}}$ (senão, diz-se que a restrição não é activa em $\tilde{\mathbf{x}}$).

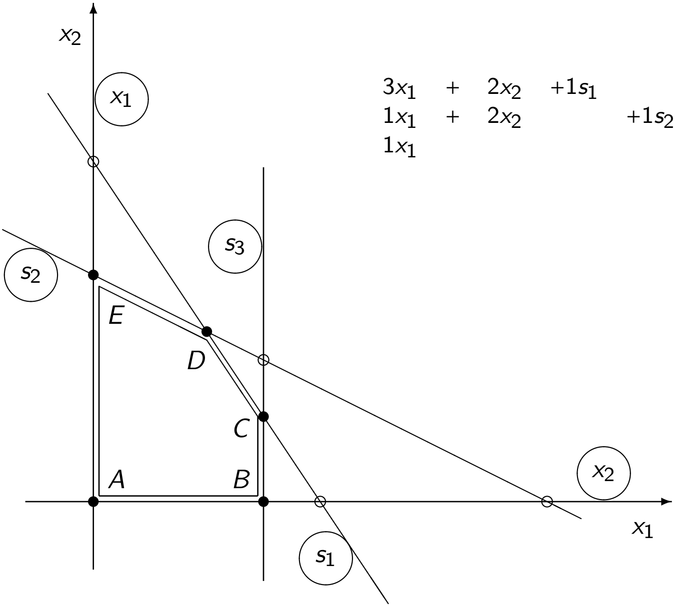
Notas:

A equação $\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{x} = b_i$ é a equação da fronteira da região definida pela restrição do tipo $\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{x} \leq b_i$, e também do tipo $\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{x} \geq b_i$.

Um caso particular da nota anterior é a equação $x_j = 0$, que é a equação da fronteira da região definida pela restrição de não-negatividade $x_j \geq 0$.

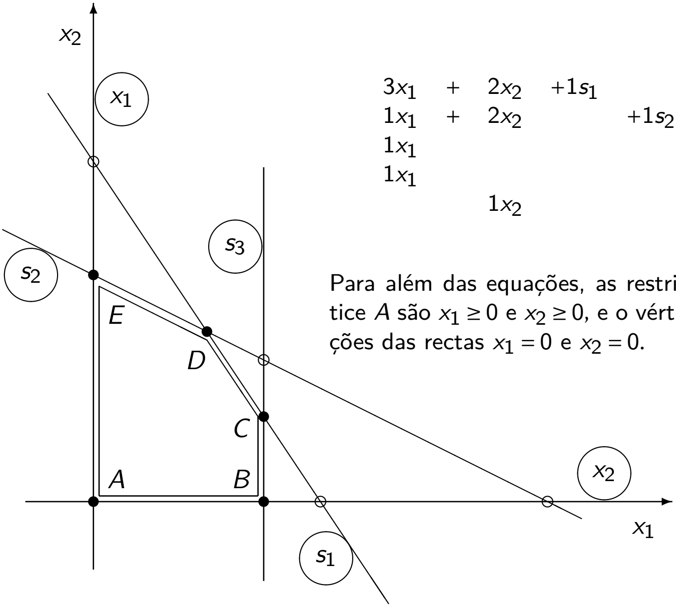
Se a restrição for uma equação $\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{x} = b_i$, qualquer solução admissível $\tilde{\boldsymbol{x}}$ obedece à restrição como igualdade. Por isso, as restrições que são equações (do modelo na forma standard) são sempre restrições activas.

Exemplo: quais as restrições activas no vértice A?



$$
\begin{array}{ccccccccc}
3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30
\end{array}
$$

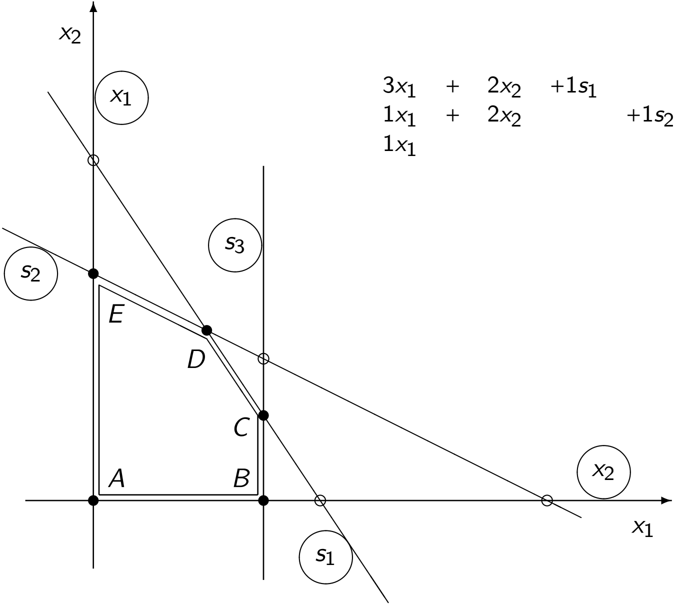
Exemplo: quais as restrições activas no vértice A?



$$
\begin{array}{rcrrrrcr}
3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\
1x_1 & & & & & & = & 0 \\
 & & 1x_2 & & & & = & 0
\end{array}
$$

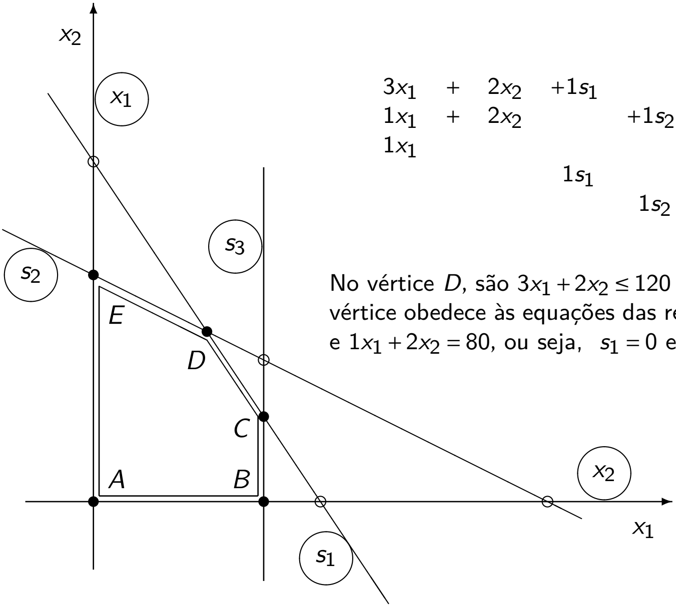
Para além das equações, as restrições activas no vértice A são $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, e o vértice obedece às equações das rectas $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

Exemplo: quais as restrições activas no vértice D?



$$
\begin{array}{cccccccc}
3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30
\end{array}
$$

