Distribución Normal Multivariada

José A. Perusquía Cortés

Análisis Multivariado Semestre 2023-2

Distribución Normal Univariada

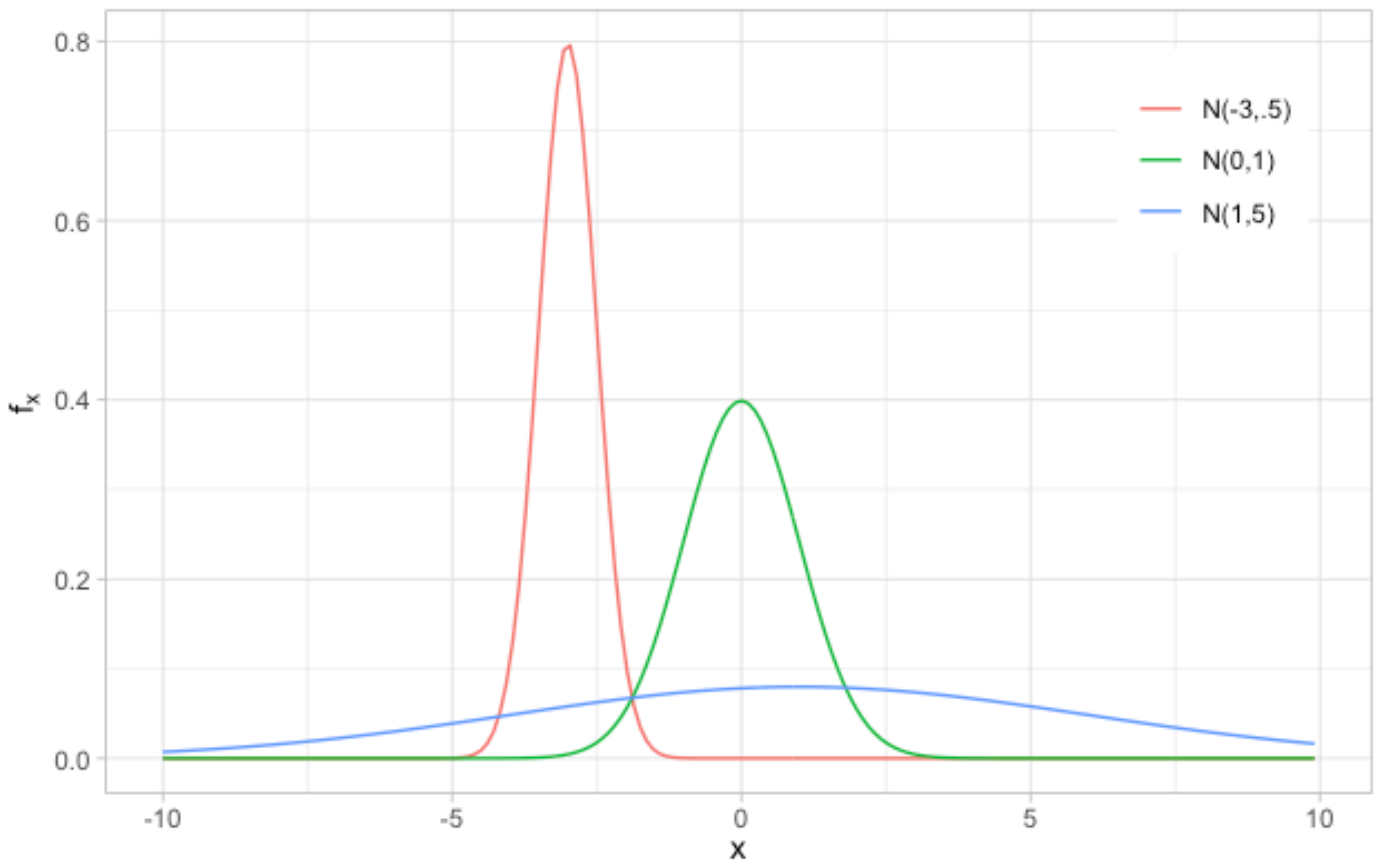
Distribución Normal Univariada

- Decimos que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$$

- Donde
  - $\mathbb{E}(X) = \mu \in \mathbb{R}$ (parámetro de localización)
  - $Var(X) = \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ (parámetro de escala)

Distribución Normal Univariada



Distribución Normal Multivariada

Distribución Normal Multivariada

- Decimos que $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ (no singular) si tiene función de densidad

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|2\pi\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\right]$$

- Donde
  - $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \mu$
  - $Var(\mathbf{x}) = \Sigma > 0$ (positiva definida)

Distribución Normal Multivariada

- Para variables normales multivariadas en **R** podemos usar la librería mvtnorm

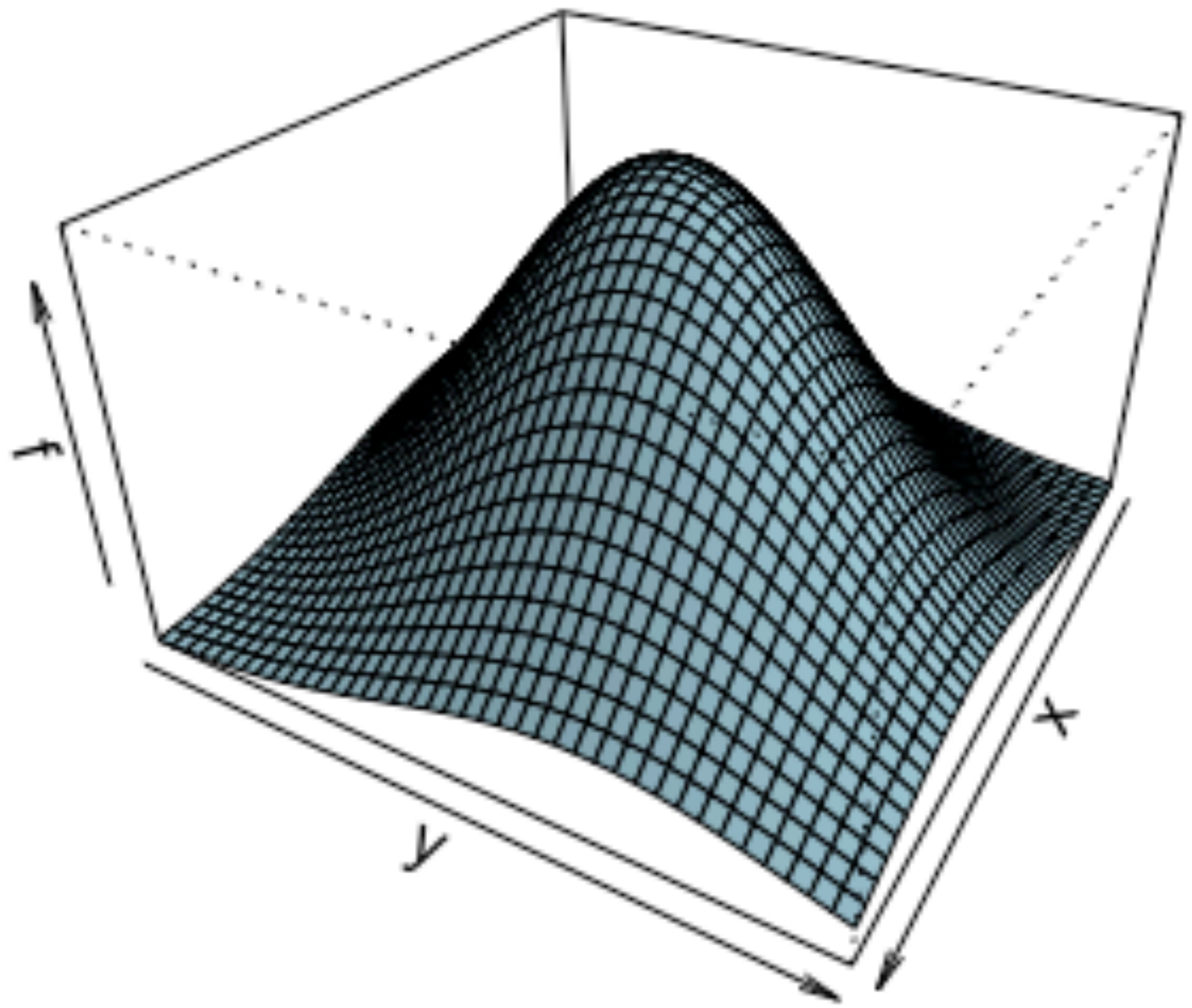
  - dmvnorm() : Evaluar la densidad.
  - pmvnorm() : Evaluar la distribución.
  - qmvnorm() : Obtener los cuantiles.
  - rmvnomr() : Obtener una muestra.

