

Distribución normal multivariada



José Antonio Perusquía Cortés
Análisis Multivariado, Semestre 2025 - II



Distribución normal multivariada

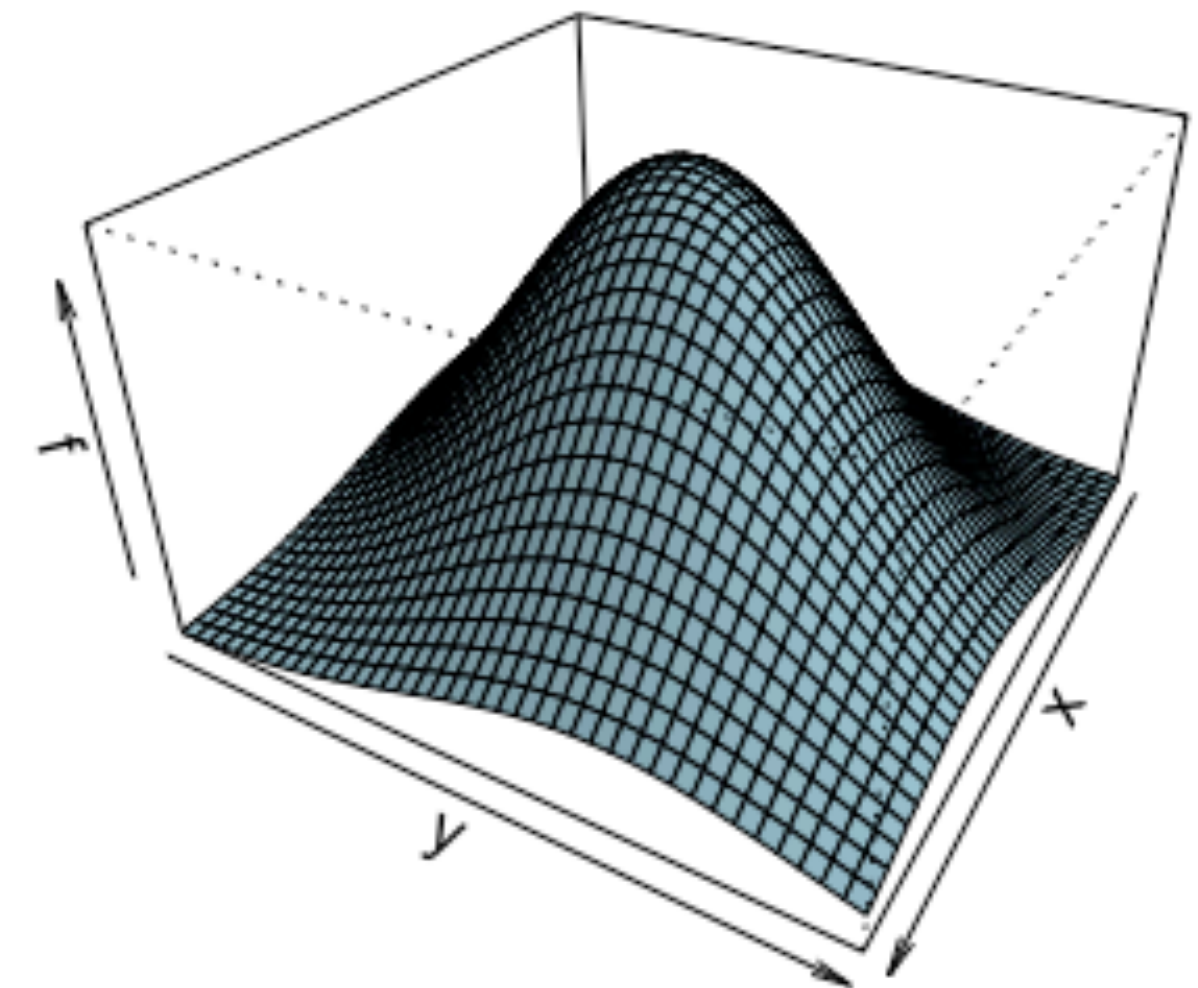
Definición 1

Se dice que \mathbf{x} sigue una distribución normal multivariada p-variada no singular, denotado por $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ si \mathbf{x} tiene función de densidad

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|2\pi\Sigma|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu) \right],$$

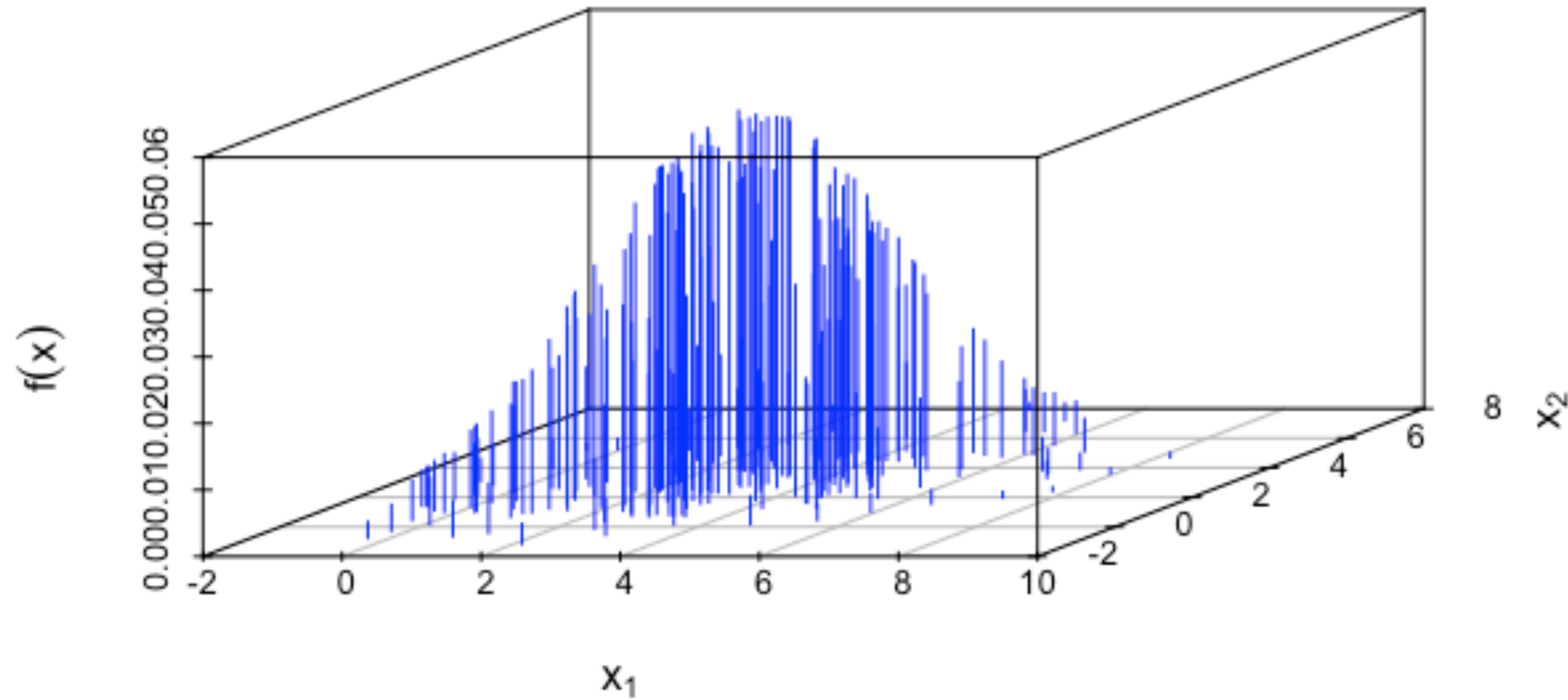
donde

- $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \mu$
- $\text{Var}(\mathbf{x}) = \Sigma > 0$ (positiva definida)



