

Jose Revete
19-10040

Tarea 1 (CI-3661)

1. Considere la estructura de datos `Conjunto`, que representa conjuntos potencialmente infinitos. Tomando en cuenta la definición anterior, debe implementar entonces cada una de las siguientes funciones (válidas independientemente del tipo concreto que tome `a` y sin cambiar sus firmas):

R:

```
type Conjunto a = a -> Bool

-- a)
miembro :: Conjunto a -> a -> Bool
miembro c x = c x

-- b)
vacio :: Conjunto a
vacio = \_ -> False

-- c)
singleton :: (Eq a) => a -> Conjunto a
singleton x = \y -> x == y

-- d)
desdeLista :: (Eq a) => [a] -> Conjunto a
desdeLista xs = \x -> elem x xs

-- e)
complemento :: Conjunto a -> Conjunto a
complemento c = \x -> not (c x)

-- f)
union :: Conjunto a -> Conjunto a -> Conjunto a
union c1 c2 = \x -> c1 x || c2 x

-- g)
interseccion :: Conjunto a -> Conjunto a -> Conjunto a
interseccion c1 c2 = \x -> c1 x && c2 x

-- h)
diferencia :: Conjunto a -> Conjunto a -> Conjunto a
diferencia c1 c2 = \x -> c1 x && not (c2 x)

-- i)
transformar :: (b -> a) -> Conjunto a -> Conjunto b
transformar f c = \x -> c (f x)
```

2. Considere el tipo de datos ArbolMB:

```
data ArbolMB a = Vacio
               | RamaM a (ArbolMB a)
               | RamaB a (ArbolMB a) (ArbolMB a)
  deriving Show

{-
a)
Vacio :: ArbolMB a
RamaM :: a -> ArbolMB a -> ArbolMB a
RamaB :: a -> ArbolMB a -> ArbolMB a -> ArbolMB a
-}

{-
b)
transformarVacio :: b -> b
transformarRamaM :: a -> b -> b
transformarRamaB :: a -> b -> b -> b
-}

-- c)
pLegarArbolMB :: b
              -> (a -> b -> b)
              -> (a -> b -> b -> b)
              -> ArbolMB a
              -> b
pLegarArbolMB transVacio transRamaM transRamaB = pLegar
  where
    pLegar Vacio = transVacio
    pLegar (RamaM x y) = transRamaM x (pLegar y)
    pLegar (RamaB x y z) = transRamaB x (pLegar y) (pLegar z)

-- d)
sumarArbolMB :: (Num a) => ArbolMB a -> a
sumarArbolMB = pLegarArbolMB transVacio transRamaM transRamaB
  where
    transVacio = 0
    transRamaM x acc = x + acc
    transRamaB x acc1 acc2 = x + acc1 + acc2

-- e)
aplanarArbolMB :: ArbolMB a -> [a]
aplanarArbolMB = pLegarArbolMB transVacio transRamaM transRamaB
  where
    transVacio = []
    transRamaM x acc = x : acc
    transRamaB x acc1 acc2 = acc1 ++ [x] ++ acc2
```

```

-- f)
analizarArbolMB :: (Ord a) => ArbolMB a -> Maybe (a, a, Bool)
analizarArbolMB = plegarArbolMB transVacio transRamaM transRamaB
  where
    transVacio = Nothing
    transRamaM x Nothing = Just (x, x, True)
    transRamaM x (Just (min, max, b)) = Just (min, max, b && min < x && x <
max)
    transRamaB x Nothing Nothing = Just (x, x, True)
    transRamaB x (Just (min1, max1, b1)) Nothing = Just (min1, max1, b1 &&
min1 < x && x < max1)
    transRamaB x Nothing (Just (min2, max2, b2)) = Just (min2, max2, b2 &&
min2 < x && x < max2)
    transRamaB x (Just (min1, max1, b1)) (Just (min2, max2, b2)) = Just
(min1, max2, b1 && b2 && min1 < x && x < max2)

```

{-

g) Para crear una función plegarGen para un tipo de datos Gen a con n constructores diferentes, la función plegarGen deberá tomar n-funciones como argumento (además del valor de tipo Gen a que se desea plegar), dado que cada constructor es diferente y puede requerir un tratamiento distinto.

h) La función predefinida en el Preludio de Haskell que tiene una firma y un comportamiento similar a la función de plegado propuesta es 'foldr'. Esta función tiene un tipo de la forma: `foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b`. Aplica de manera recursiva una función a cada elemento de una lista, acumulando un resultado.