- Por ejemplo, para dibujar la densidad

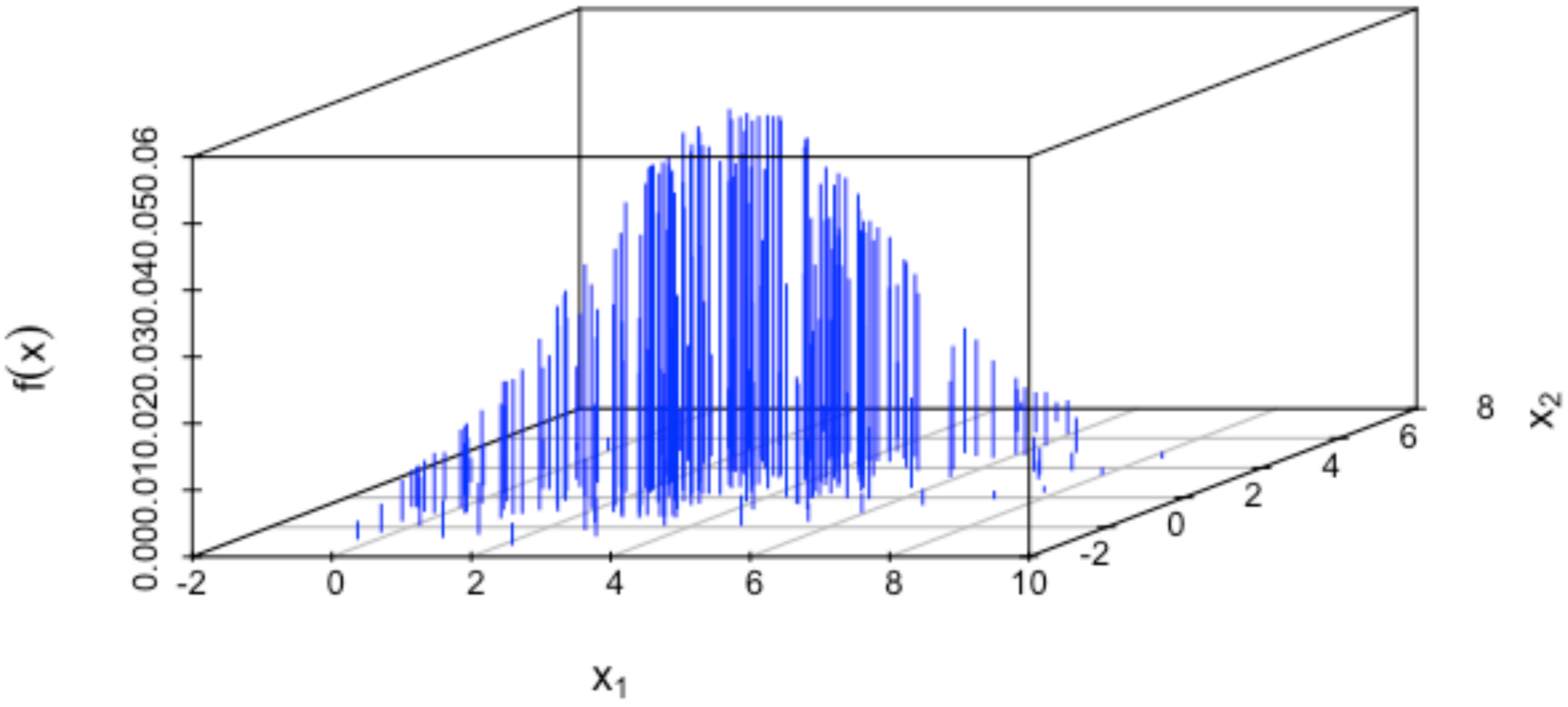
$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Creamos un grid expand.grid()
- Evaluamos la densidad en el grid con dmvnorm(grid, mu, sigma)
- Convertimos a una matriz el resultado anterior
- Graficamos con persp()

Distribución Normal Multivariada



- Para datos bivariados también se puede crear un scatterplot en 3D con librería scatterplot3d



- Si $\text{ran}(\Sigma) = k < p$ podemos definir la densidad (singular) como

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi)^{-\frac{k}{2}}}{(\lambda_1 \cdots \lambda_k)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^- (\mathbf{x}-\mu)\right]$$

- Donde
  - $\mathbf{x}$ vive en el híperplano $\mathbf{N}'(\mathbf{x}-\mu)$ donde $\mathbf{N}$ es una matriz de tamaño $p \times (p-k)$ tal que $\mathbf{N}^T\Sigma = \mathbf{0}, \mathbf{N}^T\mathbf{N} = \mathbf{I_{p-k}}$
  - Σ^- es la inversa generalizada y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son los eigenvalores diferentes de cero.

- **Definición.**

  Decimos que $\mathbf{x}$ tiene una distribución normal p-variada si y solo si $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$ tiene una distribución normal univariada para todos los vectores p-variados (no triviales) $\mathbf{a}$

- **Definición.**

  Decimos que $\mathbf{x}$ tiene una distribución normal p-variada si y solo si $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$ tiene una distribución normal univariada para todos los vectores p-variados (no triviales) $\mathbf{a}$

- **Proposición 1**

  Sea $\mathbf{x}$ un vector normal p-variado y definamos a $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ donde $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensión $q \times p$. Entonces $\mathbf{y}$ tiene una distribución normal q-variada tal que

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mu + \mathbf{b} \qquad\qquad Var(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T$$

- **Corolario 1**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$ y definamos a $\mathbf{y} = \Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{x} + \mu$ entonces $\mathbf{y} \sim N_p(\mu, \Sigma)$

- **Corolario 1**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$ y definamos a $\mathbf{y} = \Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{x} + \mu$ entonces $\mathbf{y} \sim N_p(\mu, \Sigma)$

- **Corolario 2**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ $(\Sigma > 0)$ y definamos a $\mathbf{y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \mu)$ donde $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ es la matrix raíz cuadrada de Σ^{-1}. Entonces $y_1, y_2, \ldots, y_p$ son variables aleatorias iid $N(0,1)$.

- **Corolario 1**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$ y definamos a $\mathbf{y} = \Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{x} + \mu$ entonces $\mathbf{y} \sim N_p(\mu, \Sigma)$

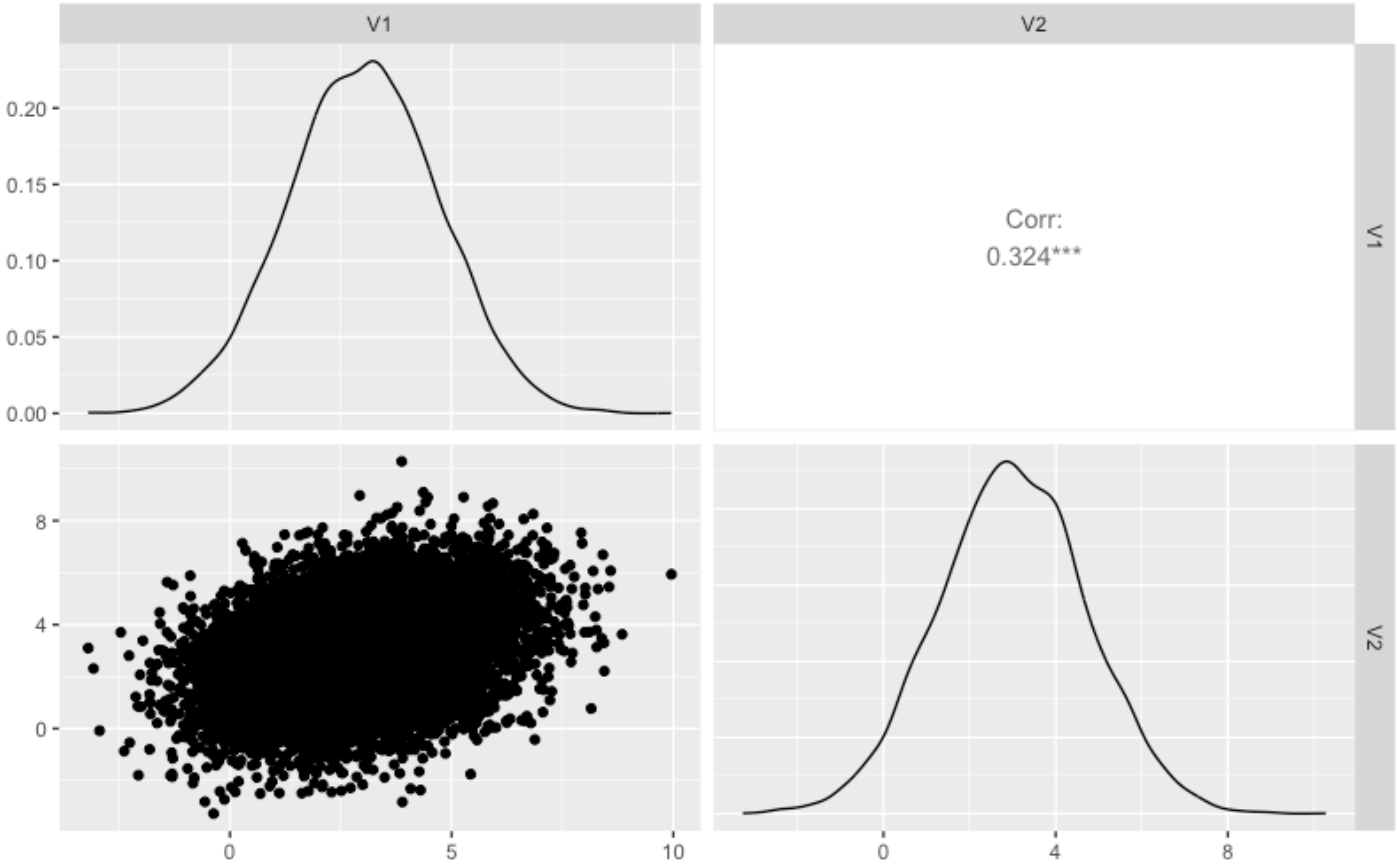
- **Corolario 2**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ $(\Sigma > 0)$ y definamos a $\mathbf{y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \mu)$ donde $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ es la matrix raíz cuadrada de Σ^{-1}. Entonces $y_1, y_2, \ldots, y_p$ son variables aleatorias iid $N(0,1)$.