Distribución normal multivariada

- Para datos bivariados también se puede crear un scatterplot en 3D con librería `scatterplot3d`



Distribución normal multivariada

Observación 1

Si $\text{ran}(\Sigma) = k < p$ podemos definir la densidad de la distribución normal multivariada singular como

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi)^{-\frac{k}{2}}}{(\lambda_1 \cdots \lambda_k)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^- (\mathbf{x} - \mu) \right],$$

donde

- \mathbf{x} vive en el hiper-plano $\mathbf{N}'(\mathbf{x} - \mu)$ y \mathbf{N} es una matriz de tamaño $p \times (p - k)$ tal que:
 1. $\mathbf{N}^T \Sigma = \mathbf{0}$
 2. $\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \mathbf{I}_{p-k}$
- Σ^- es la inversa generalizada y $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son los eigenvalores diferentes de cero.

Caracterizaciones

Definición 2

Decimos que \mathbf{x} tiene una distribución normal p-variada si y solo si $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ tiene una distribución normal univariada para todos los vectores p-variados (no triviales) \mathbf{a}

Proposición 1

Sea \mathbf{x} un vector normal p-variado y definamos a $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ donde \mathbf{A} es una matriz de dimensión $q \times p$. Entonces \mathbf{y} tiene una distribución normal q-variada tal que:

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}$$

$$\text{Var}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T$$

Caracterizaciones

Corolario 1

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$ y definamos a $\mathbf{y} = \Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{x} + \mu$, entonces, $\mathbf{y} \sim N_p(\mu, \Sigma)$

Corolario 2

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ con $\Sigma > 0$ y definamos a $\mathbf{y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \mu)$, donde $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ es la matriz raíz cuadrada de Σ^{-1} . Entonces, y_1, y_2, \dots, y_p son variables aleatorias iid $N(0, 1)$.

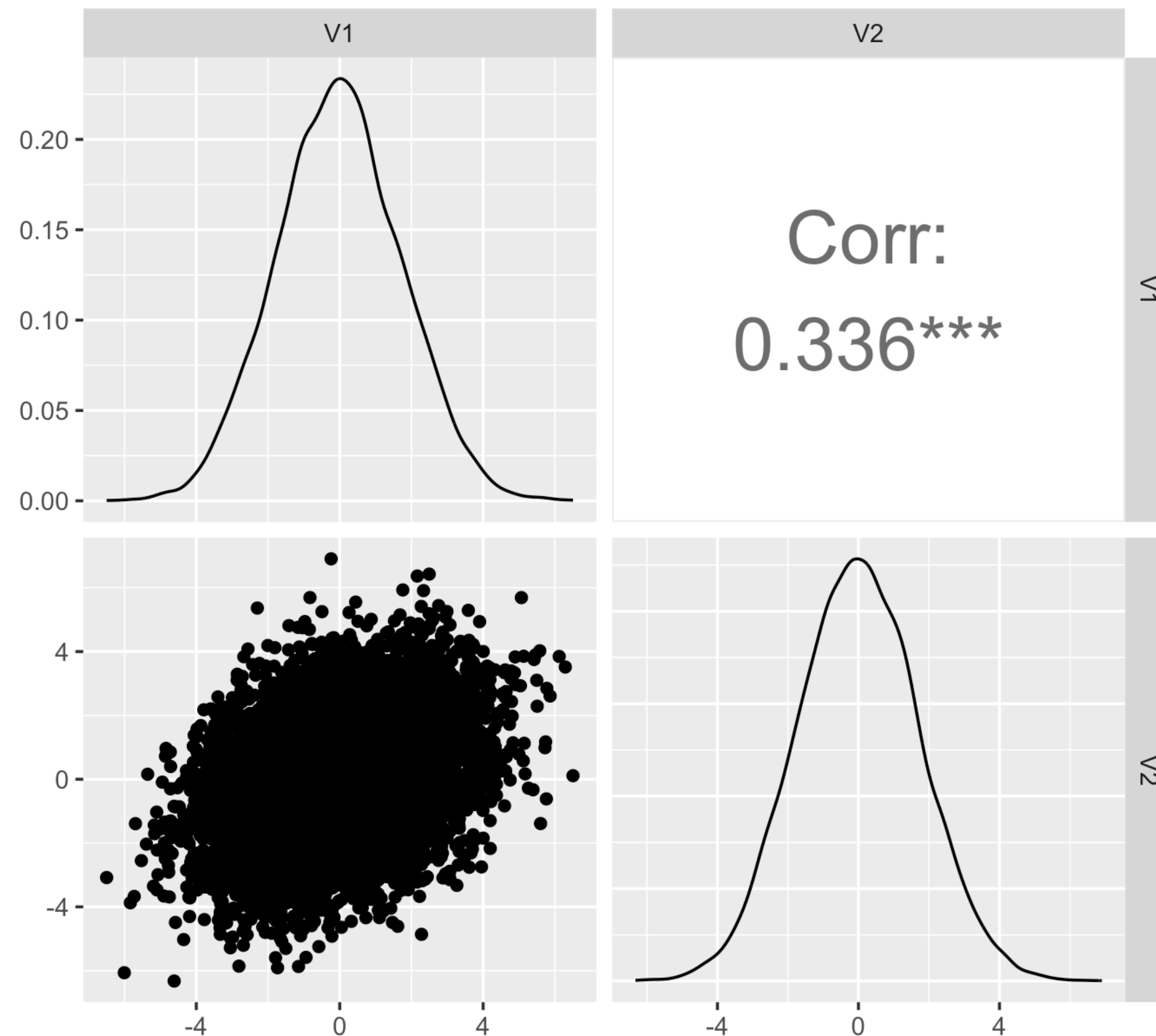
► En **R** la librería `expm` proporciona la función requerida para obtener $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ con `sqrtm`

Simulaciones

- ¿Cómo se ven las densidades univariadas y las curvas de nivel de una simulación de

