Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información
CI2692 - Laboratorio de Algoritmos y Estructuras II
Trimestre Enero-Marzo 2024

Un algoritmo Divide-and-Conquer para el problema de la ruta de máximo beneficio

1. Introducción

El objetivo de este proyecto es el de aplicar la técnica de Divide-and-Conquer en el diseño de un algoritmo que obtenga una solución de un problema de optimización. En específico, se quiere resolver **el problema de encontrar la ruta de máximo beneficio** (PRMB).

2. Sobre el PRMB

Se presenta formalmente el problema a resolver, se muestra un ejemplo de una instancia del problema, y una solución factible.

2.1. Planteamiento del problema

El PRMB es como sigue. Se tiene un mapa de ciudades. Cada ciudad viene dada como punto en eje de coordenadas. Hay un agente que estando en una ciudad, puede visitar a cualquier otra en línea recta. Cada ciudad tiene una recompensa si el agente la visita. La recompensa es un número natural. Al viajar de una ciudad a otra, el agente incurre en un costo. En este caso, el costo es la distancia que se recorre de una ciudad a otra. El objetivo es que **el agente encuentre la ruta de mayor ganancia posible**. Se tiene que la ruta más pequeña posible es una ciudad. En el peor de los casos la ganancia de una ruta es cero.

A continuación planteamos el problema de manera formal. Se define una **ciudad** c_i, como un par ordenado (x, y) donde $x, y \in \mathbb{N}$ y son coordenadas del plano cartesiano. Se tiene que un **mapa** M es un conjunto no vacío y finito de ciudades. La función $w : M \to \mathbb{N}$, recibe como entrada una ciudad, y retorna la recompensa por visitarla. Una **ruta** $\mathcal{R}$, es una secuencia no vacía, finita y sin repeticiones de ciudades, que son visitadas por un agente. Una ruta se puede denotar como $\mathcal{R} = \langle\!\langle\ c_i, c_j, \ldots, c_k\ \rangle\!\rangle$. El **premio** de una ruta $\mathcal{R}$, viene dado por una función p, que es la suma de las recompensas de las ciudades visitadas. La ecuación para calcular la recompensa viene dada por:

$$p(\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{|\mathcal{R}|} w(\mathcal{R}[i]) \tag{1}$$

El **costo** de una ruta viene dado por una función c, que corresponde a la distancia recorrida por el agente al visitar cada una de las ciudades de la misma. Esto es:

$$c(\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{|\mathcal{R}|-1} d(\mathcal{R}[i], \mathcal{R}[i+1]) \tag{2}$$

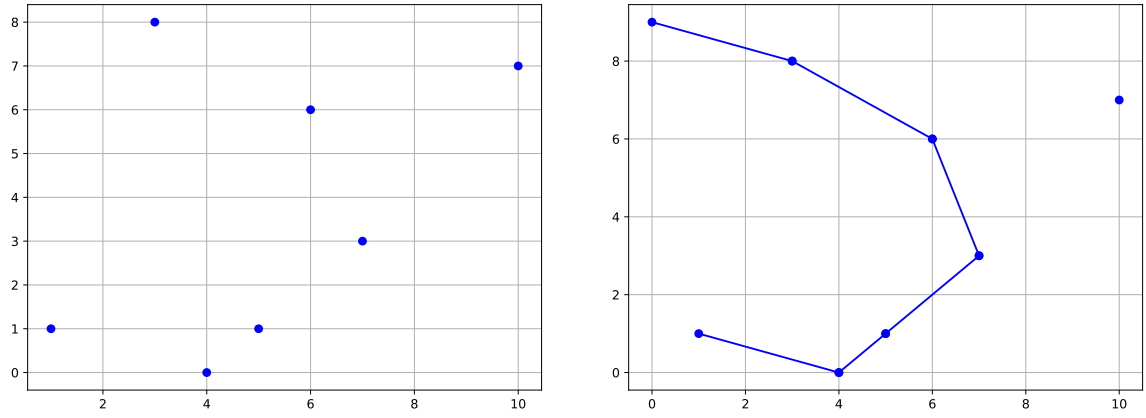
Donde d es la distancia euclidiana entre dos puntos en el plano. La **ganancia** de una ruta $\mathcal{R}$, es el resultado de los premios obtenidos al visitar las ciudades, menos el costo de visitarlas. La función g de ganancia es como sigue:

$$g(\mathcal{R}) = p(\mathcal{R}) - c(\mathcal{R}) \tag{3}$$

El objetivo es obtener la ruta óptima $\mathcal{R}^*$ con la mayor ganancia posible.

