Series de tiempo

Tarea 3

Fecha de entrega: 3 de noviembre

1. Considera $\{X_t : t \in T\}$ un proceso estocástico.

   (a) Demuestra que si $\{X_t : t \in T\}$ es estrictamente estacionario entonces $\{X_t : t \in T\}$ es débilmente estacionario.

   (b) Demuestra que el reverso es cierto si $\{X_t : t \in T\}$ es un proceso gaussiano.

2. Sea $\{X_t : t \in T\}$ una serie de tiempo estacionaria de media μ y función de autocorrelación $\rho(\cdot)$. Demuestra que el mejor predictor lineal de X_{t+h} de la forma $aX_t + b$ se encuentra tomando $a = \rho(h)$ y $b = \mu(1 - \rho(h))$.

3. Sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso MA de orden 2 dado por

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-2},$$

   donde $\mid \theta \mid < 1$ y Z_t es un ruido blanco de media cero y varianza 1.

   (a) Encuentra $\rho(h)$.

   (b) Utiliza la fórmula de Bartlett para encontrar w_{ii}.

   (c) Simula una trayectoria de tamaño 200 de este proceso para $\theta = 0.8$. Obtén la función de autocorrelación muestral y grafica las bandas de confianza asintóticas de $\widehat{\rho}(h)$ para $h \leq 40$.

4. Considera el proceso estocástico X_t definido como

$$X_t = a + bt + Y_t,$$

   donde Y_t es un ruido blanco de media cero y varianza σ^2.

(a) Si $m_t = a + bt$, demuestra que el filtro de promedios móviles de orden q con pesos $(2q+1)^{-1}$ deja intacto a m_t, esto es,

$$m_t = (2q+1)^{-1} \sum_{j=-q}^{q} m_{t-j}$$

(b) Si ahora se define a

$$W_t = (2q+1)^{-1} \sum_{j=-q}^{q} X_{t-j}.$$

Obtén la media y la función de autocovarianza de W_t. ¿Es estacionario el proceso W_t?

(c) Construye una serie de tiempo (fijando una semilla para efectos de reproducibilidad) de tamaño 100 con un componente de tendencia dado por $m_t = 1 + 2t$ y $Y_t \sim \mathcal{N}(0, 100^2)$. Y realiza lo siguiente.

i. Calcula la media muestral y la función de autcorrelación muestral.

ii. Aplica un filtro de promedios móviles de orden $q = 1, 2, 3$ y calcula la media muestral del proceso W_t resultante. ¿Qué puedes observar si la comparas con respecto a la de X_t? ¿Esto es algo que esperabas sucediera?

iii. Obtén los residuales $\widehat{Y}_t = X_t - W_t$. ¿Se puede considerar que ya son estacionarios?

5. Sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso AR de orden 1 dado por

$$X_{t+1} = \phi X_t + Z_{t+1},$$

donde $\mid \phi \mid > 1$ y Z_t es un ruido blanco de media cero y varianza σ^2. Multiplica por ϕ^{-1} ambos lados de la ecuación, lo cual deja a X_t en términos de X_{t+1}. Resuelve de manera recursiva hasta encontrar una función para X_t que sólo dependa del ruido blanco. ¿Consideras que es natural la solución?

6. Considera la base de datos *co2MaunaLoa* que contiene las concentraciones atmosféricas mensuales de CO2 del volcán Mauna Loa en el periodo de 1959 a 1997.

(a) Grafica los datos y comenta si son estacionarios o no. Si no son estacionarios, ¿por qué no lo son?

(b) Considera ahora el proceso $Y_t = (1-B)(1-B^{12})X_t$ y grafica el ACF. ¿Te parece estacionario ahora? Si no es así, comenta los motivos.

(c) Finalmente, utiliza la función *ets* de la paquetería *forecast* de R y analiza los residuales resultantes. ¿Te parecen estacionarios?

7. Considera la base de datos *tempNottingham* que contiene las temperaturas promedio mensuales de la ciudad de Nottingham de 1920 a 1939.
    (a) Grafica los datos y comenta si son estacionarios o no. Si no son estacionarios, ¿por qué no lo son?
    (b) Considera ahora el proceso $Y_t = (1 - B^{12})X_t$ y grafica el ACF. ¿Te parece estacionario ahora? Si no es así, comenta los motivos.
    (c) Finalmente, utiliza la función *ets* de la paquetería *forecast* de R y analiza los residuales resultantes. ¿Te parecen estacionarios?

Actividades de DataCamp

1. *Manipulating Time Series Data in R*
2. *Time Series Analysis in R*
3. *Visualizing Time Series Data in R*