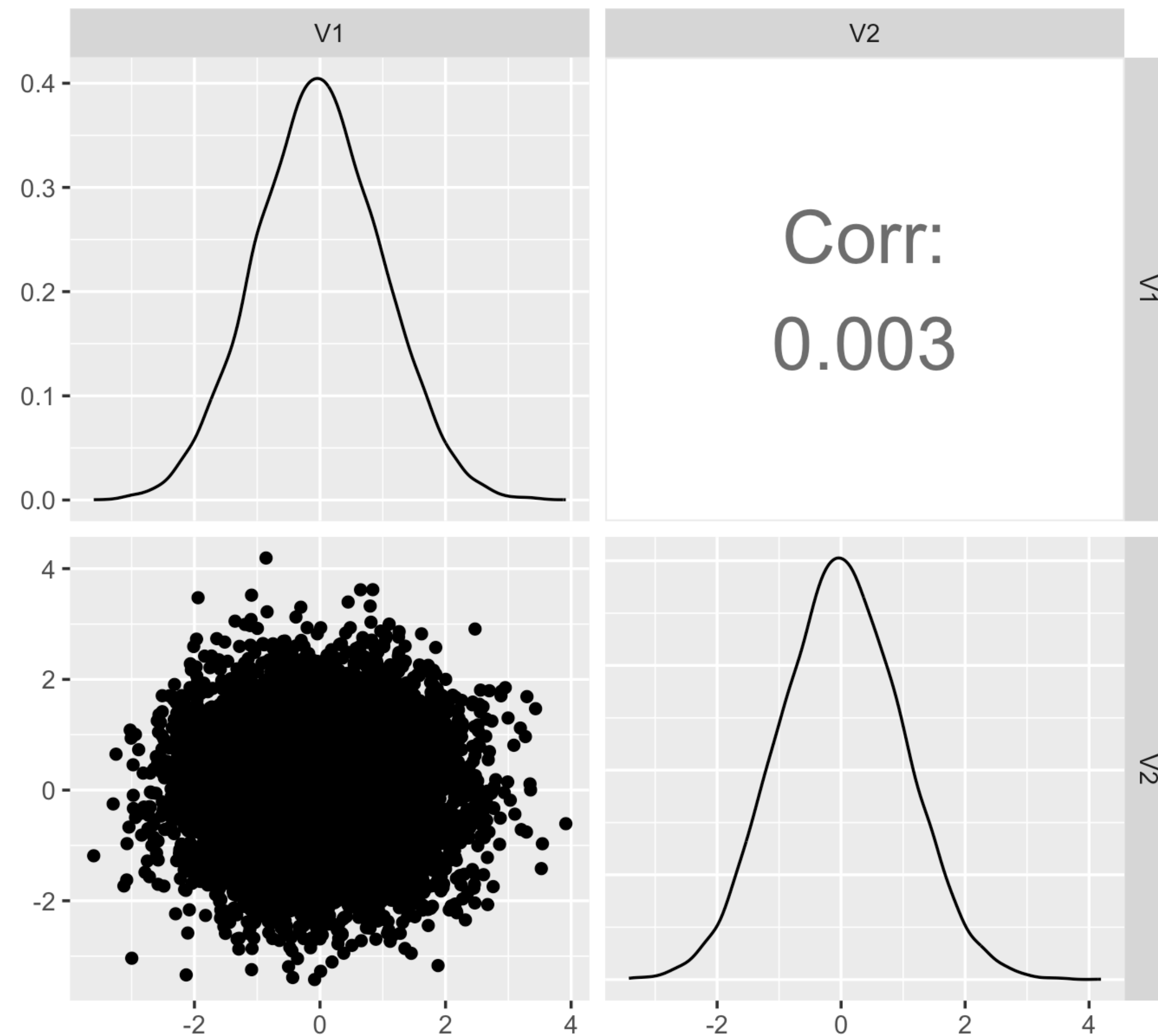
$\mathbf{x} \sim N_2(\mu, \Sigma)$? Donde

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$



Simulaciones

- ¿Qué pasa si hacemos $\mathbf{y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \mu)$?