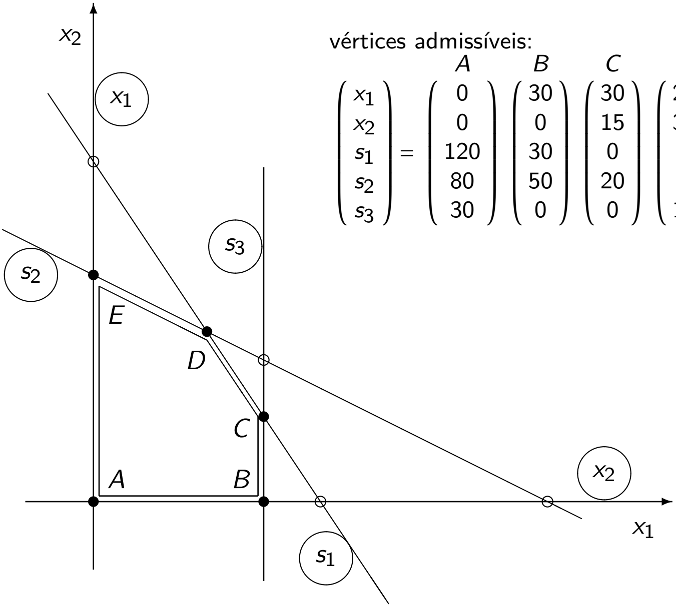
Exemplo: quais as restrições activas no vértice D?



$$
\begin{array}{rcrrrrcr}
3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\
 & & & 1s_1 & & & = & 0 \\
 & & & & 1s_2 & & = & 0
\end{array}
$$

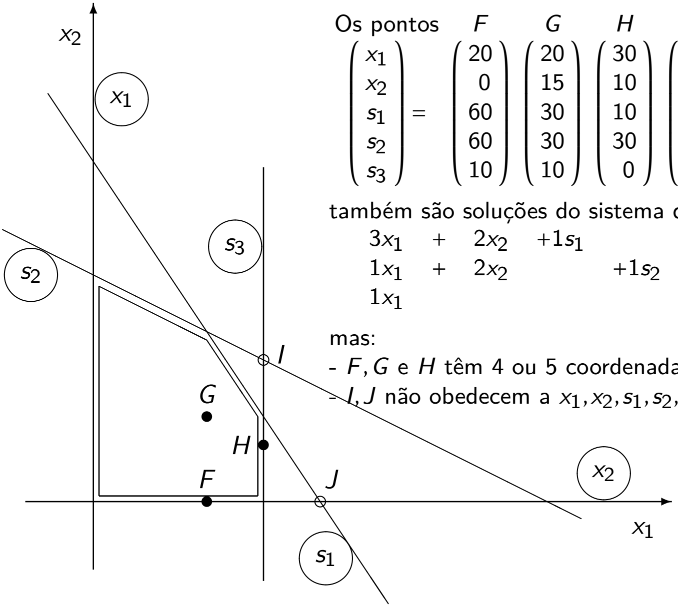
No vértice D, são $3x_1 + 2x_2 \leq 120$ e $1x_1 + 2x_2 \leq 80$, e o vértice obedece às equações das rectas $3x_1 + 2x_2 = 120$ e $1x_1 + 2x_2 = 80$, ou seja, $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Exemplo: qual a característica comum?



vértices admissíveis:

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & B & C & D & E \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \\ 80 \\ 30 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 30 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \end{array}$$



Os pontos

$$
\begin{array}{cccccc}
 & F & G & H & I & J \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} =
& \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 60 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}
& \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 30 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}
& \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}
& \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
& \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ -10 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

também são soluções do sistema de equações:

$$
\begin{array}{ccccccc}
3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = 120 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = 80 \\
1x_1 & & & & & +1s_3 & = 30
\end{array}
$$

mas:

- F, G e H têm 4 ou 5 coordenadas positivas;
- I, J não obedecem a $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

Antes: sistema de equações da iteração 4 do método simplex:

$$\begin{cases} x_2 = 30 + 0.25\, s_1 - 0.75\, s_2 \\ s_3 = 10 + 0.5\, s_1 - 0.5\, s_2 \\ x_1 = 20 - 0.5\, s_1 + 0.5\, s_2 \\ z = 540 - 3.5\, s_1 - 1.5\, s_2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exemplo: determinação coordenadas vértice D

Antes: sistema de equações da iteração 4 do método simplex:

$$\begin{cases} x_2 = 30 + 0.25\, s_1 - 0.75\, s_2 \\ s_3 = 10 + 0.5\, s_1 - 0.5\, s_2 \\ x_1 = 20 - 0.5\, s_1 + 0.5\, s_2 \\ \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Sistema de 5 vars e 5 equações das fronteiras das restrições activas:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & +1s_1 & & & = & 0 \\ & & & & & +1s_2 & & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & +1s_1 & & & = & 120 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & & +1s_2 & & = & 80 \\ 1x_1 & & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array}$$

Exemplo: determinação coordenadas vértice D

Antes: sistema de equações da iteração 4 do método simplex:

$$\begin{cases} x_2 = 30 + 0.25\, s_1 - 0.75\, s_2 \\ s_3 = 10 + 0.5\, s_1 - 0.5\, s_2 \\ x_1 = 20 - 0.5\, s_1 + 0.5\, s_2 \\ \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Sistema de 5 vars e 5 equações das fronteiras das restrições activas:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & +1s_1 & & & = & 0 \\ & & & & & +1s_2 & & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & +1s_1 & & & = & 120 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & & +1s_2 & & = & 80 \\ 1x_1 & & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array}$$

O conjunto de vectores (coluna) dos coeficientes de cada variável formam uma *base* de $\mathbb{R}^5$, e é daí que vem a designação de *solução básica*.

Exemplo: Resolução do sistema de equações do vértice D

Sistema de 5 vars e 5 equações das fronteiras das restrições activas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & +1s_1 & & & = & 0 \\
 & & & & +1s_2 & & = & 0 \\
3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30
\end{array}$$

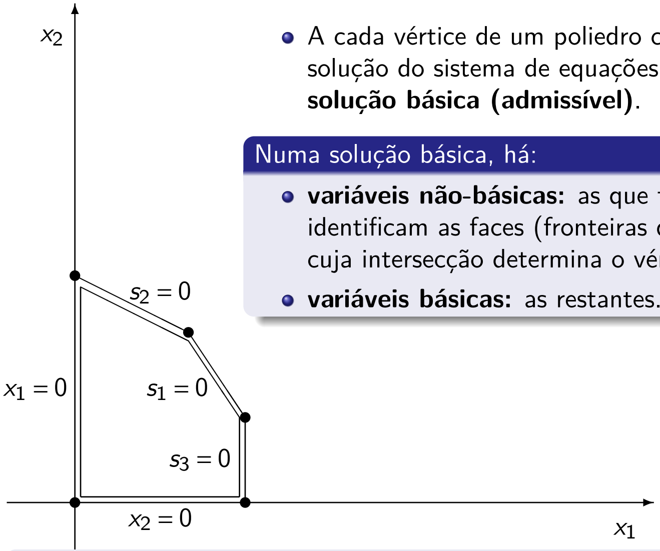
Removendo as 2 primeiras equações e eliminando s_1 e s_2 das outras:

$$\begin{array}{cccccc}
3x_1 & + & 2x_2 & & = & 120 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & = & 80 \\
1x_1 & & & +1s_3 & = & 30
\end{array}$$

que serve para determinar x_2, s_3 e x_1, e é um sistema de equações **equivalente** ao do método simplex:

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
x_2 & = & 30 & +0.25\, s_1 & -0.75\, s_2 \\
s_3 & = & 10 & +0.5\, s_1 & -0.5\, s_2 \\
x_1 & = & 20 & -0.5\, s_1 & +0.5\, s_2 \\
 & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}\right.$$

após fazer as vars não-básicas nulas $(s_1 = s_2 = 0)$ e as remover.