2.2. Ejemplo ilustrativo

Como ejemplo de una instancia de PRMB se presenta en la Figura 1a, que es un mapa con ocho ciudades. Se tiene que la Figura 1b muestra un ejemplo de una ruta factible, en la que se visitan siete ciudades de las ocho, del mapa de la Figura 1a.



(a) Mapa con ochos ciudades.

(b) Ejemplo de ruta factible.

Figura 1: Ejemplo de una instancia del PRMB y una solución factible.

La Tabla 1 presenta las recompensas asociadas a cada una de las ciudades de la Figura 1.

Identificador de la ciudad	0	1	2	3	4	5	6	7
Coordenadas	(1,1)	(0,9)	(3,8)	(4,0)	(6,6)	(10,7)	(5,1)	(7,3)
Recompensa	15	16	19	20	18	1	22	23

Tabla 1: Coordenadas y recompensas de las ciudades de la Figura 1.

Se tiene que la ruta $\mathcal{R}$ de la Figura 1b viene dada por $\mathcal{R} = \langle\!| \, 0, 3, 6, 7, 4, 2, 1 \, |\!\rangle$. Se tiene que la ganancia de la ruta $\mathcal{R}$ es 116.6650.

3. Sobre el algoritmo de Divide-and-Conquer

Se quiere que diseñe un algoritmo de Divide-and-Conquer para resolver el PRMB. El algoritmo debe seguir el esquema de los algoritmos Divide-and-Conquer presentado en [1], y que se muestra en el Algoritmo 1. Este algoritmo se debe llamar `divideAndConquerPRMB`. Este

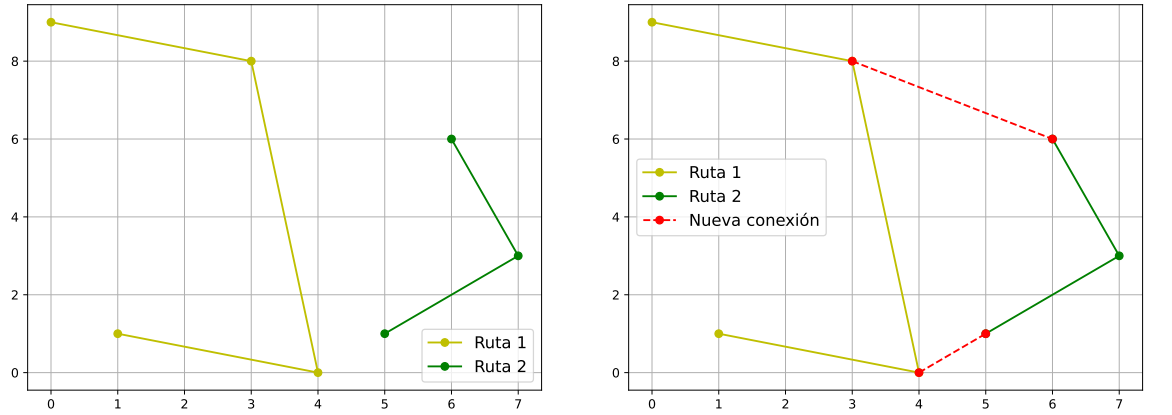
es un algoritmo que encuentra una solución aproximada al PRMB. Como se puede observar en la línea 3 Algoritmo 1, cuando el tamaño del problema es lo suficientemente pequeño, se aplica un algoritmo *ad hoc*. Para este proyecto, algoritmo *ad hoc* que debe realizar debe ser llamado `resolverMiniPRMB` y resuelve de forma óptima un PRMB con tres ciudades o menos.

