Inferencia Estadística: Tarea 2

Estadísticas y distribuciones muestrales

Fecha de entrega: 19 de marzo

1. (2 puntos) Sea X una variable aleatoria con distribución $t_{(n)}$.

   (a) Mostrar que la distribución de X, se puede obtener cuando se asume que $X|\lambda \sim N(0, \lambda^{-1})$ con $\lambda \sim Ga(n/2, n/2)$. (*Hint:* $f(x) = \int f(x \mid \lambda) f(\lambda) d\lambda$).

   (b) Con el resultado del inciso anterior, encuentre la media y varianza de X. (*Hint: Utilizar la propiedad de torre de la esperanza condicional, esto es,* $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \lambda))$.)

   (c) Demuestre que X^2 tiene una distribución $F_{(1,n)}$.

   (d) Utilizando la fórmula de Stirling, demuestre que

   $$\lim_{n\to\infty} f(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

   ¿Qué puedes decir de la convergencia de X cuando los grados de libertad tienden a infinito?

2. (1 punto) Sea X una variable aleatoria con distribución $F_{(m,n)}$

   (a) Demuestre que $1/X$ tiene distribución $F_{(n,m)}$.

   (b) Demuestre que $W = (m/n)X/[1 + (m/n)X]$ tiene distribución $Be(m/2, n/2)$.

   (c) Utilizando el inciso anterior, encuentre la media y varianza de X. (*Hint: Encuentre los primeros dos momentos de* $mX/n = W/(1-W) = g(W)$ *como* $\mathbb{E}(g(W)) = \int_0^1 g(w)f(w)dw$.).

3. (1 punto) La distribución Pareto, es una distribución de probabilidad continua nombrada a partir del economista italiano Vilfredo Pareto, el cual introdujo un principio matemático conocido como la regla 80/20 para medir la desigualdad de la distribución de la riqueza. La función de densidad está dada por:

   $$f(x \mid \theta) \quad = \quad \frac{\theta\alpha^\theta}{x^{\theta+1}}, \quad 0 < \alpha \leq x < \infty, \quad 0 < \theta < \infty$$

   donde α es un parámetro de escala y θ es un parámetro de forma. Exhiba las estadísticas suficientes para α y θ.

4. (1 punto) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la población con distribución uniforme $U(\theta, \theta + 1)$. Demuestre que $S = (Y_1, Y_n)$, donde $Y_1 = \min\{X_i\}$ y $Y_n = \max\{X_i\}$ es una estadística suficiente minimal pero no es completa.

5. (1 punto) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la población cuya función de densidad es

$$f(x \mid \theta) \quad = \quad \frac{\theta^2}{\theta + 1}(x+1)\exp(-\theta x), \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < \theta < \infty.$$

   Obtenga una estadística suficiente minimal y completa.

6. (1 punto) Considere el caso de una distribución $N(\theta, \theta^2)$ de la cual se observa una muestra aleatoria de tamaño n, siendo θ el parámetro desconocido.

   (a) Muestre que se está frente a un caso de una familia exponencial en el que la dimensión de la estadística suficiente minimal T, es 2; siendo la dimensión original igual a 1.

   (b) Demuestra que T no es completa. (*Hint: Observe las distribuciones de las componentes de T y note por ejemplo que $\mathbb{E}(\bar{X}^2) = \frac{\theta^2(n+1)}{n}$.*)

7. (1 punto) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la distribución gamma de parámetros (α, β), esto es, con densidad

$$f(x \mid \alpha, \beta) \quad = \quad \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\beta x)}{\Gamma(\alpha)}$$

   (a) Encuentre una estadística suficiente para β cuando α se asume conocida.

   (b) Encuentra una estadística suficiente para α cuando β se asume conocida.

   (c) Encuentra una estadística conjuntamente suficiente para α y β.

8. (1 punto) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la distribución beta de parámetros (α, β), esto es, con densidad

$$f(x \mid \alpha, \beta) \quad = \quad \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}.$$

   Encuentre una estadística suficiente y minimal para (α, β).

9. (1 punto) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con función de densidad común dada por

$$f(x \mid \theta) \quad = \quad \frac{\theta^2}{\theta + 1}(x+1)\exp(-\theta x), \quad x, \theta > 0.$$

   (a) Demuestra que la densidad pertenece a la familia exponencial.

   (b) Obtenga una estadística suficiente, minimal y completa.