

# Resolución del oscilador forzado mediante el método de la función de Green.

José Ortega Moya

11 de enero de 2021

## Resumen

En este documento se abordará la resolución de la ecuación del oscilador amortiguado y forzado con distintas fuerzas para condiciones iniciales de posición y velocidad nulas. Para ello se empleará el método de la función de Green, aplicable para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes. Se utilizará un código de `Python` para hacer la resolución numérica con distintos tipos de excitación (onda cuadrada, sinusoidal, onda dientes de sierra, logarítmica, etc) y para hacer las representaciones gráficas de las soluciones y sus diagramas de fase posición-velocidad correspondientes.

**Palabras clave:** Oscilador, amortiguamiento, fuerza, Green, ecuación diferencial, método numérico.

## 1. Introducción

Supongamos que se tiene una partícula en un punto cercano a una posición de equilibrio estable en un campo de fuerzas conservativo, correspondiente a un mínimo en el potencial. Bajo estas condiciones, y situando el origen de la referencia en el punto de equilibrio se puede aproximar a un movimiento armónico mediante el truncamiento del desarrollo de Taylor de la función potencial. En el caso unidimensional se tiene:

$$V(x) \approx \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} x^2 \quad (1)$$

Llamando  $k = \left. \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0}$

$$F(x) = m\ddot{x} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -kx \quad (2)$$

Si además existen fuerzas disipativas dependientes de la velocidad, la ecuación del movimiento queda como:

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} \quad (3)$$

Donde  $\lambda$  es una constante.

Finalmente, si se tiene además una fuerza forzante, la ecuación se transforma en:

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} + F_1(t) \quad (4)$$

Esta ecuación, cuya resolución supone el objetivo de este texto, es de vital importancia en física pues no sólo sirve para estudiar fuerzas de tipo elástico, sino que es aplicable a muchos tipos de sistemas en los que se dan pequeñas variaciones entorno a un punto de equilibrio. Tiene aplicación desde interacciones gravitatorias hasta para modelos

microscópicos de interacción eléctrica entre átomos, pasando por péndulos, ondas y distintos sistemas más. Además, esta ecuación aparece en otros contextos distintos a la mecánica, un caso claro es la electrónica, donde, por ejemplo, un circuito RLC (una resistencia  $R$ , un condensador de capacidad  $C$  y una autoinducción  $L$  en serie) se rige por la expresión:

$$L \frac{d^2}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV(t)}{dt} \quad (5)$$

Donde la intensidad  $i$  es la incógnita y la diferencia de potencial  $V(t)$  es una función derivable conocida.

## 2. Métodos

Se pueden discretizar los cambios de momento lineal debidos a la fuerza como impulsos:

$$I = \int_t^{t+\Delta t} F_1(t) dt = \Delta p \quad (6)$$

Donde  $\Delta p$  es la variación de momento lineal e  $I$  el impulso.

Si en la ecuación 6 hacemos  $\Delta t \rightarrow 0$  tendríamos un impulso instantáneo ejerciendo un cambio diferencial. En la práctica es imposible que  $\Delta t \rightarrow 0$ , pero basta con que la diferencia de tiempo sea despreciable frente a la evolución del sistema.

Si suponemos un único impulso instantáneo con valor unitario ( $I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) en  $t = 0$ , tendremos un movimiento oscilatorio amortiguado con velocidad inicial  $v_0 = 1/m$ , cuya solución es conocida. Aunque es aplicable a cualquier oscilación, nos centraremos en el caso débilmente amortiguado:

$$x = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{m\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t & t \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Donde  $\gamma = \frac{\lambda}{2m}$  y  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}$  con  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

A la función de la ecuación 7 se la conoce como función de Green y se denota  $G(t)$ . Si se somete al sistema a distintos impulsos, la respuesta vendrá dada por un sumatorio:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{(t-t_0)/\Delta t} G(t-t_j)I_j + x_h(t) \quad (8)$$

Donde  $x_h(t)$  es la solución a la ecuación homogénea, que aporta condiciones iniciales y se anula cuando  $t \rightarrow \infty$  (en la práctica basta que sea despreciable frente a la solución particular del término forzante).

Si se considera  $\Delta t$  lo suficientemente pequeña como para ser despreciable frente a la evolución de la fuerza, se puede considerar que esta cambia de forma lineal en el intervalo  $(t, t + \Delta t)$  y por tanto, se puede aproximar a un impulso:

$$I \approx F(t)\Delta t \quad (9)$$

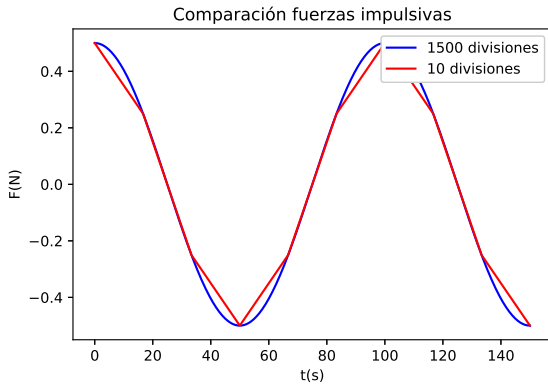


Figura 1: Comparación entre una fuerza discretizada en 1500 divisiones y otra con 10. La segunda no es depreciable frente a la evolución del sistema

De esta forma a partir de la ecuación 8 se obtiene la respuesta del sistema a una fuerza:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{(t-t_0)/\Delta t} G(t-t_j)F(t)\Delta t + x_h(t) \quad (10)$$

Esta expresión es la que se usará para programar la rutina de cálculo.

En el límite  $\Delta t \rightarrow 0$  la ecuación 10 se convierte en una integral que para algunos casos tiene solución analítica:

$$x(t) = \int_{t_0}^t G(t-t')F(t')dt' + x_h(t) \quad (11)$$

En el programa empleado para la resolución (ver apéndice A) se discretiza un intervalo cerrado de tiempo  $[t_0, t_f]$  en un determinado número de divisiones  $N_D$ , de forma que el aumento de tiempo en cada división es:  $\Delta t = \frac{(t_f-t_0)}{N_D}$ . Posteriormente se evalúa la fuerza y la función de Green para cada tiempo del intervalo discreto, almacenan en vectores y se representan gráficamente. Finalmente se ejecuta la rutina dada por la ecuación 10 mediante un bucle que recorre el vector de la fuerza y realiza un sumatorio que en cada iteración evalúa la respuesta del sistema frente al impulso correspondiente al elemento del vector de la fuerza que se está tratando ( $F(t_j)$ ). Así se hallan las posiciones en cada tiempo ( $x(t_j)$ ), una vez obtenidas se guardan en un vector y se representan.

