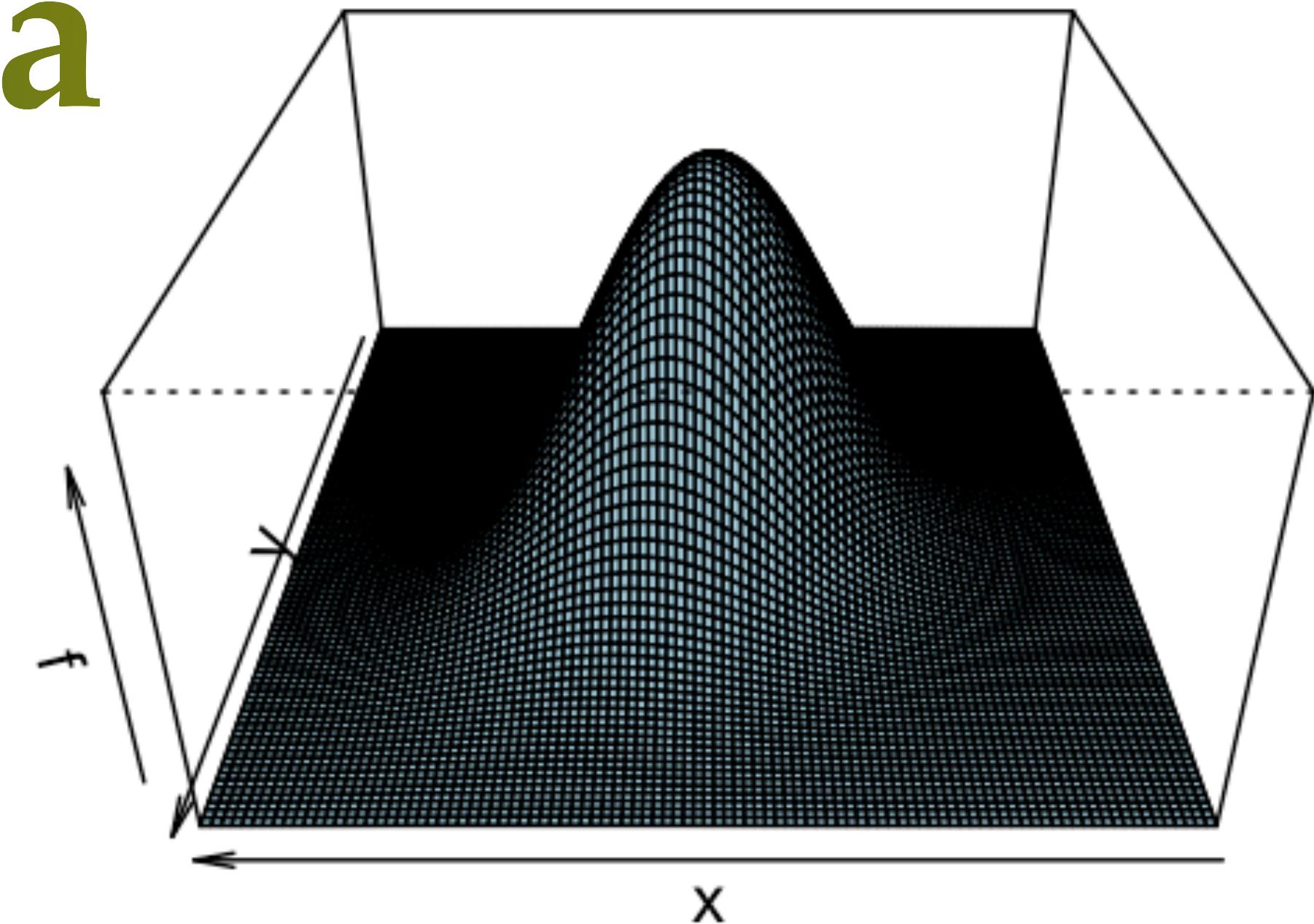


Distribución normal multivariada



Distribución normal multivariada

Definición 1

Se dice que $\mathbf{x}_{p \times 1}$ un vector aleatorio sigue una distribución normal multivariada no singular y denotado por $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, si su densidad está dada por:

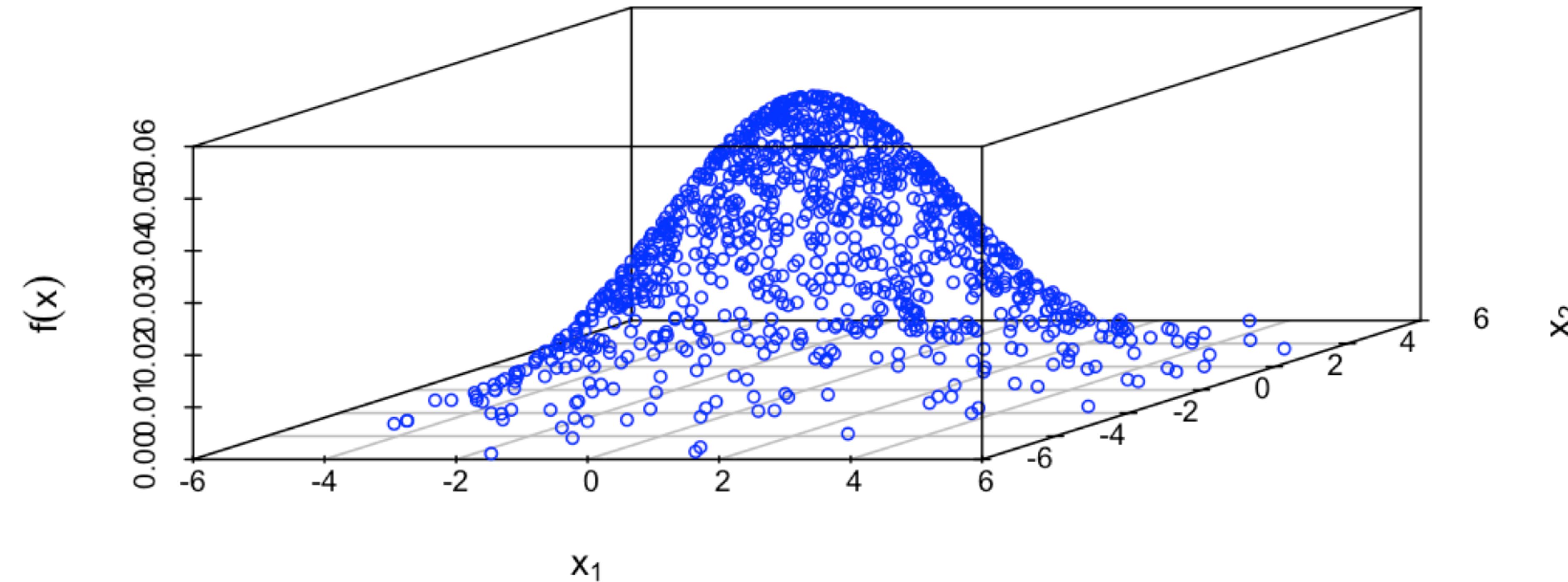
$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|2\pi\Sigma|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right],$$

donde

- $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \mu$
- $\text{Var}(\mathbf{x}) = \Sigma > 0$ (positiva definida)

Diagrama de dispersión

Para vectores bivariados se puede obtener un diagrama de dispersión 3D con la librería `scatterplot3d`



Distribución normal multivariada

Observación 1

Si $\text{ran}(\Sigma) = k < p$ se define la densidad de la distribución normal multivariada singular como

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi)^{-\frac{k}{2}}}{(\lambda_1 \cdots \lambda_k)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right],$$

donde

- \mathbf{x} vive en el híper-plano $\mathbf{N}'(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}$ y \mathbf{N} es una matriz de tamaño $p \times (p - k)$ tal que:

$$1. \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0}$$

$$2. \mathbf{N}^T \mathbf{N} = \mathbf{I}_{p-k}$$

- $\boldsymbol{\Sigma}^{-}$ es la inversa generalizada y $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son los eigenvalores diferentes de cero.

Caracterizaciones

Definición 2

Decimos que el vector aleatorio $\mathbf{x}_{p \times 1}$ sigue una distribución normal p -variada si y solo si $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ tiene una distribución normal univariada para todos los vectores p -variados (no triviales) \mathbf{a}

Proposición 1

Sea \mathbf{x} un vector normal p -variado. Si se define a $\mathbf{y}_{q \times 1} = \mathbf{A}_{q \times p} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{q \times 1}$ entonces el vector aleatorio \mathbf{y} tiene una distribución normal q -variada con esperanza y varianza dadas por:

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mu + \mathbf{b} \quad \text{Var}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T$$

Caracterizaciones

Corolario 1

Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$, $\mu_{p \times 1}$ un vector real y $\Sigma_{p \times p}$ una matriz semidefinda positiva y simétrica. Entonces $\mathbf{y} = \Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{x} + \mu \sim N_p(\mu, \Sigma)$

