

# Análisis Multivariado: Tarea 1

## Análisis Descriptivo de Datos Multivariados

Fecha de entrega: 8 de septiembre

1. (1 punto) Para un punto  $\mathbf{x}$  en  $\mathbb{R}^p$ , con  $p > 1$ , considerar para  $t \in [-\pi, \pi]$  el mapeo  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , definido como:

$$f_{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \frac{x_1}{\sqrt{2}} + x_2 \sin(t) + x_3 \cos(t) + x_4 \sin(2t) + x_5 \cos(2t) + \cdots + x_n \sin\left(\frac{p}{2}t\right) & \text{si } p \text{ es par} \\ \frac{x_1}{\sqrt{2}} + x_2 \sin(t) + x_3 \cos(t) + x_4 \sin(2t) + x_5 \cos(2t) + \cdots + x_n \cos\left(\frac{(p-1)}{2}t\right) & \text{si } p \text{ es impar} \end{cases}$$

Mostrar lo siguiente:

- i. La transformación preserva medias, esto es,

$$f_{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_{\mathbf{x}_i}(t)$$

- ii. Para dos puntos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  en  $\mathbb{R}^p$ , se cumple que

$$\|f_{\mathbf{x}}(t) - f_{\mathbf{y}}(t)\|_{L_2} = \int_{-\pi}^{\pi} [f_{\mathbf{x}}(t) - f_{\mathbf{y}}(t)]^2 dt = \pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

¿Cómo se relaciona esta propiedad con la identificación de clusters y outliers?

- iii. Asumiendo no correlación y varianza constante,  $\sigma^2$ , demuestra que para  $p$  impar,

$$\text{Var}(f_{\mathbf{x}}(t)) = \sigma^2 \left( \frac{p}{2} \right),$$

y para  $p$  par, i.e.  $p = 2r$ , se cumple que,

$$\sigma^2 \left( r - \frac{1}{2} \right) \leq \text{Var}(f_{\mathbf{x}}(t)) \leq \sigma^2 \left( r + \frac{1}{2} \right),$$

¿Qué puedes concluir sobre la varianza? ¿Qué tan adecuados son los supuestos para datos multivariados?

2. (1 punto) Mostrar que si  $\mathbf{H}_n$  es la matriz de centrado definida como,

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{I}_{n \times n} - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T$$

entonces,

- i.  $\mathbf{H}_n$  es simétrica
- ii.  $\mathbf{H}_n$  es idempotente
- iii. Para una matriz de datos  $\mathbf{X}_{n \times p}$ , la media muestral de  $\mathbf{W} = \mathbf{H}_n \mathbf{X}$  es el vector  $\mathbf{0}_p$ ,
- iv. La matriz de varianza y covarianza muestral de  $\mathbf{X}$ , se puede escribir como,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{H}_n \mathbf{X}).$$

3. (1 punto) Sea  $\mathbf{B}$  una matriz cuadrada, tal que  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , donde  $\mathbf{A}_{n \times p}$ , entonces:

- i.  $\mathbf{B}$  es simétrica
- ii.  $\mathbf{B}$  es semidefinida positiva.

Utilizando este resultado justifica y concluye que la matriz de varianza y covarianza muestral y la matriz de correlación muestral son semidefinidas positivas.

4. (1 punto) Mostrar que si  $\mathbf{x}$  es un vector  $p$ -variado donde,  $\Sigma = \text{Var}(\mathbf{x})$ , entonces  $\text{Det}(\Sigma) \geq 0$ .
5. (1 punto) Sean  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  dos vectores aleatorios independientes. Demostrar que para constantes reales  $\alpha$  y  $\beta$  se tiene que,

$$\text{Var}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha^2 \text{Var}(\mathbf{x}) + \beta^2 \text{Var}(\mathbf{y}).$$

¿Cuál sería la fórmula en el caso de que no fueran independientes? Expresa la respuesta en términos de  $\text{Var}(\mathbf{x})$ ,  $\text{Var}(\mathbf{y})$  y  $\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

6. (1 punto) Sea  $\mathbf{X}_{n \times p}$  una matriz de datos. Considera la transformación,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{A}^T + \mathbf{1}_n \mathbf{b}^T,$$

donde  $\mathbf{A}_{q \times p}$  y  $\mathbf{b}_{q \times 1}$  son constantes. Mostrar que

$$\mathbf{S}_Y = \mathbf{A} \mathbf{S}_X \mathbf{A}^T.$$

7. (1 punto) Para una matriz de datos,  $\mathbf{X}$ , considera las siguientes dos transformaciones,

i.  $\mathbf{Y} = \mathbf{H}_n \mathbf{X} \mathbf{D}^{-1}$

ii.  $\mathbf{Z} = \mathbf{H}_n \mathbf{X} \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}$ ,

donde  $\mathbf{S}$  es la matriz de varianza y covarianza muestral y  $\mathbf{D} = \text{diag}(s_1, \dots, s_p)$ . Obtener la esperanza y varianza de  $\mathbf{Y}$  y de  $\mathbf{Z}$ . ¿En qué difieren estas dos transformaciones?

8. (1 punto) Para un vector aleatorio  $\mathbf{x}$ , tal que  $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \mu$  y  $\text{Var}(\mathbf{x}) = \Sigma$ , definimos a las medidas de asimetría y curtosis respectivamente como:

$$\begin{aligned}\beta_{1,p} &= \mathbb{E} [(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mu)]^3 \\ \beta_{2,p} &= \mathbb{E} [(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)]^2,\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son independientes e idénticamente distribuidos. Mostrar que estas medidas son invariantes ante transformaciones lineales.

9. (1 punto) El archivo *wine.txt* contiene 13 variables numéricas derivadas de un análisis químico en vinos de Italia de tres viñedos diferentes. Realizar un análisis descriptivo multivariado de los datos.

10. (1 punto) El archivo *Diabetes.txt* contiene 5 mediciones relacionadas con la diabetes de 145 adultos. Realiza un análisis descriptivo de estos datos. ¿Puedes identificar clusters, outliers y/o variables importantes?