- En **R** la librería expm proporciona la función requerida para obtener $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ con sqrtm()

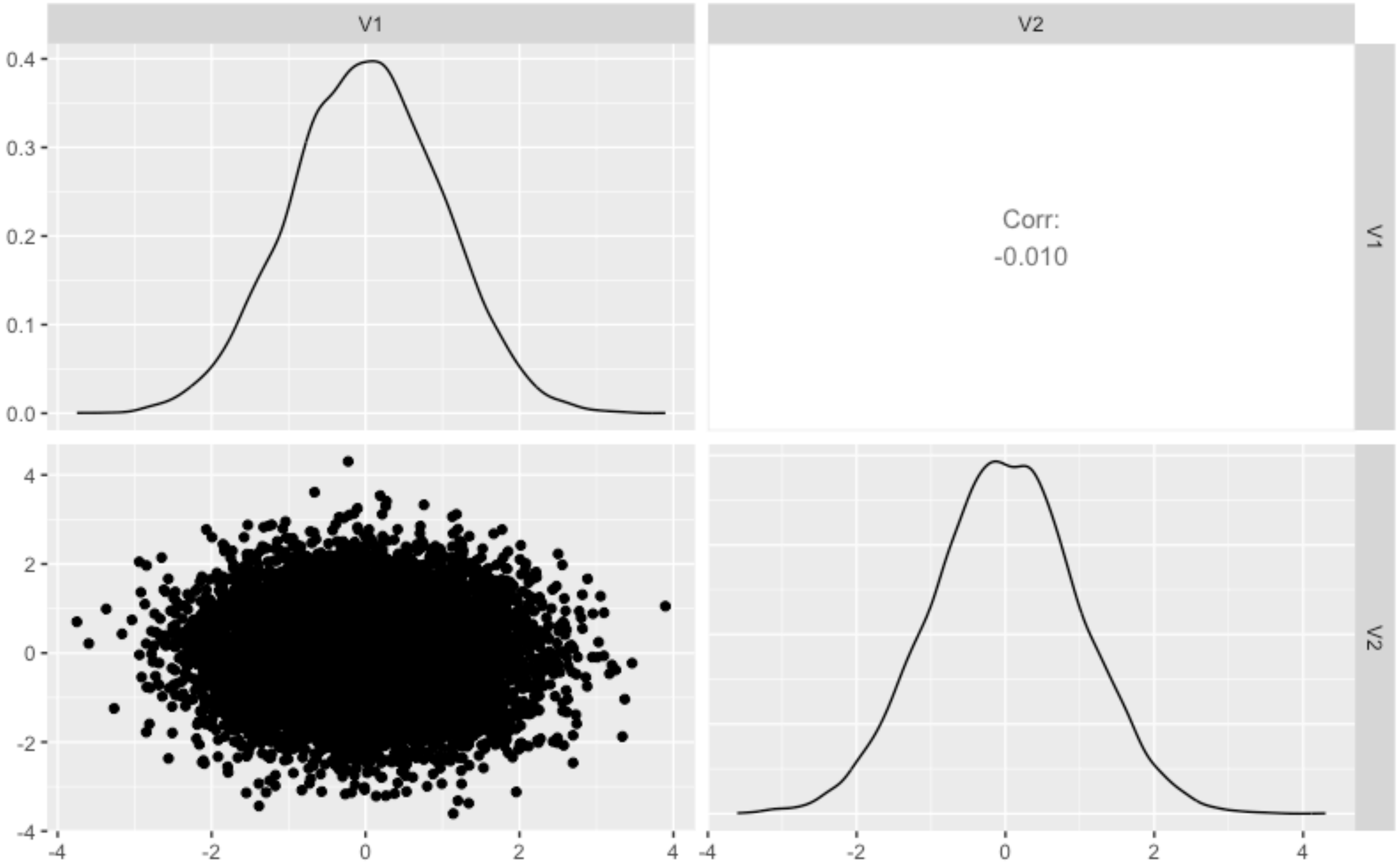
Distribución Normal Multivariada

$$\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma) \qquad \mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$



Distribución Normal Multivariada

$$\mathbf{y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \mu)$$



- **Observación**

La distribución normal multivariada tiene densidad constante en elipses (elipsoides)

$$(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) = k$$

- **Observación**

  La distribución normal multivariada tiene densidad constante en elipses (elipsoides)

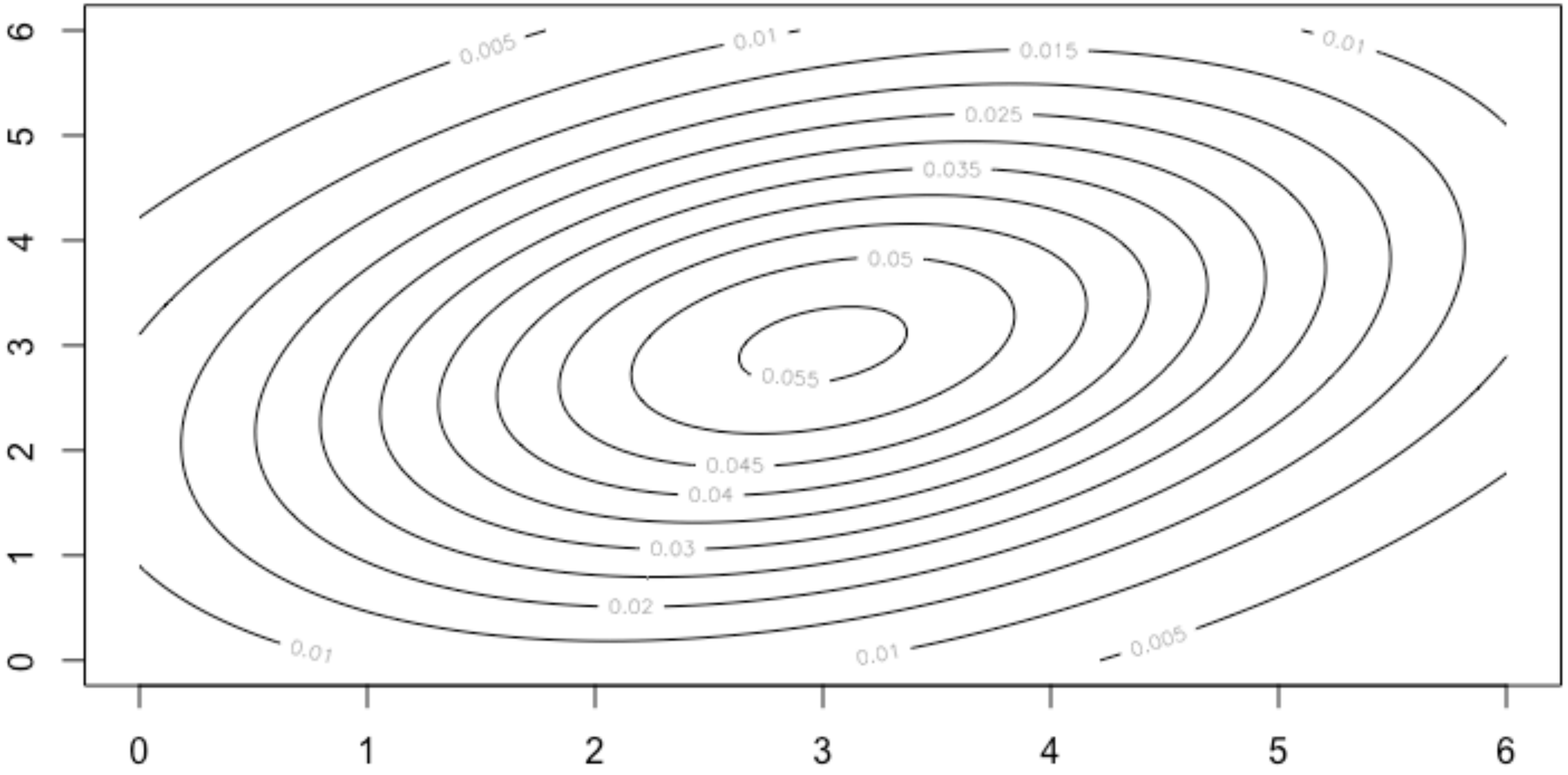
$$(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)=k$$

- En **R** podemos graficar las curvas mediante la función contour()

  - Generar vectores x, y donde evaluar la densidad (e.g. x=seq(0,6,length.out=40) , y =seq(0,6,length.out=40))

  - Evaluar la densidad en estos puntos con z=dmvnorm()

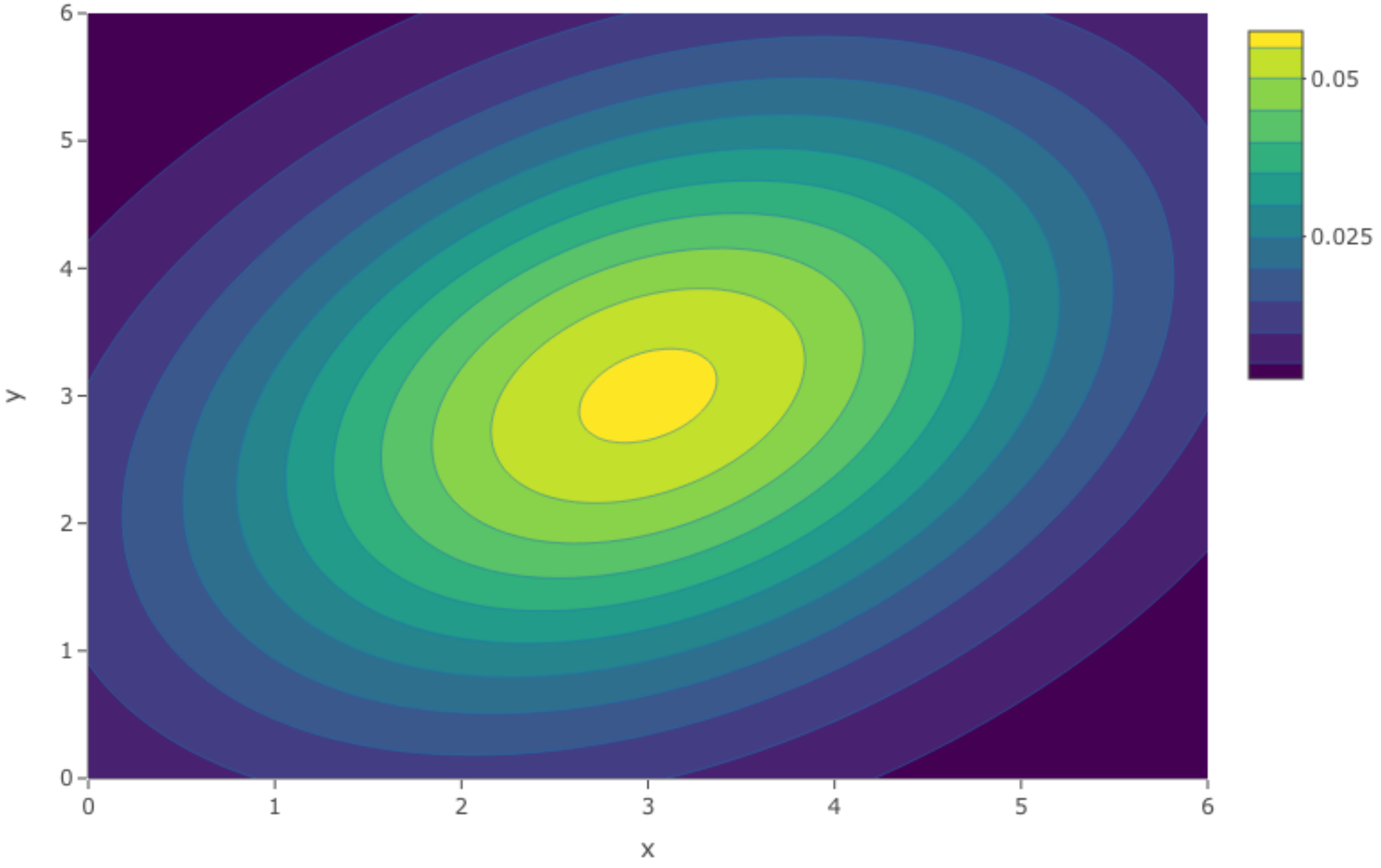
  - Usar la función contour(x,y,z)


0.005
0.01
0.015
0.01
0.025
0.035
0.05
0.055
0.045
0.04
0.03
0.02
0.01
0.01
0.005
0
1
2
3
4
5
6
0
1
2
3
4
5
6

Distribución Normal Multivariada

- Otra alternativa es usar la librería plotly para una gráfica más interactiva
  - Generar vectores x, y donde evaluar la densidad (e.g. x=seq(0,6,length.out=40) , y =seq(0,6,length.out=40))
  - Evaluar la densidad en estos puntos con z=dmvnorm()
  - Usar la función plot_ly(x,y,z,type = "contour")

Distribución Normal Multivariada



- **Proposición 2**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ entonces $U = (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \sim \chi^2_p$.