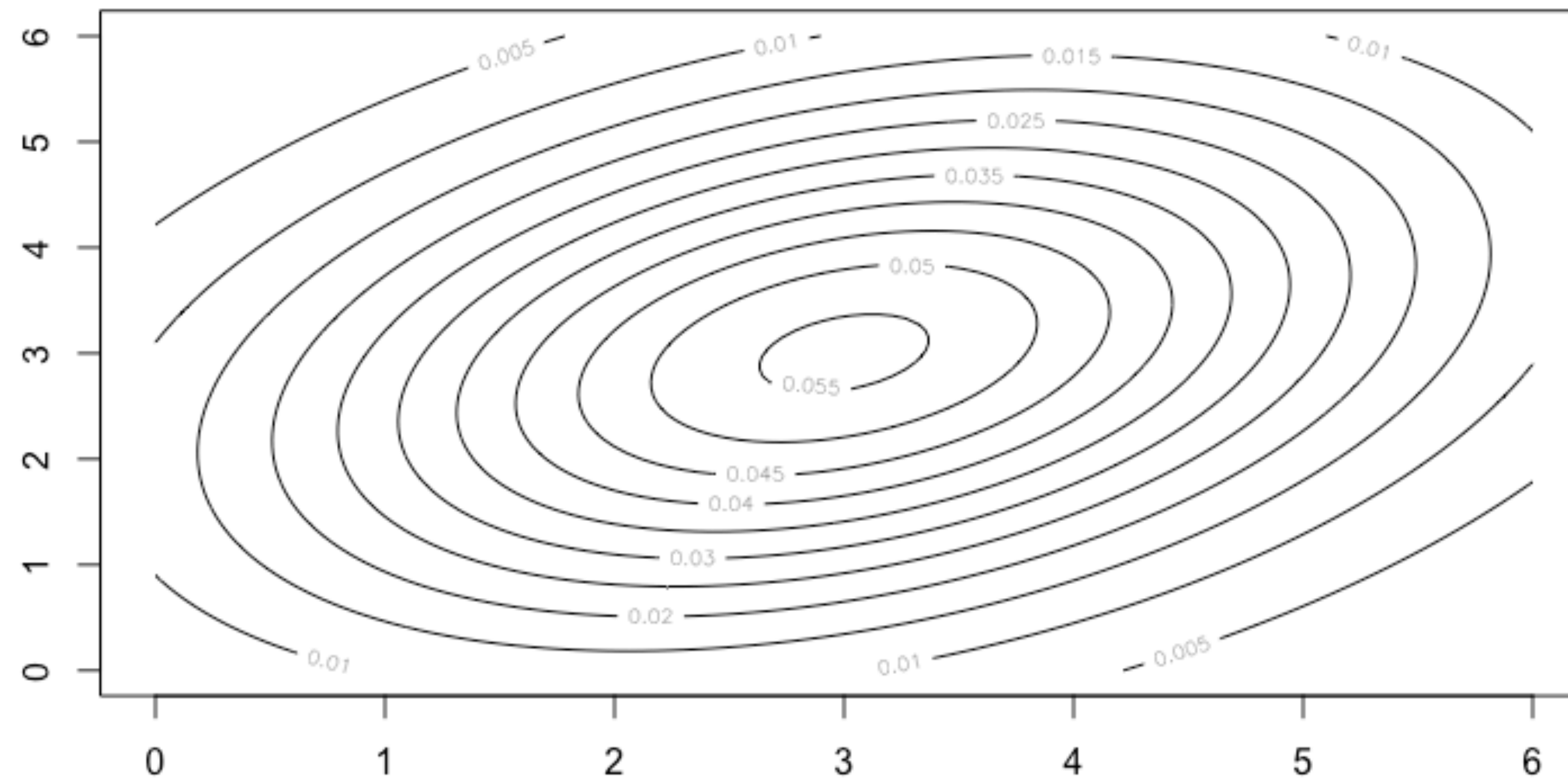


Propiedades

Observación 2

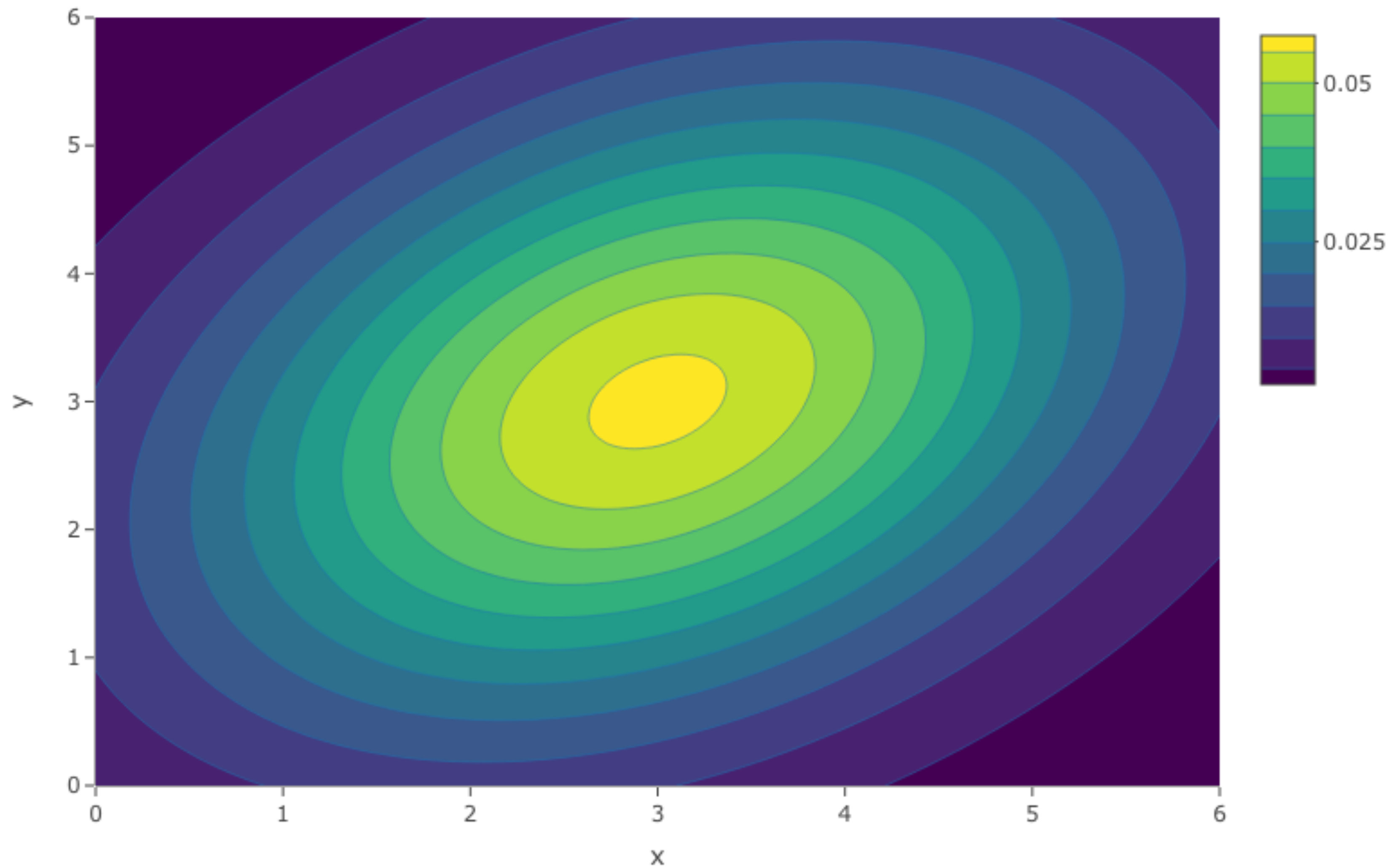
La distribución normal multivariada tiene densidad constante en elipses (elipsoides)

$$(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) = k$$



Propiedades

- En **R**: la librería **plotly** para una gráfica más interactiva



Propiedades

Proposición 2

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ entonces, $U = (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \sim \chi_p^2$.

Observación 3

Podemos fácilmente evaluar la probabilidad de que \mathbf{x} este en un elipsoide, i.e.

$$\mathbb{P} \left[(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) < k \right]$$

Propiedades

Proposición 3

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, entonces los coeficientes de asimetría y curtosis están dados respectivamente por,

$$\beta_{1,p} = \mathbb{E} \left[\left((\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right)^3 \right] = 0$$

$$\beta_{2,p} = \mathbb{E} \left[\left((\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right)^2 \right] = p(p + 2)$$

Proposición 4

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, entonces la función característica de \mathbf{x} está dada por,

$$\phi(\mathbf{t}) = \exp \left(i\mathbf{t}^T \mu - \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t} \right)$$

Propiedades

Proposición 5

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y considere la partición

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{x}^{(1)}$ es de dimensión k y $\mathbf{x}^{(2)}$ es de dimensión $p - k$, entonces:

1. $\mathbf{x}^{(1)} \sim N_k(\mu^{(1)}, \Sigma_{11})$
2. $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son independientes si y solo si $\text{Cov}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = \Sigma_{12} = \mathbf{0}$
3. $\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} \sim \chi_p^2(\mu^T \Sigma^{-1} \mu)$
4. $\mathbf{x}^{(2)} | \mathbf{x}^{(1)} \sim N_{p-k}(\mu^{(2)} + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} [\mathbf{x}^{(1)} - \mu^{(1)}], \Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12})$