- A cada vértice de um poliedro corresponde uma solução do sistema de equações designada por **solução básica (admissível)**.

Numa solução básica, há:

- **variáveis não-básicas:** as que têm valor 0, e identificam as faces (fronteiras das restrições) cuja intersecção determina o vértice;
- **variáveis básicas:** as restantes.

assumimos que o vértice não é degenerado (veremos depois).

Exemplo: solução básica 1 (*variáveis básicas*: s_1, s_2 e s_3)

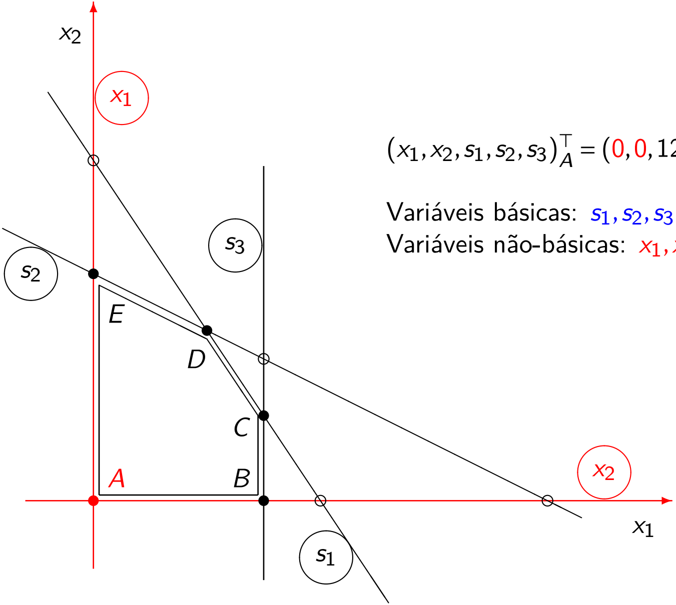
- $n = 5$: número de variáveis
- $m = 3$: número de variáveis básicas
- $n - m = 2$: número de variáveis não-básicas

- Reordenando as colunas, vê-se que o sistema de equações:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} s_3}_{\text{Vars básicas}} + \underbrace{\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} x_2}_{\text{Vars não-básicas}} = \begin{bmatrix}120\\80\\30\end{bmatrix}$$

- já está resolvido em ordem a s_1, s_2 e s_3 (*variáveis básicas*).
- Sendo x_1 e x_2 (*variáveis não-básicas*) iguais a 0,
- obtém-se a solução básica $x_1 = x_2 = 0$, $s_1 = 120, s_2 = 80$ e $s_3 = 30$.

... que corresponde ao vértice $A : (x_1, x_2)_A^\top = (0,0)^\top$



$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_A^\top = (0, 0, 120, 80, 30)^\top$$

Variáveis básicas: s_1, s_2, s_3

Variáveis não-básicas: x_1, x_2

Soluções básicas e sistemas de equações equivalentes

- Os valores das variáveis básicas são obtidos resolvendo o sistema de equações em ordem ao conjunto pretendido de variáveis básicas, *i.e.*,
- transformando o sistema de equações num **sistema de equações equivalente** que contém uma matriz identidade associada ao conjunto de variáveis básicas.

lembrete

- efectuando operações elementares, *e.g.*, substituindo uma linha pela sua adição com outra, é possível transformar um sistema de equações $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ num **sistema de equações equivalente**.

Exemplo: solução básica 2 (*variáveis básicas*: x_1, x_2 e s_3)

- Reordenando as colunas,

$$\begin{array}{ccc} \text{Vars básicas} & & \text{Vars não-básicas} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} s_3 \quad + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_2 \quad = \begin{bmatrix}120\\80\\30\end{bmatrix}$$

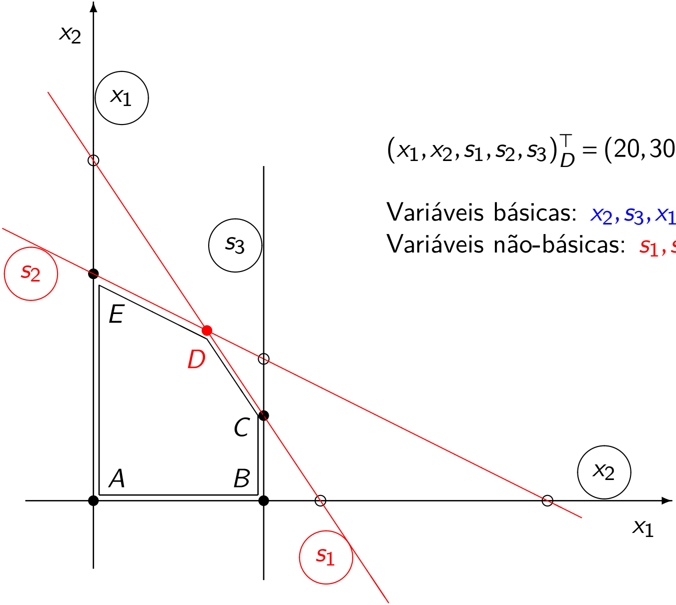
- e usando o método de eliminação de Gauss, para resolver o sistema de equações em ordem a x_1, x_2 e s_3, obtém-se:

$$\begin{array}{ccc} \text{Vars básicas} & & \text{Vars não-básicas} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} s_3 \quad + \begin{bmatrix}0.5\\-0.25\\-0.5\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}-0.5\\0.75\\0.5\end{bmatrix} s_2 \quad = \begin{bmatrix}20\\30\\10\end{bmatrix}$$

- Sendo s_1 e s_2 (variáveis não-básicas) iguais a 0, a solução básica é:
- $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_D^\top = (20, 30, 0, 0, 10)^\top$.

... que corresponde ao vértice $D : (x_1, x_2)_D^\top = (20, 30)^\top$



$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_D^\top = (20, 30, 0, 0, 10)^\top$

Variáveis básicas: x_2, s_3, x_1

Variáveis não-básicas: s_1, s_2

Exemplo (espaço de dimensão 3)

- Qual o poliedro definido pelo seguinte sistema de equações?