Corolario 2

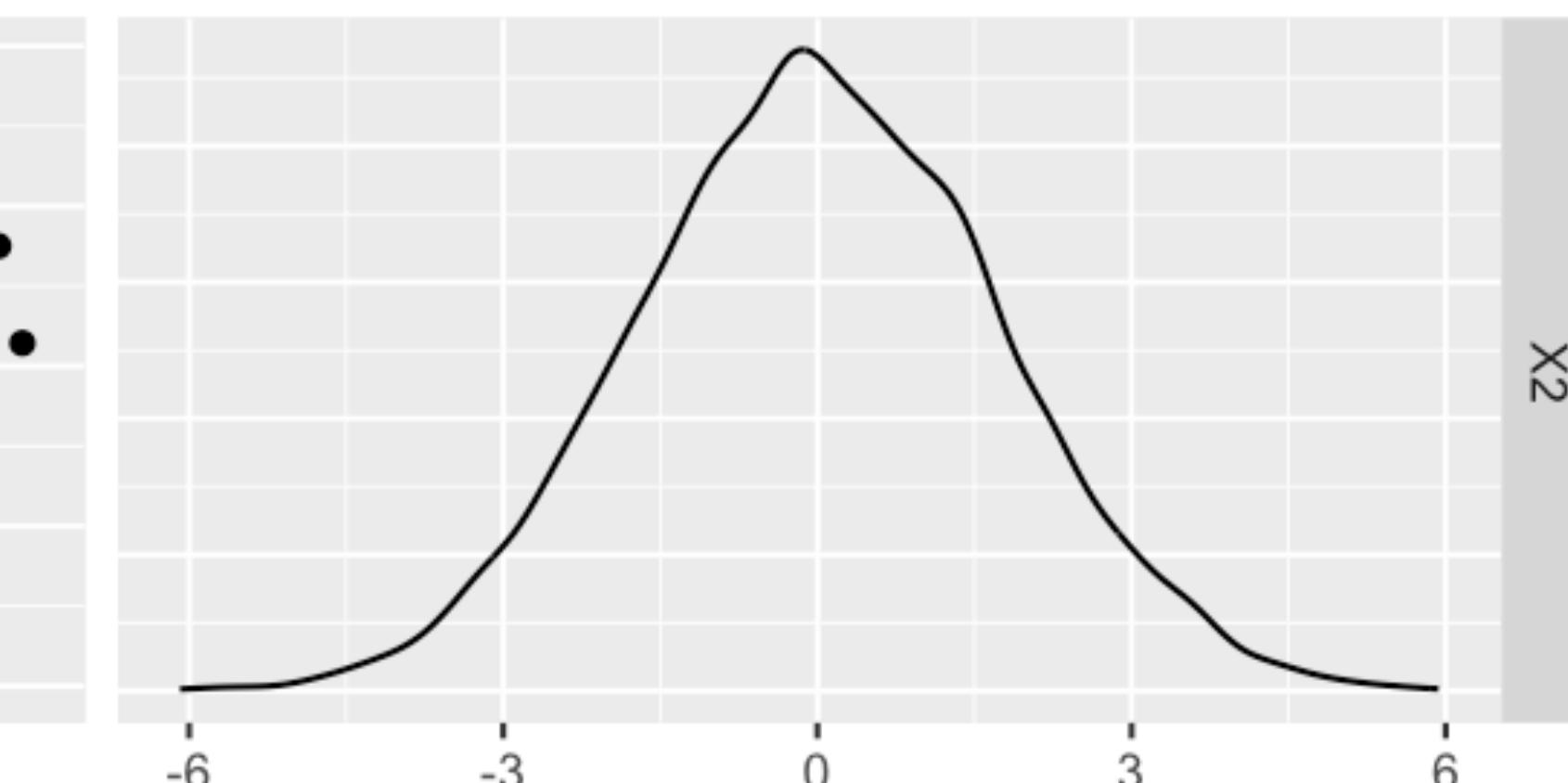
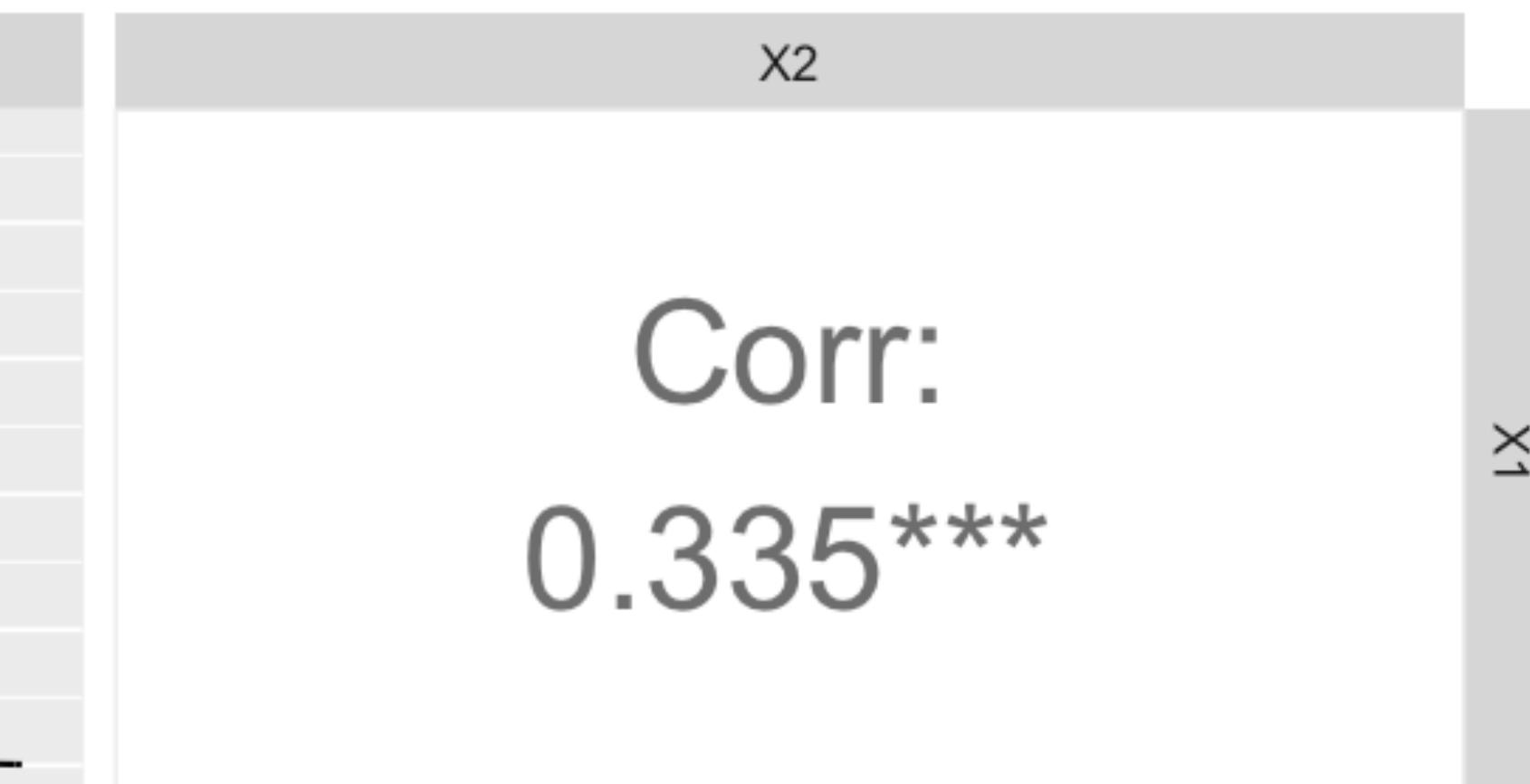
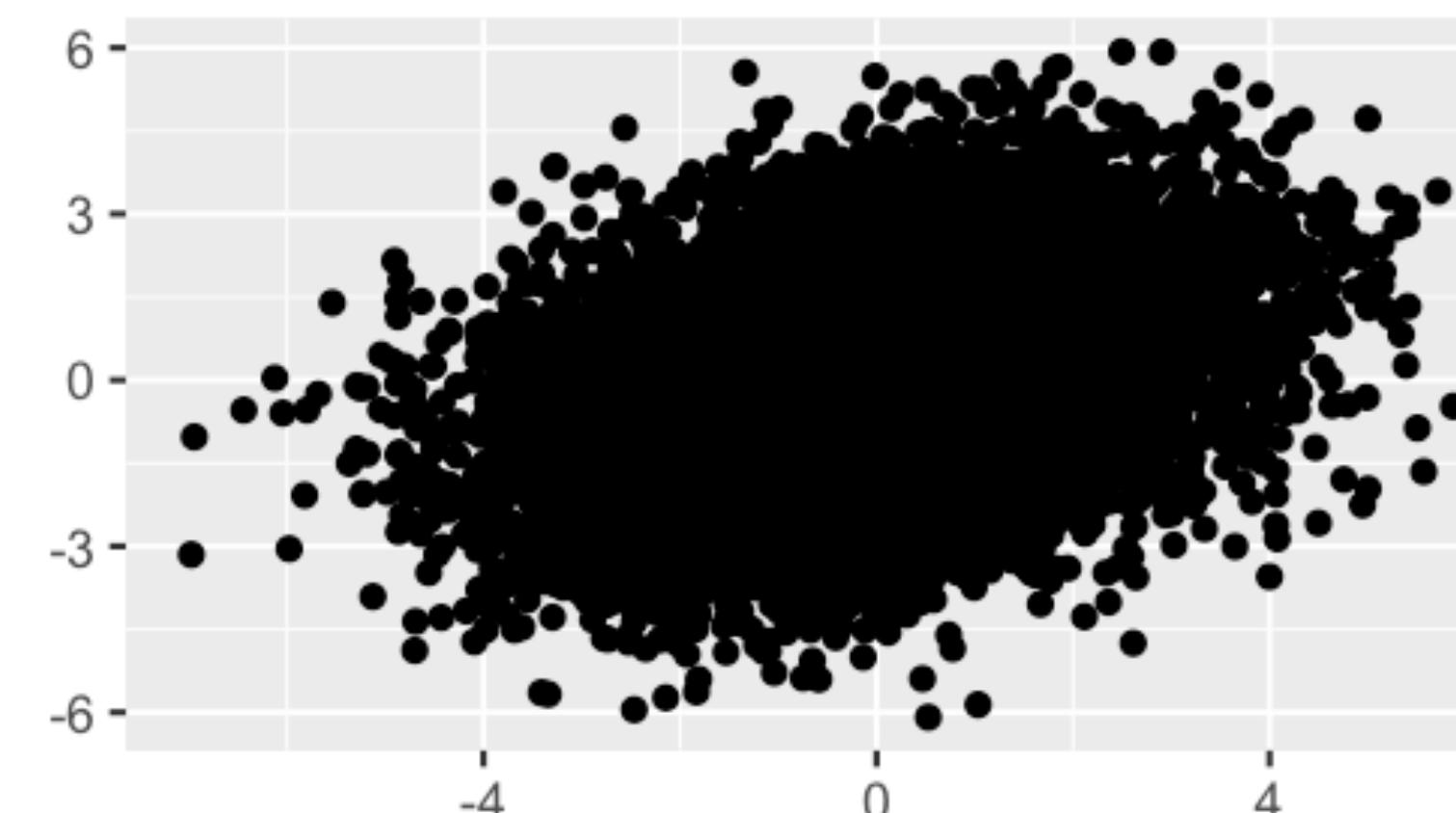
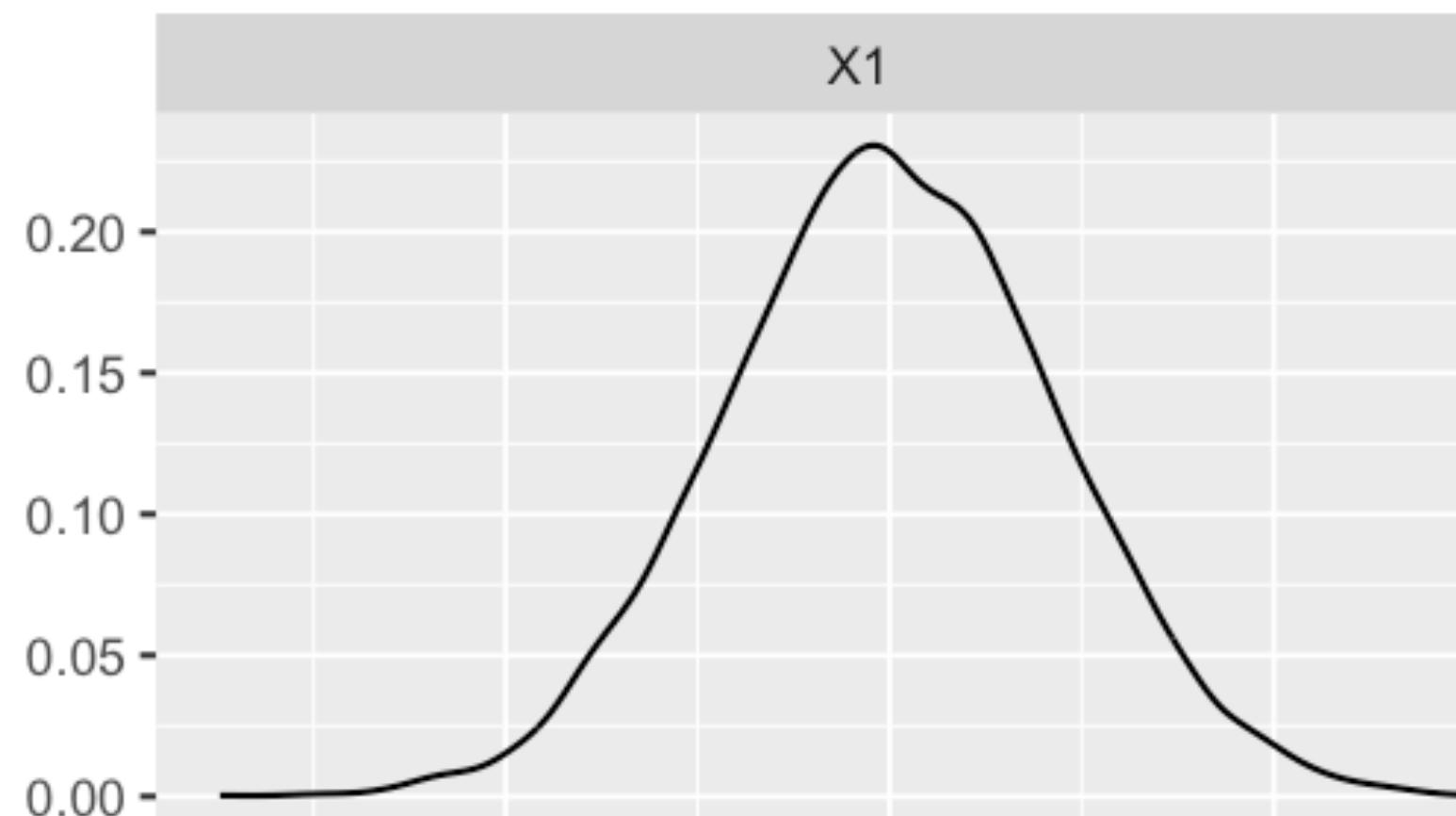
Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ con $\Sigma > 0$ y $\mathbf{y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \mu)$, donde $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ es la matriz raíz cuadrada de Σ^{-1} . Entonces, y_1, y_2, \dots, y_p son variables aleatorias iid $N(0, 1)$.

