
**EFFECTO WILSON-BAPPU EN ESTRELLAS FRÍAS:
RELACIÓN FÍSICA ENTRE EL ANCHO DE LA LÍNEA
DE EMISIÓN K DE Ca II Y LA GRAVEDAD SUPERFICIAL**



Fis. FAIBER DANILO ROSAS PORTILLA

**UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO - CAMPUS GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
POSGRADO EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)**

2019

**EFEECTO WILSON-BAPPU EN ESTRELLAS FRÍAS:
RELACIÓN FÍSICA ENTRE EL ANCHO DE LA LÍNEA
DE EMISIÓN K DE Ca II Y LA GRAVEDAD SUPERFICIAL**

Fis. FAIBER DANILO ROSAS PORTILLA

TESIS DE MAESTRÍA COMO REQUISITO PARA OPTAR
POR EL TÍTULO DE MAESTRO EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

DIRECTOR

Dr. KLAUS-PETER SCHRÖDER

DPTO. DE ASTRONOMÍA - UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

CODIRECTOR

Dr. DENNIS JACK

DPTO. DE ASTRONOMÍA - UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

**UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO - CAMPUS GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
POSGRADO EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)**

2019

*Somos el resultado de la continua creación y destrucción de las estrellas,
que por un breve instante de tiempo se hacen a un par de ojos,
para contemplarse y estudiarse a sí mismas.*

*Y mientras observaba las estrellas,
sin pensarlo, llegaste a mi vida de la mano de ellas,
formando galaxias, e incluso universos, con tan solo sonreír.*

Agradecimientos

En mi viaje a través de un universo con «infinitos» mundos, tuve la fortuna de coincidir en tiempo y espacio con personas maravillosas que me han guiado y acompañado en el gran camino que es la vida. Es mi mayor alegría contar con el apoyo incondicional de mis padres Hugo y Nohora, y de mi hermana Carolina, pues son ellos mi mayor inspiración día con día, ninguno de mis logros sería posible sin ellos.

Un agradecimiento especial a mis directores de tesis, los doctores Klaus-Peter Schröder y Dennis Jack, por su guía excepcional en este trabajo, ampliando mi visión del cosmos con su acompañamiento constante.

Gracias a todo el grupo de investigadores del TIGRE, por permitirme ser parte de su excelente grupo de investigación internacional. A todos los miembros del Observatorio de Hamburgo, por ser mi casa mientras escribía este trabajo. Y a todos los profesores del Departamento de Astronomía de la Universidad de Guanajuato, por enseñarme esta hermosa ciencia que es el estudio de los astros.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología - CONACyT y en general a todo el pueblo mexicano, por su valioso interés de apoyar a la ciencia y en especial la astronomía con esta investigación.

EFFECTO WILSON-BAPPU EN ESTRELLAS FRÍAS: RELACIÓN FÍSICA ENTRE EL ANCHO DE LA LÍNEA DE EMISIÓN K DE Ca II Y LA GRAVEDAD SUPERFICIAL

RESUMEN

En este trabajo se estudia la relación entre el ancho a media altura de la línea de emisión K de Ca II ($\lambda = 3933,7 \text{ \AA}$) y la gravedad superficial para una muestra de 14 estrellas frías de tipo espectral F a M con luminosidades Ia, Ib, II, III; y 2 estrellas de la secuencia principal.

Se usan espectros de alta resolución (~ 20000) y buena S/N (~ 100) obtenidos con el Telescopio Internacional de Guanajuato Robótico-Espectroscópico - TIGRE, perteneciente al proyecto entre la Universidad de Hamburgo (Alemania), Universidad de Guanajuato (México) y la Universidad de Liège (Bélgica). Las nuevas paralajes estelares obtenidas por el proyecto *Gaia* DR2, permiten estimar las luminosidades y masas estelares con buena aproximación. Las temperaturas efectivas de la muestra estelar se estiman usando el software *iSpec*.

Nuestro análisis muestra una clara relación entre el ancho de la línea de emisión K de Ca II y la gravedad superficial de la forma $\log W_0 \propto \alpha \log g$ con $\alpha = -0,233 \pm 0,018$, considerando la evidencia de una posible dependencia secundaria débil con la temperatura efectiva y consecuente con las estimaciones teóricas propuestas anteriormente por otros autores.

WILSON-BAPPU EFFECT IN COOL STARS: PHYSIC RELATION BETWEEN THE WIDTH OF K EMISSION LINE OF Ca II AND SURFACE GRAVITY

ABSTRACT

In this work we study the relation between the width at half maximum to the K emission line of Ca II ($\lambda = 3933,7 \text{ \AA}$) and the surface gravity for a stellar sample of 14 cool stars with spectral type F to M and luminosities Ia, Ib, II, III; and 2 main sequence stars.

We use high resolution spectra (~ 20000) and good S/N (~ 100) obtained with the International Telescope of Guanajuato - TIGRE, belong to the project between the University of Hamburg (Germany), University of Guanajuato (Mexico) and the University of Liège (Belgium). The new parallaxes obtained by the project *Gaia* DR2, allow to estimate the luminosities and stellar masses with good approximation. The effective temperatures of the stellar sample were estimated using the software *iSpec*.

Our analysis shows a clear relation between the width of the K emission line of Ca II and the surface gravity with the form $\log W_0 \propto \alpha \log g$ with $\alpha = -0,233 \pm 0,018$, considering the evidence of a possible weak secondary dependence on the effective temperature and consistent with previously theoric estimations proposed by other authors.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	3
1.2. Objetivos	4
1.2.1. Objetivo General	4
1.2.2. Objetivos Específicos	4
2. La Atmósfera Estelar	5
2.1. La Fotósfera	5
2.2. Las Líneas Espectrales	9
2.3. La Cromósfera	11
3. El Efecto Wilson-Bappu	15
3.1. Antecedente Histórico	15
3.2. Descubrimiento	15
3.3. Estudios Posteriores	16
3.4. La Física del WBE	18
4. Parámetros Físicos de la Muestra Estelar	23
4.1. Selección de la Muestra Estelar	23
4.2. Temperatura Efectiva	23
4.3. Masa Estelar	24
4.4. Gravedad Superficial	31
5. Medición del Ancho de Emisión de la Línea K de Ca II	35
5.1. Etapa 1: Lectura de datos	36
5.2. Etapa 2: Ajuste del espectro usando splines	37
5.3. Etapa 3 y 4: Mínimos, máximos y valor medio de la línea de emisión K	38
5.4. Etapa 5: Cálculo de W_0	38
6. Análisis y Discusión	43
6.1. Relación entre W_0 y g	43
6.2. Dispersión e Incertidumbre de los Datos	46
6.2.1. HD156014	47
6.2.2. HD159181 y HD209750	48

6.3. Comparación con Resultados Previos	48
6.4. α y la Densidad de Masa Columnar	49
7. Conclusiones	53
7.1. Trabajo Futuro	54
Bibliografía	57

Índice de cuadros

4.1. Resultados de T_{eff} , $\log g$ y $[M/H]$ encontrados con iSpec	25
4.2. Paralajes, magnitudes y luminosidades de la muestra estelar	29
4.3. Estimación de la masa para la muestra estelar	31
4.4. Estimación de la gravedad superficial para la muestra estelar	33
5.1. Ancho de la línea de emisión de Ca II para la muestra estelar	40
6.1. Ancho de la línea de emisión de Ca II para la muestra estelar considerando una dependencia débil con la temperatura	46