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & & & +s_1 & & & = 1 \\
& x_2 & & & +s_2 & & = 1 \\
& & x_3 & & & +s_3 & = 1 \\
\multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}
$$

Exemplo (espaço de dimensão 3)

- Qual o poliedro definido pelo seguinte sistema de equações?

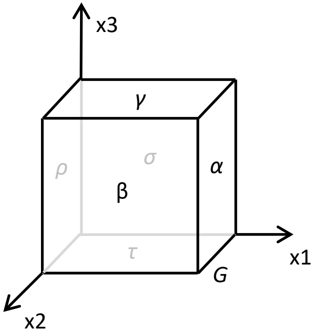
$$\begin{array}{llllllll}
x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\
 & x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\
 & & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\
\multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}$$

É o poliedro cujas faces são suportadas pelos planos:

- $s_1 = 0$ suporta a face α
- $s_2 = 0$ suporta a face β
- $s_3 = 0$ suporta a face γ
- $x_1 = 0$ suporta a face ρ
- $x_2 = 0$ suporta a face σ
- $x_3 = 0$ suporta a face τ

- Qual o poliedro definido pelo seguinte sistema de equações?

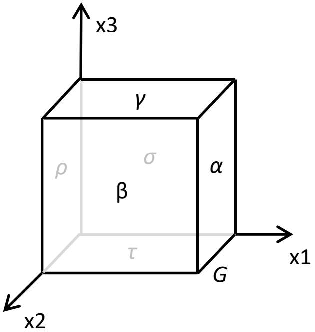
$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & & & +s_1 & & & = 1 \\
& x_2 & & & +s_2 & & = 1 \\
& & x_3 & & & +s_3 & = 1 \\
\multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}
$$



É o poliedro cujas faces são suportadas pelos planos:

- $s_1 = 0$ suporta a face α
- $s_2 = 0$ suporta a face β
- $s_3 = 0$ suporta a face γ
- $x_1 = 0$ suporta a face ρ
- $x_2 = 0$ suporta a face σ
- $x_3 = 0$ suporta a face τ

Exemplo (espaço de dimensão 3)



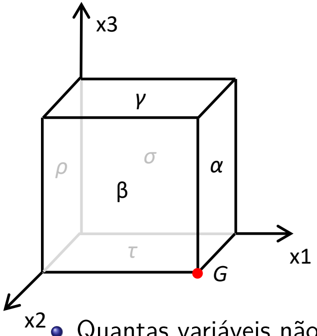
O cubo unitário é um poliedro definido pelas restrições:

$$
\begin{array}{llll}
x_1 & & & \leq 1 \\
& x_2 & & \leq 1 \\
& & x_3 & \leq 1 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0}
\end{array}
$$

- Na forma standard:

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & & & +s_1 & & & = 1 \\
& x_2 & & & +s_2 & & = 1 \\
& & x_3 & & & +s_3 & = 1 \\
\multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}
$$

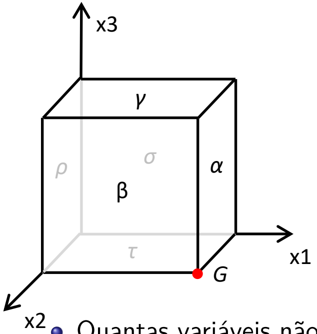
Exemplo (espaço de dimensão 3)



O cubo unitário é um poliedro definido pelas restrições:

$$
\begin{array}{llllllcl}
x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\
& x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\
& & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} & &
\end{array}
$$

- Quantas variáveis não-básicas há em cada vértice do cubo?

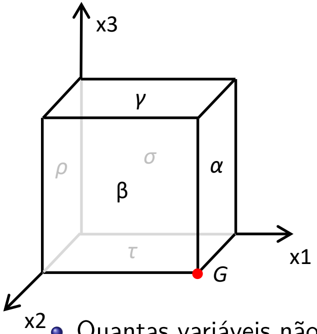


O cubo unitário é um poliedro definido pelas restrições:

$$
\begin{array}{llllllcl}
x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\
& x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\
& & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} & &
\end{array}
$$

- Quantas variáveis não-básicas há em cada vértice do cubo?
- O sistema de equações tem 6 variáveis e 3 equações ($n = 6, m = 3$).
- Há $n - m = 3$ variáveis não-básicas (espaço de dimensão 3).
- Quais as vars não-básicas na solução básica equivalente ao vértice G?

Exemplo (espaço de dimensão 3)



O cubo unitário é um poliedro definido pelas restrições:

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\
& x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\
& & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} & &
\end{array}
$$

- Quantas variáveis não-básicas há em cada vértice do cubo?
- O sistema de equações tem 6 variáveis e 3 equações $(n = 6, m = 3)$.
- Há $n - m = 3$ variáveis não-básicas (espaço de dimensão 3).
- Quais as vars não-básicas na solução básica equivalente ao vértice G?
- As variáveis não-básicas são as variáveis com valor 0 nas 3 faces que definem o vértice G: s_1, s_2 e x_3.
- As variáveis básicas são $x_1 = x_2 = s_3 = 1$ (fácil de resolver).

IDEIA CHAVE:

Representar o sistema de equações numa dada base permite saber:

- as coordenadas do vértice correspondente à solução básica (já vimos);
- como varia, ao longo de cada **aresta** incidente no vértice (vamos já ver):
  - o valor de cada variável;
  - o valor da função objectivo.

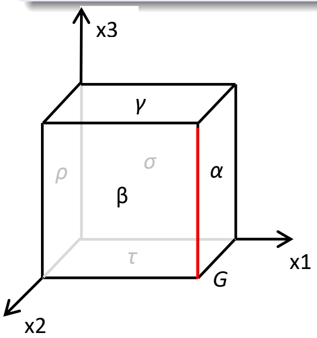
Essa informação permite:

- implementar o *algoritmo simplex*, que 'percorre' vértices admissíveis, sucessivamente melhores, até se atingir a solução óptima.

Arestas do poliedro

Caracterização de uma aresta (entre 2 vértices adjacentes)

- Uma aresta é definida pelas faces que são comuns aos 2 vértices;



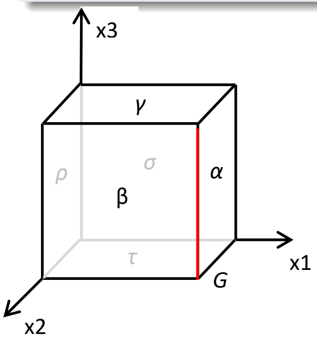
Exemplo:

- As faces comuns aos vértices F e G são α e β.
- Numa extremidade da aresta, a face τ apenas suporta o vértice G.
- Na outra extremidade, a face γ apenas suporta o vértice F.

