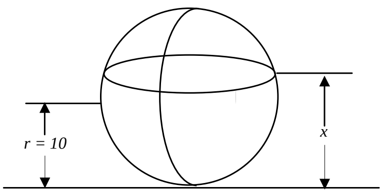
Universidade do Minho
Escola de Engenharia

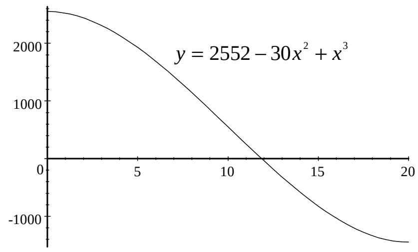
FOLHAS DE EXERCÍCIOS
Métodos Numéricos e Otimização Não Linear
Ano letivo de 2023/24

Métodos Numéricos

Equação não linear

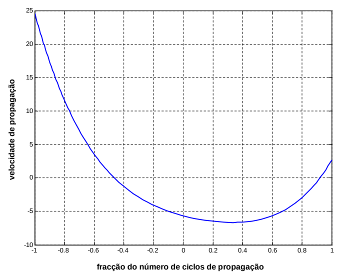
1. Uma bola esférica de raio $r = 10$cm feita de uma substância cuja densidade é $\rho = 0.638$, foi colocada num recipiente com água. Calcule a distância x da parte submersa da bola sabendo que verifica:
$$\frac{\pi\left(x^3 - 3x^2r + 4r^3\rho\right)}{3} = 0.$$





Use o método de Newton para calcular uma aproximação à solução, usando no critério de paragem $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$ (ou faça no máximo 3 iterações).

2. A função
$$a(x) = 2.02x^5 - 1.28x^4 + 3.06x^3 - 2.92x^2 - 5.66x + 6.08$$
é utilizada num estudo do comportamento mecânico de materiais, representando $a(x)$ o comprimento da fissura e x (> 0) uma fração do número de ciclos de propagação.



Pretende-se saber para que valores de x a velocidade de propagação da fissura é nula. Utilize um método que não recorre ao cálculo de derivadas, usando no critério de paragem $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ ou no máximo 3 iterações.

3. O volume v de um líquido num tanque esférico de raio r está relacionado com a profundidade h do líquido da seguinte forma:
$$v = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}.$$
   (a) Calcule, utilizando um método que não recorre ao cálculo de derivadas, a profundidade h, num tanque de raio $r = 1$ para um volume de 0.5. Utilize para aproximação inicial o intervalo $[0.25, 0.5]$ e considere $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ ou no máximo 3 iterações.
   (b) Repita os cálculos, nas mesmas condições da alínea anterior, mas utilizando para aproximação inicial o intervalo $[2.5, 3]$. Comente os resultados e analise a viabilidade da solução encontrada.

4. A concentração de uma bactéria $c(t)$ num depósito decresce de acordo com a seguinte expressão

$$c(t) = 70e^{-1.5t} + 25e^{-0.075t}.$$

Utilize um método iterativo que recorre ao cálculo da derivada para determinar o tempo necessário até a concentração da bactéria ficar reduzida a 9. Use a seguinte aproximação inicial $t_1 = 5$. Para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$ ou $n_{\max} = 3$.

5. Baseado num trabalho de Frank-Kamenetski, em 1955, a temperatura no interior de um material, quando envolvido por uma fonte de calor, pode ser determinada se resolvermos a seguinte equação não linear em x:

$$\frac{e^{-0.5x}}{\cosh(e^{0.5x})} = \sqrt{0.5L}.$$

Para $L = 0.088$, calcule a raiz da equação, usando um método iterativo que não recorra a derivadas. Sabendo que a raiz está no intervalo $[0, 2]$, pare o processo iterativo quando o critério de paragem for verificado para $\varepsilon_1 = 0.5$ e $\varepsilon_2 = 0.1$, ou ao fim de 2 iterações.

Nota: $\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$

6. A velocidade ascendente, v, de um foguetão pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$v = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - q\,t}\right) - g\,t$$

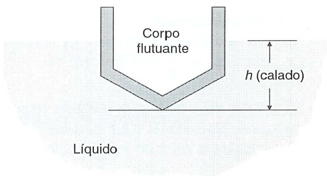
em que u é a velocidade relativa a que o combustível é expelido, m_0 é a massa inicial do foguetão no instante $t = 0$, q é a taxa de consumo de combustível e g é a aceleração da gravidade. Considerando $u = 2200\ m/s$, $g = 9.8m/s^2$, $m_0 = 1.6 \times 10^5\ Kg$ e $q = 2680\ Kg/s$, calcule o tempo para o qual o foguetão atinge a velocidade $v = 1000\ m/s$, sabendo que esse instante está entre 20 s e 30 s.