Cuando se conocen las posiciones  $x(t_j)$  para todos los tiempos del intervalo discreto se procede a calcular numéricamente la velocidad. Por hipótesis tenemos que  $\Delta t$  es despreciable frente a la evolución del sistema, por lo que se puede hacer la derivada temporal como la diferencia hacia delante:

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

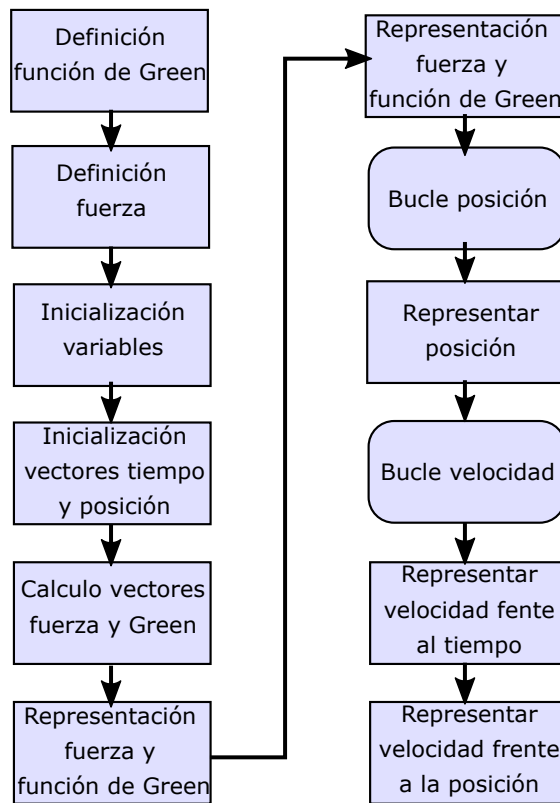
o hacia atrás:

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

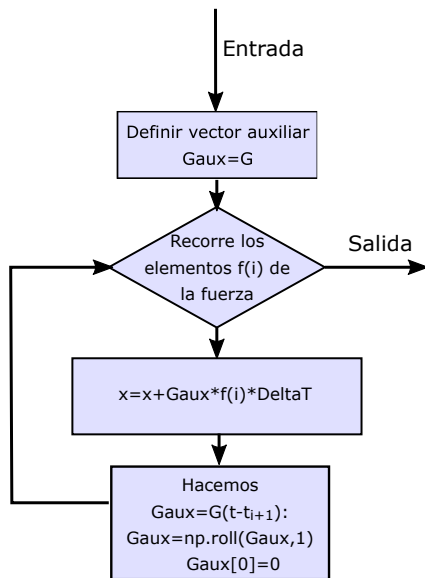
Como aproximación se toma la media de ambas:

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (12)$$

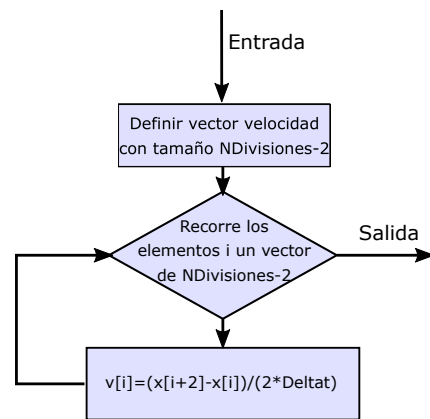
Así, mediante un bucle que recorra el intervalo abierto  $(t_0, t_f)$  ejecutando la expresión 12 para cada tiempo se obtiene la velocidad, la cual también se almacena en un vector y se representa frente al tiempo y frente a la posición. Este programa tiene como entradas los parámetros  $k, \lambda$  y  $m$  de la ecuación 4;  $t_0, t_f$  y  $N_D$  que definen el intervalo de tiempo a estudiar y su discretización;  $A_f$ , parámetro que escala la fuerza externa y  $T_f$ , periodo de la fuerza externa cuando esta es periódica.



(a) Diagrama de flujo del programa completo



(b) Diagrama de flujo bucle que calcula la posición



(c) Diagrama de flujo bucle que calcula la velocidad

Figura 2: Diagrama de flujo del programa empleado.

### 3. Resultados

Las condiciones iniciales de nuestros sistemas serán  $x_0 = 0m$  y  $v_0 = 0m/s$  para así prescindir del término transitorio correspondiente a las condiciones iniciales. Por otra parte, y salvo excepción, en todas las simulaciones se emplean unos parámetros  $\lambda = 0, 1kg/s$ ,  $m = 1$ ,  $k = N/m$ , los cuales dan una función de Green de la siguiente forma:

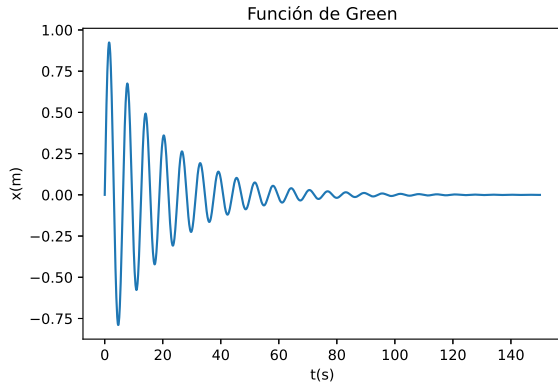


Figura 3: Función de Green con  $\lambda = 0, 1$ ,  $m = 1kg$ ,  $k = 1$ .

