Programação Linear - representação matricial

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

18 de outubro de 2023

antes

- O algoritmo simplex foi implementado usando quadros.

Guião

- Uma matriz é uma forma de representar e condensar informação.
- As operações realizadas podem ser descritas usando matrizes.
- A representação matricial oferece uma nova perspectiva, que permite evidenciar o significado de componentes do quadro simplex,
- e conceber operações mais complexas, e.g., mudar directamente de um quadro inicial para qualquer outro quadro final, efectuando simultaneamente um conjunto dos pivôs.

depois

- A representação matricial será usada em análise de sensibilidade.

Conteúdo

- Sistema de equações e soluções básicas
- Operação matricial de mudança de base
- Significado de alguns componentes do quadro simplex
- Referência a aplicações
  - Análise de sensibilidade
  - Implementação computacional do algoritmo simplex

- Apêndice
  - Perspectiva: o algoritmo simplex como leilão
  - Implementação computacional do algoritmo simplex
  - Perspectiva: representação em bases diferentes

Problema de PL e representação matricial

Geral	Exemplo
$\max \ \boldsymbol{cx} + \mathbf{0}\boldsymbol{s}$ $\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Is} = \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$	$\max \ 30x_1 + 20x_2 + 10x_3$ suj. $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 = 40$ $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + s_2 = 150$ $2x_1 + 1x_2 + s_3 = 20$ $x_1, \ x_2, \ x_3 \geq 0$

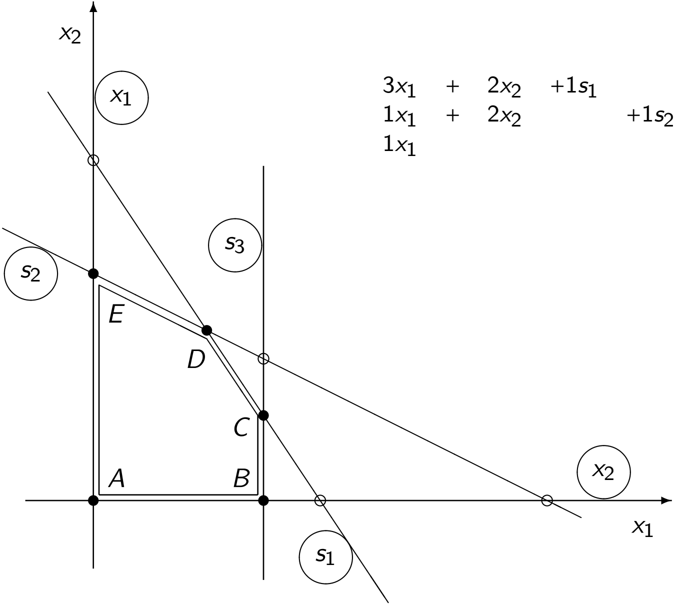
a matriz do quadro inicial:

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{b}$
$-\boldsymbol{c}$	$\mathbf{0}$	0

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

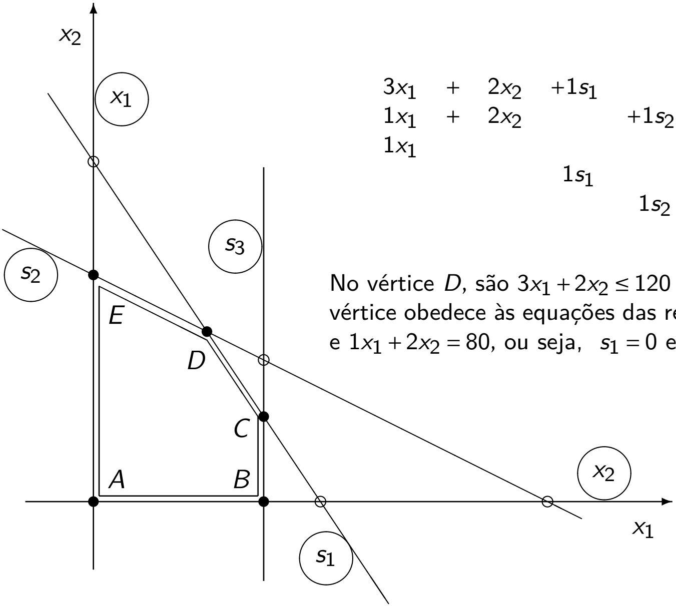
- $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_{(n-m)}]$ e $\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 ... \boldsymbol{e}_m]$, sendo $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^\top$ um vector coluna com um elemento 1 na posição i.
- $\boldsymbol{c} = (c_1 c_2 \ldots c_{(n-m)})$