Arestas do poliedro (valores de variáveis)

Considerando um vértice e uma aresta nele incidente:

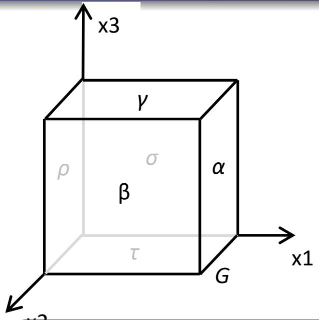
- há **1** variável não-básica do vértice que só é nula no vértice;
- as restantes $(n-m-1)$ variáveis não-básicas são comuns ao vértice e ao vértice adjacente (elas são nulas nas faces que definem a aresta, e portanto em toda a aresta, e nos dois vértices).



Exemplo:
(vars não-básicas do vértice $G: s_1, s_2, x_3$)

- A variável x_3 só é nula no vértice G.
- As variáveis s_1 e s_2 são nulas em toda a aresta.

Movimento ao longo de uma aresta



- Quando nos movemos ao longo de uma aresta partindo de um vértice, os valores das variáveis alteram-se do seguinte modo:

Variáveis não-básicas:

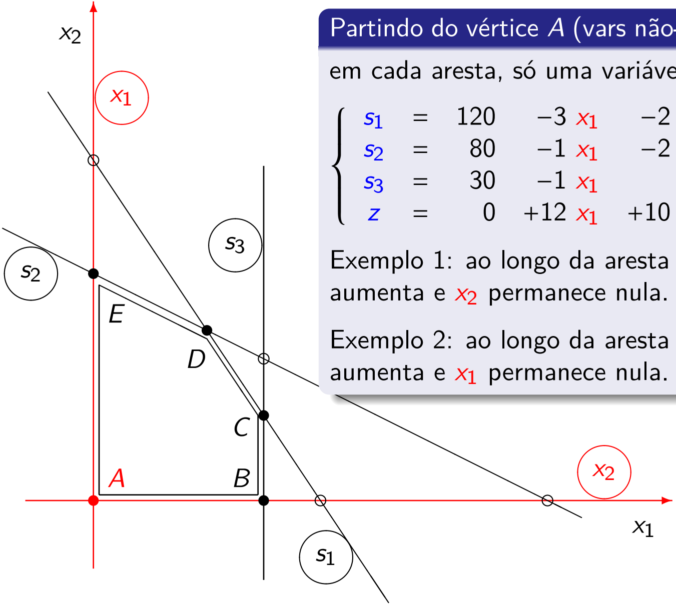
- há **1 única** variável não-básica cujo valor aumenta (ao afastar da face);
- as restantes variáveis não-básicas permanecem nulas.

Variáveis básicas:

- alteram-se de acordo com o sistema de equações.

- A equação da função objectivo mostra a alteração do seu valor.

Exemplos 1 e 2 (espaço de dimensão 2)



Partindo do vértice A (vars não-básicas $x_1 = x_2 = 0$),

em cada aresta, só uma variável é que aumenta:

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3\,x_1 - 2\,x_2 \\ s_2 = 80 - 1\,x_1 - 2\,x_2 \\ s_3 = 30 - 1\,x_1 \\ z = 0 + 12\,x_1 + 10\,x_2 \end{cases}$$

Exemplo 1: ao longo da aresta $[AB]$, a variável x_1 aumenta e x_2 permanece nula.

Exemplo 2: ao longo da aresta $[AE]$, a variável x_2 aumenta e x_1 permanece nula.

Simplexes (ou simplices) e método simplex

Definição:

- Um *d-simplex* é a figura geométrica mais simples do espaço de dimensão d, definida por $d+1$ vértices.

Simplexes (ou simplices) e método simplex

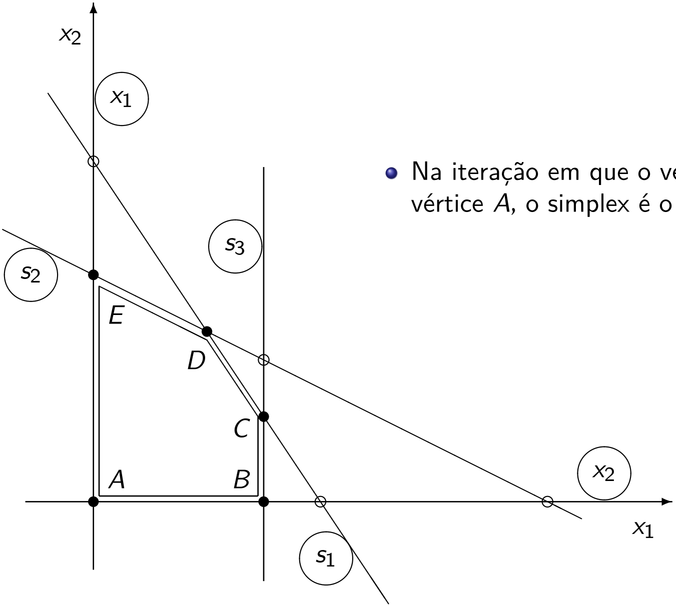
Definição:

- Um *d-simplex* é a figura geométrica mais simples do espaço de dimensão d, definida por $d+1$ vértices.

É o poliedro mais simples no espaço de dimensão d:

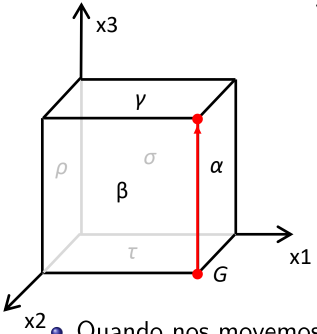
- um $0-$simplex é um ponto
- um $1-$simplex é um segmento de recta
- um $2-$simplex é um triângulo
- um $3-$simplex é um tetraedro (pirâmide triangular)

Exemplo (espaço de dimensão 2)



- Na iteração em que o vértice actual é o vértice A, o simplex é o triângulo [ABE].

Exemplo 3 (espaço de dimensão 3)



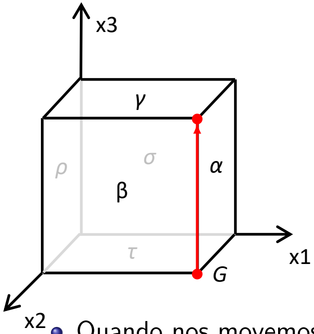
Vamos usar a função objectivo $z = x_1 + x_2 + x_3$.

No vértice G (vars não-básicas $s_1 = s_2 = x_3 = 0$), as equações que definem o cubo unitário e a função objectivo são:

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 & -s_1 & & \\ x_2 & = & 1 & & -s_2 & \\ s_3 & = & 1 & & & -x_3 \\ z & = & (1-s_1)+(1-s_2)+x_3 & & & \end{cases}$$

- Quando nos movemos do vértice G para o vértice F, como se alteram os valores das variáveis não-básicas do vértice G?

Exemplo 3 (espaço de dimensão 3)



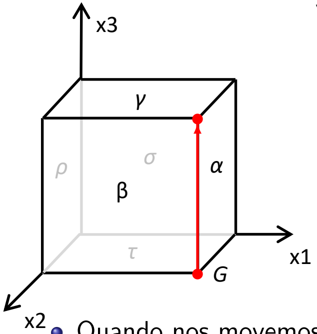
Vamos usar a função objectivo $z = x_1 + x_2 + x_3$.