- **Proposición 2**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ entonces $U = (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \sim \chi_p^2$.

- **Observación**

  Podemos fácilmente evaluar la probabilidad de que $\mathbf{x}$ este en un elipsoide, i.e.

$$\mathbb{P}[(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) < k]$$

- **Proposición 3 (Otras propiedades)**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y sea

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces

1. Cualquier subconjunto de $\mathbf{x}$ se distribuye normal multivariado. En particular $\mathbf{x}^{(1)} \sim N_p(\mu^{(1)}, \Sigma_{11})$.

- **Proposición 3 (Otras propiedades)**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y sea

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces

1. Cualquier subconjunto de $\mathbf{x}$ se distribuye normal multivariado. En particular $\mathbf{x}^{(1)} \sim N_p(\mu^{(1)}, \Sigma_{11})$.
2. $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son independientes si y solo si $Cov(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = \mathbf{O}$.

- **Proposición 3 (Otras propiedades)**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y sea

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces

1. Cualquier subconjunto de $\mathbf{x}$ se distribuye normal multivariado. En particular $\mathbf{x}^{(1)} \sim N_p(\mu^{(1)}, \Sigma_{11})$.
2. $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son independientes si y solo si $Cov(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = \mathbf{O}$.
3. $\mathbf{x}^T\Sigma^{-1}\mathbf{x} \sim \chi_p^2(\mu^T\Sigma^{-1}\mu)$ (Tarea)

- **Proposición 3 (Otras propiedades)**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y sea

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces

1. Cualquier subconjunto de $\mathbf{x}$ se distribuye normal multivariado. En particular $\mathbf{x}^{(\mathbf{1})} \sim N_p(\mu^{(1)}, \Sigma_{11})$.
2. $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son independientes si y solo si $Cov(\mathbf{x}^{(\mathbf{1})}, \mathbf{x}^{(\mathbf{2})}) = \mathbf{O}$.
3. $\mathbf{x}^T\Sigma^{-1}\mathbf{x} \sim \chi_p^2(\mu^T\Sigma^{-1}\mu)$ (Tarea)
4. $\mathbf{x}^{(2)} \,|\, \mathbf{x}^{(1)} \sim N_{p-k}\left(\mu^{(2)} + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}[\mathbf{x}^{(1)} - \mu^{(1)}], \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)$

- **Teorema (Teorema Central del Límite)**

  Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \in \mathbb{R}^p$ vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos con media μ y matriz (finita) de varianza Σ. Entonces se tiene que

$$\sqrt{n}(\bar{\mathbf{x}} - \mu) \to N_p(\mathbf{0}_p, \Sigma)$$

- **Definición**

  Sea $\mathbf{x}$ un vector p-variado. Entonces la función característica está definida para $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$ como

$$\phi(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[\exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{x})] = \int \exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

- **Definición**

  Sea $\mathbf{x}$ un vector p-variado. Entonces la función característica está definida para $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$ como

$$\phi(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[\exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{x})] = \int \exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- **Propiedades (algunas)**

  - $\phi(\mathbf{t})$ siempre existe, $\phi(\mathbf{0}) = 1$ y $|\phi(\mathbf{t})| \leq 1$.

- **Definición**

  Sea $\mathbf{x}$ un vector p-variado. Entonces la función característica está definida para $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$ como

$$\phi(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[\exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{x})] = \int \exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

- **Propiedades (algunas)**

  - $\phi(\mathbf{t})$ siempre existe, $\phi(\mathbf{0}) = 1$ y $|\phi(\mathbf{t})| \leq 1$.

  - (Teorema de unicidad) $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{t})$

- **Definición**

  Sea $\mathbf{x}$ un vector p-variado. Entonces la función característica está definida para $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$ como

$$\phi(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[\exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{x})] = \int \exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

- **Propiedades (algunas)**

  - $\phi(\mathbf{t})$ siempre existe, $\phi(\mathbf{0}) = 1$ y $|\phi(\mathbf{t})| \leq 1$.
  - (Teorema de unicidad) $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{t})$
  - (Teorema de inversión) Si $\phi(\mathbf{t})$ es absolutamente integrable entonces $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{(2\pi)^p}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp[-i\mathbf{t}^T\mathbf{x}]\phi(\mathbf{t})d\mathbf{t}$

Función Característica

- **Definición**

  Sea $\mathbf{x}$ un vector p-variado. Entonces la función característica está definida para $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$ como

$$\phi(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[\exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{x})] = \int \exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

- **Propiedades (algunas)**

  - $\phi(\mathbf{t})$ siempre existe, $\phi(\mathbf{0}) = 1$ y $|\phi(\mathbf{t})| \leq 1$.
  - (Teorema de unicidad) $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{t})$
  - (Teorema de inversión) Si $\phi(\mathbf{t})$ es absolutamente integrable entonces $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{(2\pi)^p}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp[-i\mathbf{t}^T\mathbf{x}]\phi(\mathbf{t})d\mathbf{t}$
  - $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ son independientes si y solo si $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \phi_{\mathbf{x}^{(1)}}(\mathbf{t}^{(1)})\phi_{\mathbf{x}^{(2)}}(\mathbf{t}^{(2)})$

- **Definición**

Sea $\mathbf{x}$ un vector p-variado. Entonces la función característica está definida para $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$ como

$$\phi(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[\exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{x})] = \int \exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

- **Propiedades (algunas)**

- $\phi(\mathbf{t})$ siempre existe, $\phi(\mathbf{0}) = 1$ y $|\phi(\mathbf{t})| \leq 1$.
- (Teorema de unicidad) $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{t})$
- (Teorema de inversión) Si $\phi(\mathbf{t})$ es absolutamente integrable entonces $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{(2\pi)^p}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp[-i\mathbf{t}^T\mathbf{x}]\phi(\mathbf{t})d\mathbf{t}$
- $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ son independientes si y solo si $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \phi_{\mathbf{x}^{(1)}}(\mathbf{t}^{(1)})\phi_{\mathbf{x}^{(2)}}(\mathbf{t}^{(2)})$
- $\phi_{\mathbf{x}^{(1)}}(\mathbf{t}^{(1)}) = \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{0})$

- **Teorema (Crámer-Wold)**

  La distribución de un vector aleatorio p-variado $\mathbf{x}$ está completamente determinado por el conjunto de todas las distribuciones de combinaciones lineales $\mathbf{t}^T\mathbf{x}$, con $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$

- **Proposición 4**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ entonces

$$\phi(\mathbf{t}) = \exp\left(i\mathbf{t}^T\mu - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}\right)$$

- **Proposición 5 (Asimetría y Curtosis)**

  Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ entonces los coeficientes de asimetría y curtosis están dados respectivamente por

$$\beta_{1,p} = 0$$

$$\beta_{2,p} = p(p+2)$$

- **Checar normalidad**

- **Checar normalidad**
  - Todas las distribuciones univariadas son normales
    - qqplot
    - histogramas
    - Pruebas de normalidad (e.g. Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Lilliefors, etc.)

- **Checar normalidad**
  - Todas las distribuciones univariadas son normales
    - qqplot
    - histogramas
    - Pruebas de normalidad (e.g. Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Lilliefors, etc.)
  - Prueba basada en los coeficientes de asimetría y curtosis (Prueba de Mardia)

- **Checar normalidad**
  - Todas las distribuciones univariadas son normales
    * qqplot
    * histogramas
    * Pruebas de normalidad (e.g. Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Lilliefors, etc.)
  - Prueba basada en los coeficientes de asimetría y curtosis (Prueba de Mardia)
  - $(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu) \sim \chi^2_p$
    * qqplot

- **Checar normalidad**
  - Todas las distribuciones univariadas son normales
    - qqplot
    - histogramas
    - Pruebas de normalidad (e.g. Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Lilliefors, etc.)
  - Prueba basada en los coeficientes de asimetría y curtosis (Prueba de Mardia)
  - $(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu) \sim \chi_p^2$
    - qqplot
  - Otras pruebas de normalidad multivariadas