#### 3.1. Función escalón

En primer lugar se comienza excitando el sistema con una fuerza en forma de función escalón (Ec. 4):

$$F(t) = \begin{cases} 0N & t < 50s \\ 0,5N & t \geq 50s \end{cases}$$

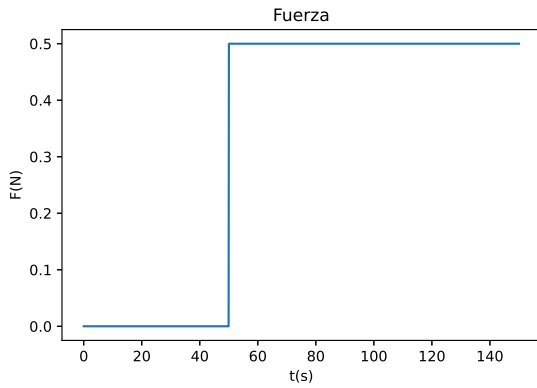
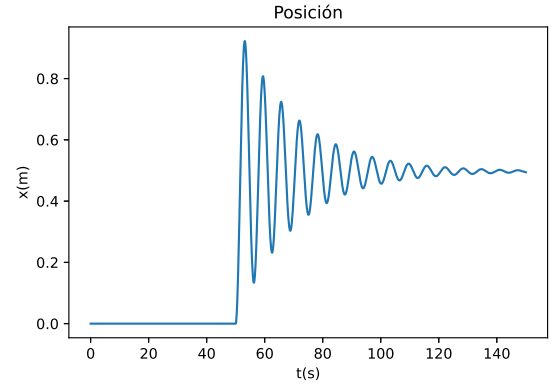
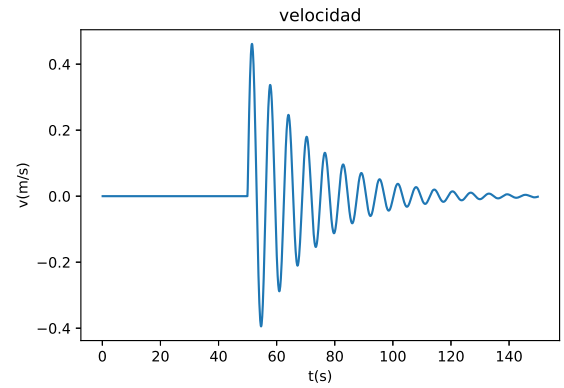


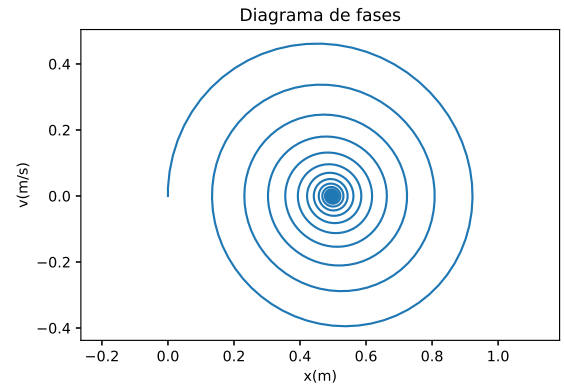
Figura 4: Fuerza con forma de función escalón



(a) Posición para la función escalón



(b) Velocidad para la función escalón



(c) Diagrama de fases para la función escalón

Figura 5: Resultados para la función escalón.

En la figura 5 se pueden ver los resultados obtenidos para este tipo de fuerza. La posición y velocidad para  $t < 50s$  son nulas puesto que no se ejerce fuerza y las condiciones iniciales son nulas. A partir de  $t = 50s$  se inicia un movimiento amortiguado como reacción a un impulso instantáneo, como además la fuerza se mantiene constante para  $t > 50s$ , se produce un movimiento similar al producido por un impulso (Función de Green, figura 3) pero escalado un factor 0,5, valor de la fuerza. Además se da entorno al punto  $x_{eq} = F/k = 0,5m$ , que se convierte en el nuevo punto de equilibrio al ser en el cual la aceleración  $\ddot{x} = 0$  si  $v = \dot{x} = 0$ . Cuando el tiempo se hace grande el sistema tiende al estado  $x = 0,5m$  y  $v = 0m/s$ , como queda reflejado en el atractor del diagrama de fases.

### 3.2. Función de onda cuadrada

En este caso se emplea un amortiguamiento con constante  $\lambda = 0,3kg/s$ , lo que supone una función de Green que se anula más rápido que la contemplada antes.

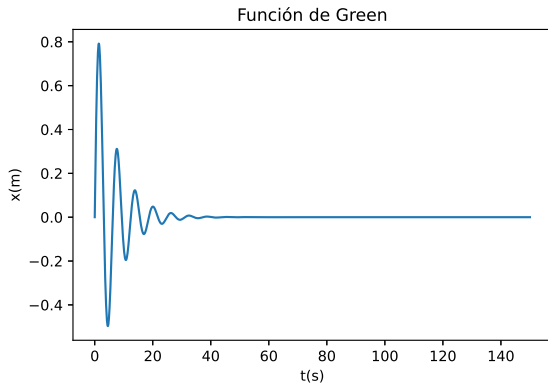
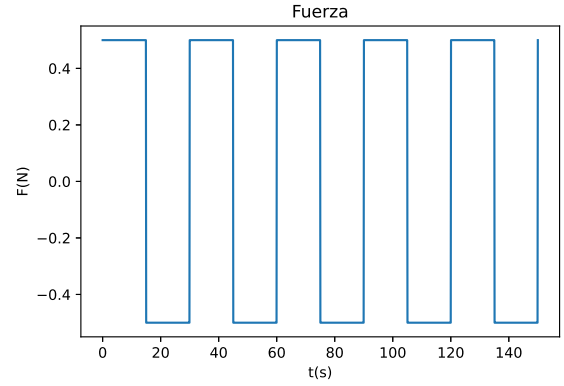


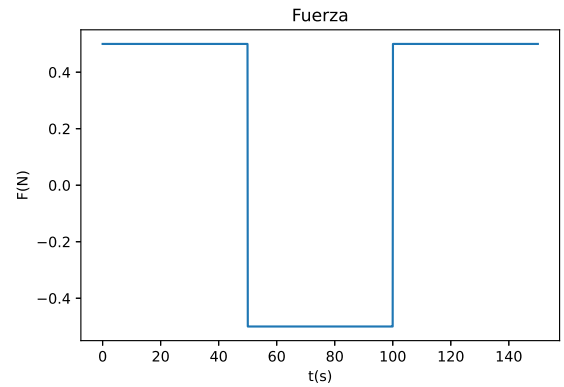
Figura 6: Función de Green con  $\lambda = 0,3$ ,  $m = 1kg$ ,  $k = 1$ .

En este caso se probará con funciones de onda cuadrada, similares a la función escalón pero periódicas en el tiempo. En concreto se resolverá la ecuación para  $F_1(t)$  y  $F_2(t)$  (figura 7), que tienen una amplitud de  $= 0,5N$  pero periodos diferentes:  $T_1 = 30s$  y  $T_2 = 100s$ . De esta forma, para  $F_2$  da tiempo a que prácticamente se anule la velocidad durante cada uno de los periodos constantes, mientras que con  $F_1$  el cambio en la fuerza se da cuando la velocidad no se ha anulado todavía.