Exemplo: quais as restrições activas no vértice D?



$$
\begin{array}{rcrrrrcr}
3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30
\end{array}
$$

Exemplo: quais as restrições activas no vértice D?



$$
\begin{array}{ccccccccc}
3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\
 & & & 1s_1 & & & = & 0 \\
 & & & & 1s_2 & & = & 0
\end{array}
$$

No vértice D, são $3x_1 + 2x_2 \leq 120$ e $1x_1 + 2x_2 \leq 80$, e o vértice obedece às equações das rectas $3x_1 + 2x_2 = 120$ e $1x_1 + 2x_2 = 80$, ou seja, $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$.

Determinação coordenadas vértice D

Sistema de equações do vértice D, e sua representação matricial após ordenação de colunas:

$$
\begin{array}{llllll}
3x_1 + 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
1x_1 + 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
1x_1 & & & +1s_3 & = & 30 \\
& +1s_1 & & & = & 0 \\
& & +1s_2 & & = & 0
\end{array}
\qquad
\left[\begin{array}{ccc|cc}
3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
*
\left[\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ s_3 \\ s_1 \\ s_2
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{r}
120 \\ 80 \\ 30 \\ 0 \\ 0
\end{array}\right]
$$

Solução do sistema de equações é única:
$\boldsymbol{x}_D = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_D^\top = (20, 30, 0, 0, 10)^\top$

Caso geral

- Qual a solução do sistema de equações $\boldsymbol{Bx_B} + \boldsymbol{Nx_N} = \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x_N} = \mathbf{0}$?

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{N} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{n-m} \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{x_B} \\ \hline \boldsymbol{x_N} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right]$$

Caso geral

- Qual a solução do sistema de equações $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{0}$?

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{N} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-m} \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{x_B} \\ \hline \boldsymbol{x_N} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{0} \end{array}\right]$$

- A solução é $\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{0}$
- Nota: a matriz $\boldsymbol{B}$ deve ter inversa (ser não-singular).

Caso geral

- Qual a solução do sistema de equações $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{0}$?

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{N} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-m} \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{x_B} \\ \hline \boldsymbol{x_N} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{0} \end{array}\right]$$

- A solução é $\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{0}$
- Nota: a matriz $\boldsymbol{B}$ deve ter inversa (ser não-singular).
- Vectores de $\boldsymbol{B}$ são linearmente independentes, e formam uma *base*.
- Por isso é que a solução se diz uma *solução básica* (vértice).

Sistema de equações e soluções básicas

- Dada uma qualquer escolha de variáveis básicas, o problema $\max z = \boldsymbol{cx}$, suj. a $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ é equivalente a:

$$\begin{array}{lcllll} \max z & = & \boldsymbol{c_B x_B} & + \boldsymbol{c_N x_N} & & \\ \text{suj. a} & & \boldsymbol{B x_B} & + \boldsymbol{N x_N} & = \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x_B}, \boldsymbol{x_N} \geq \boldsymbol{0} & & \end{array}$$

- em que o vector de variáveis $\boldsymbol{x}$ é partido em dois subvectores:

$\boldsymbol{x_B} \in \mathbb{R}_+^{m \times 1}$: subvector de $\boldsymbol{x}$ com as variáveis básicas,
$\boldsymbol{x_N} \in \mathbb{R}_+^{(n-m) \times 1}$: subvector de $\boldsymbol{x}$ com as variáveis não-básicas,

- o vector de custos $\boldsymbol{c}$ é partido em dois subvectores:

$\boldsymbol{c_B} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$: subvector de $\boldsymbol{c}$ com os custos das variáveis básicas,
$\boldsymbol{c_N} \in \mathbb{R}^{1 \times (n-m)}$: subvector de $\boldsymbol{c}$ com os custos das variáveis não-básicas,

- a matriz $\boldsymbol{A}$ é partida em duas submatrizes:

$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: submatriz de $\boldsymbol{A}$ das variáveis básicas (não-singular),
$\boldsymbol{N} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$: submatriz de $\boldsymbol{A}$ das variáveis não-básicas.

Resolve-se o sistema de equações em ordem a $\boldsymbol{x_B}$...