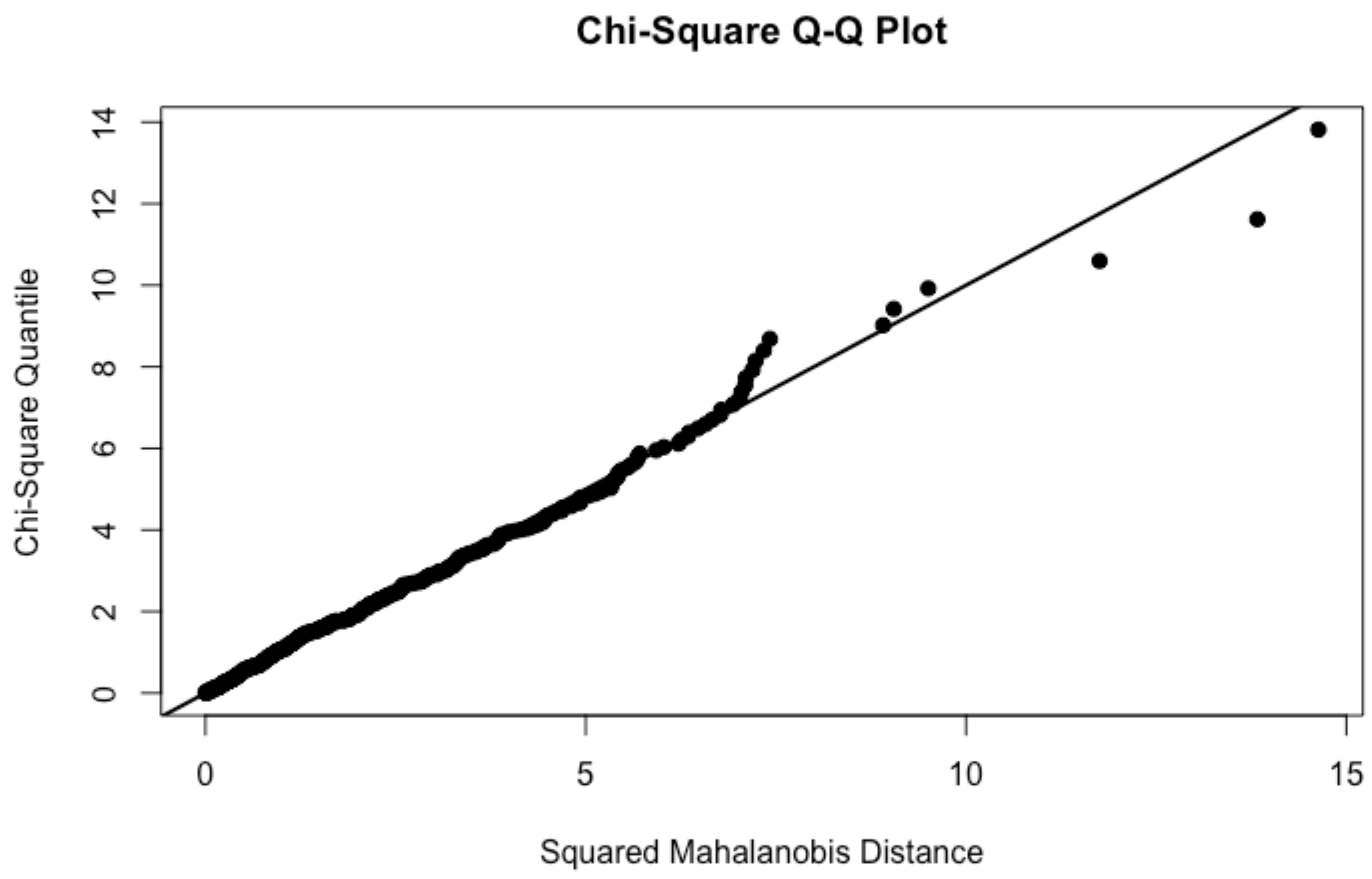
Distribución Normal Multivariada

- En **R** la librería mvn provee todas las herramientas esto

```
mvn(multnorm.sample,mvnTest="mardia",multivariatePlot = "qq")
```

```
$multivariateNormality
             Test        Statistic           p value Result
1 Mardia Skewness 3.47421629178296 0.481809628750315    YES
2 Mardia Kurtosis 0.29380065853414 0.768910231846389    YES
3             MVN             <NA>              <NA>    YES

$univariateNormality
              Test  Variable Statistic   p value Normality
1 Anderson-Darling  Column1     0.3285    0.5161    YES
2 Anderson-Darling  Column2     0.2388    0.7793    YES
```

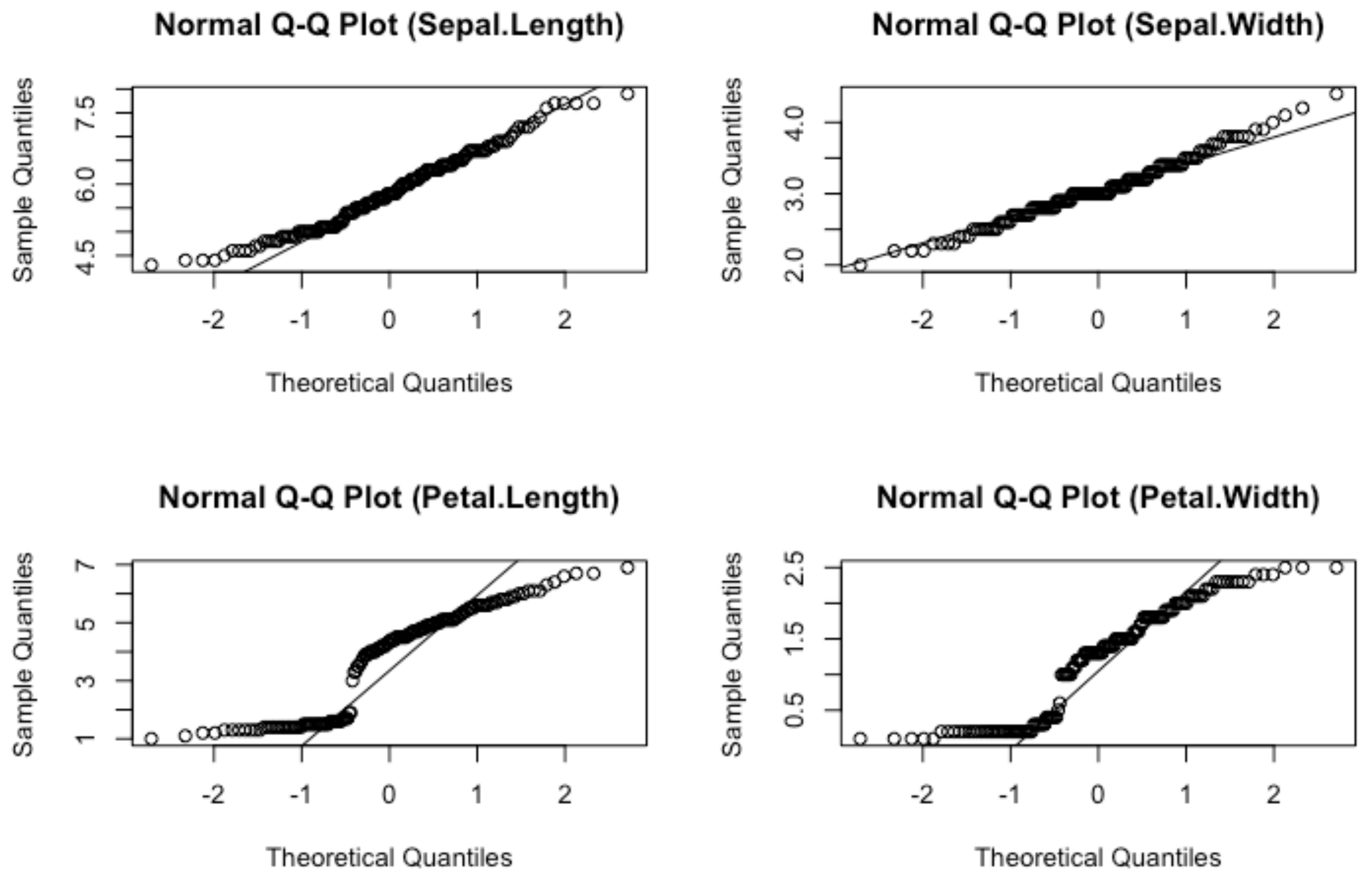


Distribución Normal Multivariada

mvn(iris[,-5],mvnTest="mardia",univariatePlot = "qqplot")

```
$multivariateNormality
             Test          Statistic              p value Result
1 Mardia Skewness   67.4305087780629 4.75799820400705e-07     NO
2 Mardia Kurtosis -0.230112114480775    0.818004651478188    YES
3             MVN               <NA>                 <NA>     NO

$univariateNormality
              Test     Variable Statistic   p value Normality
1 Anderson-Darling Sepal.Length    0.8892  0.0225      NO
2 Anderson-Darling Sepal.Width     0.9080  0.0202      NO
3 Anderson-Darling Petal.Length    7.6785  <0.001      NO
4 Anderson-Darling Petal.Width     5.1057  <0.001      NO
```



Distribuciones Asociadas a la Normal Multivariada

Distribución Wishart

- **Definición**

  Sea $\mathbf{M}_{p\times p}$ una matriz simétrica de variables aleatorias tal que $\mathbb{P}(\mathbf{M} > 0) = 1$ y $\Sigma_{p\times p}$ una matriz definida positiva. Si $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p$, entonces $\mathbf{M}_{p\times p}$ tiene una distribución Wishart ($\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$) no singular con n grados de libertad si la función de densidad de los $\dfrac{p(p+1)}{2}$ distintos elementos de $\mathbf{M}_{p\times p}$ está dada por

$$f(m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{pp}) = c^{-1}|\mathbf{M}|^{(n-p-1)/2}\operatorname{etr}\left(-\frac{\Sigma^{-1}\mathbf{M}}{2}\right)$$

- Donde
  - etr es el operador $\exp^{\text{trace}}$
  - $c = 2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)$ y $\Gamma_p(\cdot)$ la función gamma multivariada.

- **Definición 2**

  Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vectors aleatorios iid distribuidos como $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ entonces $\mathbf{M}_{p\times p} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ tiene una distribución Wishart con n grados de libertad.

- **Definición 2**

  Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vectors aleatorios iid distribuidos como $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ entonces $\mathbf{M}_{p\times p} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ tiene una distribución Wishart con n grados de libertad.

- **Observación**

  Si $\Sigma > 0$ y $n \geq p$ entonces se puede probar que $\mathbb{P}(\mathbf{M} > 0) = 1$. De lo contrario se tiene que $\mathbf{M} \geq 0$, por lo que la densidad no existe y se dice que $\mathbf{M}$ tiene una distribución singular.