En las figuras 8 y 9 se puede observar lo comentado en ambos casos y la similitud con la función escalón. Además en el diagrama de fases se puede ver que hay dos atractores:  $(-0,5, 0)$  y  $(0,5, 0)$ , correspondientes a los tiempos de excitación constantes, en el caso de  $F_1$  el periodo es muy corto



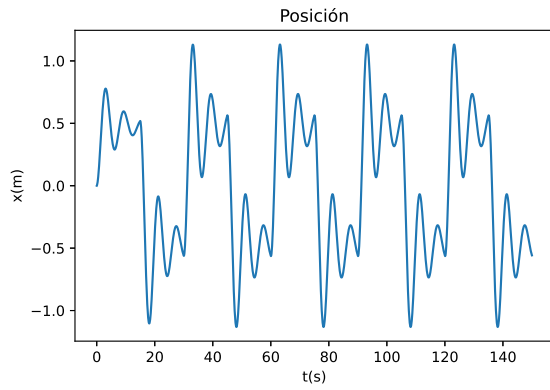
(a) Fuerza  $F_1$  con  $T = 30s$



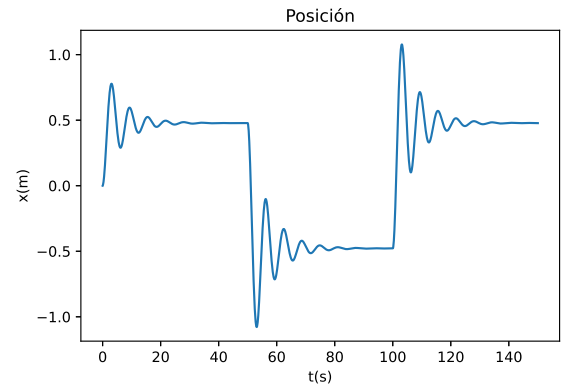
(b) Fuerza  $F_2$  con  $T = 100s$

Figura 7: Fuerza con forma de onda cuadrada

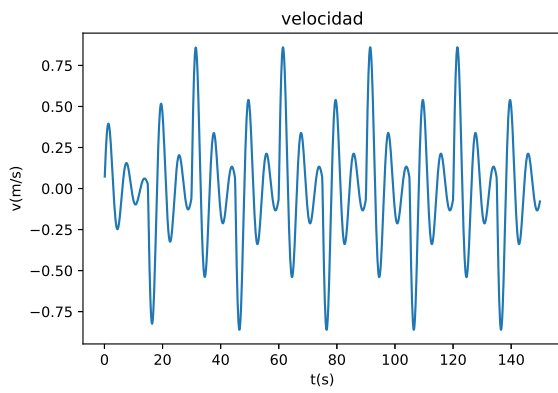
y el sistema siempre se queda lejos de los atractores, pero  $F_2$  se acerca más.



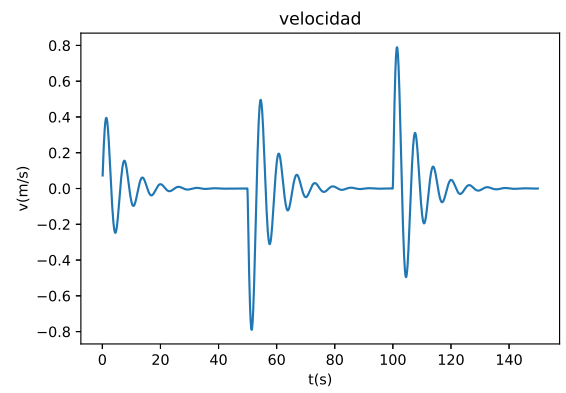
(a) Posición para  $F_1$



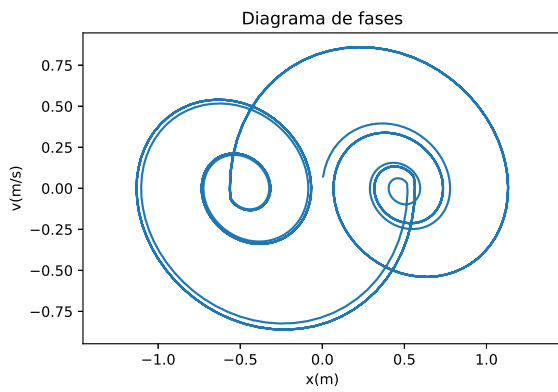
(a) Posición para  $F_2$



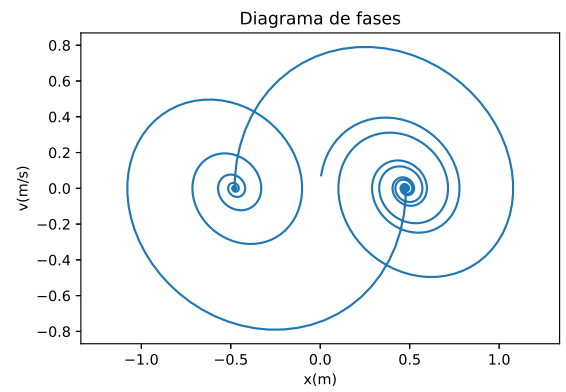
(b) Velocidad para  $F_1$



(b) Velocidad para  $F_2$



(c) Diagrama de fases para  $F_1$



(c) Diagrama de fases para  $F_2$

Figura 8: Resultados para la función de onda cuadrada con periodo 30s.

Figura 9: Resultados para la función de onda cuadrada con periodo 100s.