Índice de figuras

1.1. Línea de emisión K de Ca II en el espectro de <i>Arcturus</i> (HD 124897) cercana a $\lambda = 3933,7 \text{ \AA}$. La emisión cromosférica se muestra como una línea doblemente invertida en el interior de una línea de absorción fotosférica.	2
1.2. Medición del ancho de la línea de emisión K de Ca II en el espectro de ρ <i>Cygni</i> (HD 205435). Los asteriscos marcan los puntos máximos y mínimos de los picos «rojo» y «azul» encontrados mediante un ajuste por splines (línea azul). Las líneas punteadas marcan la mitad entre los puntos máximos y mínimos de cada pico y zona gris representa la incertidumbre en la medición. El ancho de la línea de emisión K de Ca II (W_0) corresponde a la zona entre las líneas punteadas.	3
2.1. Esquema de la estructura de estrellas de tipo <i>solar</i> . Las zonas mostradas corresponden a: 1) Núcleo estelar, 2) Zona radiativa, 3) Zona convectiva, 4) Fotósfera, 5) Cromósfera. La corona es la región alrededor de la cromósfera y la zona de transición está ubicada entre ellas. El esquema no está a escala. Fuente: Guerra-Olvera (2014).	6
2.2. Curvas de radiación de cuerpo negro a diferentes temperaturas. Se puede observar como la pendiente del continuo varía con la temperatura y el máximo se desplaza hacia la izquierda para temperaturas más altas. . .	7
2.3. Comparación entre un modelo de espectro estelar a $T = 4700 \text{ K}$ generado con el código PHOENIX, y una curva de cuerpo negro a la misma temperatura. La resolución del espectro se ha disminuido en un factor de 200.	8
2.4. Relación entre la intensidad de la línea de absorción y la profundidad en la fotósfera para una línea espectral típica. Fuente: Carroll & Ostlie (2006). . .	11
2.5. Perfiles de temperatura (línea sólida) y densidad de masa (línea punteada) en relación con la altura de la atmósfera solar. Se muestra también las zonas de los perfiles donde se forman algunas líneas espectrales. Fuente: Vernazza et al. (1973) y modificado por Carroll & Ostlie (2006).	13

2.6. Variación del ancho de la línea de emisión K de Ca II con la gravedad superficial para estrellas de tipo solar con $T_{\text{eff}} = 5780$ K usando el código PHOENIX. Fuente: Guerra-Olvera (2014).	14
3.1. Relación entre el logaritmo de los anchos de emisión corregidos de Ca II y las magnitudes absolutas de Yerkes en el artículo de Wilson & Bappu (1957). El conjunto de estrellas ha sido dividido en tres tipos espectrales G, K, M.	16
3.2. Perfil típico de la línea de emisión K de Ca II. Se indican los mínimos de la emisión como K_{1B} y K_{1R} , los máximos como K_{2B} y K_{2R} , y la autoabsorción como K_3 . Los subíndices B y R corresponden al lado «azul» y «rojo» de la línea de emisión.	19
4.1. Diagrama Hertzsprung-Russell observacional con 22.000 estrellas del Catálogo <i>Hipparcos</i> y 1.000 del Catálogo <i>Gliese</i> de estrellas cercanas. Imagen original creada por Richard Powell, Fuente: http://www.atlasoftheuniverse.com/hr.html	26
4.2. Malla de trayectorias evolutivas con $[M/H] = 0,02$ para diferentes masas estelares. La malla se calculó usando el código de Pols et al. (1998). Las barras representan la incertidumbre en luminosidad estelar y temperatura efectiva.	30
5.1. Definición de los parámetros LMIN, LMAX, LLIN y RANG necesarios en el archivo de configuración de HIEW. Con línea azul se muestra la interpolación realizada a los datos del espectro en el rango (LMIN, LMAX). La zona gris representa la sección del espectro que el programa omitirá al encontrar los valores mínimos y máximos en la etapa 3. . . .	37
5.2. Definición de λ_{K1} , λ_{K2} , I_{K1} , I_{K2} , λ_M e I_M . Se han marcado con el subíndice B y R los valores correspondientes a los picos «azul» y «rojo» respectivamente.	39
5.3. Anchos y perfiles de la línea de emisión K de Ca II para dos estrellas con diferente gravedad. a) Perfil para HD186791 con $\log g = 1,13$ y b) Perfil para HD10476 con $\log g = 4,49$. La línea punteada indica la mitad de la intensidad entre el máximo y el mínimo para cada uno de los picos azul y rojo. La zona gris representa la incertidumbre de la medición.	41
5.4. Comparación de la medición de W_0 de la literatura con la realizada en este trabajo, para algunas estrellas de la muestra estelar. Círculos violetas corresponden a Wilson & Bappu (1957), cuadrados verdes a Park et al. (2013), rombos azules a Wallerstein et al. (1999) y triángulos amarillos a Pace et al. (2003).	42

6.1. Relación entre $\log g$ y $\log W_0$ para la muestra estelar. Las barras indican la incertidumbre de las cantidades. La línea azul corresponde a un ajuste lineal donde se omitieron las estrellas 13) HD159181 y 16) HD209750. El color de los puntos representa la temperatura efectiva estimada de acuerdo a una escala en kelvin.	44
6.2. Relación entre $\log g$ y $\log W'_0$ para la muestra estelar considerando una dependencia débil con la temperatura dada por la ecuación 6.2. Las barras indican la incertidumbre de las cantidades. La línea azul corresponde a un ajuste lineal. El color de los puntos representa la temperatura efectiva estimada de acuerdo a una escala en kelvin.	47
6.3. Comparación de $\log W_0$ usando la ecuación 6.6 propuesta en este trabajo y los valores obtenidos en la Tabla 5.1. La línea azul corresponde a un ajuste lineal por mínimos cuadrados. Se muestra la correlación entre los valores calculados y observados.	50
6.4. Comparación de $\log W_0$ usando la ecuación propuesta por a) Neckel (1974) (ecuación 6.7) y b) Park et al. (2013) (ecuación 6.8) y los valores obtenidos en la Tabla 5.1. La línea azul corresponde a un ajuste lineal por mínimos cuadrados. Se muestra la correlación entre los valores calculados y observados.	51
B.1. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD8512.	67
B.2. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD10476.	68
B.3. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD27371.	68
B.4. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD28305.	69
B.5. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD28307.	69
B.6. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD31398.	70
B.7. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD81797.	70
B.8. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD82210.	71
B.9. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD96833.	71
B.10. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD114710.	72
B.11. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD124897.	72
B.12. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD156014.	73
B.13. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD159181.	73
B.14. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD186791.	74
B.15. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD205435.	74
B.16. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD209750.	75

Lista de Apéndices

A. Código fuente del programa Half-Intensity Emission Width (HIEW)	59
B. Anchos y perfiles de la línea de emisión K de Ca II de la muestra estelar	67

Capítulo 1

Introducción

En estrellas de tipo tardío, la línea K de Ca II ($\lambda = 3933,7 \text{ \AA}$) presenta una emisión cromosférica en el interior de una profunda absorción fotosférica (ver Fig. 1.1). Una de las primeras observaciones de este fenómeno fue realizada alrededor del año 1900 por G. Eberhard en una placa de *Arcturus* y posteriormente por K. Schwarzschild en placas de las *Hyades* (Eberhard & Schwarzschild, 1913).