- pré-multiplicando o sistema de equações por $\boldsymbol{B}^{-1}$, obtendo-se o seguinte sistema de equações equivalente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N}) &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x_B} &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} \end{aligned}$$

- Substituindo $\boldsymbol{x_B}$ na função objectivo, obtém-se:

$$\begin{aligned} z &= \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{c_N}\boldsymbol{x_N} = \\ &= \boldsymbol{c_B}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N}) + \boldsymbol{c_N}\boldsymbol{x_N} = \\ &= \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c_N} - \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x_N} \end{aligned}$$

Quando $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{N}} = \mathbf{0}$, a solução do sistema de equações é a *solução básica* $\tilde{\boldsymbol{x}}$:

- $\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$
- que tem um valor de função objectivo $\tilde{z} = \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c_B}\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}}$

- Se $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} \geq \mathbf{0}$ então $\tilde{\boldsymbol{x}}$ é uma *solução básica admissível*.

Exemplo 2: efectuar vários pivôs simultaneamente ...

- para um vértice não adjacente, em que as vars básicas são x_3, s_2 e x_2.

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- Para resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas x_3, s_2 e x_2, as matrizes $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}$ e os vectores $\boldsymbol{c_B}$ e $\boldsymbol{c_N}$ são:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_B} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c_N} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_B} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c_N} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Nota: as colunas da matriz $\boldsymbol{B}$ e do vector $\boldsymbol{c_B}$ estão ordenadas na sequência pretendida para as variáveis básicas no quadro final.

Exemplo 2: cálculo de $\boldsymbol{B}^{-1}$ e $\boldsymbol{c_B B}^{-1}$

- Dada uma matriz $\boldsymbol{B}$, podemos calcular a matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$ e o vector $\boldsymbol{c_B B}^{-1}$, que aparecem várias vezes nos cálculos:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_B} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_B} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c_B B}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Perspectiva: a matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$ como operador matricial

- A matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$ opera uma mudança de base, guardando informação sobre todos os pivôs efectuados para fazer entrar na base as variáveis básicas pretendidas.

Exemplo 2: cálculo da solução, determinando $\tilde{\boldsymbol{x}}_B$

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B^{-1}b} - \boldsymbol{B^{-1}N\, x_N}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

- A solução é admissível: $\tilde{\boldsymbol{x}}_B$ têm coordenadas não-negativas.
- Os valores das variáveis básicas são: $\tilde{\boldsymbol{x}}_B = (x_3, s_2, x_2)^\top = (10, 100, 20)^\top$
- Os valores das vars não-básicas são: $\tilde{\boldsymbol{x}}_N = (x_1, s_1, s_3)^\top = (0, 0, 0)^\top$
- $\tilde{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3)^\top = (0, 20, 10, 0, 100, 0)^\top$

Exemplo 2: cálculo do valor da solução, $\tilde{z}$

$$z = \boldsymbol{c_B B^{-1}} \quad \boldsymbol{b} \quad + (\boldsymbol{c_N} - \boldsymbol{c_B B^{-1} N})\ \boldsymbol{x_N}$$

$$z = [5\ 0\ 15] * \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} + \left([30\ 0\ 0] - [5\ 0\ 15] * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$z = 500 + [-5\ -5\ -15] * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

- O valor da função objectivo da solução obtida, $\tilde{z}$, é 500.
- A solução também é óptima para o problema de maximização (dado que $z = 500 - 5x_1 - 5s_1 - 15s_3$).

Exemplo 2: o quadro inicial e o quadro final

- A informação anterior pode ser usada para construir o quadro final, colocando as colunas na devida posição.

quadro inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

quadro final

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

- Os dois quadros apresentam dois sistemas de equações equivalentes, representados nas bases $\beta_{Q_I} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e $\beta_{Q_F} = \{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_2\}$, respectivamente (ver Apêndice).

Uma base de um espaço vectorial é um conjunto ordenado de vectores linearmente independentes que geram esse espaço (*e.g.*, $\beta_{Q_F} = \{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_2\}$). Também designamos por base o conjunto ordenado de variáveis básicas (*e.g.*, $\mathscr{B}_{Q_F} = \{x_3, s_2, x_2\}$).

Motivação: as operações matriciais no quadro simplex

- De seguida, vamos realizar as mesmas operações, mas mantendo as colunas na mesma ordem em que aparecem no quadro simplex.