### 3.3. Función sinusoidal

Se excita ahora nuestro sistema con una fuerza en forma de coseno con periodo 30s y amplitud 1N:

$$F(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{30}t\right)N \quad t > 0$$

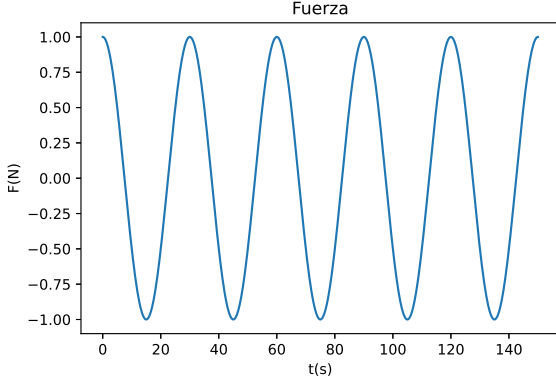


Figura 10: Fuerza con forma de función armónica

Este caso tiene una solución analítica dada por la expresión:

$$x(t) = \underbrace{a_1 \cos(\omega_1 t - \Theta_1)}_{\text{Solución particular}} + \underbrace{ae^{-\gamma t} \cos(\omega t - \Theta)}_{\text{Solución homogénea}} \quad (13)$$

Donde  $\omega_1$  es la frecuencia angular de la fuerza externa,  $\Theta$  y  $a$  se fijan con las condiciones iniciales y  $a_1$ ,  $\Theta_1$  son constantes que se extraen de:

$$a_1 = \frac{F_1/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2\omega_1^2}}$$

$$\tan \Theta_1 = \frac{2\gamma\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$$

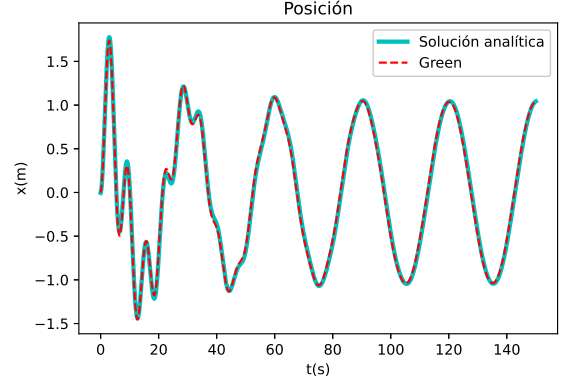
Con  $\omega_1$  la frecuencia angular de la fuerza y  $F_1$  la amplitud de esta. De las condiciones iniciales se obtiene:

$$a = \frac{-a_1 \cos(-\Theta_1)}{\cos(-\Theta)}$$

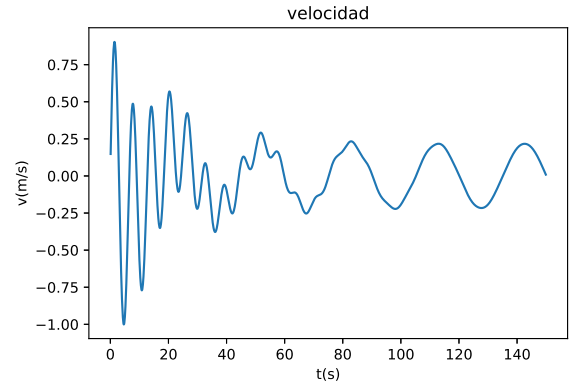
$$\Theta = -\arctan\left(\tan(-\Theta_1) - \frac{\gamma}{\omega}\right)$$

De la expresión 13 se deduce que en el inicio la función posición será la suma de dos oscilaciones, de las cuales la dada por la ecuación homogénea decrece de forma exponencial. Además, en la figura 11 se puede ver como esto es así y las dos formas de hallar la solución concuerdan.

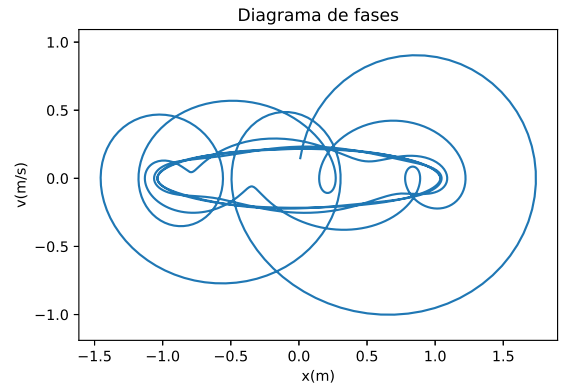
En el diagrama de fases se puede observar como al principio el sistema evoluciona de forma aparentemente errática hasta que finalmente se estabiliza en una elipse.



(a) Posición para la función sinusoidal



(b) Velocidad para la función sinusoidal



(c) Diagrama de fases para la función sinusoidal

Figura 11: Resultados para la función sinusoidal.

### 3.4. Función de onda de dientes de sierra

En este apartado se someterá al sistema a una función de onda de dientes de sierra (figura 12) con amplitud de  $0,5N$  y periodo  $30s$ . Esta función crece desde cero hasta la amplitud en cada periodo:

$$F(t) = 0,5 \cdot \text{Resto}(t/30) \quad N$$

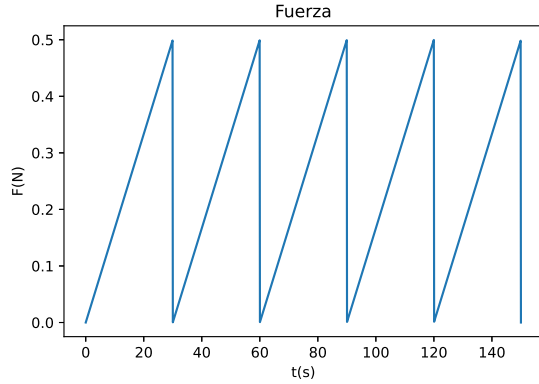
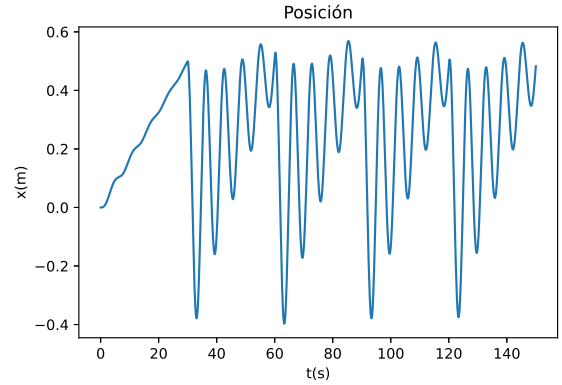


Figura 12: Fuerza con forma de función de dientes de sierra

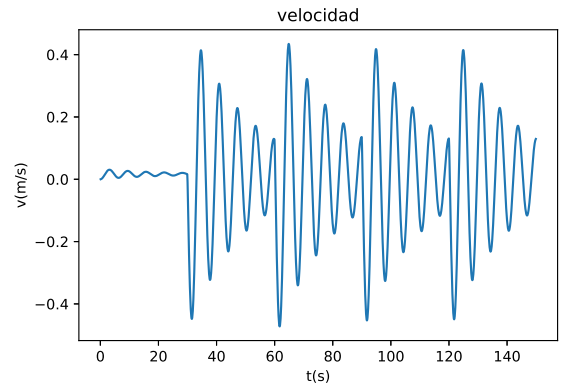
Además se emplearán los parámetros que se mencionaron al inicio y que dan la función de Green de la figura 3.