Wilson & Bappu (1957) encontraron una fuerte relación de la forma $M_v = C_1 \log W_1 + C_2$, con C_1 y C_2 constantes; entre la magnitud visual absoluta (M_v) y el ancho de los mínimos de la línea de emisión K de Ca II (W_1 en Fig. 3.2) para una muestra de 185 estrellas de tipo espectral G a M, lo cual se conoce como efecto Wilson-Bappu (en adelante WBE, por sus siglas en inglés). Una de las características más notables del WBE encontradas en este trabajo, es que se extiende sobre un rango de aproximadamente 15 magnitudes estelares y que el ancho de la línea se muestra relativamente independiente del tipo espectral.

Lutz (1970) demostró que el ancho a media altura de la línea de emisión K de Ca II (W_0 en Fig. 3.2), definido como la diferencia en longitud de onda entre la mitad de la intensidad de los picos de emisión «rojo» y «azul», está mejor correlacionado con M_v . La Fig. 1.2, muestra la medición de W_0 para el espectro de ρ Cygni (HD 205435).

Varios estudios se han realizado para mostrar la relación de W_0 con distintos parámetros estelares tales como temperatura efectiva (T_{eff}), gravedad superficial ($\log g$) y metalicidad (Reimers (1973), Neckel (1974), Ayres (1979), Lutz & Pagel (1982), Gomez et al. (2012)). Reimers (1973) encontró empíricamente que W_0 está relacionada con T_{eff} y $\log g$, mientras que Neckel (1974) proporcionó un marco teórico de dicha relación. Ayres (1979) mostró que W_0 varía con la gravedad superficial pero es insensible a T_{eff} . Lutz & Pagel (1982) mostraron que existe una relación entre W_0 , T_{eff} , $\log g$ y $[\text{Fe}/\text{H}]$, sin embargo Gomez et al. (2012) demostraron que el WBE es insensible a la metalicidad.

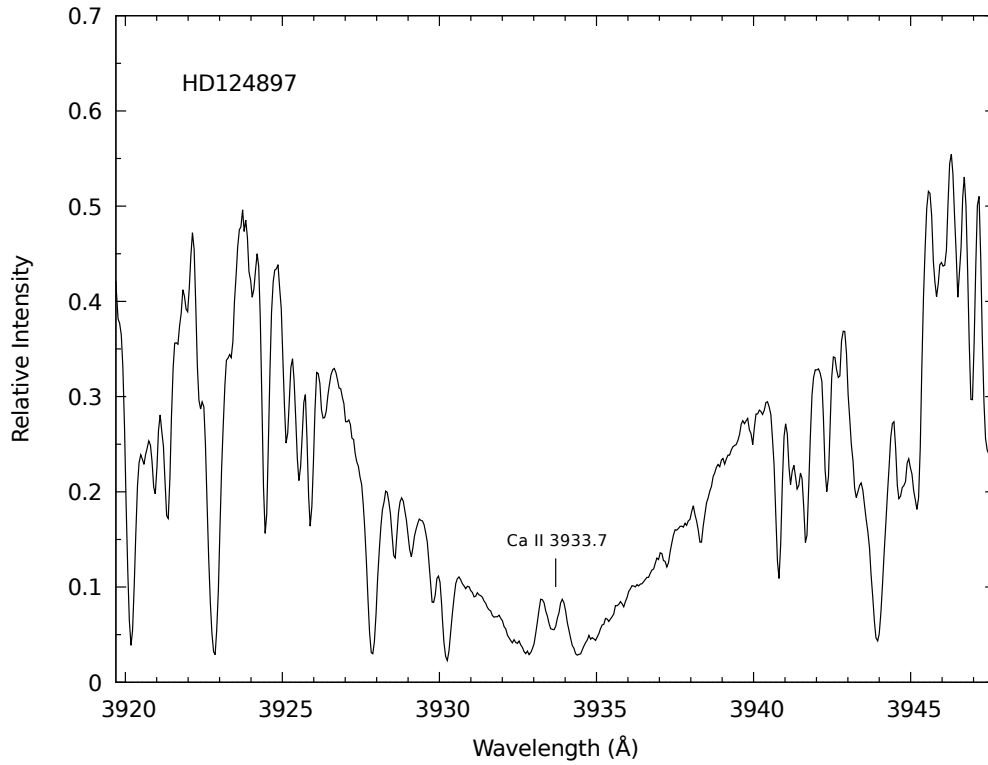


Fig. 1.1. Línea de emisión K de Ca II en el espectro de *Arcturus* (HD 124897) cercana a $\lambda = 3933,7 \text{ \AA}$. La emisión cromosférica se muestra como una línea doblemente invertida en el interior de una línea de absorción fotosférica.

Linsky & Haisch (1979) encontraron al estudiar la atmósfera de 21 estrellas de tipo espectral entre A7 III y M2 Iab, que existe una línea divisoria en el diagrama de Hertzsprung - Russell (HRD por sus siglas en inglés) que separa claramente estrellas en dos grupos denominados de tipo *solar*, aquellas que presentan cromósfera y regiones de transición; de las estrellas de tipo *no-solar*, las cuales no muestran indicadores de regiones de transición pero presentan una pérdida sustancial de masa que se ha interpretado como la existencia de vientos estelares.

Park et al. (2013) usaron el WBE como un indicador de la gravedad superficial estelar en una muestra de 125 estrellas de tipo espectral G a M. Sin embargo, los parámetros estelares tales como T_{eff} , $\log g$, $[\text{Fe}/\text{H}]$ y microturbulencia (ξ_{tur}) fueron obtenidos mediante el modelo de atmósferas estelares de Kurucz ATLAS9 (Kurucz, 1993) y el código de análisis de abundancias MOOG (Snedden, 1973).

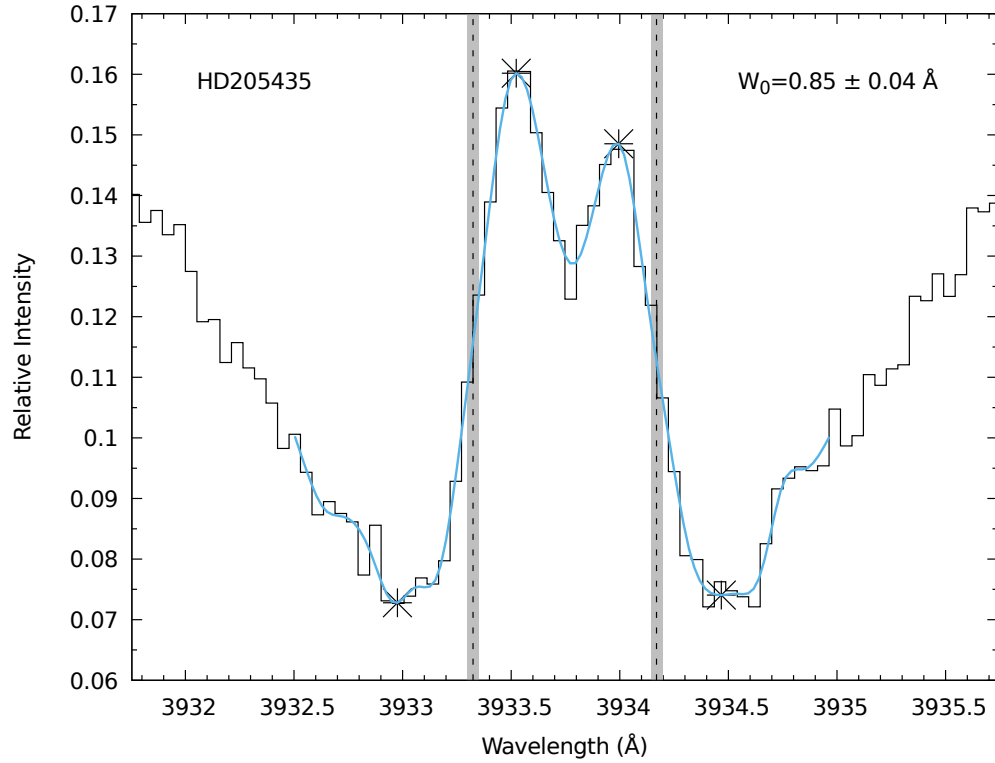


Fig. 1.2. Medición del ancho de la línea de emisión K de Ca II en el espectro de ρ Cygni (HD 205435). Los asteriscos marcan los puntos máximos y mínimos de los picos «rojo» y «azul» encontrados mediante un ajuste por splines (línea azul). Las líneas punteadas marcan la mitad entre los puntos máximos y mínimos de cada pico y zona gris representa la incertidumbre en la medición. El ancho de la línea de emisión K de Ca II (W_0) corresponde a la zona entre las líneas punteadas.