No vértice G (vars não-básicas $s_1 = s_2 = x_3 = 0$), as equações que definem o cubo unitário e a função objectivo são:

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 & -s_1 & & \\ x_2 & = & 1 & & -s_2 & \\ s_3 & = & 1 & & & -x_3 \\ z & = & (1-s_1)+(1-s_2)+x_3 & & & \end{cases}$$

- Quando nos movemos do vértice G para o vértice F, como se alteram os valores das variáveis não-básicas do vértice G?
- Resposta: x_3 aumenta, e s_1 e s_2 mantêm-se iguais a 0;

Exemplo 3 (espaço de dimensão 3)



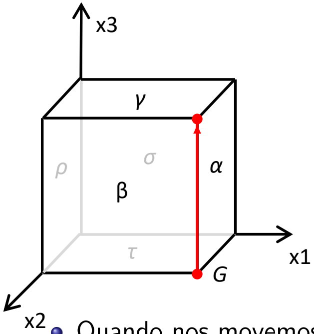
Vamos usar a função objectivo $z = x_1 + x_2 + x_3$.

No vértice G (vars não-básicas $s_1 = s_2 = x_3 = 0$), as equações que definem o cubo unitário e a função objectivo são:

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 & -s_1 & & \\ x_2 & = & 1 & & -s_2 & \\ s_3 & = & 1 & & & -x_3 \\ z & = & (1-s_1)+(1-s_2)+x_3 & & & \end{cases}$$

- Quando nos movemos do vértice G para o vértice F, como se alteram os valores das variáveis não-básicas do vértice G?
- Resposta: x_3 aumenta, e s_1 e s_2 mantêm-se iguais a 0;
- em consequência disso, segundo o sistema de equações, como se alteram os valores das variáveis básicas do vértice G?

Exemplo 3 (espaço de dimensão 3)

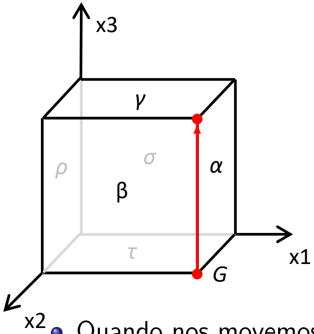


Vamos usar a função objectivo $z = x_1 + x_2 + x_3$.

No vértice G (vars não-básicas $s_1 = s_2 = x_3 = 0$), as equações que definem o cubo unitário e a função objectivo são:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - s_1 \\ x_2 = 1 - s_2 \\ s_3 = 1 - x_3 \\ z = (1 - s_1) + (1 - s_2) + x_3 \end{cases}$$

- Quando nos movemos do vértice G para o vértice F, como se alteram os valores das variáveis não-básicas do vértice G?
- Resposta: x_3 aumenta, e s_1 e s_2 mantêm-se iguais a 0;
- em consequência disso, segundo o sistema de equações, como se alteram os valores das variáveis básicas do vértice G?
- Resposta: s_3 diminui, e x_1 e x_2 mantêm-se iguais a 1.



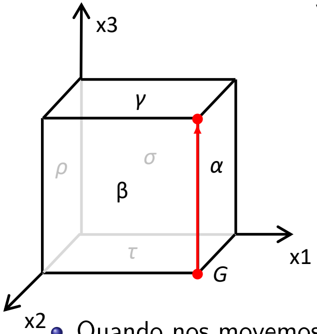
Vamos usar a função objectivo $z = x_1 + x_2 + x_3$.

No vértice G (vars não-básicas $s_1 = s_2 = x_3 = 0$), as equações que definem o cubo unitário e a função objectivo são:

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 & -s_1 & & \\ x_2 & = & 1 & & -s_2 & \\ s_3 & = & 1 & & & -x_3 \\ z & = & (1-s_1)+(1-s_2)+x_3 & & & \end{cases}$$

- Quando nos movemos do vértice G para o vértice F, como se alteram os valores das variáveis não-básicas do vértice G?
- Resposta: x_3 aumenta, e s_1 e s_2 mantêm-se iguais a 0;
- em consequência disso, segundo o sistema de equações, como se alteram os valores das variáveis básicas do vértice G?
- Resposta: s_3 diminui, e x_1 e x_2 mantêm-se iguais a 1.
- E o valor da função objectivo $z = x_1 + x_2 + x_3$?

Exemplo 3 (espaço de dimensão 3)



Vamos usar a função objectivo $z = x_1 + x_2 + x_3$.

No vértice G (vars não-básicas $s_1 = s_2 = x_3 = 0$), as equações que definem o cubo unitário e a função objectivo são:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - s_1 \\ x_2 = 1 - s_2 \\ s_3 = 1 - x_3 \\ z = (1 - s_1) + (1 - s_2) + x_3 \end{cases}$$

- Quando nos movemos do vértice G para o vértice F, como se alteram os valores das variáveis não-básicas do vértice G?
- Resposta: x_3 aumenta, e s_1 e s_2 mantêm-se iguais a 0;
- em consequência disso, segundo o sistema de equações, como se alteram os valores das variáveis básicas do vértice G?
- Resposta: s_3 diminui, e x_1 e x_2 mantêm-se iguais a 1.
- E o valor da função objectivo $z = x_1 + x_2 + x_3$?
- Resposta: o valor de z aumenta.

IDEIA CHAVE: das soluções básicas ao método simplex

Representar o sistema de equações numa dada base permite saber:

- as coordenadas do vértice correspondente à solução básica;
- como varia, ao longo de cada **aresta** incidente no vértice:
  - o valor de cada variável;
  - o valor da função objectivo.

Operações fundamentais do método simplex

- teste de optimalidade: existe algum vértice admissível adjacente ao vértice actual com melhor valor de função objectivo?
- pivô: mudança de uma base (vértice) para uma base adjacente.

Método simplex: método iterativo que gera uma sequência de vértices:

- em cada iteração, o vértice e os seus adjacentes definem um simplex;
- ou se escolhe um dos vértices adjacentes para a iteração seguinte,
- ou se termina, por se observar algum *critério de paragem*.

Pivô

Pivô

- Um *pivô* é uma mudança de uma base (vértice) para uma base adjacente.