Pruebas de normalidad

- Todas las distribuciones univariadas son normales
 - qqplot
 - histogramas
 - Pruebas de normalidad (e.g. Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Lilliefors, etc.)
- $(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \sim \chi_p^2$
 - qqplot
- Prueba de Mardia (1970) basada en los coeficientes de asimetría y curtosis multivariados
- Otras pruebas (e.g. Henze-Zirkler (1990), Royston (1982))
- En **R**: librería **MVN**

Convergencia

Teorema 1 (Teorema Central del Límite)

Sean $\mathbf{X}_n = (x_{n1}, \dots, x_{np})$ una colección de vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, con vector de medias μ y matriz (finita) de covarianza Σ . Entonces,

$$\sqrt{n} (\bar{\mathbf{x}} - \mu) \rightarrow N_p(\mathbf{0}_p, \Sigma)$$

Teorema 2 (Teorema de Cramér-Wold)

Para $\mathbf{X}_n = (x_{n1}, \dots, x_{np})$ y $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_p)$ dos vectores aleatorios y $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$, entonces

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^p t_i x_{ni} \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^p t_i x_i$$

Distribución Wishart

Distribución Wishart

Definición 3

Sea $\mathbf{M}_{p \times p}$ una matriz simétrica de variables aleatorias, tal que $\mathbb{P}(\mathbf{M} > 0) = 1$, y sea $\Sigma_{p \times p}$ una matriz definida positiva. Si $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq p$, entonces $\mathbf{M}_{p \times p}$ tiene una distribución Wishart, $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$, no singular con n grados de libertad si la función de densidad de los $\frac{p(p+1)}{2}$ distintos elementos de $\mathbf{M}_{p \times p}$ está dada por:

$$f(m_{11}, m_{12}, \dots, m_{pp}) = c^{-1} |\mathbf{M}|^{(n-p-1)/2} \text{etr} \left(-\frac{\Sigma^{-1} \mathbf{M}}{2} \right)$$

donde

- etr es el operador \exp^{trace}

- $c = 2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}} \Gamma_p \left(\frac{n}{2} \right)$ y $\Gamma_p(\cdot)$ la función gamma multivariada

Distribución Wishart

Definición 4

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ vectores aleatorios iid distribuidos como $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ entonces $\mathbf{M}_{p \times p} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ tiene una distribución Wishart con n grados de libertad

Observación 4

Si $\Sigma > 0$ y $n \geq p$, entonces se puede probar que $\mathbb{P}(\mathbf{M} > 0) = 1$. De lo contrario, se tiene que $\mathbf{M} \geq 0$, por lo que la densidad no existe y se dice que \mathbf{M} tiene una distribución singular

Propiedades

Teorema 3

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces, si $\mathbf{C}_{q \times p}$ tal que $\text{ran}(\mathbf{C}) = q$, se tiene que $\mathbf{CMC}^T \sim W_q(n, \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}^T)$

Corolario 3

Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ y \mathbf{a} es un vector de constantes, entonces $\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a} \sim \sigma_{\mathbf{a}}^2 \cdot \chi_n^2$, donde $\sigma_{\mathbf{a}}^2 = \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a}$

Corolario 4

Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces $m_{ii} \sim \Sigma_{ii} \cdot \chi_n^2$

Propiedades

Proposición 6

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces:

1. $\mathbb{E}(\mathbf{M}) = n\Sigma$

2. (Aditividad) Si $\mathbf{M}_i \sim W_p(n_i, \Sigma)$ independientes entonces, $\sum_{i=1}^m \mathbf{M}_i \sim W_p\left(\sum_{i=1}^m n_i, \Sigma\right)$

3. Si partimos a \mathbf{M} y a Σ como,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

entonces, $\mathbf{M}_{11} \sim W_k(n, \Sigma_{11})$ y $\mathbf{M}_{22} \sim W_{p-k}(n, \Sigma_{22})$. Más aún si $\Sigma_{12} = 0$, entonces \mathbf{M}_{11} y \mathbf{M}_{22} son independientes.

Formas cuadráticas

Teorema 4

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$, entonces

1. Sea $\mathbf{A}_{q \times p}$ una matriz tal que $\text{ran}(\mathbf{A}) = q$, entonces $(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} \sim W_q\left(n - p + q, (\mathbf{A}\Sigma^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\right)$
2. Sea $\mathbf{y}_{p \times 1}$ independiente de \mathbf{M} y tal que $\mathbb{P}(\mathbf{y} = \mathbf{0}) = 0$, entonces $\frac{\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y}} \sim \chi_n^2$ y $\frac{\mathbf{y}^T \Sigma^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}} \sim \chi_{n-p+1}^2$
3. Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ vectores aleatorios iid $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$. Entonces si consideramos a $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$ con $\mathbf{a}_{p \times 1}$, $\mathbf{A}_{n \times n}$, $\mathbf{B}_{n \times n}$ matrices simétricas de rango r, s respectivamente y $\mathbf{b}_{n \times 1}$ un vector de constantes entonces

- $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ si y solo si $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \sim \sigma_a^2 \cdot \chi_r^2$
- $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ y $\mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{X} \sim W_p(s, \Sigma)$ son ind. sii $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \sim \sigma_a^2 \cdot \chi_r^2$ y $\mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} \sim \sigma_a^2 \cdot \chi_r^2$ son ind.
- $\mathbf{X}^T \mathbf{b} \sim N_p$ y $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ son ind. sii $\mathbf{y}^T \mathbf{b} \sim N_1$ y $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \sim \sigma_a^2 \cdot \chi_r^2$ son ind.

Formas cuadráticas

Lema 1

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ (iid) entonces se cumple lo siguiente

1. $\mathbf{x}^{(j)} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma_{jj}\mathbf{I})$

2. Si $\mathbf{a}_{n \times 1}$ es un vector de constantes entonces $\mathbf{X}^T \mathbf{a} \sim N_p(\mathbf{0}, ||\mathbf{a}||^2 \Sigma)$

3. Si $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\}$, $r \leq n$, es un conjunto de vectores mutuamente ortogonal entonces, los vectores aleatorios dados por $\mathbf{X}^T \mathbf{a}_i$ son mutuamente independientes

4. Si $\mathbf{b}_{p \times 1}$ es un vector de constantes, entonces $\mathbf{X}\mathbf{b} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma_b^2 \mathbf{I})$ donde $\sigma_b^2 = \mathbf{b}^T \Sigma \mathbf{b}$