1.1. Motivación

Hasta la fecha, no existe un acuerdo de la relación exacta entre el ancho de la línea de emisión K de Ca II y la gravedad superficial en estrellas frías, como tampoco son del todo claros los principios físicos bajo los cuales se genera esta relación.

Con las nuevas paralajes del proyecto *Gaia* Data Release 2 (*Gaia* DR2, [Gaia Collaboration, 2018](#)), se obtienen con mayor precisión las magnitudes absolutas de la muestra, permitiendo estimar las luminosidades estelares de una manera más acertada y con ello, determinar correctamente la dependencia de W_0 con la gravedad superficial.

Mediante la elección de una muestra estelar con tipo espectral entre F a M y luminosidades entre Ia - V, se busca determinar una segunda dependencia empírica débil con la temperatura efectiva, propuesta anteriormente por otros autores ([Reimers \(1973\)](#), [Neckel \(1974\)](#), [Lutz & Pagel \(1982\)](#), [Park et al. \(2013\)](#), entre otros). En este

trabajo se usan los espectros de alta resolución (~ 20000) y buena S/N (~ 100) obtenidos por el Telescopio Internacional de Guanajuato Robótico-Espectroscópico - TIGRE (Schmitt et al., 2014), perteneciente al proyecto entre la Universidad de Hamburgo (Alemania), la Universidad de Guanajuato (México) y la Universidad de Liège (Bélgica).

Usando el software `iSpec` (Blanco-Cuaresma et al., 2014), se estiman las temperaturas efectivas (T_{eff}) de la muestra estelar al aplicar un ajuste al continuo de los espectros observados por el TIGRE.

La masa estelar (M_*) se estima mediante una malla de trayectorias evolutivas en un diagrama Hertzsprung-Russell, calculada en los trabajos de Schröder et al. (1997) y Pols et al. (1998). Se consideran además las posibles correcciones necesarias debido a la metalicidad de la muestra (Schröder et al., 2013).

Las estimaciones de T_{eff} y M_* son determinadas mediante un trabajo colaborativo con el Dr. Dennis Jack y el Dr. Klaus-Peter Schröder respectivamente.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

En este trabajo se propone como **objetivo general** encontrar una relación entre el ancho de la línea de emisión K de Ca II (W_0) y la gravedad superficial ($\log g$) de la forma $\log W_0 \propto \alpha \log g$, para una muestra de 14 estrellas frías de tipo espectral F a M con luminosidades entre Ia, IV; y 2 estrellas de la secuencia principal, usando espectros de alta resolución obtenidos con el telescopio TIGRE.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Crear un programa para medir el ancho de la línea de emisión K de Ca II (W_0) en espectros obtenidos por el telescopio TIGRE.
- Determinar los parámetros físicos (T_{eff} , M_* , L_* y $\log g$) de la muestra de estrellas a estudiar.
- Encontrar el exponente α de la relación $\log W_0 \propto \alpha \log g$ entre el ancho de la línea de emisión K de Ca II y la gravedad superficial.
- Verificar la evidencia de una posible dependencia secundaria empírica débil de W_0 con respecto a T_{eff} como afirman varios autores (Reimers (1973), Neckel (1974), Lutz & Pagel (1982), Park et al. (2013), entre otros).

Capítulo 2

La Atmósfera Estelar

El modelo más simple de estructura de estrellas tipo *solar* consiste en asumir un conjunto de capas esféricas superpuestas de diferente radio. Se puede dividir la estructura de una estrella en las siguientes capas principalmente: núcleo estelar, zona radiativa, zona convectiva, fotosfera, cromósfera, región de transición, y corona (ver Fig. 2.1). La atmósfera estelar se define como la región conformada desde la fotosfera hasta la corona.

2.1. La Fotosfera

Casi la totalidad de la radiación proviene de la fotosfera y en ella, solo una parte muy pequeña del gas está en estado de plasma o ionizado. El plasma es opaco a la radiación, lo que significa que la luz no puede viajar o salir libremente de su interior, por lo tanto no es posible observar directamente el interior de ninguna estrella.

En la fotosfera el plasma da paso al gas atómico (y al gas molecular en el caso de las estrellas más frías), el cual es transparente a la radiación. La luz en esta región puede escapar siendo detectada mediante los telescopios. Es precisamente la radiación de la fotosfera la que constituye el *continuo espectral* registrado en los espectros estelares.

Si asumimos un sistema en equilibrio termodinámico, la cantidad de energía irradiada por unidad de tiempo, por unidad de superficie, por ángulo sólido y por unidad de longitud de onda, viene dada por la *ley de Planck*, la cual fue propuesta en 1901 por Max Planck (1858-1947) y deducida teóricamente por Satyendra Bose (1894-1974) en 1924

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} \quad (2.1)$$

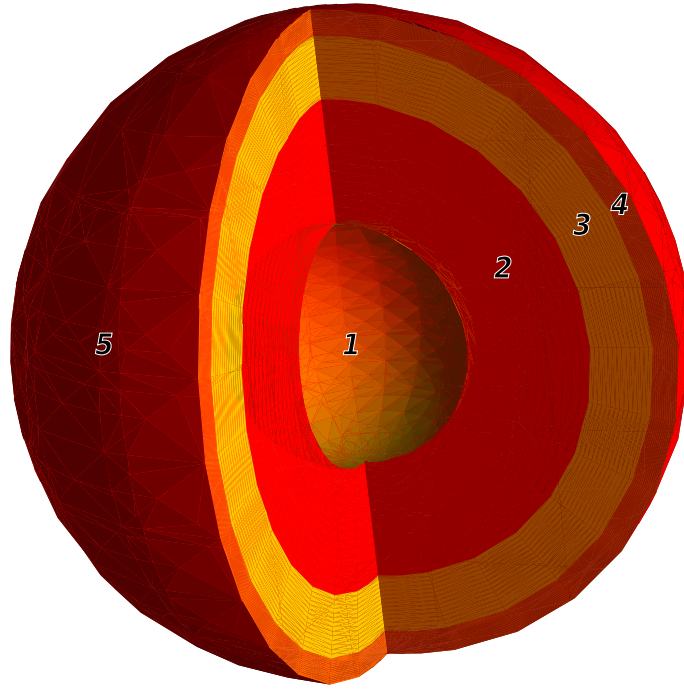


Fig. 2.1. Esquema de la estructura de estrellas de tipo *solar*. Las zonas mostradas corresponden a: 1) Núcleo estelar, 2) Zona radiativa, 3) Zona convectiva, 4) Fotósfera, 5) Cromósfera. La corona es la región alrededor de la cromósfera y la zona de transición está ubicada entre ellas. El esquema no está a escala. Fuente: [Guerra-Olvera \(2014\)](#).

donde $h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js es la constante de Planck; $k = 1,38 \times 10^{-23}$ JK⁻¹ es la constante de Boltzmann; $c = 3 \times 10^8$ ms⁻¹ es la velocidad de la luz y T es la temperatura. A este tipo de radiación se le denomina *radiación de cuerpo negro*.