Utilize o método que achar mais adequado, com $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ e $\varepsilon_2 = 10^{-1}$ ou no máximo 3 iterações.

7. Pela aplicação do Princípio de Arquimedes para determinação do calado de embarcações, pretende determinar-se a profundidade h correspondente ao equilíbrio tal que

$$\gamma_s V_s = \gamma_l V_l(h)$$

com $\gamma_s = 918.35\ kg/m^3$ (densidade do sólido), $V_s = 1700m^3$ (volume do sólido), $\gamma_l = 1.025kg/m^3$ (densidade do líquido) e $V_l(h)$ volume do líquido deslocado (ver figura).

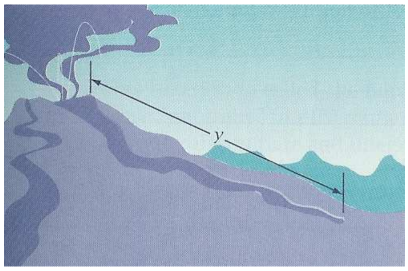


Utilize o método de Newton para calcular o valor de h, supondo $V_l(h) = h(h-40)^2$. Utilize para aproximação inicial $h^{(1)} = 140$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$, ou no máximo 3 iterações.

8. A figura representa um vulcão em erupção. A relação entre a distância y (milhas) percorrida pela lava e o tempo t (horas) é dada por:

$$y = 7\ (2 - 0.9^t).$$

Existe uma aldeia no sopé da montanha a uma distância de $y = 10$. O gabinete de proteção civil advertiu os moradores da aldeia de que a lava chegaria às suas casas em menos de 6 horas.
Calcule utilizando um método iterativo que recorre ao cálculo de derivadas o instante de tempo em que a lava do vulcão atinge a aldeia.



Considere $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$ ou no máximo 3 iterações.
Nota: $(a^x)' = a^x\ln(a)$, para a constante.

Sistemas de equações lineares

9. Um engenheiro supervisiona a produção de 3 marcas de automóveis. Para a sua produção, são necessários 3 tipos de materiais: metal, tecido e borracha. As quantidades para produzir um carro de cada marca são:

carro	metal(lb/carro)	tecido(lb/carro)	borracha(lb/carro)
1	1500	25	100
2	1700	33	120
3	1900	42	160

Estão disponíveis por dia, respetivamente 106000, 2170, 8200 lb de metal, tecido e borracha. Quantos automóveis podem ser produzidos por dia?

Resolva o sistema por um método direto e estável (usando 4 casas decimais nos cálculos).

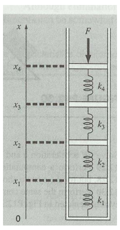
10. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 \\ 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 \end{pmatrix}$$

e o vetor $b = (14.6,\ -11.4,\ 14.0,\ -0.9)^T$.

Resolva o sistema correspondente por um método direto e estável.

11. Considere a figura que representa um sistema de 4 molas ligadas em série sujeito a uma força F de 2000 Kg. Numa situação de equilíbrio, as equações força-balanço deduzidas definem inter-relações entre as molas:



$$\begin{cases} k_2(x_2 - x_1) & = k_1 x_1 \\ k_3(x_3 - x_2) & = k_2(x_2 - x_1) \\ k_4(x_4 - x_3) & = k_3(x_3 - x_2) \\ \quad F & = k_4(x_4 - x_3) \end{cases}$$

em que $k_1 = 150,\ k_2 = 50,\ k_3 = 75$ e $k_4 = 225$ são as constantes das molas (kg/s^2).

Resolva o sistema por um método direto e estável.

12. Um engenheiro foi contratado para construir casas em 3 estilos diferentes arquitetónicos: barroco, colonial e rústico. Para tal, determinou as quantidades de materiais (ferro, madeira e cimento) que serão empregues em cada estilo, conforme a tabela seguinte:

Estilo/Materiais	ferro	madeira	cimento
barroco	4	2	1
colonial	2	5	3
rústico	1	2	6

Pretende-se saber o número de unidades necessárias, de cada material, para que se possam construir 13 casas barrocas, 15 casas coloniais e 22 casas rústicas.

(a) Apresente a formulação matemática do problema na forma de sistema de equações lineares.

(b) Resolve o sistema por um método direto e estável.

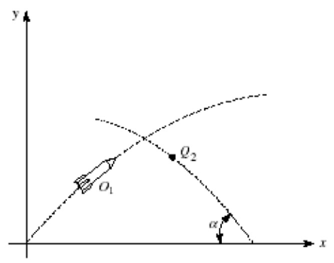
Sistemas de equações não lineares

13. Pensei em dois números x e y. O produto dos dois somado ao cubo do segundo é igual a 3 e o logaritmo neperiano do segundo adicionado à metade do primeiro é 1. Em que números pensei?

    (a) Formule o problema como um sistema de equações.