Formas cuadráticas

Lema 2

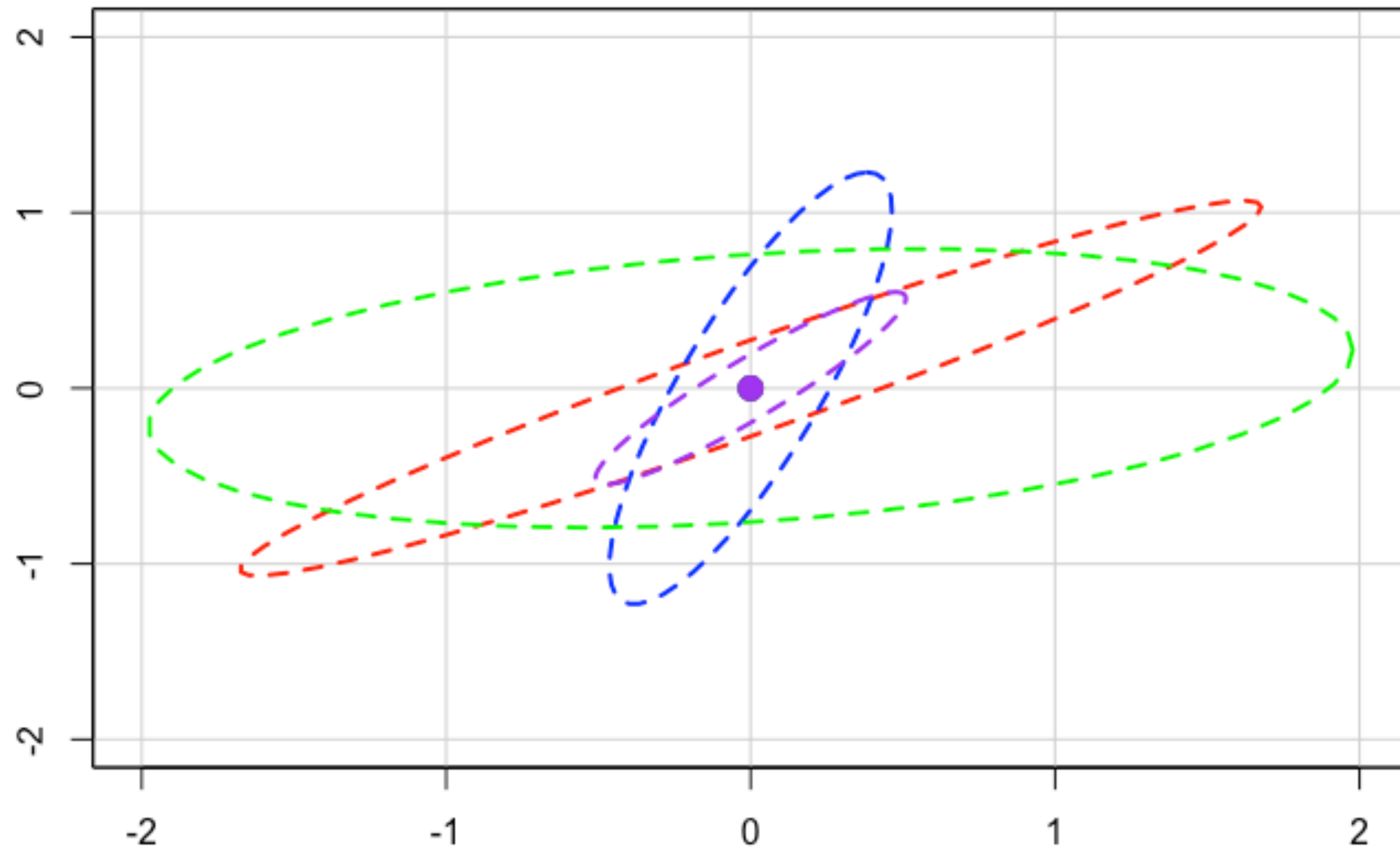
Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ y $\mathbf{A}_{p \times q}$ una matriz simétrica entonces $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \sim \sigma^2 \cdot \chi_r^2$ si y solo si \mathbf{A} es idempotente y con $\text{ran}(\mathbf{A}) = r$

Lema 3

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ y sean $\mathbf{Q}_i = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_i \mathbf{x} \sim \sigma^2 \cdot \chi_{r_i}^2$ ($i = 1, 2$) dos formas cuadráticas,.
Entonces \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 son independientes si y solo si $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$

Simulaciones

- En **R**: `rWishart`
- Para entender su aleatoriedad podemos graficar las elipses generadas: $\mathbf{a}^T \mathbf{M}_i \mathbf{a} = c$



Distribución Wishart no centrada

Definición 5 (Distribución Wishart no centrada)

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ vectores aleatorios independientes y distribuidos como $N_p(\mu_i, \Sigma)$, entonces $\mathbf{M}_{p \times p} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ tiene una distribución Wishart no centrada, $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma, \Delta)$, con n grados de libertad y matriz de no centralidad Δ definida como

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (\Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu_i)(\Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu_i)^T = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Lambda^T \Lambda \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

donde

$$\Lambda = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$$

Distribución T^2 de Hotelling

Distribución T^2 de Hotelling

Teorema 5 (Distribución centrada)

Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ independientes y no singulares, entonces,

$$T^2 = n(\mathbf{x} - \mu)^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \sim \left(\frac{np}{n - p + 1} \right) F_{p, n-p+1} = T_{p,n}^2$$

Corolario 5

Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \lambda^{-1}\Sigma)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ independientes y no singulares, entonces,

$$\lambda (\mathbf{x} - \mu)^T \left(\frac{\mathbf{M}}{n} \right)^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \sim T_{p,n}^2$$

Distribución T^2 de Hotelling

Teorema 6 (Distribución no centrada)

Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ independientes y no singulares, y denotemos por $\delta = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$ (parámetro de no centralidad), entonces,

$$T^2 = n\mathbf{x}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x} \sim \left(\frac{np}{n-p+1} \right) F_{p, n-p+1, \delta} = T_{p, n, \delta}^2$$

Estimación para la distribución normal multivariada

Estimación

Función de verosimilitud

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \sim N_p(\mu, \Sigma)$ (iid), entonces la log-verosimilitud

$$\log(L(\mu, \Sigma)) = -\frac{n}{2} \log(|2\pi\Sigma|) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu)$$

Proposición 7

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \sim N_p(\mu, \Sigma)$ (iid), con $n \geq p + 1$, entonces los estimadores máximo verosímiles están dados por

$$\hat{\mu} = \bar{x} \qquad \hat{\Sigma} = \frac{(n-1)}{n} \mathbf{S}$$

Estimación

Teorema 7

Sean $\bar{\mathbf{x}}$ y \mathbf{S} la media y matriz de varianzas muestrales de una distribución normal multivariada $N_p(\mu, \Sigma)$ con $(n - 1) \geq p$ entonces,

1. $\bar{\mathbf{x}} \sim N_p(\mu, n^{-1}\Sigma)$

2. $(n - 1)\mathbf{S} \sim W_p(n - 1, \Sigma)$

3. $\bar{\mathbf{x}}$ y \mathbf{S} son independientes

4. $n(\bar{\mathbf{x}} - \mu)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu) \sim T^2(p, n - 1)$

Prueba de hipótesis para μ

Prueba para μ (Σ conocida)

- Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \sim N_p(\mu, \Sigma)$ (iid) queremos hacer el siguiente contraste

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_a : \mu \neq \mu_0$$

- Usamos el estadístico de prueba

$$\xi^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)$$

- Bajo H_0 se tiene que $\xi^2 \sim \chi_p^2$

- Región de confianza $100(1 - \alpha) \%$ son las elipsoides

$$\left\{ \mathbf{x} : \xi^2 \leq \chi_{p,1-\alpha}^2 \right\}$$

Prueba para μ (Σ conocida)

Ejemplo

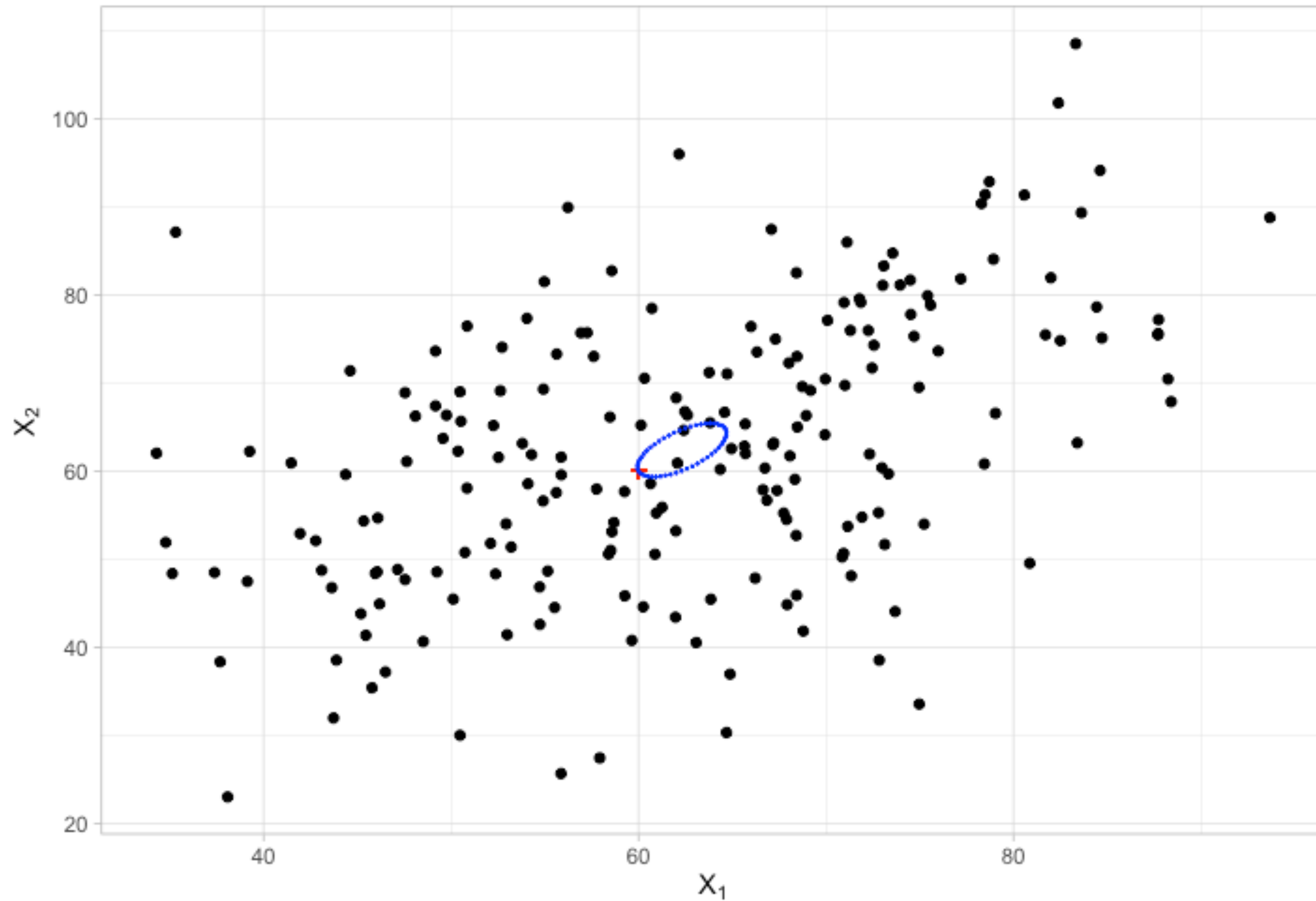
Dados $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{203} \sim N_2(\mu, \Sigma)$ (iid) con

$$\mu = \begin{pmatrix} 64.1 \\ 64.7 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 191 & 155.6 \\ 155.6 & 313.5 \end{pmatrix}.$$

Se busca contrastar,

$$H_0 : \mu = 60 \quad vs \quad H_a : \mu \neq 60$$

Prueba para μ (Σ conocida)



$$\xi^2 = 5.971581 < 5.991465 = \chi^2_{2,.95}$$

No rechazamos H_0

Prueba para μ (Σ desconocida)