-}

3. Se desea implementar entonces un monad que represente cálculos secuenciales:

R:

```

newtype Secuencial s a = Secuencial (s -> (a, s))

```

```

-- c)
return :: a -> Secuencial s a
return x = Secuencial $ \estado -> (x, estado)

```

```

-- d)
instance Monad (Secuencial s) where
  return :: a -> Secuencial s a
  return x = Secuencial $ \estado -> (x, estado)

```

```

(>>=) :: Secuencial s a -> (a -> Secuencial s b) -> Secuencial s b
(Secuencial programa) >>= transformador =
  Secuencial $ \estadoInicial ->
    let (resultado, nuevoEstado) = programa estadoInicial
        (Secuencial nuevoPrograma) = transformador resultado
    in nuevoPrograma nuevoEstado

```

{-

a) Dado que en Haskell, las instancias para (por lo menos este caso) Monads, deben ser de la forma `<Constructor> <Argumento>`, donde Constructor es el nombre del tipo de dato y Argumento es el argumento de tipo que recibe el constructor.

b)

```

return :: a -> Secuencial s a
>>= :: Secuencial s a -> (a -> Secuencial s b) -> Secuencial s b
>> :: Secuencial s a -> Secuencial s b -> Secuencial s b
fail :: String -> Secuencial s a

```

e)

- Identidad izquierda: $\text{return } a \gg= h == h \ a$

Demostración:

```

return a >>= h
= Secuencial $ \estadoInicial -> (a, estadoInicial) >>= h
= Secuencial $ \estadoInicial -> h a estadoInicial
= h a

```

- Identidad derecha: $m \gg= \text{return} == m$

Demostración:

```

m >>= return
= Secuencial $ \estadoInicial -> m estadoInicial >>= return
= Secuencial $ \estadoInicial -> m estadoInicial
= m

```

- Asociatividad: $(m \gg= g) \gg= h == m \gg= (\lambda x \rightarrow g \ x \gg= h)$

Demostración:

```

(m >>= g) >>= h
= Secuencial $ \estadoInicial -> (m >>= g) estadoInicial >>= h
= Secuencial $ \estadoInicial -> (Secuencial $ \estado -> (g (fst (m estado)), snd (m
estado))) estadoInicial >>= h
= Secuencial $ \estadoInicial -> h (g (fst (m estadoInicial))) (snd (m estadoInicial))
= Secuencial $ \estadoInicial -> m estadoInicial >>= (\lambda x \rightarrow g \ x \gg= h)
= m >>= (\lambda x \rightarrow g \ x \gg= h)

```

-}

Investigación:

1. La programación funcional está basada en el Lambda Cálculo, propuesto por Alonzo Church. Dicho cálculo está basado en llamadas λ -expresiones. Tomando esta definición en cuenta, conteste las siguientes preguntas:

R:

{-

a) $(\lambda x . \lambda y . x y y) (\lambda z . z O) L$
= $eval((\lambda x . \lambda y . x y y) (\lambda z . z O) L)$
= $eval(eval((\lambda x . \lambda y . x y y) (\lambda z . z O)) eval(L))$
= $eval(eval(\lambda y . x y y) [x := eval(\lambda z . z O)] eval(L))$
(Paréntesis para indicar que se sustituye x por $(\lambda z . z O)$)
= $[x := (\lambda z . eval(z O))]$
= $[x := (\lambda z . z eval(O))]$
(Continuamos con la sustitución)
= $eval(eval(\lambda y . x y y) [x := (\lambda z . z eval(O))]) eval(L)$
= $eval(eval(\lambda y . (\lambda z . z eval(O)) y y) eval(L))$
(Resolvemos $(\lambda z . z eval(O)) y$)
= $(\lambda z . z eval(O)) y$
= $eval(z eval(O)) [z := eval(y)]$
= $eval(z eval(O)) [z := y]$
= $eval(y eval(O))$
(Continuamos con la sustitución)
= $eval((\lambda y . (eval(y eval(O)) y) eval(L))$
= $eval(eval(y eval(O) y)) [y := eval(L)]$
= $eval(eval(eval(L) eval(O) eval(L)))$
= $L O L$

b) Si, por ejemplo:

$E = \lambda x . x$

$F = (\lambda y . y y) (\lambda y . y y)$

Si evaluamos primero E F:

= $eval((\lambda x . x) (\lambda y . y y) (\lambda y . y y))$
= $eval(eval((\lambda x . x) (\lambda y . y y)) eval(\lambda y . y y))$
= $eval((eval(x)) [x := eval(\lambda y . y y)] eval(\lambda y . y y))$
= $eval((eval(x)) [x := (\lambda y . y y)] eval(\lambda y . y y))$
= $eval(eval(\lambda y . y y) eval(\lambda y . y y))$
= $eval((eval(y y)) [y := eval(eval(\lambda y . y y))])$
= $eval((y y) [y := (\lambda y . y y)])$
= $(\lambda y . y y) (\lambda y . y y)$

Si evaluamos primero F E:

$$\begin{aligned}
 &= \text{eval}((\lambda y . y y) (\lambda y . y y) (\lambda x . x)) \\
 &= \text{eval}(\text{eval}((\lambda y . y y) (\lambda y . y y)) \text{eval}(\lambda x . x)) \\
 &= \text{eval}((\text{eval}(y y)) [y := \text{eval}(\lambda y . y y)] \text{eval}(\lambda x . x)) \\
 &= \text{eval}((\text{eval}(y y)) [y := (\lambda y . y y)] \text{eval}(\lambda x . x)) \\
 &= \text{eval}((\lambda y . y y) \text{eval}(\lambda x . x)) \\
 &= \text{eval}((\text{eval}(y y)) [y := \text{eval}(\text{eval}(\lambda x . x))]) \\
 &= \text{eval}((\text{eval}(y y)) [y := (\lambda x . x)]) \\
 &= \text{eval}(\text{eval}((\lambda x . x) (\lambda x . x))) \\
 &= \text{eval}(\text{eval}(\text{eval}(x) [x := \text{eval}(\lambda x . x)])) \\
 &= \text{eval}(\text{eval}(\text{eval}(x) [x := (\lambda x . x)])) \\
 &= (\lambda x . x)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el orden en el que se evalúan las expresiones es relevante.

c) Cuando se permiten identificadores repetidos, la evaluación de una expresión lambda como $(\lambda x.E)F$ debe ajustarse, dado que si al sustituir x por F , si F contiene una variable que ya está en uso en E , se debe renombrar dicha variable para evitar confusión. Si no se renombra, la evaluación podría no ser correcta, ya que las variables se mezclarán (al menos visualmente).

-}

2. Considere:

id :: $a \rightarrow a$

id $x = x$

const :: $a \rightarrow b \rightarrow a$

const $x _ = x$

subs :: $(a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow a \rightarrow c$

subs $x y z = x z (y z)$

R:

{-

a) $\text{subs } (\text{id } \text{const}) \text{const id}$
 $= (\text{id } \text{const}) \text{id } (\text{const id})$
 $= \text{const id } (\text{const id})$
 $= \text{id}$

b) $\text{subs id id } (\text{subs id id})$
 $= \text{id } (\text{subs id id}) (\text{id } (\text{subs id id}))$

$$= (\text{subs } id \ id) (\text{subs } id \ id)$$
$$= \text{subs } id \ id (\text{subs } id \ id)$$

c) $id' :: a \rightarrow a$

$id' = \text{subs } (\text{const } (\text{const } x)) (\text{const } (\text{const } x)) ()$

d) Las funciones propuestas (id, const, y subs) están directamente relacionadas con el cálculo de combinadores SKI, de la siguiente manera:

- **id es como el combinador I:** La función id devuelve el mismo valor que recibe, exactamente lo que hace el combinador I en SKI. Es la identidad.
- **const es como el combinador K:** La función const toma dos argumentos y siempre devuelve el primero, ignorando el segundo. Esto es exactamente lo que hace el combinador K.
- **subs es como el combinador S:** La función subs aplica una función a dos argumentos que, a su vez, dependen del mismo valor. Esto es lo mismo que hace el combinador S en SKI, que "distribuye" funciones.

-}