La ley física que relaciona la longitud de onda en la que se produce el máximo de emisión de radiación y la temperatura de un cuerpo en equilibrio termodinámico, se conoce como *Ley de desplazamiento de Wien*; su deducción puede hacerse a partir de la ecuación 2.1 encontrando el máximo de la función, matemáticamente esta ley está dada por

$$\lambda_{max} = \frac{A}{T} \quad (2.2)$$

donde T es la temperatura, λ_{max} es la longitud de onda del máximo de emisión y $A = 0,0028976$ m·K se denomina *constante de Wien*. La Fig. 2.2 muestra las curvas de radiación de cuerpo negro a diferentes temperaturas. La curva con $T = 5772$ K corresponde a la temperatura superficial del Sol y su máximo de emisión (501.6 nm) se

encuentra en la región del verde, comprendida entre los 495 a 570 nm. El color verde de las plantas en nuestro planeta no es trivial; como el máximo de emisión del Sol se encuentra en dicha región, la naturaleza se adaptó para rechazar la radiación de esa longitud de onda, ya que produciría una sobre excitación en el proceso de fotosíntesis, deteniendo por completo el proceso de conversión de materia inorgánica a materia orgánica que es imprescindible para la constitución de los seres vivos.

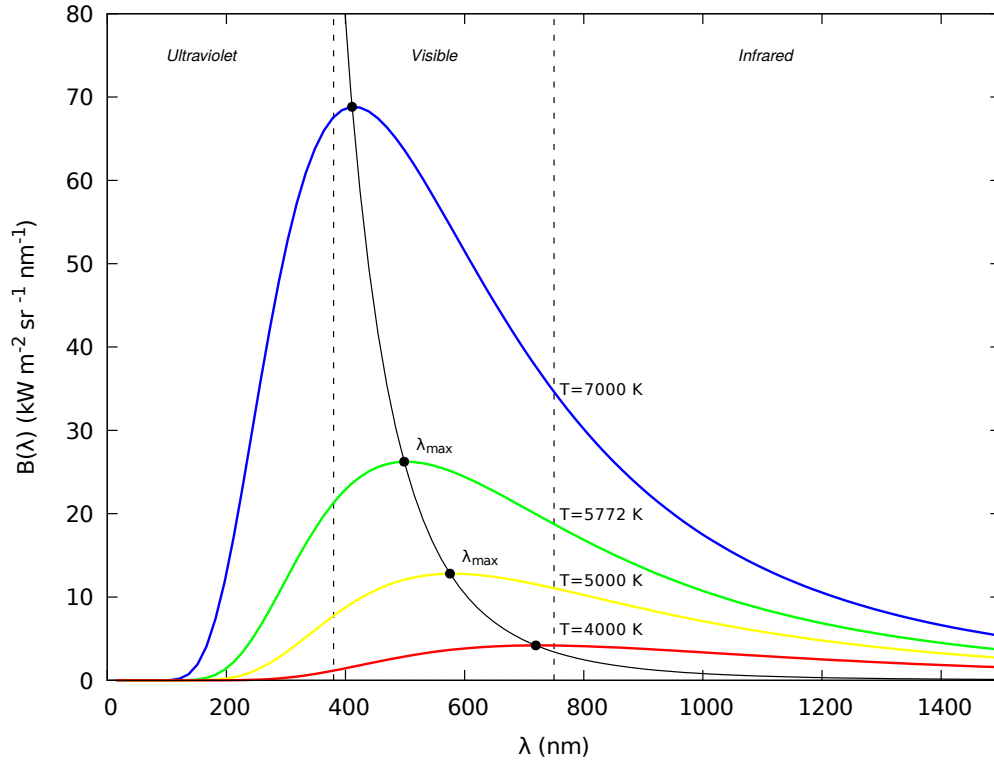


Fig. 2.2. Curvas de radiación de cuerpo negro a diferentes temperaturas. Se puede observar como la pendiente del continuo varía con la temperatura y el máximo se desplaza hacia la izquierda para temperaturas más altas.

Si consideramos un cuerpo que irradia isotrópicamente, al integrar la ecuación 2.1 a lo largo de todas las longitudes de onda se obtiene la *ley de Stefan-Boltzmann*

$$F = 4\pi \int B(\lambda) d\lambda = \sigma T^4 \quad (2.3)$$

donde $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ se conoce como *constante de Stefan-Boltzmann*. Para un radiador ideal o cuerpo negro, la ecuación 2.3 representa la energía irradiada por unidad de tiempo y por unidad de área.

Sin embargo las estrellas no se comportan como cuerpos negros perfectos, la Fig. 2.3 muestra la comparación entre un modelo de espectro estelar a $T = 4700 \text{ K}$ ¹ tomado de la base de datos espectros sintéticos de [Husser et al. \(2013\)](#), los cuales fueron generados con el código PHOENIX ([Hauschildt & Baron, 2005](#)); y una curva de cuerpo negro a la misma temperatura.

Claramente se puede apreciar que considerar una estrella como un cuerpo negro o radiador ideal, es una aproximación lejana a la realidad ya que son varias las líneas de absorción que disminuyen la intensidad del continuo espectral a ciertas longitudes de onda; este efecto se conoce como *line blanketing*².