En la figura 13 se puede ver la solución obtenida para esta excitación. En el primer periodo se observa un aumento cercano a lo lineal, pero con oscilaciones de baja amplitud, en la posición. Esto se debe a que mientras  $\dot{x}$  es pequeño,  $x$  aumenta de forma que el término  $-kx$  contrarresta a la fuerza ejercida, pero llega un momento en el que la velocidad se hace lo suficientemente grande como para que el término  $-\lambda\dot{x}$  se imponga, haciendo que la velocidad disminuya otra vez y se vuelva a la situación anterior. Este periodo se corresponde con la línea central que oscila ligeramente del diagrama de fase.

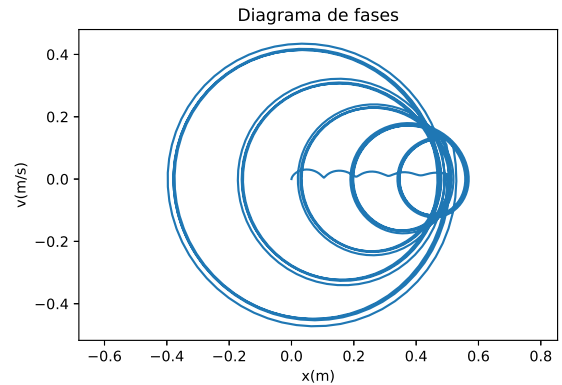
Una vez finaliza el primer periodo, la fuerza se anula pero  $x = x_{max}$ , luego se libera la energía potencial acumulada y comienzan las oscilaciones de mayor amplitud, lo que se refleja como una gran espiral desplazada en el diagrama de fases.



(a) Posición para la función sierra



(b) Velocidad para la función sierra



(c) Diagrama de fases para la función sierra

Figura 13: Resultados para la función de onda dientes de sierra.



### 3.5. Fuerza en forma de coseno más onda de dientes de sierra

También se pueden estudiar funciones que no sean "puras", es decir aquellas que se componen de la suma, multiplicación o composición de varias funciones. En este caso vamos a evaluar el sistema frente a una fuerza que se compone de la suma de una función de dientes de sierra de amplitud  $0,5N$  y periodo  $50s$  con un coseno de amplitud  $0,05N$  y periodo  $10s$  (figura 14).

$$F(t) = 0,05 \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) + 0,5 \cdot \text{Resto}(t/50) \quad N$$

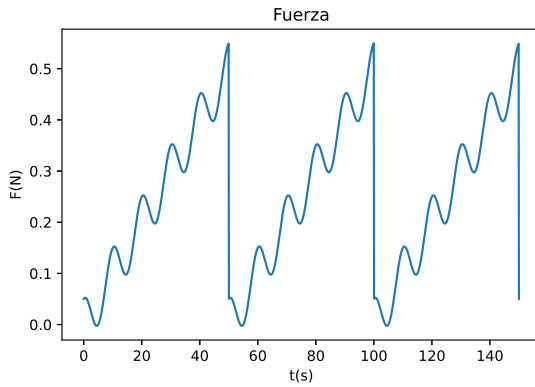
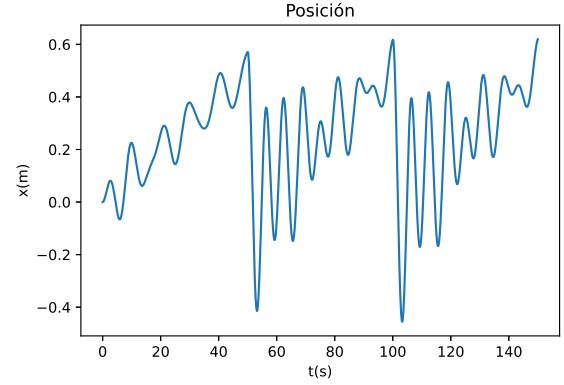
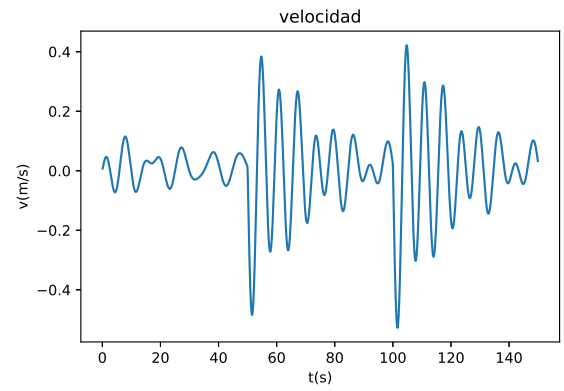


Figura 14: Fuerza con forma de función suma del coseno y la sierra

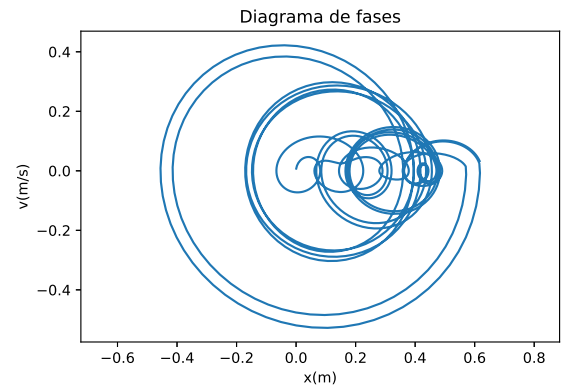
Los resultados se reflejan en la figura 15.



(a) Posición para la función la función suma del coseno y la sierra



(b) Velocidad para la función la función suma del coseno y la sierra



(c) Diagrama de fases para la función la función suma del coseno y la sierra

Figura 15: Resultados para la función suma del coseno y la sierra.

### 3.6. Fuerzas no periódicas

Además de fuerzas periódicas, este método es válido para encontrar la respuesta a cualquier función, siempre que sea continua a trozos. Se presentan a continuación dos casos, una fuerza de tipo cuadrático (figura 16) y una con forma logarítmica (figura 19).

