Inferencia Estadística: Tarea 2

Estadísticas y distribuciones muestrales

Fecha de entrega: 26 de septiembre

1. (2 puntos) Sea X una variable aleatoria con distribución $t_{(n)}$.

   (a) Mostrar que la distribución de X, se puede obtener cuando se asume que $X \mid \lambda \sim N(0, \lambda^{-1})$ con $\lambda \sim Ga(n/2, n/2)$.
   Hint: $f(x) = \int f(x \mid \lambda) f(\lambda) d\lambda$

   (b) Con el resultado del inciso anterior, encuentre la media y varianza de X.
   Hint: Utilizar la propiedad de torre, esto es, $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X) \mid \lambda)$

   (c) Utilizando el siguiente algoritmo simula una muestra de la variable aleatoria X de tamaño 1000 para $n = 1, 3, 5, 10$.

      i. Para cada $i = 1, \ldots, 1000$ simula $\lambda_i \sim Ga(n/2, n/2)$.

      ii. Con los valores de λ_i obtenidos en el inciso anterior simula $X \sim N(0, \lambda_i^{-1})$.

   Compara las 4 muestras generadas a partir de los histogramas o boxplots. ¿Cómo es el comportamiento en las colas de la distribución para cuando n crece?

   (d) (Opcional) Utilizando la fórmula de Stirling la cual establece que

   $$\Gamma(n+1) \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

   demuestre que

   $$\lim_{n\to\infty} f(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

   ¿Qué puedes decir de la convergencia de X cuando los grados de libertad tienden a infinito?

2. (2 puntos) Sea X una variable aleatoria con distribución $F_{(m,n)}$

   (a) Demuestre que $1/X$ tiene distribución $F_{(n,m)}$.

   (b) Demuestre que $W = (m/n)X/[1 + (m/n)X]$ tiene distribución $Be(m/2, n/2)$.

   (c) Utilizando el inciso anterior, encuentre la media y varianza de X.
   Hint: Encuentre los primeros dos momentos de $mX/n = W/(1-W) = g(W)$ *como* $\mathbb{E}(g(W)) = \int_0^1 g(w) f(w) dw$

3. (2 puntos) La distribución Pareto, es una distribución de probabilidad continua nombrada a partir del economista italiano Vilfredo Pareto, el cual introdujo un principio matemático conocido como la regla 80/20 para medir la desigualdad de la distribución de la riqueza. La función de densidad está dada por:

$$f(x;\theta) \;=\; \frac{\theta\alpha^{\theta}}{x^{\theta+1}}, \quad 0<\alpha\leq x<\infty, \quad 0<\theta<\infty$$

donde α es un parámetro de escala y θ es un parámetro de forma. Exhiba las estadísticas suficientes para α y θ.

4. (1 punto) Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de la población cuya función de densidad es

$$f(x;\theta) \;=\; \frac{\theta^2}{\theta+1}(x+1)\exp(-\theta x), \quad 0<x<\infty, \quad 0<\theta<\infty.$$

Obtenga una estadística suficiente minimal y completa.

5. (1 punto) Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de la distribución gamma de parámetros (α,β), esto es, con densidad

$$f(x;\alpha,\beta) \;=\; \frac{\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}\exp(-\beta x)}{\Gamma(\alpha)}$$

   (a) Encuentre una estadística suficiente para β cuando α se asume conocida.
   (b) Encuentra una estadística suficiente para α cuando β se asume conocida.
   (c) Encuentra una estadística conjuntamente suficiente para α y β.

6. (1 punto) Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de la distribución beta de parámetros (α,β), esto es, con densidad

$$f(x;\alpha,\beta) \;=\; \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}.$$

Encuentre una estadística suficiente y minimal para (α,β).

7. (1 punto) Considere el caso de una distribución $N(\theta,\theta^2)$ de la cual se observa una muestra aleatoria de tamaño n, siendo θ el parámetro desconocido.

   (a) Muestre que se está frente a un caso de una familia exponencial en el que la dimensión de la estadística suficiente minimal T, es 2; siendo la dimensión original igual a 1.
   (b) Demuestra que T no es completa.
   Hint: Observe las distribuciones de las componentes de T y note que $\mathbb{E}(\bar{X}^2)=\frac{\theta^2(n+1)}{n}$

Actividades de DataCamp

1. *Introduction to Statistics in R*
2. *Data Manipulation with dplyr*
3. *Introduction to Data Visualization with ggplot2*