- Vamos identificar a matriz $\boldsymbol{M}$ que opera a mudança de base, do quadro inicial para o quadro final.
- A matriz do quadro final $\boldsymbol{Q_F}$ é o produto da multiplicação da matriz $\boldsymbol{M}$ pela matriz do quadro inicial $\boldsymbol{Q_I}$:

$$\boldsymbol{Q_F} = \boldsymbol{M} * \boldsymbol{Q_I}$$

- Para obter o quadro simplex final em que as variáveis básicas são as variáveis de $\boldsymbol{x_B}$, temos de identificar:
  - a matriz $\boldsymbol{B}$, que é a submatriz de $[\ \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}\ ]$ com as colunas das variáveis básicas de $\boldsymbol{x_B}$, e
  - o vector $\boldsymbol{c_B}$, com os coeficientes do vector $\boldsymbol{c}$ das mesmas variáveis.

A matriz que opera a mudança do quadro inicial para o final é:

$$\boldsymbol{M} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1} & 1 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$$

Prova:

- No quadro simplex final, as variáveis básicas são as pretendidas, porque:
  - a matriz identidade $\boldsymbol{I}$ aparece nas posições da matriz $\boldsymbol{B}$, e
  - o vector nulo aparece na linha da função objectivo.

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1} & 1 \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{B} \\ \hline -\boldsymbol{c_B} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} + \mathbf{0}(-\boldsymbol{c_B}) \\ \hline \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} + 1(-\boldsymbol{c_B}) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{I} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right]$$

- A regra de multiplicação de matrizes partidas (em submatrizes) é semelhante à da multiplicação de matrizes.

- O produto da multiplicação da matriz $\boldsymbol{M}$ pela matriz do quadro inicial $\boldsymbol{Q_I}$ é a matriz do quadro final $\boldsymbol{Q_F}$:

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{c_B B}^{-1} & 1 \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{b} \\ \hline -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c_B B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c_B B}^{-1} & \boldsymbol{c_B B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{array}\right]$$

- Nota: tal como vimos, nas posições que a matriz $\boldsymbol{B}$ ocupa no Quadro Inicial, aparecem as colunas da matriz identidade no Quadro Final.

O mesmo Exemplo 2

- Dado o Quadro Inicial:

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- para obter o quadro com as variáveis básicas x_3, s_2 e x_2, a matriz que opera a mudança de base é $\boldsymbol{M}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{c_B} &= \begin{bmatrix} c_3 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{c_B} &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{M} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 15 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 15 & 1 \end{array}\right] *$$

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

$=$

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1} & 1 \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{b} \\ \hline -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{array}\right]$$

Notas

- No exemplo, o quadro final é a solução óptima, porque eu escolhi as variáveis básicas que sabia de antemão serem as da solução óptima.

- No caso geral, quando se escolhe um conjunto de variáveis básicas:
  - se algum elemento do vector $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ for negativo, obtém-se uma solução não-admissível;
  - se algum elemento dos vectores $\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$ ou $\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}$ for negativo, obtém-se uma solução que não é óptima (prob. de maximização).

Linha da função objectivo do quadro óptimo

- Usam-se designações especiais para os coeficientes da linha da função objectivo do quadro óptimo.

$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

Custo reduzido da variável de decisão x_j

- é o valor do elemento $c_j - \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j$ do vector $-(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})$.
- Os valores do vector custo $\boldsymbol{c}$ são reduzidos de $\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$.

Preço-sombra da restrição i (recurso i)

- é o valor do elemento $(\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1})_i$ do vector $\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$.

- Vamos explorar o que significam na Análise de sensibilidade.

O vector $\boldsymbol{c_B B^{-1}}$, e o vector $\boldsymbol{c}$ reduzido de $\boldsymbol{c_B B^{-1} A}$

Perspectiva

- O vector $\boldsymbol{c_B B^{-1}}$ guarda informação sobre as transformações efectuadas na linha da função objectivo quando a ela se subtraem múltiplos das linhas pivôs.

- Vamos calcular $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c_B B^{-1} A})$ e o resultado é $-(\boldsymbol{c_B B^{-1} A} - \boldsymbol{c})$.

- Exemplo: $\boldsymbol{c_B B^{-1}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 15 \end{bmatrix}$
- A forma como a função objectivo aparece no quadro óptimo é:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 & (& 30x_1 & + & 20x_2 & +10x_3 & & & & &) \\
-5 & (& 1x_1 & + & 1x_2 & +\ 2x_3 & +1s_1 & & & = & 40) \\
-0 & (& 2x_1 & + & 2x_2 & +\ 1x_3 & & +1s_2 & & = & 150) \\
-15 & (& 2x_1 & + & 1x_2 & & & & +\ 1s_3 & = & 20) & = \\
\hline
=- & (& 5x_1 & & & & +5s_1 & & +15s_3 & = & 500)
\end{array}$$

Aplicação 1: análise de sensibilidade

- A *Análise de sensibilidade*, também designada por *Análise pós-optimização* é efectuada depois de obter a solução óptima,
- para estudar os efeitos na solução óptima de uma alteração de dados.