En el primer caso tenemos:

$$F(t) = 0,0005(t - 75)^2$$

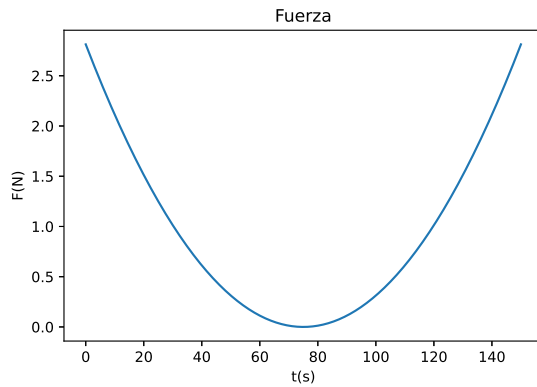


Figura 16: Fuerza con forma de parábola

En la figura 18 se muestran los resultados obtenidos. Inicialmente se da una gran oscilación entorno a una trayectoria parabólica hasta que finalmente se hace despreciable y queda una trayectoria parabólica sin oscilaciones. La velocidad parece hacerse nula al final del intervalo de tiempos, pero esto solo es porque es mucho más pequeña que durante las oscilaciones, mirando la figura 17, que representa la velocidad al final, se puede comprobar que esta aumenta de forma lineal con ciertas oscilaciones cuya amplitud disminuye de forma exponencial.

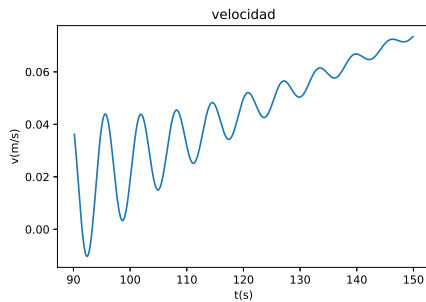
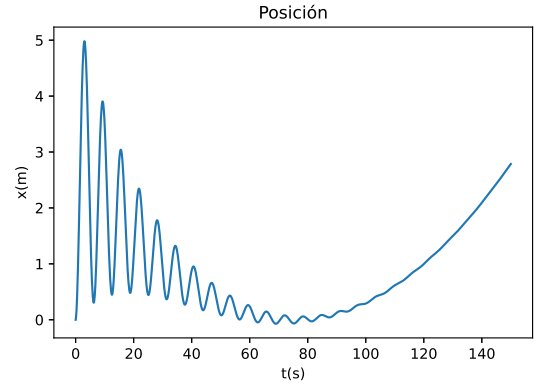
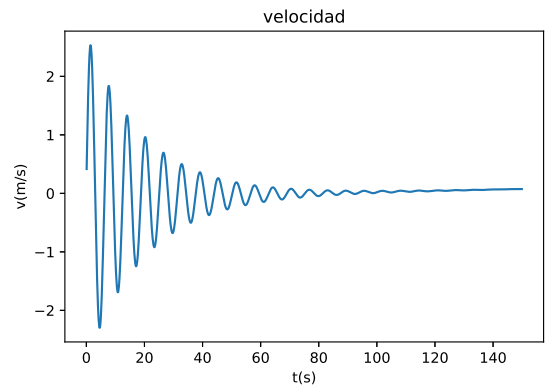


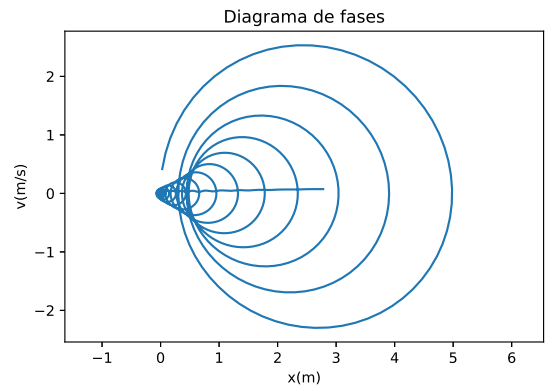
Figura 17: Velocidad en el tramo final del intervalo de tiempos.



(a) Posición para la función la función suma del coseno y la sierra



(b) Velocidad para la función la función suma del coseno y la sierra



(c) Diagrama de fases para la función la función suma del coseno y la sierra

Figura 18: Resultados para la función suma del coseno y la sierra.

Finalmente se somete al sistema a una fuerza logarítmica:

$$F(t) = 0,5 \log(t + 1)$$

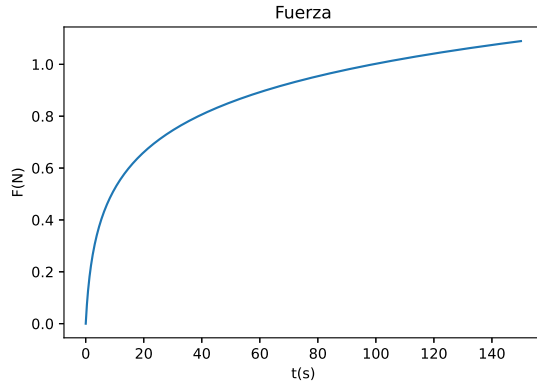
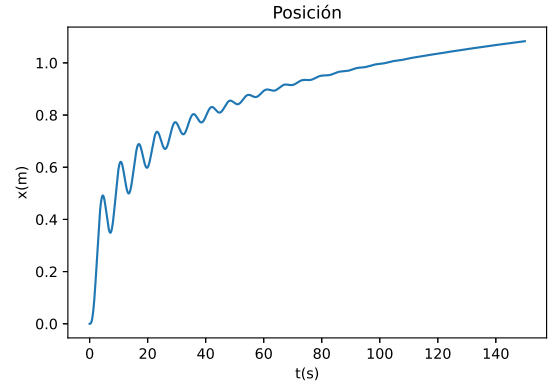
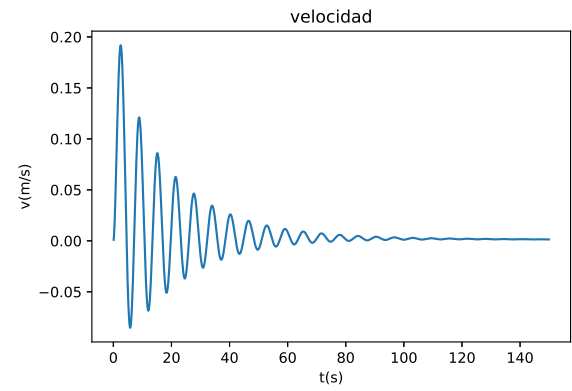