    (b) Resolva-o utilizando para aproximação inicial o ponto $(1.9, 1.1)$. Apresente o resultado no final de uma iteração e a correspondente estimativa do erro relativo.

14. A posição de um determinado objeto O_1 no plano XY é descrita em função do tempo (t) pelas seguintes equações:



$$x_1(t) = t \qquad y_1(t) = 1 - e^{-t}$$

A posição de um segundo objeto O_2 é descrita pelas seguintes equações:

$$x_2(t) = 1 - t\cos(\alpha) \qquad y_2(t) = -0.1t^2 + t\,\text{sen}(\alpha)$$

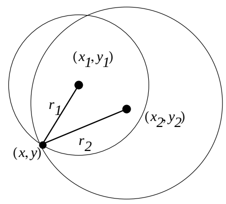
em que α representa o ângulo, como mostra a figura.

Determine os valores de t e α na posição em que os dois objetos colidem, *i.e.*, na posição em que se igualam as coordenadas x e y:

$$\begin{array}{rcl} t & = & 1 - t\cos(\alpha) \\ 1 - e^{-t} & = & -0.1t^2 + t\,\text{sen}(\alpha) \end{array}$$

Considere os valores iniciais $(t, \alpha)^{(1)} = (4.3, 2.4)$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.015$ ou no máximo duas iterações.

15. Em problemas de navegação, é necessário encontrar a posição de um ponto (x, y), através dos valores das distâncias r_1 e r_2 a dois pontos de posição conhecida (x_1, y_1) e (x_2, y_2), como mostra a figura.



    (a) Formule o problema como um sistema de equações não lineares em função das coordenadas do ponto (x, y).

    (b) Considerando $(x_1, y_1) = (10, 10)$, $(x_2, y_2) = (10, -10)$, $r_1 = 14$ e $r_2 = 16$, calcule as coordenadas do ponto (x, y) através do método iterativo de Newton considerando a seguinte aproximação inicial $(x, y)^{(1)} = (0, 0)$. Apresente o valor ao fim de duas iterações com a correspondente estimativa do erro relativo.

16. Num coletor solar, um balanço de energia na placa absorvente e na placa de vidro produz o seguinte sistema de equações não lineares nas temperaturas absolutas da placa absorvente (x_1) e da placa de vidro (x_2)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^4 + 0.068x_1 - x_2^4 - 0.058x_2 & = & 0.015 \\ x_1^4 + 0.058x_1 - 2x_2^4 - 0.117x_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Considerando a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (0.3, 0.3)$, implemente duas iterações do método de Newton. Apresente uma estimativa do erro relativo da aproximação calculada.

17. A concentração de um poluente num lago depende do tempo t e é dada por

$$C(t) = 70\, e^{\beta t} + 20\, e^{\omega t}\,.$$

Efetuaram-se duas medições da concentração que foram registadas na seguinte tabela

t	1	2
$C(t)$	27.5702	17.6567

Utilize o método de Newton para determinar β e ω. Considere a aproximação inicial $(\beta, \omega)^{(1)} = (-1.9, -0.15)$. Implemente um iteração e apresente um estimativa do erro relativo da aproximação calculada.

Interpolação polinomial

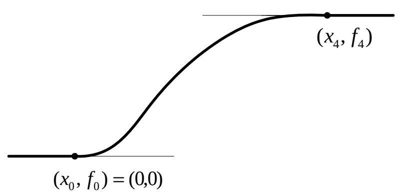
18. Os registos efetuados numa linha de montagem são os seguintes:

n^o de unidades	1	3	4	6	7	10
horas necessárias	2	3	4	5	6	10

(a) Tendo sido recebidos pedidos para a montagem de 2 unidades e 8 unidades, use interpolação cúbica para estimar o tempo (em horas) necessário para satisfazer cada pedido.

(b) Estime o erro de truncatura cometido na alínea anterior.

19. Pretende-se construir um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos $(x_0, f_0) = (0, 0)$ e (x_4, f_4), como mostra a figura



Com base nos dados da tabela

x_i	0	1	1.5	2	x_4
$f_i = p_3(x_i)$	0	0.3125	0.6328125	1	f_4

verifique se o ponto $(x_4, f_4) = (4, 2)$ pertence ao polinómio. Use 7 casas decimais nos cálculos.

20. A tabela apresenta a população dos Estados Unidos da América (em milhões) de 1940 a 1980.

Ano	1940	1950	1960	1970	1980
População	132.165	151.326	179.323	203.302	226.542

(a) Construa o polinómio interpolador de Newton de grau 4 para estimar a população em 1965.

(b) A população em 1930 foi 123.203. Qual a precisão do valor calculado em a)?

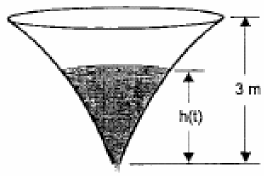
21. Considere a seguinte tabela da função $f(x)$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	a	2	1	0	4

$a \in \Re$.