- Neste âmbito, dispomos do quadro inicial e do quadro óptimo (que apresenta a matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$ e o vector $\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$), o que permite construir a matriz que opera a mudança de base.

- Portanto, podemos recalcular o quadro final que resulta de uma alteração de um elemento dos vectores $\boldsymbol{b}$ ou $\boldsymbol{c}$ do quadro inicial.

Aplicação 2: implementação do algoritmo simplex

Ideia chave da implementação computacional:

- O algoritmo apenas mantém e actualiza a matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$,
- porque a matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$ e as matrizes do quadro inicial $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ são suficientes para calcular todos os elementos do quadro simplex.

Mas não é preciso calculá-los todos. Para determinar o elemento pivô,

- só é preciso calcular a linha da função objectivo (para identificar a coluna pivô), e
- a coluna do lado direito e a coluna pivô, para identificar a linha pivô.

- Não é necessário calcular mais nenhuma coluna; para actualizar a matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$, apenas são necessárias as colunas das variáveis básicas.

1. /* Calcular custos reduzidos das variáveis não-básicas */
   Calcular $\boldsymbol{c_B B}^{-1}\boldsymbol{a}_j - c_j, \quad \forall j$
2. /* Testar optimalidade (prob. de maximização) */
   Se $\boldsymbol{c_B B}^{-1}\boldsymbol{a}_j - c_j \geq 0, \forall j$, a solução é óptima. Senão,
3. /* Seleccionar coluna pivô k */

$$k = \underset{j \in N}{\operatorname{argmin}} \left\{ \boldsymbol{c_B B}^{-1}\boldsymbol{a}_j - c_j \right\}$$

4. Calcular coluna pivô, $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_k$
5. Se todos os elementos de $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_k \leq 0$, a solução é ilimitada. Senão,
6. Calcular coluna do lado direito, $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, e seleccionar linha pivô p

$$p = \underset{i}{\operatorname{argmin}} \left\{ (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i / (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_k)_i \right\}.$$

7. Actualizar a matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$, e voltar ao passo 1.

Notar que $(\boldsymbol{c_B B}^{-1})_i$ é um caso particular de $\boldsymbol{c_B B}^{-1}\boldsymbol{a}_j - c_j$ quando se trata da variável de folga i ($\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{e}_i$ (a coluna i da matriz identidade) e $c_j = 0$).

Implementação: alguns pormenores

Adicionalmente

- A matriz $\boldsymbol{A}$ é tipicamente uma matriz dispersa (esparsa). A percentagem de elementos não-zero de $\boldsymbol{A}$ pode ser 2% ou 5%.
- Há estruturas de dados para representar matrizes dispersas que permitem grandes economias de espaço.
- A multiplicação de matrizes dispersas só envolve os cálculos com os elementos diferentes de 0.

- A matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$ é guardada como o produto de uma matriz triangular inferior (*lower*) e uma matriz triangular superior (*upper*), *i.e.*, uma factorização LU.
- Isso permite a sua actualização eficiente em cada pivô.

Conclusão

- A representação matricial oferece uma nova perspectiva das operações efectuadas no método simplex;
- explica o significado de componentes do quadro simplex;
- permite ver a forma de realizar operações mais complexas, como a mudança entre bases não adjacentes;
- permite conceber uma implementação do algoritmo simplex com grandes economias de cálculo, o que possibilita a resolução de problemas de muito grande dimensão.

Apêndice

Perspectiva: o algoritmo simplex como leilão

Ideias gerais

- O algoritmo simplex pode ser visto como um leilão em que as actividades competem pelos recursos disponíveis.
- Cada actividade tem um lucro associado, e necessita de recursos, pelos quais tem de pagar.
- Cada recurso tem um valor que resulta da procura pelas actividades.
- São as actividades capazes de pagar o valor de mercado dos recursos as que são realizadas (na solução óptima).
- O leilão é que determina o valor de cada recurso.

Perspectiva

- c_j é o valor (lucro) unitário da actividade j.
- $(\boldsymbol{c_B B^{-1}})_i$ é o valor de uma unidade de recurso i.

