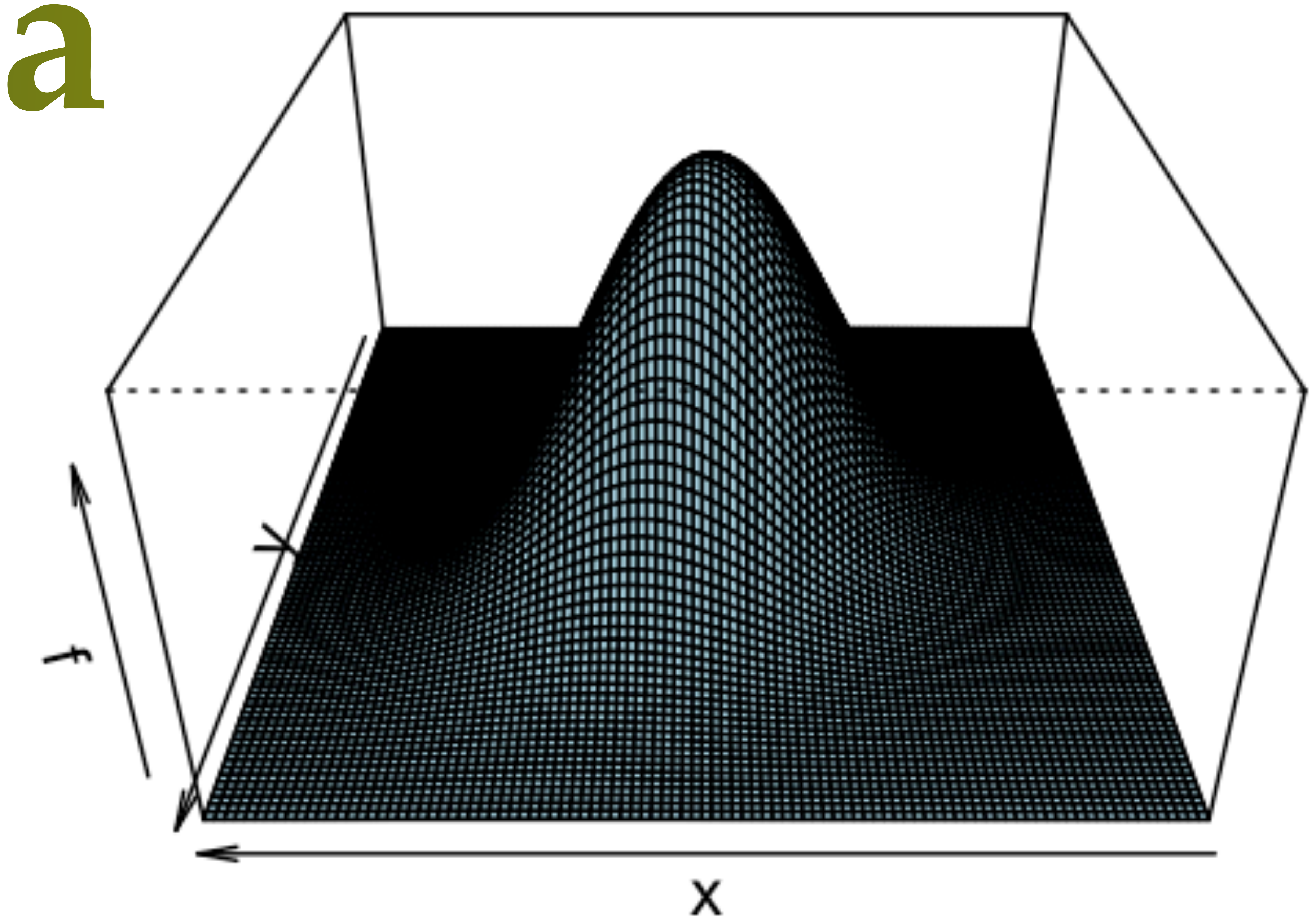
Distribución normal multivariada



Distribución normal multivariada

Definición 1

Se dice que $\mathbf{x}_{p\times 1}$ un vector aleatorio sigue una distribución normal multivariada no singular y denotado por $\mathbf{x} \sim N_p\left(\mu, \Sigma\right)$, si su densidad está dada por:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|2\pi\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right],$$