- **Teorema**

  Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces, si $\mathbf{C}_{q\times p}$ tal que $\text{ran}(C) = q$ se tiene que $\mathbf{CMC^T} \sim W_p(n, C\Sigma C^T)$.

- **Teorema**

  Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces, si $\mathbf{C}_{q\times p}$ tal que $\text{ran}(C) = q$ se tiene que $\mathbf{CMC^T} \sim W_p(n, C\Sigma C^T)$.

- **Corolario 1**

  Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ y $\mathbf{a}$ es un vector de constantes, entonces $\mathbf{a^TMa} \sim \sigma_{\mathbf{a}}^2\chi_n^2$ donde $\sigma_{\mathbf{a}}^2 = \mathbf{a^T\Sigma a}$.

- **Teorema**

  Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces, si $\mathbf{C}_{q \times p}$ tal que $\text{ran}(C) = q$ se tiene que $\mathbf{CMC^T} \sim W_p(n, C\Sigma C^T)$.

- **Corolario 1**

  Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ y $\mathbf{a}$ es un vector de constantes, entonces $\mathbf{a^T M a} \sim \sigma_{\mathbf{a}}^2 \chi_n^2$ donde $\sigma_{\mathbf{a}}^2 = \mathbf{a^T \Sigma a}$.

- **Corolario 2**

  Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces $m_{i,i} \sim \Sigma_{i,i} \chi_n^2$

- **(Algunas) Propiedades**

  Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces

  1. $\mathbb{E}(\mathbf{M}) = n\Sigma$

- **(Algunas) Propiedades**

  Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces

  1. $\mathbb{E}(\mathbf{M}) = n\Sigma$

  2. (Aditividad) Si $\mathbf{M}_i \sim W_p(n_i, \Sigma)$ independientes entonces, $\sum_{i=1}^{m} \mathbf{M}_i \sim W_p\left(\sum_{i=1}^{m} n_i, \Sigma\right)$

- **(Algunas) Propiedades**

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces

1. $\mathbb{E}(\mathbf{M}) = n\Sigma$

2. (Aditividad) Si $\mathbf{M}_i \sim W_p(n_i, \Sigma)$ independientes entonces, $\sum_{i=1}^{m} \mathbf{M}_i \sim W_p\left(\sum_{i=1}^{m} n_i, \Sigma\right)$

3. Si partimos a $\mathbf{M}$ y a Σ como

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

entonces $\mathbf{M}_{11} \sim W_k(n, \Sigma_{11})$ y $\mathbf{M}_{22} \sim W_{p-k}(n, \Sigma_{22})$. Más aún si $\Sigma_{12} = 0$, entonces son independientes.

- **Teorema (Otras formas cuadráticas)**

  Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$, entonces

  1. Si $\text{ran}(\mathbf{A}_{q \times p}) = q$ entonces $(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{-1} \sim W_q\left(n - p + q, (\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}^{T})^{-1}\right)$ (Tarea)

- **Teorema (Otras formas cuadráticas)**

  Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$, entonces

  1. Si $\text{ran}(\mathbf{A}_{q\times p}) = q$ entonces $(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{-1} \sim W_q\left(n - p + q, (\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}^{T})^{-1}\right)$ (Tarea)

  2. Si $\mathbf{y}_{p\times 1}$ independiente de $\mathbf{M}$ tal que $\mathbb{P}(\mathbf{y} = 0) = 0$ entonces $\dfrac{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{y}}{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y}} \sim \chi^2_n$ y $\dfrac{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}}{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}} \sim \chi^2_{n-p+1}$ (Tarea)

- **Teorema (Otras formas cuadráticas)**

  Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$, entonces

  1. Si $\text{ran}(\mathbf{A}_{q\times p}) = q$ entonces $(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{-1} \sim W_q\left(n - p + q, (\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}^{T})^{-1}\right)$ (Tarea)

  2. Si $\mathbf{y}_{p\times 1}$ independiente de $\mathbf{M}$ tal que $\mathbb{P}(\mathbf{y} = 0) = 0$ entonces $\dfrac{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{y}}{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y}} \sim \chi^2_n$ y $\dfrac{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}}{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}} \sim \chi^2_{n-p+1}$ (Tarea)

  3. Si $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ son vectores aleatorios iid $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ con $\mathbf{z} = \mathbf{X}\mathbf{a}$, $\mathbf{A}_{n\times n}, \mathbf{B}_{n\times n}$ matrices simétricas de rango r, s respectivamente y $\mathbf{b}_{n\times 1}$ un vector de constantes entonces

     - $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ si y solo si $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} \sim \sigma_a^2\chi_r^2$
     - $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ y $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\mathbf{X} \sim W_p(s, \Sigma)$ si y solo si $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} \sim \sigma_a^2\chi_r^2$ y $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\mathbf{y} \sim \sigma_a^2\chi_r^2$ son independientes
     - $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \sim N_p$ y $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ si y solo si $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \sim N_1$ y $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} \sim \sigma_a^2\chi_r^2$ son independientes

- **Definición (Distribución Wishart No Centrada)**

  Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vectors aleatorios independientes y distribuidos como $N_p(\mu_\mathbf{i}, \Sigma)$ entonces $\mathbf{M}_{p\times p} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ tiene una distribución Wishart no centrada, $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma, \Delta)$, con n grados de libertad y matriz de no centralidad Δ definida como

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu_i)(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu_i)^T = \Sigma^{-\frac{1}{2}}\Lambda^T\Lambda\Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

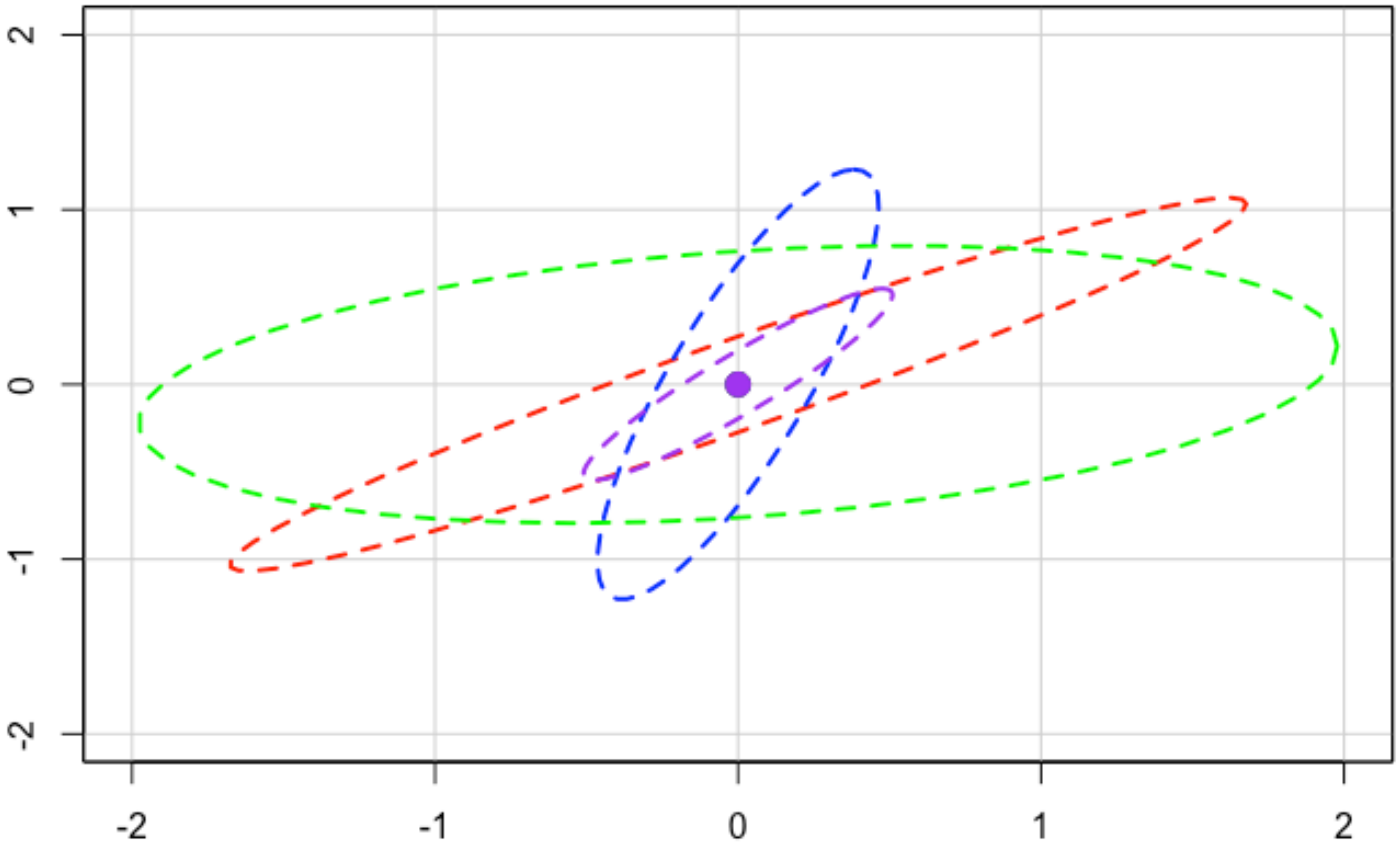
- Donde
  - $\Lambda = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$

- En **R** existe el comando rWishart(n,df,Sigma) que permite simular matrices aleatorias Wishart
- Para entender su aleatoriedad podemos graficar las elipses generadas $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{\mathbf{i}}\mathbf{a} = c$

$$n = 4$$

$$\mathrm{df} = 2$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Distribución T^2 de Hotelling

- **Teorema (Distribución Centrada)**

  Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ independientes y no singulares

$$T^2 = n(\mathbf{x} - \mu)^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \sim \frac{np}{n - p + 1} F_{p,n-p+1} = T^2_{p,n}$$

Distribución T^2

- **Teorema (Distribución Centrada)**

  Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ independientes y no singulares

$$T^2 = n(\mathbf{x} - \mu)^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \mu) \sim \frac{np}{n-p+1} F_{p,n-p+1} = T^2_{p,n}$$

- **Corolario (Distribución No Centrada)**

  Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ independientes y no singulares y denotemos por $\delta = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$ (parámetro de no centralidad)

$$T^2 = n\mathbf{x}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x} \sim \frac{np}{n-p+1} F_{p,n-p+1,\delta} = T^2_{p,n,\delta}$$