- En **R** la librería **expm** proporciona la función requerida para obtener $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ con **sqrtm**

Simulación

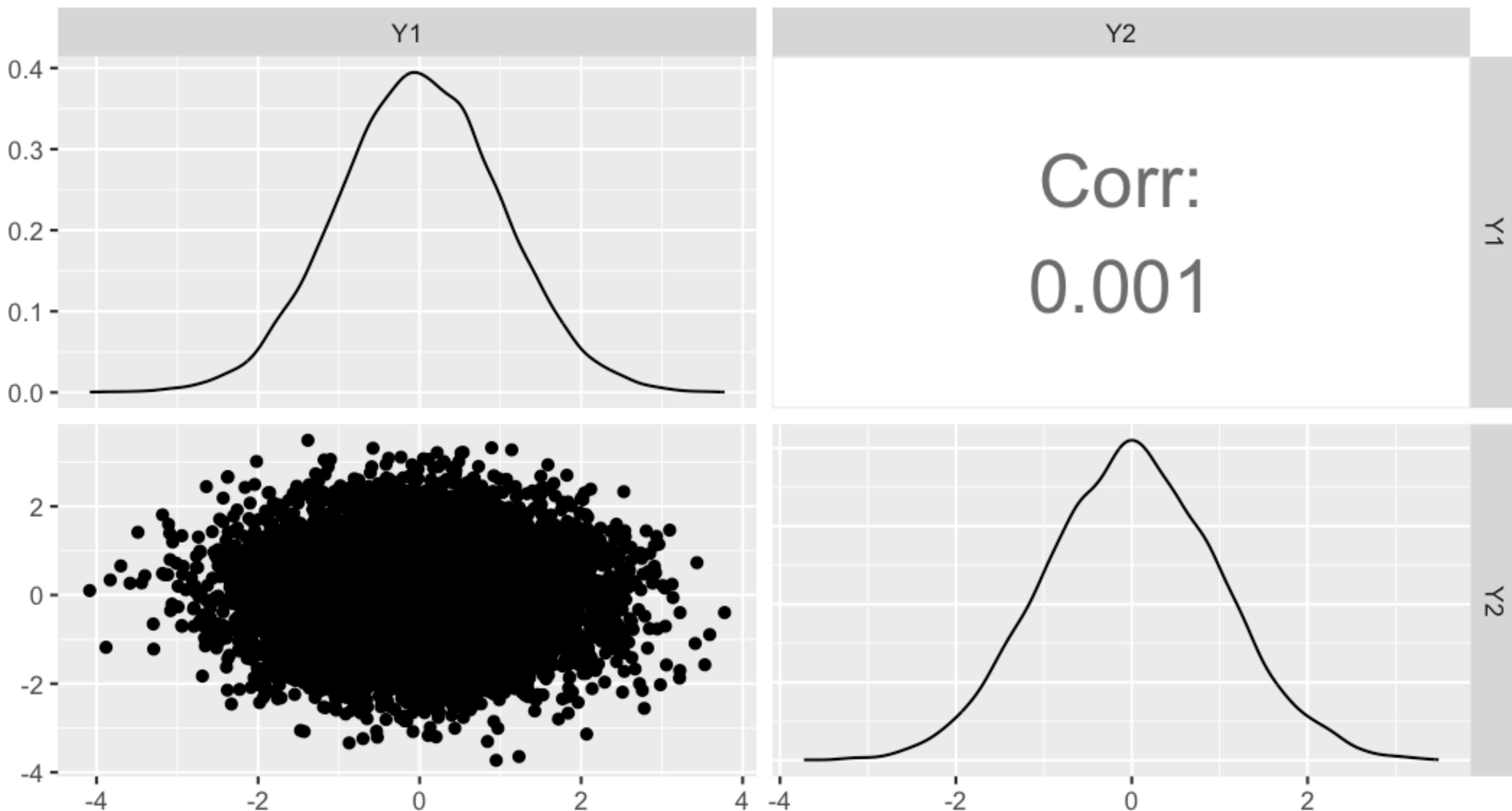
- ¿Cómo se ven las densidades univariadas y las curvas de nivel de $\mathbf{x} \sim N_2(\mu, \Sigma)$? Donde

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$



Simulación

- ▶ ¿Qué pasa si hacemos $\mathbf{y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \mu)$?