Figura 19: Fuerza con forma de función suma del coseno y la sierra

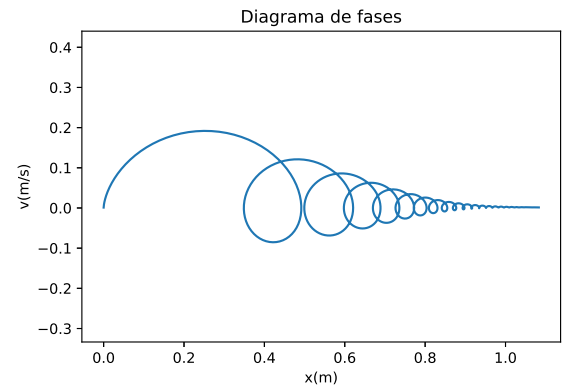
En la figura 20 se muestran los resultados. En este caso para algo similar que en al anterior: Las oscilaciones se dan al principio, haciéndose cada vez más pequeñas. Esto se visualiza muy bien en el diagrama de fase, que tiene forma de espiral de tamaño decreciente a medida que la amplitud de las oscilaciones disminuye.



(a) Posición para la función la función suma del coseno y la sierra



(b) Velocidad para la función la función suma del coseno y la sierra



(c) Diagrama de fases para la función la función suma del coseno y la sierra

Figura 20: Resultados para la función suma del coseno y la sierra.

## 4. Conclusiones

La resolución de manera numérica de la ecuación del oscilador mediante la función de Green ha resultado tener éxito para predecir la respuesta a fuerzas sinusoidales, obteniendo la misma solución que de forma analítica. También se obtienen resultados tanto para fuerzas constantes, como periódicas y no periódicas. Esto supone una ventaja frente a la descomposición en serie de Fourier, la cual es válida sólo para periódicas (y constantes). Además este método presenta la ventaja de poder hallar de forma analítica una solución para gran cantidad de funciones y ser generalizable a ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes de orden  $n$ , lo que supone poder obtener la solución de sistemas físicos más allá de la mecánica que dependan de la tercera derivada de la variable que se estudie (pudiendo ser intensidad de un determinado circuito por ejemplo). En cambio, no resulta tan útil como la descomposición en serie de Fourier cuando se quiere estudiar el comportamiento del sistema en función del espectro en frecuencia de la excitación.

## Referencias

- [1] Subías Domingo, Jesús. Notas asignatura mecánica clásica grado de física.
- [2] Martínez Fernández, Eduardo. Apuntes clase EDOs grado de matemáticas.

## A. Código de Python empleado

```

1  import numpy as np
2  import math
3  import matplotlib.pyplot as plt
4
5  def Green(m,w,gamma,t):
6      return np.where(t<0,0,1/(m*w)*np.exp(-gamma*t)*np.sin(w*t))
7
8  m=1.0
9  k=1.0
10 lamb=0.1
11 t0=0
12 tf=150
13 Ndivisiones=1500
14 AmpF=0.1
15 TF=30
16 gamma=lamb/(2*m)
17 w0=math.sqrt(k/m)
18 w=math.sqrt(w0*w0+gamma*gamma)
19
20 t=np.linspace(t0,tf,Ndivisiones)
21
22 G=Green(m,w,gamma,t)
23
24 plt.plot(t,G)
25 plt.xlabel("t(s)")
26 plt.ylabel("x(m)")
27 plt.title("Funcion_de_Green")
28
29 def fuerza(Amp, T, t):
30     #Quitar la almohadilla segun caso
31     #return np.where(t %T<=T/2,Amp,-Amp)
32     return np.sin((2*math.pi/T)*t)*Amp
33     #return Amp*(t%(T))/T
34     #return np.cos((2*math.pi/T*5)*t)*Amp*(t%(T))/T
35     #return 0.1*Amp*np.cos((2*math.pi/T*5)*t)+Amp*(t%(T))/T
36     #return Amp*(t-tf/2)*(t-tf/2)*0.001
37     #return Amp*np.log10(t+1)
38     #return np.where(t<tf/3, 0, Amp)
39
40 plt.plot(t,F)
41 plt.xlabel("t(s)")
42 plt.ylabel("F(N)")
43 plt.title("Fuerza")
44
45 x=np.zeros(Ndivisiones)
46 Deltat=t[1]-t[0]
47 Gaux=G
48 for f in F:
49     x=x+Gaux*Deltat*f
50     Gaux=np.roll(Gaux,1)
51     Gaux[0]=0
52
53 plt.plot(t,x)
54 plt.xlabel("t(s)")
55 plt.ylabel("x(m)")
56 plt.title("Posicion")
57
58 v=np.zeros(Ndivisiones-2)
59 for i in range(Ndivisiones-2):
60     v[i]=(x[i+2]-x[i])/(2*Deltat)
61 plt.plot(t[1:Ndivisiones-1],v)
62 plt.xlabel("t(s)")
63 plt.ylabel("v(m/s)")

```

```

64 plt.title(" velocidad")
65
66 plt.plot(x[1:Ndivisiones-1],v)
67 plt.axis('equal')
68 plt.ylabel("v(m/s)")
69 plt.xlabel("x(m)")
70 plt.title(" Diagrama_de_fases")
71
72 #Extra: solo para solucion analitica excitacion sinusoidal:
73
74 a1=AmpF/m/(np.sqrt(math.pow(w0*w0-math.pow((2*math.pi/TF),2),2)+4*gamma*gamma*pow((2*math.pi/TF),2)
75 ))
76 theta1=math.atan(2*gamma*2*math.pi/TF/(w0*w0-pow((2*math.pi/TF),2)))
77 theta=-math.atan(np.tan(-theta1)-gamma/w)
78 a=-a1*np.cos(-theta1)/np.cos(-theta)
79 xaux=a1*np.cos(2*math.pi/TF*t-theta)+a*np.exp(-gamma*t)*np.cos(w*t-theta1)
80 fig = plt.figure()
81 ax = fig.add_subplot(111)
82 ax.plot(t,xaux, c='c', label='Solucion_analitica',linewidth=3.0)
83 ax.plot(t,x, 'r--', label='Green')
84 plt.xlabel("t(s)")
85 plt.ylabel("x(m)")
86 plt.title(" Posicion")
87 leg = plt.legend()

```