Estimación

- **Función de verosimilitud**

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$

$$L(\mu, \Sigma) = |2\pi\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}_i - \mu)\right]$$

- **Función de verosimilitud**

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$

$$L(\mu, \Sigma) = |2\pi\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}_i - \mu)\right]$$

- **Función de log-verosimilitud**

$$\log(L(\mu, \Sigma)) = -\frac{n}{2}\log(|2\pi\Sigma|) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}_i - \mu)$$

- **Proposición (EMV)**

  Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$ con $n \geq p + 1$ entonces los estimadores máximo verosímiles están dados por

$$\hat{\mu} = \bar{x} \quad \hat{\Sigma} = \mathbf{S}$$

- **Proposición (EMV)**

  Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$ con $n \geq p + 1$ entonces los estimadores máximo verosímiles están dados por

$$\hat{\mu} = \bar{x} \quad \hat{\Sigma} = \mathbf{S}$$

- **Teorema**

  Sean $\hat{\mu} = \bar{x}$ y $\hat{\Sigma} = \mathbf{S}$ los estimadores máximo verosímiles de $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$, entonces

  - $\hat{\mu} = \bar{x} \sim N_p(\mu, n^{-1}\Sigma)$

  - $\hat{\Sigma} = \mathbf{S} \sim W_p(n - 1, \Sigma)$

  - $\hat{\mu} = \bar{x}$ y $\hat{\Sigma} = \mathbf{S}$ son independientes

- **Teorema de Cochran**

 Suponer que $\mathbf{P}$ una matriz de proyección con $\text{ran}(\mathbf{P}) = r$ y asumir que $\mathbf{X}_{n\times p}$ es una matriz con renglones $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ con $\text{ran}(\boldsymbol{\Sigma}) = p$ entonces notar que

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{X}^T\mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T(\mathbf{I_n} - \mathbf{P})\mathbf{X}\,.$$

 Entonces se tiene que

 $\mathbf{X}^T\mathbf{P}\mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ es independiente de $\mathbf{X}^T(\mathbf{I_n} - \mathbf{P})\mathbf{X} \sim W_p(n - r, \Sigma)$

Pruebas de hipótesis para μ

- Σ conocida

  Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$ queremos hacer el siguiente contraste

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad vs \qquad H_a : \mu \neq \mu_0$$

Pruebas para μ

- Σ conocida

  Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$ queremos hacer el siguiente contraste

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad vs \qquad H_a : \mu \neq \mu_0$$

- Usamos el estadístico de prueba

$$\xi^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)$$

- Σ conocida

  Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$ queremos hacer el siguiente contraste

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad vs \qquad H_a : \mu \neq \mu_0$$

- Usamos el estadístico de prueba

$$\xi^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)$$

- Bajo H_0

$$\xi^2 \sim \chi^2_p$$

- Σ conocida

  Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$ queremos hacer el siguiente contraste

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad vs \qquad H_a : \mu \neq \mu_0$$

- Usamos el estadístico de prueba

$$\xi^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)$$

- Bajo H_0

$$\xi^2 \sim \chi^2_p$$

- Región de confianza $100(1-\alpha)\,\%$ son las elipsoides

$$\{\mathbf{x} : \xi^2 \leq \chi^2_{p,1-\alpha}\}$$

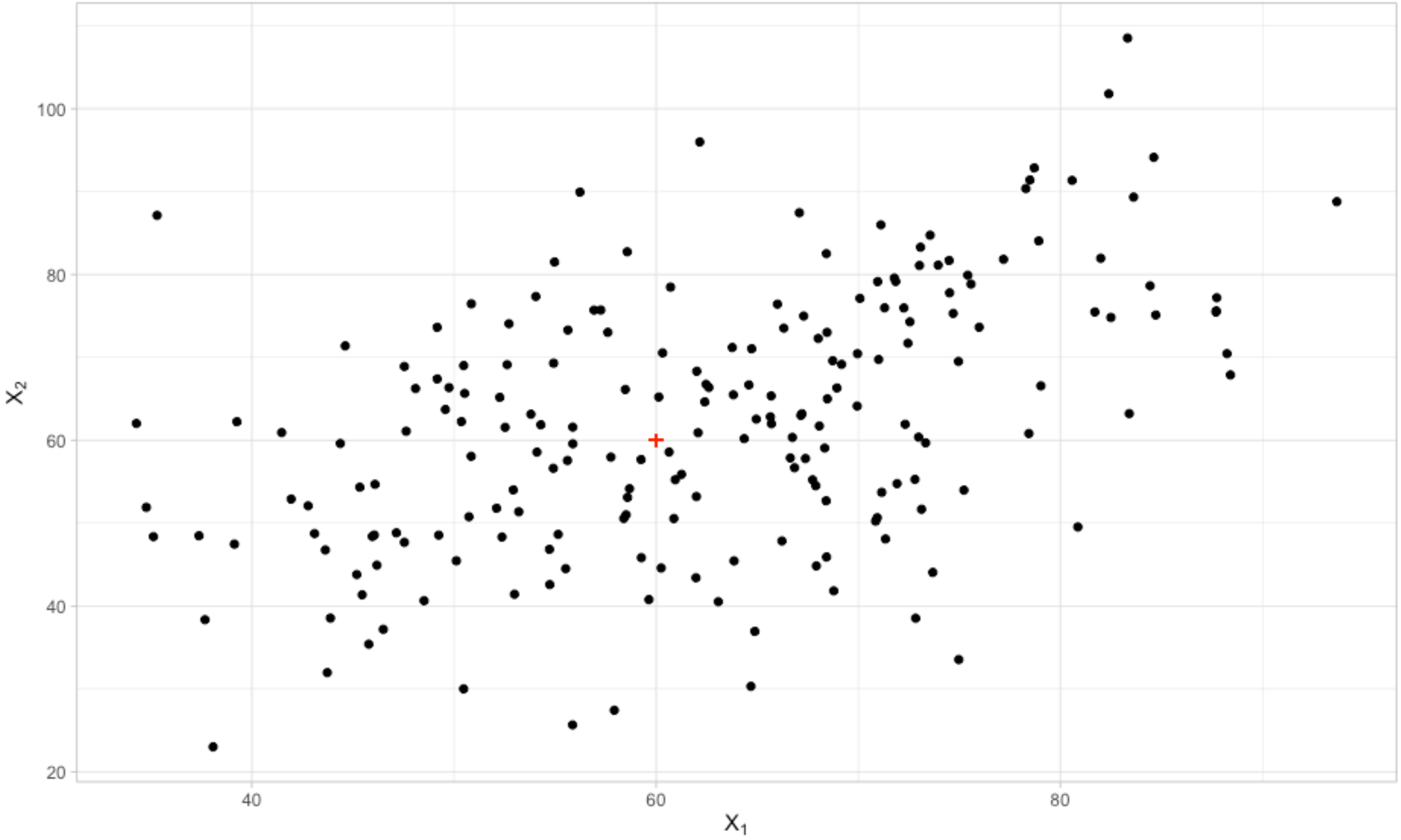
- Ejemplo (Σ conocida)

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{203} \sim N_2(\mu, \Sigma) \qquad \mu = \begin{pmatrix} 64.1 \\ 64.7 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 191 & 155.6 \\ 155.6 & 313.5 \end{pmatrix}$$

- Queremos contrastar

$$H_0 : \mu = 60 \qquad vs \qquad H_a : \mu \neq 60$$

Pruebas para μ

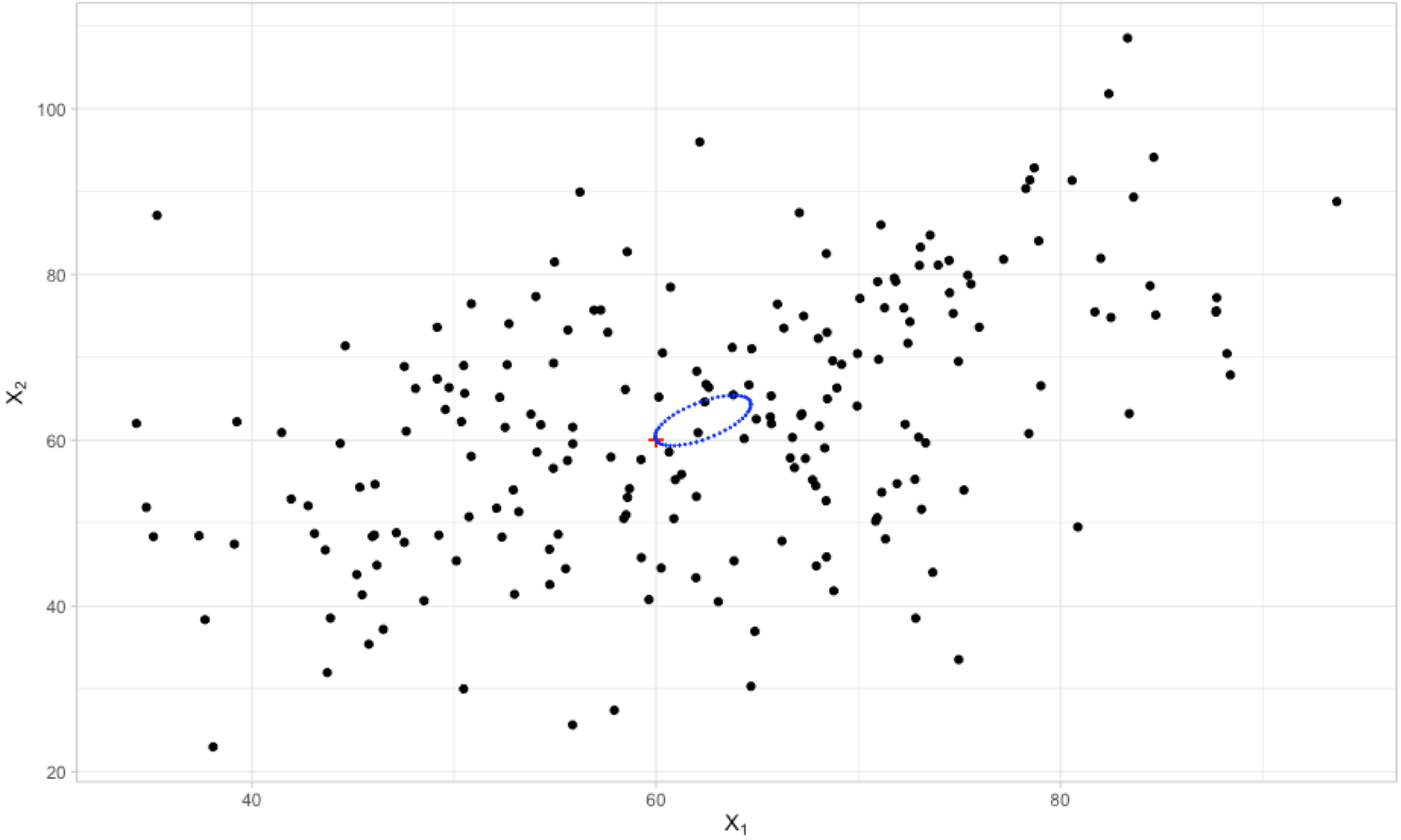


- El estadístico de prueba

$$\xi^2 = 5.971581 < 5.991465 = \chi^2_{2,.95}$$

- No rechazamos H_0

Pruebas para μ



- Σ desconocida (una muestra)