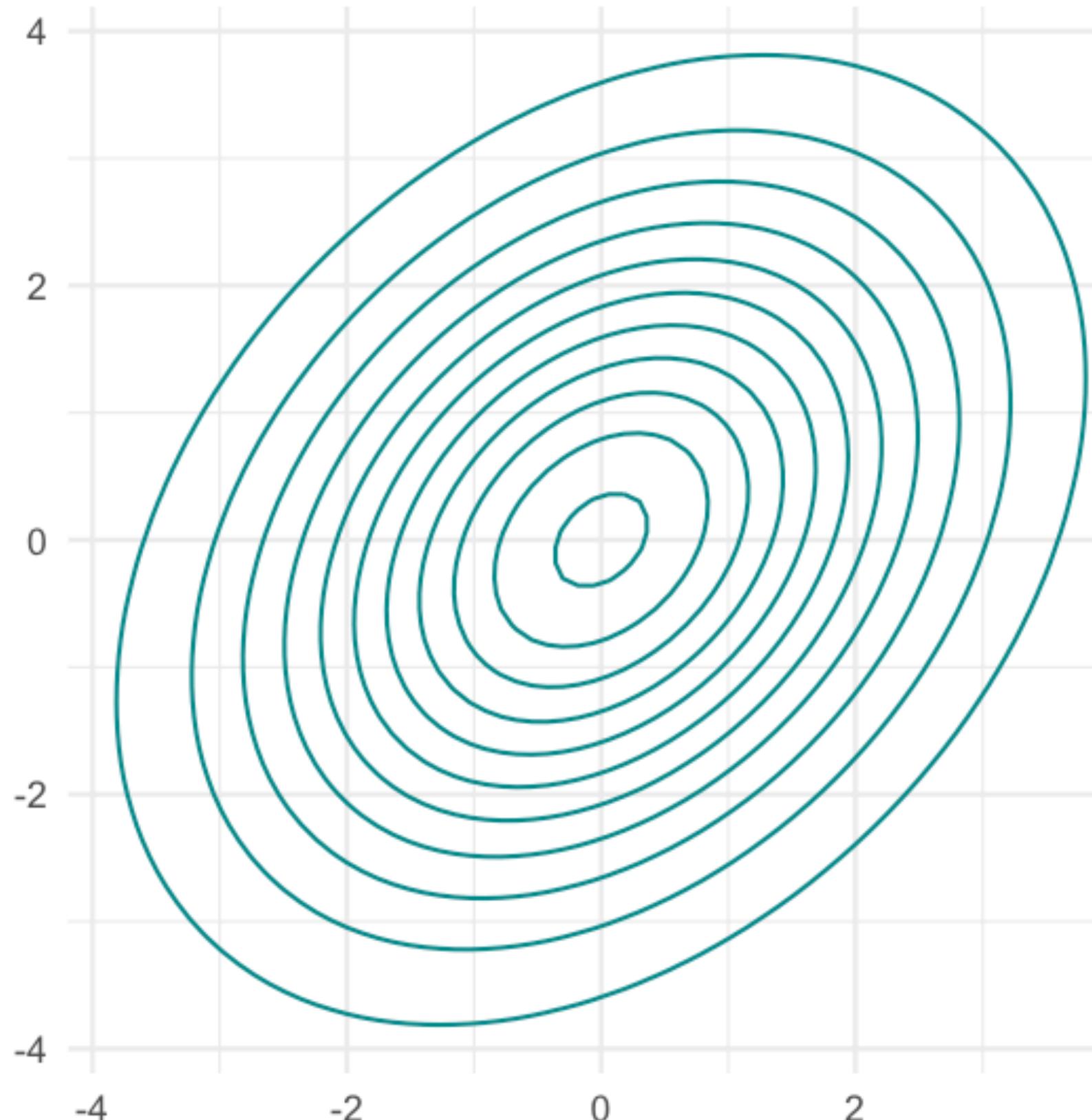


Propiedades

Observación 2

La distribución normal multivariada tiene densidad constante en elipses (elipsoides)

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = k$$



Propiedades

Proposición 2

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ entonces, $U = (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \sim \chi_p^2$.

Observación 3

Se puede fácilmente evaluar la probabilidad de que \mathbf{x} este en un elipsoide, i.e.

$$\mathbb{P} [(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) < k]$$

Propiedades

Proposición 3

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, entonces los coeficientes de asimetría y curtosis están dados respectivamente por,

$$\beta_{1,p} = \mathbb{E} \left[((\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mu))^3 \right] = 0$$

$$\beta_{2,p} = \mathbb{E} \left[((\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu))^2 \right] = p(p + 2)$$

Proposición 4

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, entonces la función característica de \mathbf{x} está dada por,

$$\phi(\mathbf{t}) = \exp \left(i \mathbf{t}^T \mu - \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t} \right)$$

Propiedades

Proposición 5

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y considere la partición

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{x}^{(1)}$ es de dimensión k y $\mathbf{x}^{(2)}$ es de dimensión $p - k$, entonces:

1. $\mathbf{x}^{(1)} \sim N_k(\mu^{(1)}, \Sigma_{11})$

2. $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son independientes si y solo si $\text{Cov}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = \Sigma_{12} = \mathbf{0}$

3. $\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} \sim \chi_p^2(\mu^T \Sigma^{-1} \mu)$

4. $\mathbf{x}^{(2)} | \mathbf{x}^{(1)} \sim N_{p-k}(\mu^{(2)} + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} [\mathbf{x}^{(1)} - \mu^{(1)}], \Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12})$

Pruebas de normalidad

- ▶ Todas las distribuciones univariadas son normales
 - qqplot
 - histogramas
 - Pruebas de normalidad (e.g. Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Lilliefors, etc.)
- ▶ $(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \sim \chi_p^2$
 - qqplot
- ▶ Prueba de Mardia (1970) basada en los coeficientes de asimetría y curtosis multivariados
- ▶ Otras pruebas (e.g. Henze-Zirkler (1990), Royston (1982))
- ▶ En R: librería MVN

Convergencia

Teorema 1 (Teorema Central del Límite)

Sean $\mathbf{x}_n = (x_{n1}, \dots, x_{np})$ una colección de vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, con vector de medias μ y matriz (finita) de covarianza Σ . Entonces,

$$\sqrt{n} (\bar{\mathbf{x}} - \mu) \rightarrow N_p(\mathbf{0}_p, \Sigma)$$

Teorema 2 (Teorema de Cramér-Wold)

Para $\mathbf{x}_n = (x_{n1}, \dots, x_{np})$ y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ dos vectores aleatorios y $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$, entonces

$$\mathbf{x}_n \xrightarrow{d} \mathbf{x} \iff \sum_{i=1}^p t_i x_{ni} \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^p t_i x_i$$

Distribución Wishart

Distribución Wishart

Definición 3

Sea $\mathbf{M}_{p \times p}$ una matriz simétrica de variables aleatorias, tal que $\mathbb{P}(\mathbf{M} > 0) = 1$, y sea $\Sigma_{p \times p}$ una matriz definida positiva. Si $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq p$, entonces $\mathbf{M}_{p \times p}$ tiene una distribución Wishart, $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$, no singular con n grados de libertad si la función de densidad de los $\frac{p(p+1)}{2}$ distintos elementos de $\mathbf{M}_{p \times p}$ está dada por:

$$f(m_{11}, m_{12}, \dots, m_{pp}) = c^{-1} |\mathbf{M}|^{(n-p-1)/2} \text{etr} \left(-\frac{\Sigma^{-1} \mathbf{M}}{2} \right)$$

donde

- etr es el operador \exp^{trace}

- $c = 2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}} \Gamma_p \left(\frac{n}{2} \right)$ y $\Gamma_p(\cdot)$ la función gamma multivariada