Determine a de modo a que o polinómio interpolador de $f(x)$ nos pontos da tabela dada seja de grau 3. Justifique.

22. A figura representa um reservatório. Considere que, no início, o reservatório tem água até uma altura de 2.1 metros. Num certo instante abre-se a válvula e o reservatório começa a ser esvaziado. A altura (em metros) de água no reservatório, t horas depois de este ter começado a ser esvaziado, é dada por $h(t)$, de acordo com a tabela



Instante, t_i	0	1	4	7	8	10	14
Altura de água, $h(t_i)$	2.1	2.0	1.8	1.5	1.4	1.1	0

(a) Use um polinómio de interpolação de grau 3 para estimar a altura de água no reservatório ao fim de 5 horas.

(b) Suponha que a altura de água pode ser estimada pelo modelo

$$M(t; c_1, c_2) = \ln(c_1 - c_2 t).$$

Determine c_1 e c_2 tomando apenas os três pontos da tabela que se encontram igualmente distanciados e use quatro casas decimais nos cálculos. Qual o valor da altura de água que o modelo calculado fornece para $t = 5$ horas.

23. Considere a seguinte tabela de uma função polinomial

x	-1	0	1	2	3	4
$p(x)$	-1	-3	-1	5	15	29

Sem recorrer à expressão analítica de $p(x)$:

(a) Mostre que $p(x)$ é um polinómio interpolador de grau 2.

(b) Determine $p(10)$.

24. Considere uma função f da qual se conhecem os seguintes valores

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	2	0	a	0

(a) Construa a tabela das diferenças divididas.

(b) Determine a (real) para o qual a tabela representa um polinómio de grau 3.

(c) Determine a (real) para o qual o coeficiente do termo de maior grau do polinómio interpolador de Newton, calculado com base em todos os pontos da tabela, é igual a um.

25. A velocidade de ascensão de um foguetão, $v(t)$, é conhecida para diferentes tempos conforme a seguinte tabela. Esta velocidade pode ser estimada através de um polinómio de colocação de grau dois.

t(seg.)	$v(t)$(metros/seg.)
0	0
5	106.8
10	227.04
15	362.78
20	517.35
30	901.67

(a) Calcule o polinómio e estime a velocidade do foguetão para $t = 8$ seg.

(b) Estime a aceleração do foguetão para $t = 8$ seg.

(c) Estime a precisão do valor calculado em (a).

Aproximação dos mínimos quadrados

26. A resistência de um certo fio (de uma certa substância), $f(x)$, varia com o diâmetro desse fio, x. A partir de uma experiência registaram-se os valores da tabela.

x_i	1.5	2.0	3.0	4.0
$f(x_i)$	4.9	3.3	2.0	1.5

Foram sugeridos os seguintes modelos para ajustar os valores de $f(x)$, no sentido dos mínimos quadrados: uma reta, uma parábola e o modelo linear $M(x, c_1, c_2) = c_1/x + c_2 x$.

(a) Calcule a reta.
(b) Calcule a parábola.
(c) Calcule o modelo M.
(d) Qual dos modelos escolheria? Justifique a sua escolha.

27. O comprimento de uma barra metálica varia com a temperatura. Numa barra metálica obtiveram-se as seguintes medições

$t(^o$ C)	10	20	30
c(mm)	1003	1010	1015

em que t representa a temperatura e c o comprimento da barra. Nalguns materiais esta variação é linear, sabendo-se que $c(t) = at + b$, em que a e b são constantes. Determine as constantes a e b utilizando a técnica dos mínimos quadrados. Use 6 casas decimais nos cálculos. Calcule uma estimativa do comprimento da barra para a temperatura de 18^o.

28. Um carro inicia a sua marcha num dia frio de inverno e um aparelho mede o consumo de gasolina verificado no instante em que percorreu x Km. Os resultados obtidos foram:

x (distância em Km)	0	1.25	2.5	3.75	5	6.25
$f(x)$ (consumo em l Km^{-1})	0.260	0.208	0.172	0.145	0.126	0.113

Construa um modelo quadrático, para descrever o consumo de gasolina em função da distância percorrida, usando a técnica dos mínimos quadrados.

29. Foram efetuadas várias medições do nível de água no Mar do Norte, $H(t)$, para diferentes valores de t conforme a seguinte tabela:

t (horas)	2	4	8	10
$H(t)$ (metros)	1.6	1.4	0.2	0.8

Aproxime a função $H(t)$, no sentido dos mínimos quadrados, por um modelo do tipo

$$M(t; c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + c_3 \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right).$$

Nota: $p = 12$ horas representa uma aproximação da periodicidade do nível de água.