Utilizamos $\mathbf{S}$ para construir el estadístico de prueba

$$\gamma^2 = \frac{n-p}{p}(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)$$

- Σ desconocida (una muestra)

Utilizamos $\mathbf{S}$ para construir el estadístico de prueba

$$\gamma^2 = \frac{n-p}{p}(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)^T \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)$$

- Bajo H_0

$$\gamma^2 \sim F_{p,n-p}$$

- Σ desconocida (una muestra)

  Utilizamos $\mathbf{S}$ para construir el estadístico de prueba

$$\gamma^2 = \frac{n-p}{p}(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)$$

- Bajo H_0

$$\gamma^2 \sim F_{p,n-p}$$

- Región de confianza $100(1-\alpha)$ % son las elipsoides

$$\{\mathbf{x} : \gamma^2 \leq F_{p,n-p,1-\alpha}\}$$

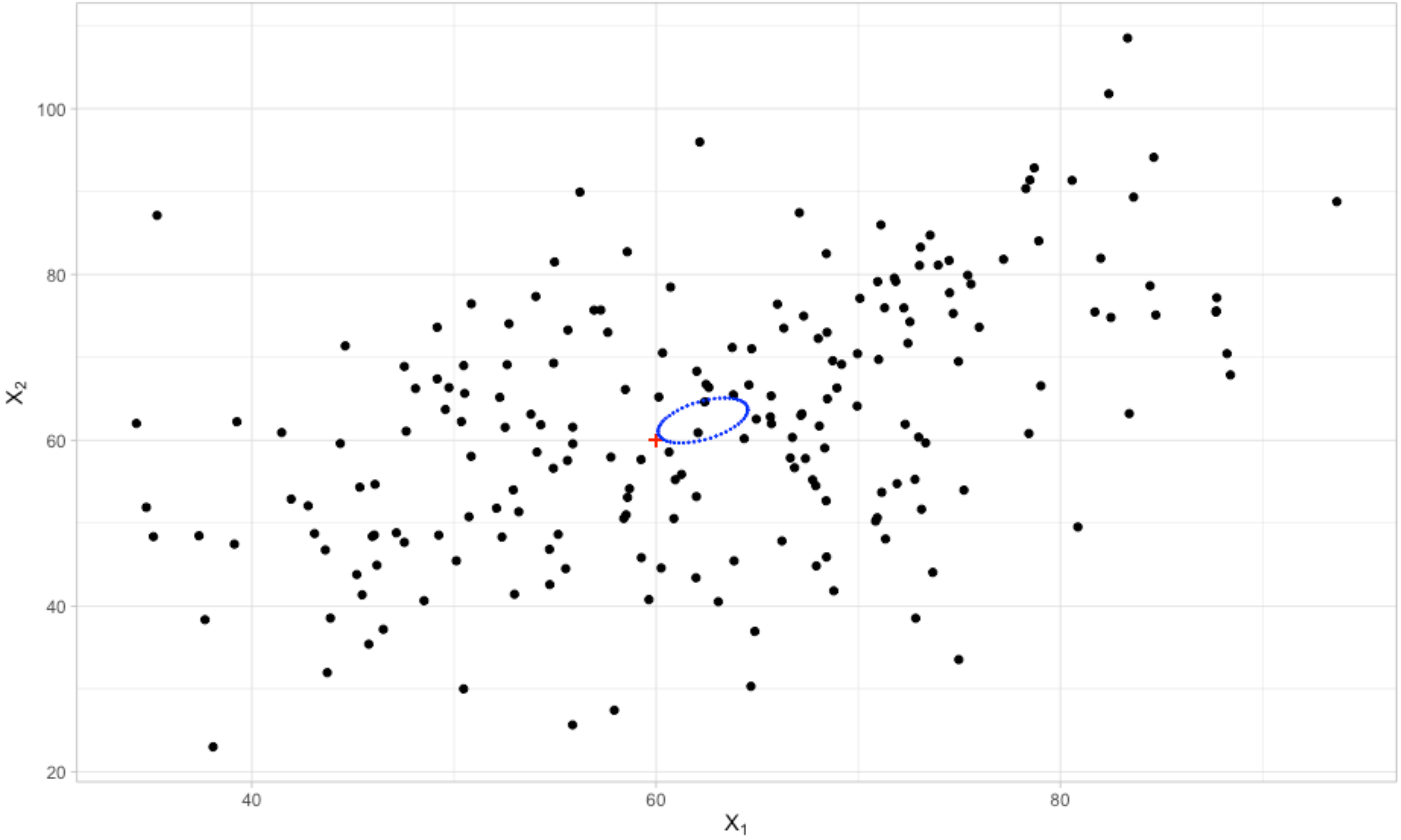
- Ejemplo (Σ desconocida)

- El estadístico de prueba

$$\gamma^2 = 3.851315 > 3.013826 = F_{2,201,.95}$$

- Rechazamos H_0

Pruebas para μ



- Σ desconocida (dos muestras)

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ y $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$

- Σ desconocida (dos muestras)

  Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ y $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$

- **Caso I:** $m = n$ y existe una conexión entre ellas tenemos el caso pareado y nos fijamos en

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

- Σ desconocida (dos muestras)

  Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ y $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$

- **Caso I:** $m = n$ y existe una conexión entre ellas tenemos el caso pareado y nos fijamos en

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

- Podemos probar fácilmente

$$H_0 : \mu = 0 \qquad vs \qquad H_a : \mu \neq 0$$

- **Caso 2:** no existe una conexión entre ellas tenemos el caso no pareado

- **Caso 2:** no existe una conexión entre ellas tenemos el caso no pareado

- **Proposición**

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu_1, \Sigma_1)$ y $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu_2, \Sigma_2)$ si $\mu_1 = \mu_2$ y $\Sigma_1 = \Sigma_2$ entonces

$$\frac{nm}{n+m}(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}_u^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}) \sim T^2(p, n+m-2)$$

Donde

$$\mathbf{S}_u = \frac{n\mathbf{S}_1 + m\mathbf{S}_2}{n+m-2}$$

- **Caso 2:** no existe una conexión entre ellas tenemos el caso no pareado

- **Proposición**

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{iid}{\sim} N_p(\mu_1, \Sigma_1)$ y $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m \overset{iid}{\sim} N_p(\mu_2, \Sigma_2)$ si $\mu_1 = \mu_2$ y $\Sigma_1 = \Sigma_2$ entonces

$$\frac{nm}{n+m}(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}_u^{-1} (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}) \sim T^2(p, n+m-2)$$

Donde

$$\mathbf{S}_u = \frac{n\mathbf{S}_1 + m\mathbf{S}_2}{n+m-2}$$

Utilizamos el estadístico de prueba

$$\delta^2 = \frac{(n+m-p-1)nm}{(n+m-2)(n+m)}(\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}_u^{-1} (\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}}) \sim F_{p,n+m-p-1}$$

Pruebas de hipótesis para Σ

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$ con $n \geq p + 1$ se pueden hacer las siguiente pruebas para Σ

- Independencia por bloques

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \cdots & \Sigma_{1q} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \cdots & \Sigma_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma_{q1} & \Sigma_{q2} & \cdots & \Sigma_{qq} \end{pmatrix}$$

$$H_0 : \Sigma_{rs} = \mathbf{0}$$

- Esfericidad
  - **Caso 1 :** $\mathbf{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}$ con σ^2 desconocida (esta prueba incluye a $\mathbf{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{\Sigma}_0$)
  - **Caso 2:** $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}$ (esta prueba incluye a $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_0$)

- Esfericidad
  - Caso 1: $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ con σ^2 desconocida (esta prueba incluye a $\Sigma = \sigma^2 \Sigma_0$)
  - Caso 2: $\Sigma = \mathbf{I}$ (esta prueba incluye a $\Sigma = \Sigma_0$)

- Igualdad en los bloques diagonales, i.e., $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = \cdots = \Sigma_{qq}$

Pruebas para Σ

- Esfericidad
  - Caso 1: $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ con σ^2 desconocida (esta prueba incluye a $\Sigma = \sigma^2 \Sigma_0$)
  - Caso 2: $\Sigma = \mathbf{I}$ (esta prueba incluye a $\Sigma = \Sigma_0$)

- Igualdad en los bloques diagonales, i.e., $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = \cdots = \Sigma_{qq}$

- Igualdad de varianzas y correlaciones

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Pruebas para Σ

- Comparar dos poblaciones normales

  Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu_1, \Sigma_1)$ y $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu_2, \Sigma_2)$

$$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2$$

- El estadístico de prueba

$$\frac{(n+m)^{\frac{(n+m)p}{2}}}{n^{\frac{np}{2}} m^{\frac{mp}{2}}} \frac{|\mathbf{S}_1|^{\frac{n}{2}} |\mathbf{S}_2|^{\frac{m}{2}}}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|^{\frac{n+m}{2}}}$$