Distribución Wishart

Definición 4

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ vectores aleatorios iid distribuidos como $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ entonces $\mathbf{M}_{p \times p} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ tiene una distribución Wishart con n grados de libertad

Observación 4

Si $\Sigma > 0$ y $n \geq p$, entonces se puede probar que $\mathbb{P}(\mathbf{M} > 0) = 1$. De lo contrario, se tiene que $\mathbf{M} \geq 0$, por lo que la densidad no existe y se dice que \mathbf{M} tiene una distribución singular

Propiedades

Teorema 3

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces, si $\mathbf{C}_{q \times p}$ tal que $\text{ran}(\mathbf{C}) = q$, se tiene que $\mathbf{CMC}^T \sim W_q(n, \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}^T)$

Corolario 3

Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ y \mathbf{a} es un vector de constantes, entonces $\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a} \sim \sigma_{\mathbf{a}}^2 \cdot \chi_n^2$, donde $\sigma_{\mathbf{a}}^2 = \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a}$

Corolario 4

Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces $m_{ii} \sim \Sigma_{ii} \cdot \chi_n^2$

Propiedades

Proposición 6

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces:

1. $\mathbb{E}(\mathbf{M}) = n\Sigma$

2. (Aditividad) Si $\mathbf{M}_i \sim W_p(n_i, \Sigma)$ independientes entonces, $\sum_{i=1}^m \mathbf{M}_i \sim W_p\left(\sum_{i=1}^m n_i, \Sigma\right)$

3. Si partimos a \mathbf{M} y a Σ como,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

entonces, $\mathbf{M}_{11} \sim W_k(n, \Sigma_{11})$ y $\mathbf{M}_{22} \sim W_{p-k}(n, \Sigma_{22})$. Más aún si $\Sigma_{12} = 0$, entonces \mathbf{M}_{11} y \mathbf{M}_{22} son independientes.

Formas cuadráticas

Teorema 4

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$, entonces

1. Sea $\mathbf{A}_{q \times p}$ una matriz tal que $\text{ran}(\mathbf{A}) = q$, entonces $(\mathbf{AM}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} \sim W_q(n - p + q, (\mathbf{A}\Sigma^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1})$
2. Sea $\mathbf{y}_{p \times 1}$ independiente de \mathbf{M} y tal que $\mathbb{P}(\mathbf{y} = \mathbf{0}) = 0$, entonces $\frac{\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y}} \sim \chi_n^2$ y $\frac{\mathbf{y}^T \Sigma^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}} \sim \chi_{n-p+1}^2$
3. Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ vectores aleatorios iid $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$. Entonces si consideramos a $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$ con $\mathbf{a}_{p \times 1}$, $\mathbf{A}_{n \times n}, \mathbf{B}_{n \times n}$ matrices simétricas de rango r, s respectivamente y $\mathbf{b}_{n \times 1}$ un vector de constantes entonces

- $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ si y solo si $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \sim \sigma_a^2 \cdot \chi_r^2$

- $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ y $\mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{X} \sim W_p(s, \Sigma)$ son ind. si $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \sim \sigma_a^2 \cdot \chi_r^2$ y $\mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} \sim \sigma_a^2 \cdot \chi_s^2$ son ind.

- $\mathbf{X}^T \mathbf{b} \sim N_p$ y $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ son ind. si $\mathbf{y}^T \mathbf{b} \sim N_1$ y $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \sim \sigma_a^2 \cdot \chi_r^2$ son ind.

Formas cuadráticas

Lema 1

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ (iid) entonces se cumple lo siguiente

1. $\mathbf{x}^{(j)} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma_{jj}\mathbf{I})$

2. Si $\mathbf{a}_{n \times 1}$ es un vector de constantes entonces $\mathbf{X}^T \mathbf{a} \sim N_p(\mathbf{0}, \|\mathbf{a}\|^2 \Sigma)$

3. Si $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\}$, $r \leq n$, es un conjunto de vectores mutuamente ortogonal entonces, los vectores aleatorios dados por $\mathbf{X}^T \mathbf{a}_i$ son mutuamente independientes

4. Si $\mathbf{b}_{p \times 1}$ es un vector de constantes, entonces $\mathbf{X} \mathbf{b} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma_b^2 \mathbf{I})$ donde $\sigma_b^2 = \mathbf{b}^T \Sigma \mathbf{b}$

Formas cuadráticas

Lema 2

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ y $\mathbf{A}_{p \times q}$ una matriz simétrica entonces $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \sim \sigma^2 \cdot \chi_r^2$ si y solo si \mathbf{A} es idempotente y con $\text{ran}(\mathbf{A}) = r$

Lema 3

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ y sean $\mathbf{Q}_i = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_i \mathbf{x} \sim \sigma^2 \cdot \chi_{r_i}^2$ ($i = 1, 2$) dos formas cuadráticas. Entonces \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 son independientes si y solo si $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \mathbf{O}$