30. Um sistema simples de comunicações pode ser representado por um transmissor e um recetor. O transmissor recebe um símbolo, m, e modula o sinal a transmitir, $s_m(t)$, num canal com ruído. O recetor recebe o sinal modulado com o ruído adicionado, $y(t)$, e prevê qual foi o símbolo transmitido. Neste sistema simples suponha que o transmissor apenas transmite dois sinais

$$s_1(t) = 0.2\alpha_1 sen(20\pi t) + 0.2\beta_1 sen(22\pi t)$$
$$s_2(t) = 0.2\alpha_2 sen(20\pi t) + 0.2\beta_2 cos(20\pi t)$$

(a) Transmitindo o primeiro sinal ($s_1(t)$) e fazendo uma análise ao transmissor observaram-se os valores tabela. Determine os valores de α_1 e β_1 no sentido dos mínimos quadrados.

t_i	0.11	0.52	0.79
s_{1i}	-3.1127	0.0625	3.0351

(b) Suponha que $\alpha_1 = -10$, $\beta_1 = -10$, $\alpha_2 = 10$ e $\beta_2 = 10$. Sabendo que o recetor recebeu o sinal indicado na tabela seguinte determine qual foi o sinal transmitido (isto é, aquele que se ajusta melhor ao sinal recebido, no sentido dos mínimos quadrados)

t_i	0.1	0.45	0.63
$y(t_i)$	1.9863	-2.0100	1.2742

31. A tabela seguinte contém os registos efetuados dos valores médios da radiação solar numa região de Portugal:

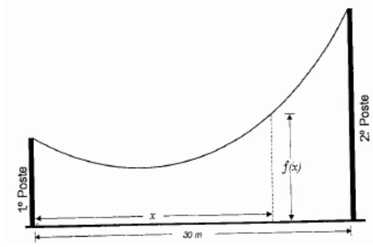
mês (x_i)	J(1)	F(2)	M(3)	A(4)	M(5)	J(6)	J(7)	A(8)	S(9)	O(10)	N(11)	D(12)
Radiação	122	-	188	-	-	270	-	-	-	160	-	120

Ajuste o modelo

$$M(x) = c_1 x + c_2 sen(x)$$

aos valores da tabela, no sentido dos mínimos quadrados, e use o modelo encontrado para prever a radiação média no mês de Agosto.

32. Um fio está suspenso entre dois postes. A distância entre os postes é de 30 metros. A distância do fio ao solo $f(x)$, em metros, depende de x como mostra a figura. A tabela mostra 5 valores conhecidos de f.



x_i	0	8	12	16	20
$f(x_i)$	15.43	10.2	10.2	11.86	15.43

(a) Calcule a parábola que melhor se ajusta aos valores de $f(x_i)$ e determine a distância do fio ao solo quando $x = 10$.

(b) A partir da parábola da alínea anterior, verifique se $x = 10$ é o ponto em que a distância do fio ao solo é mínima.

(c) Determine o polinómio de grau 3 que melhor se ajusta aos valores de $f(x_i)$.

(d) Determine os coeficientes c_1 e c_2 do modelo

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 e^{1-0.1x} + c_2 e^{0.1x-1}$$

que melhor se ajusta à função $f(x)$ de acordo com $\min_{c_1,c_2} \sum_{i=1}^{5} (f(x_i) - M(x_i; c_1, c_2))^2$.

(e) Qual dos modelos anteriormente determinados escolheria para ajustar a distância do fio ao solo. Justifique.

33. Em sistemas de transportes urbanos, o preço das viagens depende da procura. Quanto maior é a procura, x, mais baixo é o preço, $P(x)$ (em euros). Os registos obtidos nos últimos 4 meses foram:

x_i	30	35	45	50
$P(x_i)$	12	12	10	8

Pretende-se construir um modelo que descreva o comportamento de P em função de x. Com base no modelo $M(x)$

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 x + c_2 e^{-x},$$

determine c_1 e c_2 no sentido dos mínimos quadrados.

34. A pressão máxima, P, em Kg/mm^2 que um cabo metálico suporta em função do seu diâmetro pode ser modelado de acordo com

$$P(d) = c_1 d^2 + c_2 \ln(d)$$

em que d é o diâmetro em mm. Foram realizadas três experiências cujos resultados se encontram na tabela

d_i (mm)	0.239212	0.239215	0.239221
P_i (Kg/mm^2)	a	0.00020	0.00030

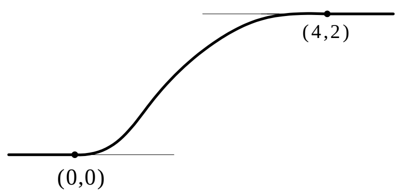
Pretende-se calcular os coeficientes c_1 e c_2 de modo a que o modelo se aproxime dos valores da tabela no sentido dos mínimos quadrados.