Algoritmo 1: Divide-and-Conquer

Entrada: Una instancia x de un problema.
Salida : Una solución y de la instancia x.

```
1 inicio
2     si x es suficientemente pequeña entonces
3         devolver solucion_adhoc(x) ;
4     Descomponer x en instancias más pequeñas x_1, x_2, .., x_l ;
5     para i a l hacer
6         y_i ← Divide-and-Conquer(x_i) ;
7     Combinar las y_i soluciones para obtener la solución y de x ;
8     devolver y ;
```

Para la fase de *dividir* la idea es dividir el mapa (plano cartesiano) en varias partes. Se recomienda que el mapa de entrada sea divido en dos partes iguales. En la fase *combinar* la idea es poder unir de manera eficiente dos rutas. En la Figura 2a se muestran dos rutas a combinar. La manera obvia de combinar dos rutas es uniendo sus extremos. Sin embargo, esta estrategia no siempre resulta en una ruta de menor distancia. Entonces, es responsabilidad de ustedes diseñar un algoritmo que combine de manera eficiente, en tiempo y en calidad de la solución, dos rutas. La Figura 2b muestra como se pueden combinar las dos rutas, para obtener la ruta de la Figura 1b. La idea es eliminar un viaje entre ciudades y agregar dos nuevas conexiones que hacen que las dos rutas formen una sola.



(a) Ejemplo de dos rutas a combinar.

(b) Forma en que se pueden combinar dos rutas.

Figura 2: Dos rutas factibles de la instancia de la Figura 1 y su combinación.

4. Requerimientos de la implementación

La implementación del programa que resuelve el PRMB, debe estar contenido en un archivo llamado `DivideAndConquerPRMBSolver.kt`. Puede incluir en su proyecto otros archivos si así lo considera necesario. Para ejecutar el programa `DivideAndConquerPRMBSolver.kt`, debe crear un archivo Bash ejecutable llamado `runDivideAndConquerPRMBSolver.sh`. La línea de comando que lo ejecuta es de la siguiente manera:

```
>./runDivideAndConquerPRMBSolver.sh archivo_entrada
```

Donde `archivo_entrada` es un archivo con una instancia PRMB en un formato dado. El formato del archivo es como sigue. La primera línea contiene un número que corresponde a las n ciudades del problema. Luego vienen n líneas, donde cada línea contiene la información de las ciudades. Una línea contiene tres números enteros separados por un espacio. El primer número es la coordenada X, el segundo es la coordenada Y y el tercero es el premio que se obtiene al visitar la ciudad. El identificador de la ciudad es la su posición en el archivo, siendo la primera ciudad identificada con el número cero. La salida del programa está compuesta por dos líneas. La primera línea es la ruta encontrada, presentada como una secuencia de ciudades separadas por un espacio. La segunda línea es el beneficio de la ruta, con cuatro decimales. Debe realizar un archivo `Makefile` que compile el proyecto.

5. Informe del proyecto

Tiene que entregar un informe, **en formato PDF**, con la siguiente estructura:

Portada: Contiene el título del proyecto y los datos de los autores del trabajo.

Diseño de la solución: Explicación del diseño de su solución. Se deben presentar los pseudo códigos del algoritmo Divide-and-Conquer que resuelve el PRMB, y del algoritmo *ad hoc* para problema de tres o menos ciudades. Descripción de las estructuras de datos.

Detalles de la implementación: Descripción de aspectos relevantes de la implementación.

Lecciones aprendidas: Las lecciones aprendidas durante la realización del proyecto.

6. Condiciones de entrega

Debe entregar los códigos fuentes de su programa, el informe, y la declaración de autenticidad, en un archivo comprimido llamado `Proyecto1-X-Y.tar.xz` donde X y Y son los números de carné de los autores del proyecto. La entrega debe hacerse por medio de la plataforma Classroom, antes de las 8:50 PM del día viernes 23 de febrero de 2024.

Referencias

[1] G. Brassard and P. Bratley. *Fundamentals of Algorithmics*. Prentice Hall, 1996.

Guillermo Palma / gvpalma@usb.ve / Febrero de 2024