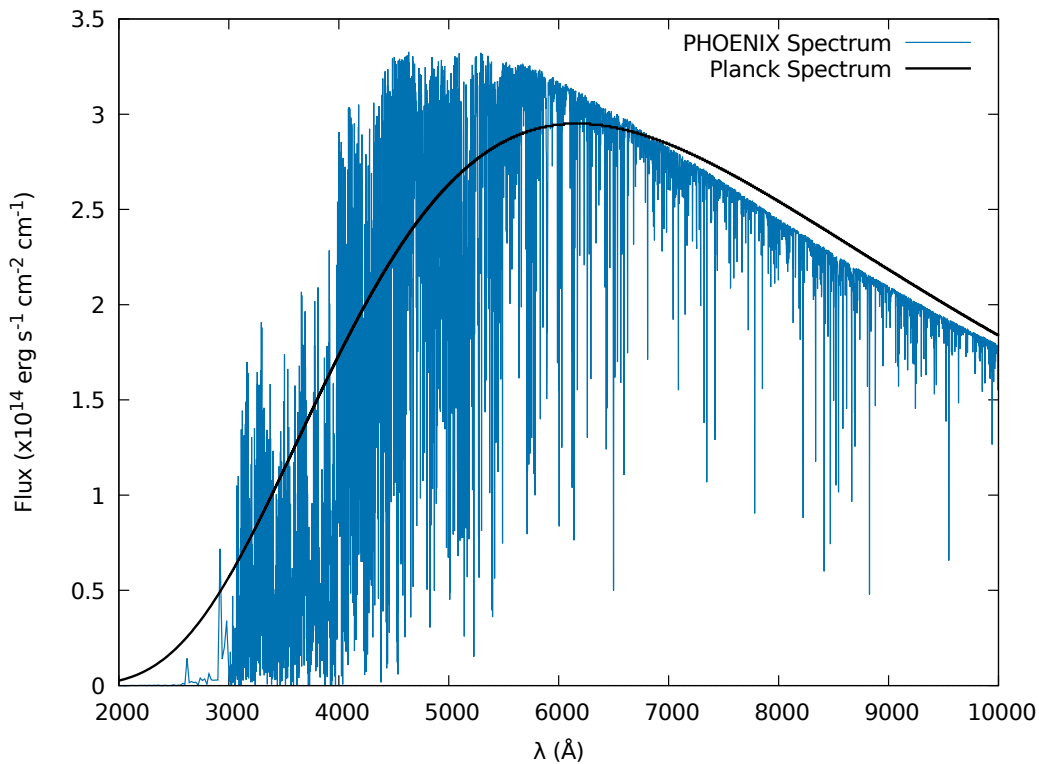


Fig. 2.3. Comparación entre un modelo de espectro estelar a $T = 4700 \text{ K}$ generado con el código PHOENIX, y una curva de cuerpo negro a la misma temperatura. La resolución del espectro se ha disminuido en un factor de 200.

Teniendo en cuenta la ecuación 2.3 podemos definir la *temperatura efectiva* (T_{eff}) si igualamos el flujo total integrado sobre todas las frecuencias, con el flujo de un

¹Se escogió esta temperatura ya que corresponde aproximadamente al promedio de las temperaturas efectivas de la muestra estelar a trabajar.

²De acuerdo a [Alvarez & Campusano \(1981\)](#), puede aceptarse el término en inglés para este efecto, en textos escritos en castellano.

cuerpo negro a temperatura T_{eff} . Por lo tanto, para una estrella esférica de radio R_* y temperatura T_{eff} , la *luminosidad estelar*³ definida como cantidad de energía por unidad de tiempo, será

$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (2.4)$$

2.2. Las Líneas Espectrales

Los electrones en un átomo se encuentran ligados al núcleo con cierta energía, la cual está determinada por el nivel energético en que se encuentran. Los niveles energéticos están bien definidos para cada especie atómica (elemento) y de acuerdo a la teoría cuántica, los electrones únicamente pueden encontrarse en dichos niveles. El nivel de energía más bajo ($n = 1$) se denomina *estado fundamental*. Si el electrón se encuentra en un nivel mas alto ($n = 2, 3, \dots$), decimos que ocupa un *estado excitado* y en general que el átomo esta excitado.

El proceso en el que un fotón interacciona con un electrón que al inicio está ligado al núcleo atómico y luego continua ligado después de la interacción, se denomina *interacción ligado-ligado*. Para entender este mecanismo recordemos primero que la energía E de un fotón depende de su frecuencia ν , o de su longitud de onda λ , de acuerdo a la expresión

$$E = h\nu = hc/\lambda \quad (2.5)$$

donde h es la constante de Planck y c es la velocidad de la luz.

Cuando la energía de un fotón es igual a la diferencia de energía entre dos niveles energéticos, éste es absorbido y dicha energía provoca que un electrón situado en un estado de energía inicial E_i más bajo, pase a un estado final E_f de energía más alto. Por lo tanto, solo serán absorbidos los fotones cuya energía sea igual a la diferencia $E_f - E_i$. La frecuencia o longitud de onda de los fotones que serán absorbidos por una determinada transición atómica (diferencia de niveles), puede obtenerse al igualar la energía del fotón dada por la ecuación 2.5, con la diferencia de energía de dichos niveles, esto es

$$h\nu = hc/\lambda = E_f - E_i \quad (2.6)$$

³En 2015, la IAU estableció la luminosidad solar en $L_{\odot} = 3,828 \times 10^{26}$ W.

Por lo tanto se obtiene que

$$\nu = \frac{E_f - E_i}{h} \quad o \quad \lambda = \frac{hc}{E_f - E_i} \quad (2.7)$$

La naturaleza tiende a los estados de menor energía y por ello, los átomos excitados son inestables. Un electrón en un estado de energía alto, puede descender espontáneamente a uno de menor energía. Cuando se produce esta transición, el átomo emite un fotón, cuya longitud de onda o frecuencia estará dada igualmente por la ecuación 2.7.

Los átomos de un gas ganan y pierden energía conforme colisionan. Como resultado, la distribución de velocidades de los átomos impactantes produce una distribución definida de los electrones a lo largo de sus orbitales atómicos. La población de los diferentes niveles de energía atómicos está termalizada y dada por la *distribución de Boltzmann*

$$\frac{N_i}{N_{Total}} = \frac{g_i}{Q} \exp\left(-\frac{\Delta E_i}{kT}\right) \quad (2.8)$$

donde N_i es la población en el i -ésimo nivel, N_{Total} es la población total de ese átomo, g_i es la degenerancia (peso estadístico) del nivel i y la energía sobre el estado base es ΔE_i . Q es la función de partición la cuál asegura que la suma sobre todas las poblaciones es la unidad, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura. Por lo tanto, si $N_i/N_{Total} = 0$ significa que no hay átomos en el nivel i ; y si $N_i/N_{Total} = 1$ implica que todos los átomos están en el nivel i .

En la fotosfera, la temperatura decae rápidamente hasta alcanzar un mínimo (T_{min}). El gradiente de temperatura en esta región permite que los átomos se encuentren en un determinado estado de excitación de manera que sea posible la absorción de fotones por el mecanismo explicado anteriormente. Esto implica que la atmósfera estelar es transparente excepto para fotones cuya longitud de onda se relaciona con la diferencia entre dos niveles de energía de los átomos presentes en ella, de acuerdo a la ecuación 2.7. Los fotones que cumplan dicha condición son absorbidos y emitidos múltiples veces de manera que quedan atrapados en la atmósfera estelar y por tanto, no serán encontrados en el espectro del cuerpo celeste; esta ausencia constituye una *línea de absorción espectral*.

Lo anterior explica porqué las líneas de absorción deben ser producidas donde el gas está más frío que la región donde se forma el continuo, aunque en realidad, tanto las líneas de absorción como el continuo se forman en la fotosfera. Sin embargo, la parte

más oscura de la línea (su centro) se origina en las regiones más altas, donde el gas está más frío. En contraparte, los costados o alas de la línea se producen en niveles mucho más profundos cercanos a la base de la fotosfera, la Fig. 2.4 ilustra este efecto.