(a) Apresente o sistema das equações normais em função de a. Use 6 casas decimais nos cálculos.

(b) Para $a = 0.00015$, determine c_1 e c_2.

Interpolação *S*pline

35. Considere um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio agora deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos $(0, 0)$ e $(4, 2)$, como mostra a figura.



Com base nos quatro pontos da tabela

x_i	-1	0	4	5
$f_i = f(x_i)$	0.4375	0	2	1.5625

construa a *spline* cúbica natural que descreve a trajetória desenhada e calcule $f(2)$.

36. Ao efetuar observações astronómicas medindo as variações na magnitude aparente, M, de uma estrela variável chamada *variável Cepheid*, ao longo de um período de tempo, t, foram obtidos os seguintes valores:

tempo (t)	0.0	0.3	0.5	0.6	0.8
Magnitude aparente (M)	0.302	0.106	0.240	0.579	0.468

Seja $s(t)$ a *spline* cúbica natural, interpoladora da função tabelada. Determine um valor aproximado (dado pela função *spline*) da magnitude aparente da *variável Cepheid* no instante $t = 0.4$.

37. Os dados da tabela representam os pesos e as alturas de uma amostra de quatro crianças:

x (Altura (cm))	80	95	110	115
$f(x)$ (Peso (Kg))	9	15	20	24

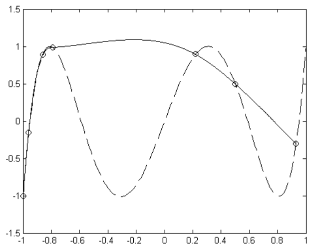
(a) Estime o peso de uma criança com altura de 100 cm usando uma *spline* cúbica, cuja curvatura nos extremos é dada por: $s_3^1{}''(80) = 0.25$ e $s_3^n{}''(115) = 0.55$.

(b) Determine o erro de truncatura cometido na alínea anterior, supondo que uma criança com 120 cm pesa 25 Kg.

38. A partir de uma experiência foram obtidos os seguintes valores de y em função da variável t:

t_i	-1	-0.96	-0.86	-0.79	0.22	0.5	0.93
y_i	-1	-0.151	0.894	0.986	0.895	0.5	-0.306

Foram calculados dois modelos, $M_1(t)$ baseado numa *spline* cúbica e $M_2(t)$ baseado num polinómio interpolador de Newton, para aproximar os dados, e que estão representados na figura. Diga, justificando, a que modelo corresponde cada uma das linhas - a linha contínua e a linha a tracejado.



39. A seguinte função segmentada $s_3(x)$ no intervalo $[0,3]$, representa o lucro obtido na venda de um produto sazonal. No 1º mês de vendas, o lucro é representado por $s_3^1(x)$ e no 2º e 3º meses é descrito po $s_3^2(x)$. Poderá a função segmentada $s_3(x)$ representar uma spline cúbica? Justifique.

$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) = 3x^3 - x^2 + x - 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^2(x) = 2x^3 + 2x - 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

40. Num certo campeonato regional de futebol há 7 equipas. No fim da temporada, o número de pontos ganhos e o número de golos sofridos por 6 das equipas estão representados na tabela

Equipa	F.C.Sol	F.C.Lá	S.C.Gato	Nova F.C.	Vila F.C.	F.C.Chão
N^o pontos, x_i	10	12	18	27	30	34
N^o golos, $f(x_i)$	20	18	15	9	12	10

(a) Use uma *spline* cúbica completa para descrever a relação entre o número de pontos e o número de golos sofridos pelas equipas no campeonato. Sabendo que a 7^a equipa terminou o campeonato com 29 pontos, estime o número de golos que terá sofrido.

(b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido na alínea anterior.

41. A resistência de um certo fio de metal, $f(x)$, varia com o diâmetro desse fio, x. Foram medidas as resistências de 6 fios de diversos diâmetros:

x_i	1.5	2.0	2.2	3.0	3.8	4.0
$f(x_i)$	4.9	3.3	3.0	2.0	1.75	1.5

Como se pretende estimar a resistência de um fio de diâmetro 1.75, use uma *spline* cúbica natural para calcular esta aproximação.

42. Um braço de um robô deve passar nos instantes t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 por posições pré-definidas $\theta(t_0), \theta(t_1), \theta(t_2), \theta(t_3), \theta(t_4)$ e $\theta(t_5)$, onde $\theta(t)$ é o ângulo (em radianos) que o braço do robô faz com o eixo dos X.

t_i	1	2	3	4	5	6
$\theta_i = \theta(t_i)$	1	1.25	1.75	2.25	3	3.15

(a) Com base nos dados da tabela, aproxime a trajetória do robô por uma *spline* cúbica completa. Indique também uma aproximação da posição do robô no instante $t = 1.5$.