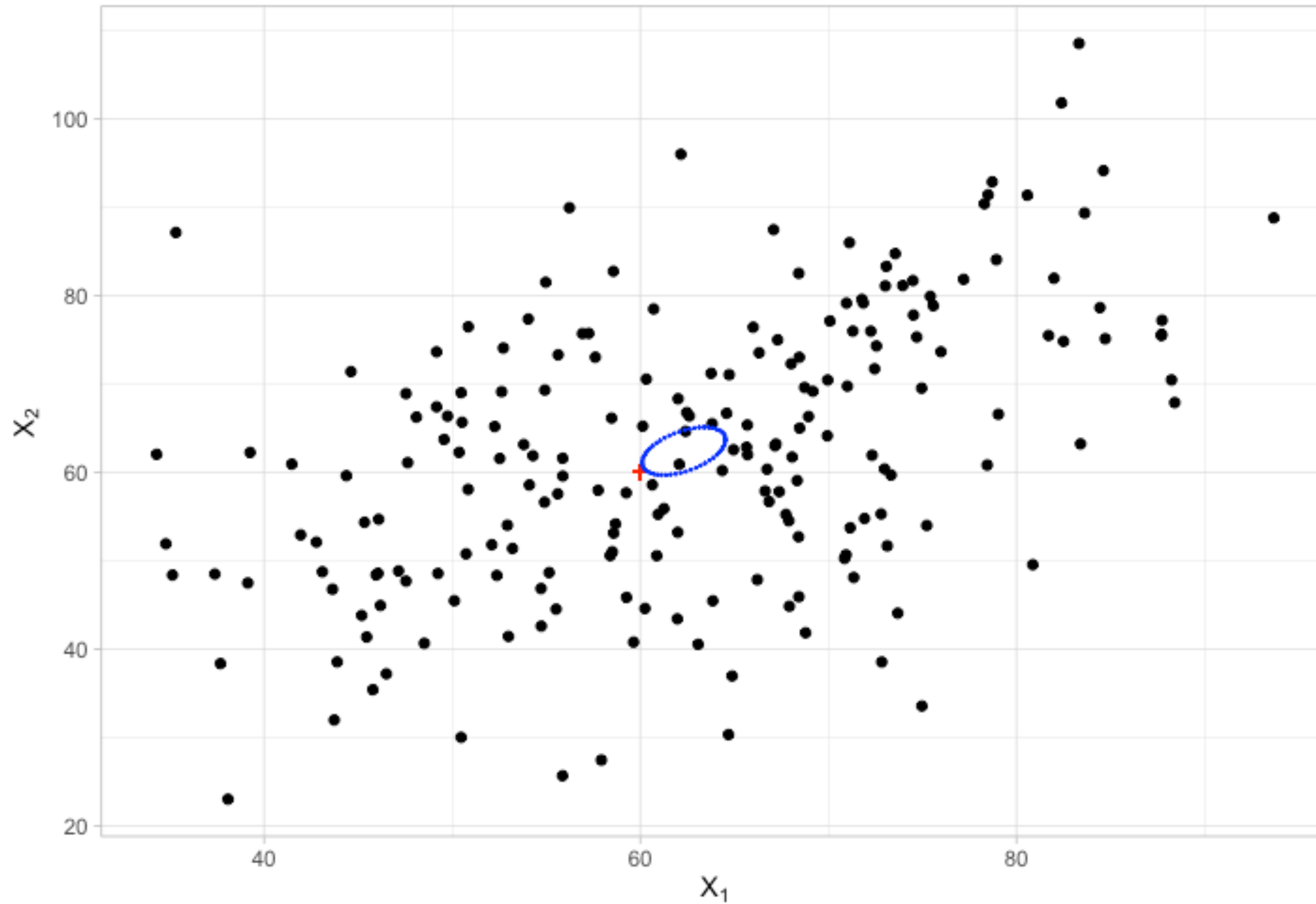
- ▶ Para una muestra, utilizamos \mathbf{S} para construir el estadístico de prueba

$$\gamma^2 = \frac{n(n-p)}{(n-1)p} (\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)$$

- ▶ Bajo H_0 se tiene $\gamma^2 \sim F_{p,n-p}$
- ▶ Región de confianza $100(1 - \alpha) \%$ son las elipsoides

$$\left\{ \mathbf{x} : \gamma^2 \leq F_{p,n-p,1-\alpha} \right\}$$

Prueba para μ (Σ desconocida)



$$\gamma^2 = 3.870381 > 3.013826 = F_{2,201,.95}$$

Rechazamos H_0

Pruebas de hipótesis para Σ

Pruebas para Σ

▸ Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \sim N_p(\mu, \Sigma)$ (iid) con $n \geq p + 1$ se pueden hacer las siguiente pruebas para Σ

1. Independencia por bloques, $H_0 : \Sigma_{rs} = \mathbf{0}$

2. Esfericidad

- Caso 1: $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ con σ^2 desconocida (esta prueba incluye a $\Sigma = \sigma^2 \Sigma_0$)

- Caso 2: $\Sigma = \mathbf{I}$ (esta prueba incluye a $\Sigma = \Sigma_0$)

3. Igualdad en los bloques diagonales, i.e., $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = \dots = \Sigma_{qq}$

4. Igualdad de varianzas y correlaciones

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Pruebas de hipótesis para dos poblaciones

Prueba de igualdad de covarianzas

- ▶ Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \sim N_p(\mu_1, \Sigma_1)$ (iid) y $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m \sim N_p(\mu_2, \Sigma_2)$ (iid)
- ▶ A través del cociente de verosimilitudes se obtiene el estadístico de prueba

$$\mathcal{L} = \frac{(n+m)^{\frac{(n+m)p}{2}}}{n^{\frac{np}{2}} m^{\frac{mp}{2}}} \frac{|\mathbf{Q}_1|^{\frac{n}{2}} |\mathbf{Q}_2|^{\frac{m}{2}}}{|\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2|^{\frac{n+m}{2}}}$$

- ▶ (Wilks, 1931) Asintóticamente se tiene que si H_0 es cierta entonces

$$-2 \log(\mathcal{L}) \sim \chi_\nu^2, \quad \nu = \frac{p(p+1)}{2}$$

Prueba de igualdad de medias (caso 1)

- $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ conocida y con muestras independientes
 - $\bar{\mathbf{x}} \sim N(\mu_1, n^{-1}\Sigma)$ es independiente de $\mathbf{Q}_1 = (n-1)\mathbf{S}_1 \sim W_p(n-1, \Sigma)$
 - $\bar{\mathbf{y}} \sim N(\mu_2, m^{-1}\Sigma)$ es independiente de $\mathbf{Q}_2 = (m-1)\mathbf{S}_2 \sim W_p(m-1, \Sigma)$
 - $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$, son independientes

Así,

$$\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}} \sim N_p\left(\mu_1 - \mu_2, \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \Sigma\right) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \sim W_p(n + m - 2, \Sigma)$$

- El estadístico de prueba es

$$\frac{nm(n+m-2)}{n+m} \left(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}} - (\mu_1 - \mu_2)\right)^T \mathbf{Q}^{-1} \left(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}} - (\mu_1 - \mu_2)\right) \sim T_{p, n+m-2}^2$$

Prueba de igualdad de medias (caso 2)

- $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$, desconocida y muestras independientes

Proposición 8

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \sim N_p(\mu_1, \Sigma_1)$ (iid) y $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m \sim N_p(\mu_2, \Sigma_2)$ (iid) si $\mu_1 = \mu_2$ y $\Sigma_1 = \Sigma_2$ entonces,

$$\frac{nm}{n+m}(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}_u^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}) \sim T^2(p, n+m-2)$$

donde

$$\mathbf{S}_u = \frac{n\mathbf{S}_1 + m\mathbf{S}_2}{n+m-2}$$

- Usamos el estadístico

$$\delta^2 = \frac{(n+m-p-1)nm}{(n+m-2)(n+m)}(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}_u^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}) \sim F_{p, n+m-p-1}$$

Prueba de igualdad de medias (caso 3)

- $m = n$ y $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ se reduce a considerar

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

donde

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 \quad \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

- Se hace el contraste de hipótesis para una población

$$H_0 : \mu = 0 \quad vs \quad H_a : \mu \neq 0$$

Prueba de igualdad de medias (caso 4)

▸ $m \neq n$ y $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ (problema de Behrens-Fisher)

- Se considera el estadístico

$$\mathcal{T} = (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T \left(\frac{\mathbf{S}_1}{n} + \frac{\mathbf{S}_2}{m} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})$$

- Bajo H_0 y para n y m suficientemente grandes

$$\mathcal{T} \sim \chi_p^2$$