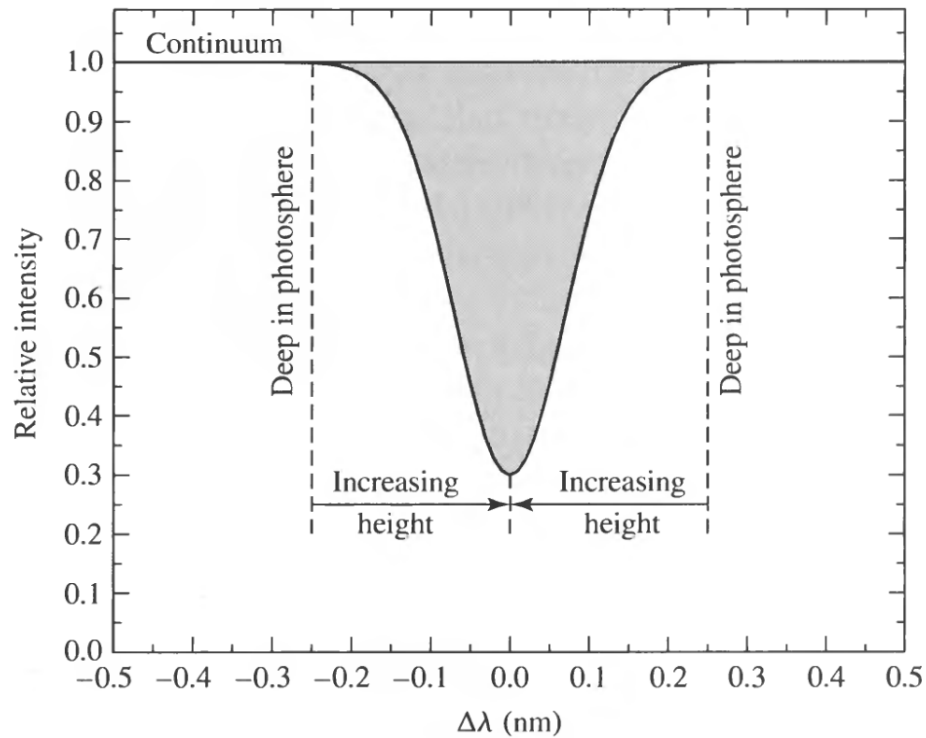


Fig. 2.4. Relación entre la intensidad de la línea de absorción y la profundidad en la fotosfera para una línea espectral típica. Fuente: [Carroll & Ostlie \(2006\)](#).

2.3. La Cromósfera

La cromósfera es la capa situada por encima de la fotosfera y por debajo de la corona, siendo una característica importante en estrellas frías con tipo espectral entre F y M. Su nombre proviene del color rojizo que se observa alrededor del Sol durante un eclipse solar, dicho color es provocado por la línea de emisión de H_α que se forma en esta región. Después de alcanzar el mínimo de temperatura en la fotosfera, la densidad del material decae y la temperatura se incrementa a medida que aumenta la altura de la atmósfera. La Fig. 2.5 muestra la variación de la temperatura y la densidad en la atmósfera solar.

Si bien los mecanismos responsables del calentamiento de la cromósfera aún no son del todo comprendidos, los procesos magnéticos se encuentran como principales

responsables en algunas estrellas especialmente de la secuencia principal, debido a que su rotación mantiene la actividad del dínamo (Schröder & Schmitt, 2013). Por otra parte, debido a la baja velocidad de rotación en estrellas más evolucionadas, los mecanismos magnéticos no son tan eficientes y en éstas, los mecanismos de calentamiento acústicos son más importantes, debido a las ondas acústicas generadas por movimientos turbulentos en la zona convectiva de la estrella. Aunque ambos mecanismos de calentamiento pueden coexistir, de acuerdo al estado evolutivo de la estrella, uno de los dos mecanismos dominará sobre el otro (Pérez-Martínez, 2013).

Las ecuaciones de Boltzmann y Saha (ver Rybicki & Lightman, 1986) muestran que las líneas de emisión que no son producidas en la fotosfera debido a las bajas temperaturas y altas densidades, no obstante pueden generarse en la cromósfera. Junto con las líneas de Balmer del hidrógeno, las líneas de He II, Fe II, Si II, Cr II y Ca II (en particular, las líneas H y K del Ca II, 3968 Å y 3933 Å respectivamente⁴) pueden aparecer en el espectro. (Carroll & Ostlie, 2006)

La detección de cromósferas estelares está restringida a unas pocas líneas las cuales deben satisfacer principalmente dos condiciones: 1) deben tener una profundidad óptica razonable en la cromósfera y 2) deben mostrar un comportamiento diferente en la cromósfera que en la fotosfera.

En la región visual, solo tres líneas satisfacen las condiciones anteriormente mencionadas: H y K del Ca II; y la línea de 10830 Å del Helio metaestable. Estas aparecen como una línea de emisión doblemente invertida (ver Fig. 1.1). La línea de 10830 Å no tiene una gran profundidad óptica, pero la temperatura de excitación es tan alta, que solo podría aparecer a temperaturas más altas que las de la fotosfera para la mayoría de estrellas de tipo tardío. (Zirin, 1971)

Las características de la línea de emisión doblemente invertida y en particular, el ancho a la mitad del máximo W_0 , puede ser afectado por la gravedad superficial como mostró el trabajo de Guerra-Olvera (2014) al modelar la línea de emisión K de Ca II de estrellas tipo solar con $T_{\text{eff}} = 5780$ K e igual ensanchamiento por turbulencia, usando el código PHOENIX (Hauschildt & Baron, 2005) (ver Fig. 2.6). A una temperatura dada, la colisión entre átomos se incrementa al aumentar la gravedad, causando con ello un ensanchamiento de la línea; esto se conoce como *ensanchamiento por presión* (o *pressure broadening* en inglés).

La cantidad de materia presente a lo largo del camino de un fotón, también juega un papel importante dentro del ensanchamiento de la línea. Podemos relacionar este efecto con la *densidad de masa columnar* (σ_{cm}), dada por la cantidad de masa presente de cierta especie a lo largo del camino, matemáticamente

⁴Nombradas así por Joseph von Fraunhofer (1787-1826) al estudiar el espectro del Sol en 1814.

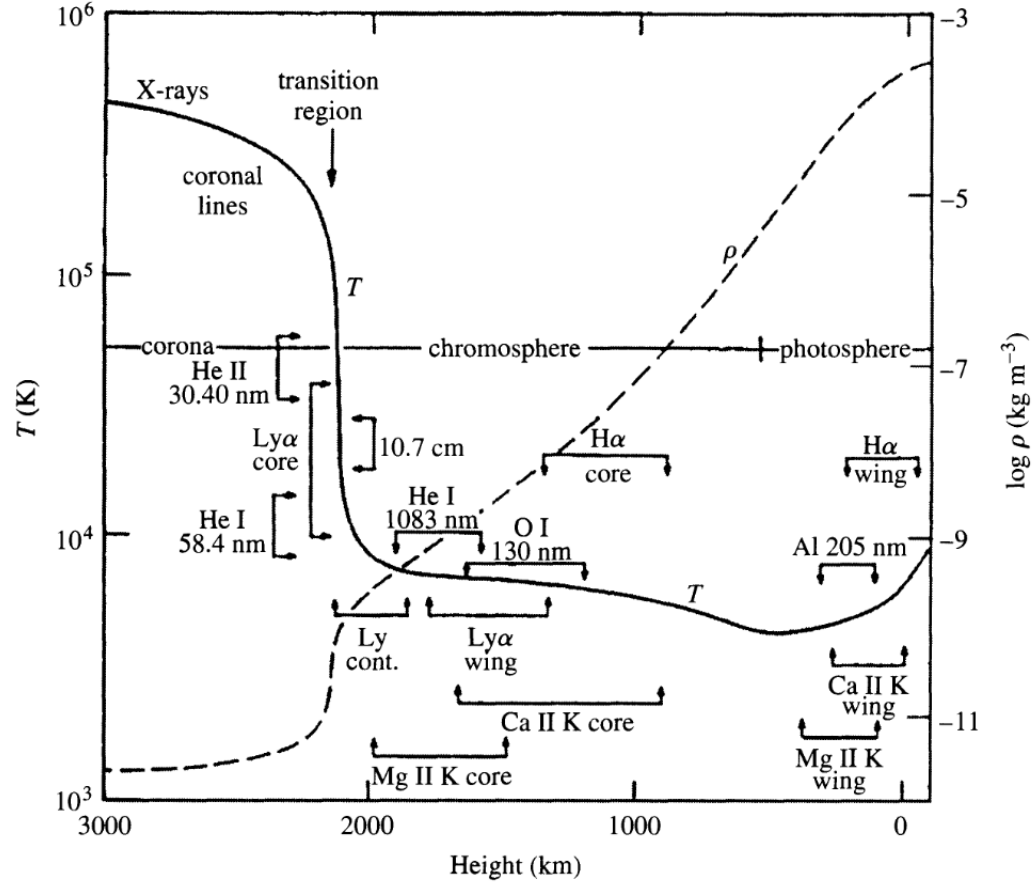


Fig. 2.5. Perfiles de temperatura (línea sólida) y densidad de masa (línea punteada) en relación con la altura de la atmósfera solar. Se muestra también las zonas de los perfiles donde se forman algunas líneas espectrales. Fuente: [Vernazza et al. \(1973\)](#) y modificado por [Carroll & Ostlie \(2006\)](#).