(b) Calcule uma aproximação à velocidade do robô no instante $t = 1.5$

(c) Calcule um limite superior do erro de truncatura que se comete quando se usa a derivada da *spline* calculada para aproximar a velocidade do robô.

43. Considere as duas seguintes funções *spline* cúbicas:

$$S_3(x) = \begin{cases} -x+5, & 0 \le x \le 1 \\ 3.75x^3 - 11.25x^2 + 10.25x + 1.25, & 1 \le x \le 3 \\ -3.75x^3 + 56.25x^2 - 192.25x + 203.75, & 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

e

$$R_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5, \qquad 0 \le x \le 5$$

e a tabela da função $f(x)$:

x_i	0	1	3	5
$f(x_i)$	5	4	32	180
$f'(x_i)$	0	–	–	120

Verifique se alguma das duas funções $S_3(x)$ e $R_3(x)$, corresponde à função *spline* cúbica completa, interpoladora de $f(x)$ nos pontos da tabela dada.

44. Considere a função $f(x)$ definida por

x	-2	1	2
$f(x)$	-8	1	8

Estime $f(-1)$ através de uma *spline* cúbica completa, sabendo que $f'(-2) = 12$ e $f'(2) = 20$.

Integração numérica

45. Dada a tabela de valores da função f,

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.9	1.2	1.5	1.6	1.8	2.1
f_i	1	1.1	1.2	1.3	1.5	1.7	2.0	2.5	2.7	3.0	3.5	4.0	5.0

(a) calcule $\int_0^{2.1} f(x)dx$, usando toda a informação da tabela

(b) estime o erro de truncatura cometido na aproximação calculada em (a).

46. Foram registados os consumos, $f(x_i)$, de um aparelho em determinados instantes, x_i (em segundos):

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	3.6	6.6	9.6	9.8	10
$f(x_i)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.7	0.8

Calcule o consumo total ao fim de 10 segundos.

47. Considere a tabela de valores de uma função polinomial p de grau 3

x_i	0	1	2	3	4
$p(x_i)$	1	a	3	0	0

(a) Use a fórmula de Simpson com $h = 2$ para calcular uma aproximação a $I = \int_0^4 p(x)\,dx$. Use 6 casas decimais nos cálculos.

(b) Utilizando a fórmula composta de Simpson com base em todos os pontos da tabela para aproximar I, determine o valor de a. Justifique.

48. Uma corrida de *dragsters* tem duas fases distintas: na primeira fase, a mais curta, o movimento do carro é perfeitamente não determinístico, dependendo das derrapagens e da forma como o condutor consegue dominar o carro. Na segunda fase, o carro tem um movimento muito rápido, cuja aceleração está perfeitamente definida.

Considere-se a prova do condutor Don Nase de duração 7.5 s. Na primeira fase os valores da aceleração em cada instante encontram-se na tabela:

t_i	0	0.5	1	1.5
$a(t_i)$	0	0.35	0.55	0.9

Na segunda fase da corrida a aceleração é definida pela seguinte expressão:

$$a(t) = 0.5t^2 - 0.15t \quad \text{para} \quad t \in [1.5, 7.5].$$

(a) Estime a velocidade na primeira fase da corrida, utilizando a fórmula de integração mais adequada.

(b) Estime a velocidade na segunda fase da corrida, utilizando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura em valor absoluto inferior a 0.3.

(c) Estime o erro de truncatura cometido na alínea (a).

49. O comprimento do arco da curva $y = f(x)$ ao longo do intervalo $[a, b]$ é dado por

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Calcule uma aproximação numérica ao comprimento do arco da curva $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[0, 1]$, usando 5 pontos igualmente espaçados no intervalo.

50. O tempo t (seg) para um carro acelerar desde 40 até a velocidade v (mph) é dado, para seis valores de v, pela seguinte tabela:

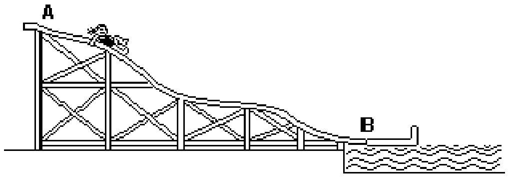
i	1	2	3	4	5	6
v_i(mph)	40	45	50	55	60	70
t_i(seg)	0.00	0.69	1.40	2.15	3.00	3.90

Estime a distância x (ft) que o carro percorre desde a aceleração de 40 até 70, através da seguinte expressão:

$$x = \frac{22}{15}\left[t_6 v_6 - \int_{40}^{70} t \; dv\right]$$

Estime o erro de truncatura cometido no período $[60, 70]$.

51. A figura mostra uma pessoa que desliza, sem atrito, do alto de um escorrega (ponto A), acoplando-se a um carrinho que se encontra em repouso no ponto B. A partir deste instante, a pessoa e o carrinho movem-se juntos na água até parar.