Significado de $\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{a}_j - c_j$ da actividade j

$\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{a}_j$ é o valor dos recursos usados numa unidade da actividade j :

$$\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1})_i \times a_{ij} = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{a}_j, \quad \forall j,$$

- a_{ij} é a quantidade de recurso i usado numa unidade da actividade j.

- c_j é o valor unitário da actividade j.

Na solução óptima de um problema de maximização,

- se $\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{a}_j - c_j = 0$, o valor da actividade iguala o valor dos recursos usados; esta actividade dá o maior valor possível aos recursos;
- se $\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{a}_j - c_j > 0$, o valor dos recursos usados é maior do que o valor da actividade; é melhor não a fazer, porque há outras que usam melhor os recursos.

- Cada actividade compete pelos recursos disponíveis, e paga por eles.
- O leiloeiro tem o poder de decidir os preços unitários dos recursos;
- o seu objectivo é maximizar o valor total dos recursos vendidos, e o que faz é ajustá-los iterativamente.

Em cada iteração:

- O leiloeiro anuncia o preço $(\boldsymbol{c_B B}^{-1})_i$ tentativo de cada recurso i.
- Face a esses preços, a actividade j tem um custo de uso de recursos $\boldsymbol{c_B B}^{-1}\boldsymbol{a}_j$.
- Se o seu valor c_j for maior do que o custo, a actividade é atractiva; a licitação mais alta é a da actividade cujo saldo é mais positivo.
- A actividade faz um lance para reservar recursos, alterando a quantidade reservada de cada recurso, e também cada preço.

- O leilão repete-se até à iteração em que nenhuma actividade licita.
- As actividades óptimas são aquelas que repartem os recursos reservados, e os conseguem pagar aos preços finais do leilão.

Perspectiva

- Um quadro simplex apresenta um conjunto de equações, das restrições e da função objectivo.
- Apesar de serem sempre as mesmas, as equações são representadas numa base diferente em cada quadro simplex.
- A análise das equações matriciais fornece uma perspectiva do significado de alguns componentes de um quadro simplex.

Lembrete

- Uma base de um espaço vectorial $\mathcal{V}$ é um conjunto ordenado de vectores linearmente independentes que geram esse espaço (*e.g.*, $\beta = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m\}$).
- Qualquer vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ do espaço vectorial $\mathcal{V}$ pode ser representado como uma combinação linear (única) dos vectores da base:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \alpha_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{\boldsymbol{v}}_m$$

- Os valores $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ são as coordenadas do vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ na base β.

Exemplo: as mesmas equações em 2 quadros simplex

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

Quadro inicial:

$$\boldsymbol{B} * \boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{N} * \boldsymbol{x_N}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} * \boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{b} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} * \boldsymbol{x_N}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

Quadro final:

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} * \boldsymbol{x_N}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1: Os elementos do vector $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ são

- as coordenadas do vector $\boldsymbol{b}$ na base $\beta = \{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_2\}$.

$$\boldsymbol{b} \quad = \quad \boldsymbol{B} \quad * \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} * \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = 10 \ \boldsymbol{a}_3 + 100 \ \boldsymbol{e}_2 + 20 \ \boldsymbol{a}_2$$

- As coordenadas do vector $\boldsymbol{b}$ na base $\beta = \{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_2\}$ são os valores das variáveis na solução $\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = (x_3, s_2, x_2)^\top = (10, 100, 20)^\top$.
- A equação matricial, expressa com os vectores coluna do quadro inicial, mostra como as actividades usam os recursos.

Exemplo 2: os elementos do vector $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_1$ são

- as coordenadas do vector $\boldsymbol{a}_1$ na base $\beta = \{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_2\}$.

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{B} * \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} * \begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -1/2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3/2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = -1/2\ \boldsymbol{a}_3 - 3/2\ \boldsymbol{e}_2 + 2\ \boldsymbol{a}_2$$

- A equação matricial, expressa com as colunas do quadro inicial, mostra como devem variar os valores das variáveis num pivô.
- Quando se aumenta a variável x_1, associada a $\boldsymbol{a}_1$, de 1 unidade, os valores das variáveis básicas variam de acordo com os coeficientes.
- Garante-se assim o uso das mesmas quantidades dos recursos.

Operações com matrizes: exemplos

- Adição de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+12 \\ 15+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+10 & 4+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 16 \end{bmatrix}$$

Fim