Caracterização de bases (vértices) adjacentes

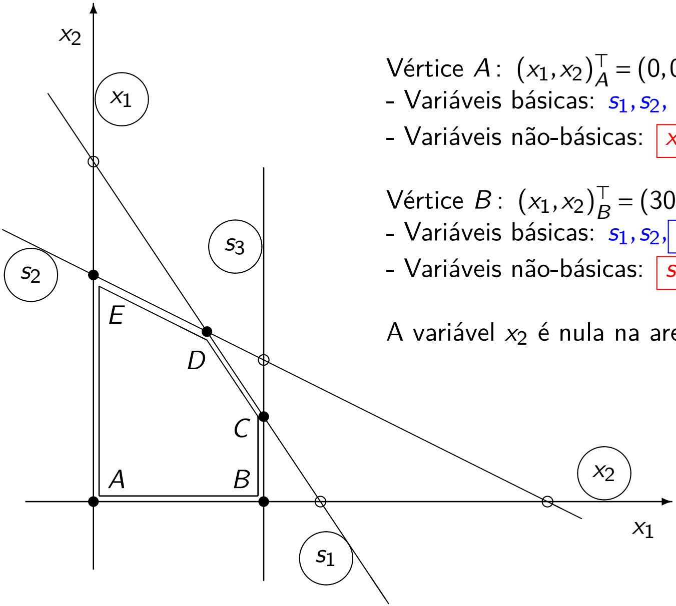
Dois vértices são adjacentes, se houver apenas a troca de 2 variáveis:

- uma variável não-básica num vértice é básica no vértice adjacente
- uma variável básica num vértice é não-básica no vértice adjacente

- Um *algoritmo simplex* define regras para seleccionar o vértice adjacente e para identificar qual a troca de variáveis (iremos ver).

Quando há degenerescência, duas bases diferentes podem dar a mesma solução básica (o mesmo vértice) [veremos depois].

Exemplo 1: o vértice B é adjacente ao vértice A

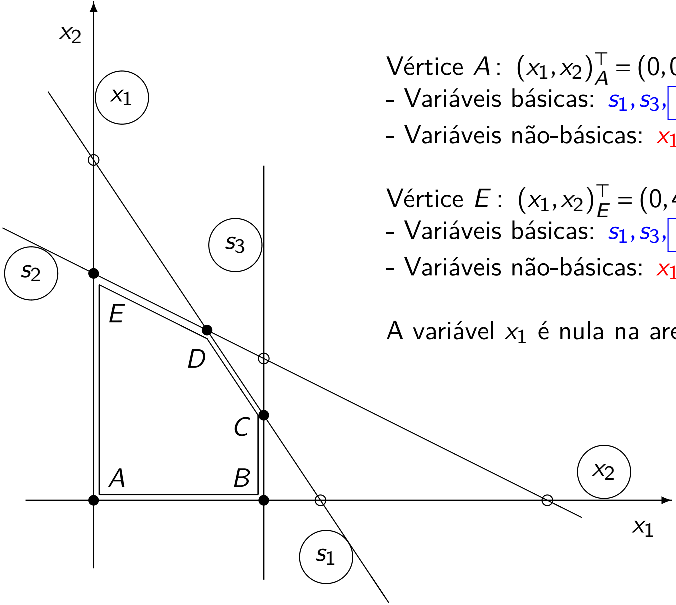


Vértice A: $(x_1, x_2)_A^\top = (0,0)^\top$:
- Variáveis básicas: $s_1, s_2, \boxed{s_3}$
- Variáveis não-básicas: $\boxed{x_1}, x_2$ (iguais a 0)

Vértice B: $(x_1, x_2)_B^\top = (30,0)^\top$:
- Variáveis básicas: $s_1, s_2, \boxed{x_1}$
- Variáveis não-básicas: $\boxed{s_3}, x_2$ (iguais a 0)

A variável x_2 é nula na aresta $[AB]$

Expressão Aresta

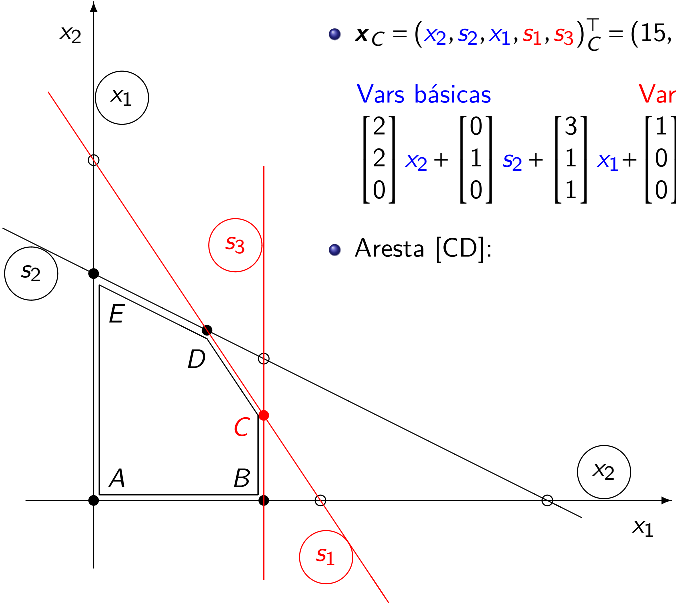


Vértice A: $(x_1, x_2)_A^\top = (0, 0)^\top$:
- Variáveis básicas: $s_1, s_3, \boxed{s_2}$
- Variáveis não-básicas: $x_1, \boxed{x_2}$ (iguais a 0)

Vértice E: $(x_1, x_2)_E^\top = (0, 40)^\top$:
- Variáveis básicas: $s_1, s_3, \boxed{x_2}$
- Variáveis não-básicas: $x_1, \boxed{s_2}$ (iguais a 0)

A variável x_1 é nula na aresta $[AE]$

Exemplo 4: vértice C e movimento na aresta $[CD]$



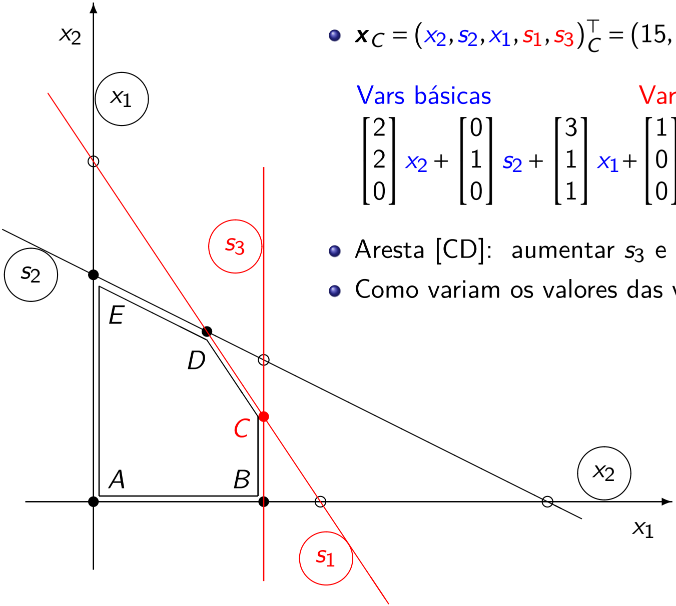
- $\boldsymbol{x}_C = (x_2, s_2, x_1, s_1, s_3)_C^\top = (15, 20, 30, 0, 0)^\top$

Vars básicas | Vars não-básicas

$$\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} s_3 = \begin{bmatrix}120\\80\\30\end{bmatrix}$$

- Aresta [CD]:

Exemplo 4: vértice C e movimento na aresta $[CD]$



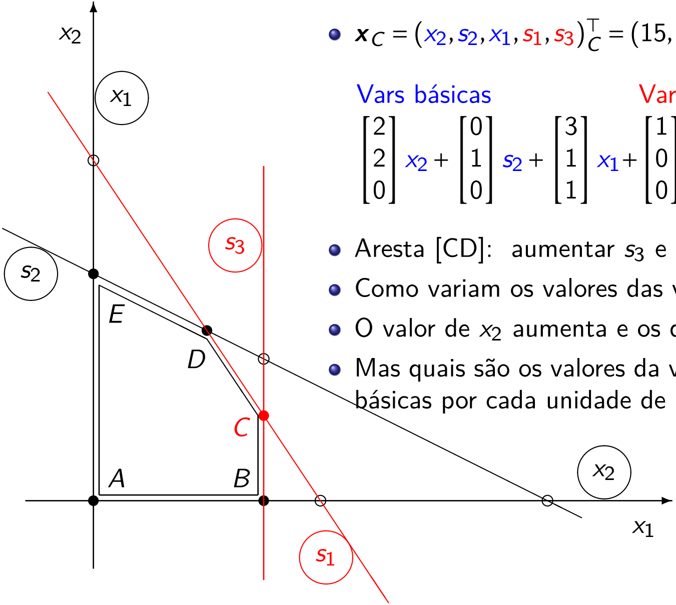
- $\boldsymbol{x}_C = (x_2, s_2, x_1, s_1, s_3)_C^\top = (15, 20, 30, 0, 0)^\top$

Vars básicas — Vars não-básicas

$$\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} s_3 = \begin{bmatrix}120\\80\\30\end{bmatrix}$$

- Aresta [CD]: aumentar s_3 e manter $s_1 = 0$.
- Como variam os valores das variáveis x_2, s_2 e x_1?

Exemplo 4: vértice C e movimento na aresta $[CD]$



- $\mathbf{x}_C = (x_2, s_2, x_1, s_1, s_3)_C^\top = (15, 20, 30, 0, 0)^\top$

Vars básicas Vars não-básicas

$$\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} s_3 = \begin{bmatrix}120\\80\\30\end{bmatrix}$$

- Aresta [CD]: aumentar s_3 e manter $s_1 = 0$.
- Como variam os valores das variáveis x_2, s_2 e x_1?
- O valor de x_2 aumenta e os de s_2 e x_1 diminuem.
- Mas quais são os valores da variação das variáveis básicas por cada unidade de aumento de s_3?

Exemplo 4: quais os valores da variação das vars básicas?

- Quando a <u>variável não básica</u> aumenta, há um consumo de recursos; (no exemplo, quando s_3 aumenta, há um consumo só do recurso 3)
- esses recursos devem ser libertados pelas actividades <u>básicas</u> que os estão a usar, para o consumo total igualar o vector do lado direito.

Vars básicas / Vars não-básicas

$$\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} s_3 = \begin{bmatrix}120\\80\\30\end{bmatrix}$$

Exemplo 4: quais os valores da variação das vars básicas?

- Quando a <u>variável não básica</u> aumenta, há um consumo de recursos; (no exemplo, quando s_3 aumenta, há um consumo só do recurso 3)
- esses recursos devem ser libertados pelas actividades <u>básicas</u> que os estão a usar, para o consumo total igualar o vector do lado direito.

Vars básicas — Vars não-básicas

$$\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} s_3 = \begin{bmatrix}120\\80\\30\end{bmatrix}$$

- Pré-multiplicando o sistema de equações por $\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -3/2\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, obtém-se o sistema de equações equivalente associado ao vértice C:

Vars básicas — Vars não-básicas

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\2\\1\end{bmatrix} s_3 = \begin{bmatrix}15\\20\\30\end{bmatrix}$$

- Vector de s_3 indica os valores da variação das vars básicas (porquê?).

- O sistema de equações original é:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} x_1}_{\text{Vars básicas}} + \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} s_3}_{\text{Vars não-básicas}} = \begin{bmatrix}120\\80\\30\end{bmatrix}$$

- O vector de s_3 pode ser expresso como combinação (única) dos vectores das variáveis básicas (porquê?):

$$\underbrace{-\frac{3}{2}\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}}_{\text{Vars básicas}} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{s_3}$$

- Consumo de recursos permanece igual, qualquer que seja o valor θ, se as alterações de s_3 e das variáveis básicas forem:

$$\underbrace{\theta\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{s_3} + \underbrace{\frac{3}{2}\theta\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} - 2\theta\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \theta\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}}_{\text{Vars básicas}} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Conclusão

- Um vértice de um poliedro convexo é caracterizado algebricamente por ser uma solução básica de um sistema de equações.
- Representar o sistema de equações numa dada base permite ter toda a informação para implementar o método simplex.
- Veremos o algoritmo simplex usando quadros, que tornam mais fácil a representação do sistema de equações.

Apêndices

Solução básica ≡ Vértice

Teorema

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ é uma solução básica admissível $\iff$ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ é um vértice admissível do poliedro $X = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$

Intuição:

- Uma solução com uma variável igual a 0 pertence à recta (ou, na generalidade, ao (hiper)plano) fronteira da região definida por uma restrição.
- Uma solução com $(n - m)$ variáveis iguais a 0 pertence a $(n - m)$ (hiper)planos.
- A intersecção de $(n - m)$ (hiper)planos (linearmente independentes) no espaço de dimensão $(n - m)$ define um vértice do poliedro.

(cont.)

Teorema

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ é uma solução básica admissível $\Longleftrightarrow$ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ é um vértice admissível do poliedro $X = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$

Esboço da prova:

($\Rightarrow$) Vamos considerar uma solução básica que não seja um vértice, e pode portanto ser expressa como combinação convexa estrita de 2 pontos $\boldsymbol{x}^1$ e $\boldsymbol{x}^2$ de X, ambos com m coordenadas positivas e $(n-m)$ coordenadas nulas. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{b}$, pelo que $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2) = \boldsymbol{0}$, que é uma combinação linear não-nula dos m vectores, pelo que necessariamente $\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^2$, por causa da independência linear dos m vectores (contradição).

($\Leftarrow$) Vamos supor que a solução $\tilde{\boldsymbol{x}}$ não é uma solução básica; temos m vectores linearmente dependentes, e é possível arranjar 2 pontos admissíveis, e exprimir a solução como combinação convexa estrita desses 2 pontos admissíveis, pelo que a solução não é um vértice. $\square$

Expressão de uma aresta

- A aresta que une os vértices adjacentes $\boldsymbol{x}^1$ e $\boldsymbol{x}^2$ é o lugar geométrico dos pontos $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2, \ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Exemplo: na aresta $[AB]$, o valor de $x_2 = 0$:

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^\top = \lambda\ (0, 0, 120, 80, 30)^\top + (1-\lambda)\ (30, 0, 30, 50, 0)^\top,\ 0 \leq \lambda \leq 1$$

Voltar

Fim