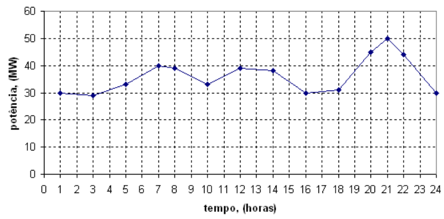
(a) Sabendo que a velocidade do conjunto pessoa-carrinho imediatamente após o acoplamento é 4 m/s e que a velocidade, v, em cada instante t na água é dada pela tabela seguinte, calcule (usando todos os pontos da tabela) a distância percorrida na água pelo conjunto pessoa-carrinho até parar.

t	0.0	0.3	0.6	0.8	1.0	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2
v	4.0	3.9	3.7	3.5	3.3	2.9	2.5	2.0	1.25	0.75	0.0

(b) Estime o erro de truncatura cometido na alínea anterior.

(c) Selecione o maior número possível de pontos da tabela por forma a obter um conjunto de pontos igualmente espaçados, e calcule a mesma distância usando uma única fórmula composta de integração no intervalo $[0, 4.2]$.

52. A curva de carga típica de uma determinada cidade (MW) está representada na figura



ou pela correspondente tabela

tempo (horas)	1	3	5	7	8	10	12	14	16	18	20	21	22	24
potência (MW)	30	29	33	40	39	33	39	38	30	31	45	50	44	30

(a) Estime o consumo de energia diário desta cidade.

(b) Estime o erro de truncatura cometido para a altura do dia de maior consumo.

53. A resposta de um transdutor a uma onda de choque causada por uma explosão é dada pela função $F(t) = 8e^{-t}\dfrac{I(a)}{\pi}$ para $t \geq a$, em que

$$I(a) = \int_1^2 f(x,a)dx \qquad \text{com } f(x,a) = \frac{e^{ax}}{x}$$

Calcule $I(1)$ usando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura (em valor absoluto) inferior a 0.05.

54. A função distribuição normal acumulada é uma função importante em estatística. Sabendo

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}dx = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z}^{z} e^{-x^2/2}dx}{2}$$

calcule uma estimativa de $F(1)$, usando a fórmula composta do trapézio com 5 pontos no cálculo do integral.

55. O trabalho realizado por uma força $F(x)$ cujo ângulo entre a direção do movimento e a força é dado por $\theta(x)$, pode ser obtido pela seguinte fórmula:

$$W = \int_{x_0}^{x_n} F(x)\cos(\theta(x))dx$$

em que x_0 e x_n são a posição inicial e final, respetivamente.

(a) Calcule a melhor aproximação ao trabalho realizado, W, ao puxar um bloco da posição 0 ft até à posição 30 ft sabendo que a força aplicada e o ângulo usado são dados na tabela seguinte.

x	0	2.5	5	15	20	25	30
$F(x)$	0.0	7.0	9.0	14.0	10.5	12.0	5.0
$\theta(x)$	0.5	0.9	1.4	0.9	1.3	1.48	1.5

(b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido no intervalo $[5, 15]$.

56. A velocidade de subida de um foguetão pode ser calculada com base na seguinte fórmula

$$v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$$

onde $v(t)$ é a velocidade de subida, u é a velocidade a que o combustível é expelido relativamente ao foguetão, m_0 é a massa inicial do foguetão no instante $t = 0$, q é a taxa de consumo do combustível e g é a constante gravitacional (assuma $g = 9.8$ ms^{-1}). Se $u = 2200$ ms^{-1}, $m_0 = 160000$ kg e $q = 2680$ kg s^{-1},

(a) indique quantos pontos seriam necessários para determinar a altitude do foguetão, com erro inferior a 100 m, após voar 30 s se fosse aplicar uma regra do trapézio;

(b) determine a altitude após 30 s usando 15 pontos.

57. Considere a seguinte função dada pela tabela

x_i	1	1.15	1.3	1.45	1.6	1.75	1.9
$f(x_i)$	a	16.8	19.4	22	b	27.6	30.7

e seja $I = \int_1^{1.9} f(x)\,dx$. Ao utilizar as fórmulas compostas de Simpson e dos três oitavos foram obtidas as seguintes aproximações a I, respetivamente $S(0.15) = 20.005$ e $3/8(0.15) = 20.030625$. Determine os valores de a e b. Use 6 casas decimais nos cálculos.

58. Considere a seguinte tabela da função $f(x)$

x_i	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	0.0000	0.8415	0.9093

(a) Determine um valor aproximado de $I = \int_0^2 f(x)\,dx$, usando a fórmula composta do trapézio com $h = 1$.

(b) Sabendo que um valor aproximado de I, usando a fórmula composta do trapézio com $h = 0.5$ é $T(0.5) = 1.2667$, determine uma nova aproximação de I, usando a fórmula composta de Simpson com $h = 0.5$.