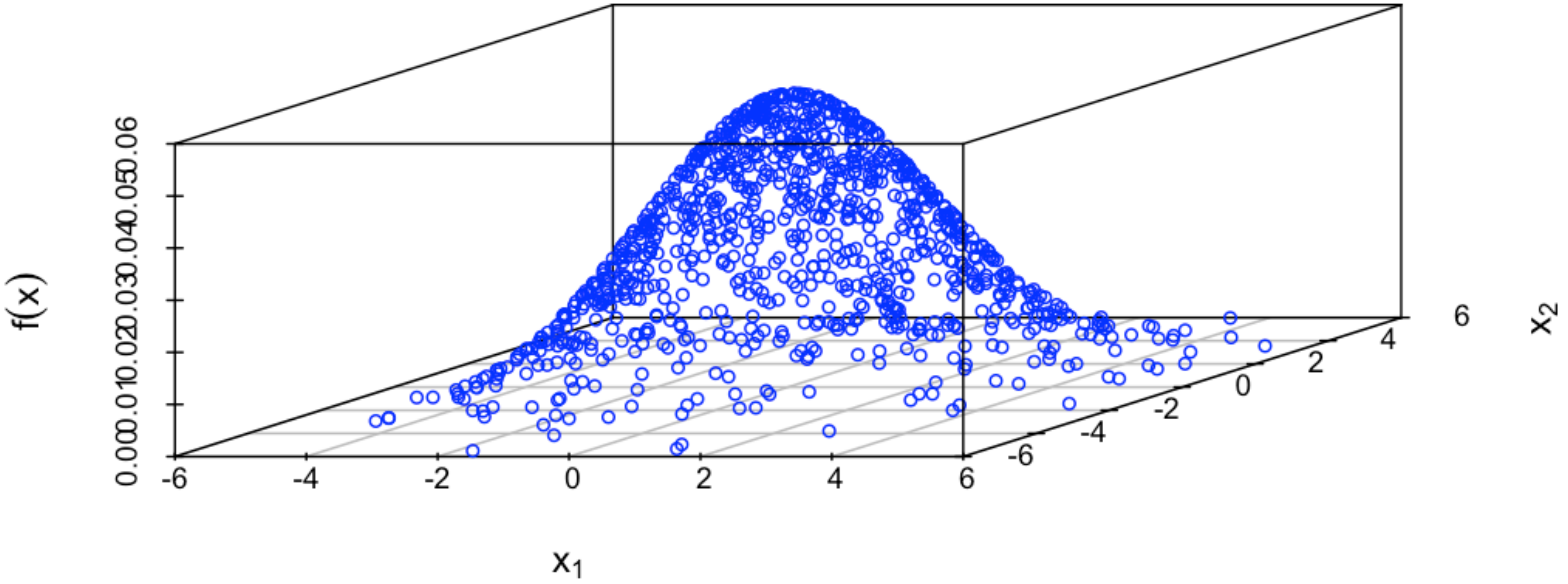
donde

- $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \mu$

- $\mathrm{Var}(\mathbf{x}) = \Sigma > 0$ (positiva definida)

Diagrama de dispersión

Para vectores bivariados se puede obtener un diagrama de dispersión 3D con la librería scatterplot3d



Distribución normal multivariada

Observación 1

Si $\text{ran}(\Sigma) = k < p$ se define la densidad de la distribución normal multivariada singular como

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi)^{-\frac{k}{2}}}{(\lambda_1 \cdots \lambda_k)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^-(\mathbf{x}-\mu)\right],$$

donde

- $\mathbf{x}$ vive en el híper-plano $\mathbf{N}'(\mathbf{x}-\mu)$ y $\mathbf{N}$ es una matriz de tamaño $p \times (p-k)$ tal que:
    1. $\mathbf{N}^T\Sigma = \mathbf{0}$
    2. $\mathbf{N}^T\mathbf{N} = \mathbf{I_{p-k}}$
- Σ^- es la inversa generalizada y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son los eigenvalores diferentes de cero.

Caracterizaciones

Definición 2

Decimos que el vector aleatorio $\mathbf{x}_{p\times 1}$ sigue una distribución normal p-variada si y solo si $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$ tiene una distribución normal univariada para todos los vectores p-variados (no triviales) $\mathbf{a}$

Proposición 1

Sea $\mathbf{x}$ un vector normal p-variado. Si se define a $\mathbf{y}_{q\times 1} = \mathbf{A}_{q\times p}\mathbf{x} + \mathbf{b}_{q\times 1}$ entonces el vector aleatorio $\mathbf{y}$ tiene una distribución normal q-variada con esperanza y varianza dadas por:

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mu + \mathbf{b} \qquad \mathrm{Var}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^\mathbf{T}$$