$$\sigma_{\text{cm}} = \int_a^b \rho(z) dz \quad (2.9)$$

donde ρ es la densidad de masa volumétrica y z es la altura. Si incrementamos el número de átomos de cierta especie presentes a lo largo del camino, el ensanchamiento por presión también aumentará.

En 1979, [Linsky & Haisch \(1979\)](#) separan una muestra de 21 estrellas en dos grupos mediante una línea divisoria en el diagrama HR. El primer grupo de estrellas denominado de tipo *solar* presenta líneas espectrales formadas a temperaturas entre 5×10^3 y 2×10^5 K, las cuales indican la presencia de cromósferas, regiones de transición y coronas a altas temperaturas. El segundo grupo de estrellas tipo *no-solar*, muestra

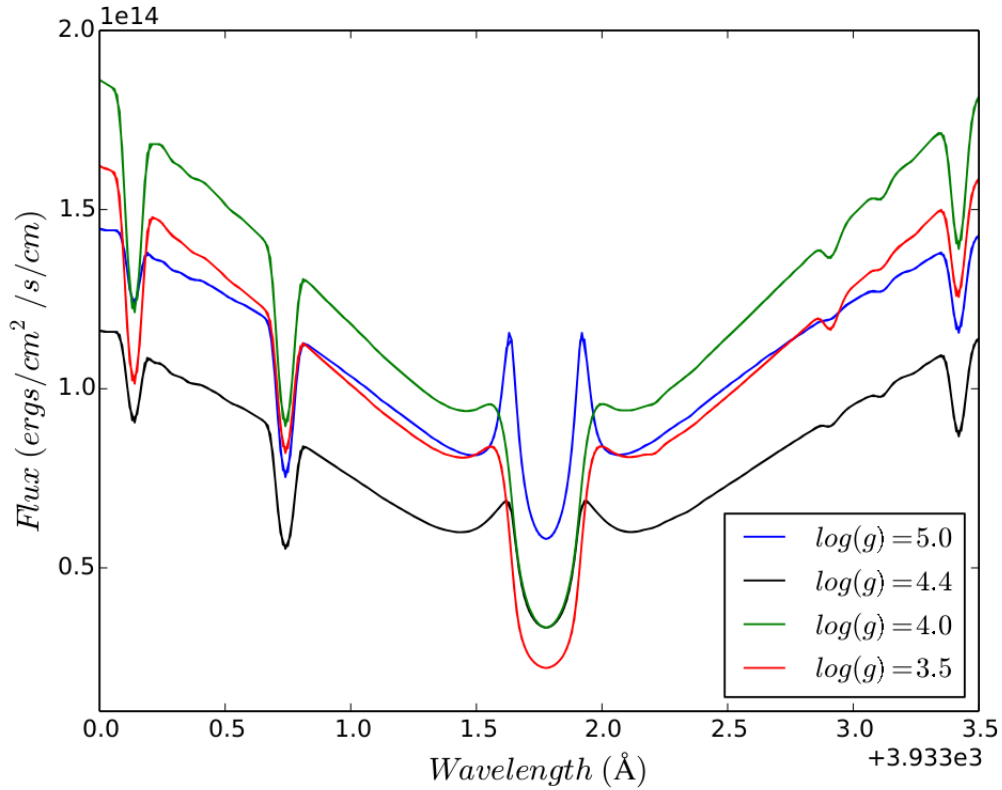


Fig. 2.6. Variación del ancho de la línea de emisión K de Ca II con la gravedad superficial para estrellas de tipo solar con $T_{\text{eff}} = 5780$ K usando el código PHOENIX. Fuente: Guerra-Olvera (2014).

líneas a temperaturas menores a 2×10^4 K, indicando la presencia de cromósferas y posiblemente vientos estelares. En trabajos posteriores, el concepto de una línea divisoria se trasladaría hasta el rango de los rayos X cuando se detectó material a temperaturas superiores a 10^5 K (Ayres et al., 1981).

Físicamente, esta línea divisoria es usualmente interpretada como la desaparición de actividad estelar, cuando la pérdida de masa se establece en la forma de vientos fríos (Huensch & Schröder, 1996), lo cual se puede relacionar de manera directa con la evolución estelar (Schröder et al., 2018).

Sin embargo, los trabajos de D. Reimers (Reimers (1982), Reimers et al. (1996)) mostraron que existen estrellas *híbridas* que poseen tanto líneas de emisión corales como vientos estelares.

Capítulo 3

El Efecto Wilson-Bappu

3.1. Antecedente Histórico

En 1913, G. Eberhard y K. Schwarzschild encontraron en placas de las *Hyades* y *Arcturus*, que la línea K de calcio ionizado mostraba una emisión en medio de una absorción, como se había observado anteriormente en espectros de regiones perturbadas de la superficie solar (Eberhard & Schwarzschild, 1913). En su trabajo, ellos destacan que una exposición de una hora de β Gem no mostró ninguna línea de emisión, sin embargo una estrella cercana en la misma placa, σ Gem, mostró una emisión extraordinariamente brillante.

Una de las conclusiones importantes del trabajo de Eberhard y Schwarzschild fue que las líneas de emisión observadas se encuentran en estrellas cuyos espectros son similares al del Sol. Además sugieren que el mismo tipo de actividad eruptiva que aparece en las manchas solares y prominencias, probablemente también se darán en estrellas como *Arcturus*, *Aldebaran* y en una escala muy grande en σ Gem.

3.2. Descubrimiento

El efecto Wilson-Bappu (en adelante WBE) es una importante relación empírica de la forma $M_v = C_1 \log W_0 + C_2$, con C_1 y C_2 constantes; entre la magnitud visual absoluta (M_v) y el ancho de la línea de emisión K de Ca II (W_0) en estrellas de tipo tardío (Wilson & Bappu, 1957). Las características más notables de esta relación es que se extiende sobre un gran rango de luminosidades estelares y además, es independiente del tipo espectral y en consecuencia de la temperatura.

O. C. Wilson y M. K. Vainu Bappu estudiaron una muestra espectral de 185 estrellas de tipo G, K y M tomadas o bien en el Observatorio Astronómico de Monte Wilson, o en el Observatorio Astronómico de Monte Palomar. Después de realizar algunas correcciones instrumentales debido a la resolución de las placas fotográficas usadas,

y al graficar M_v en función de $\log W_0$, encontraron una clara relación de naturaleza no estadística, la cual se muestra en la Fig. 3.1.

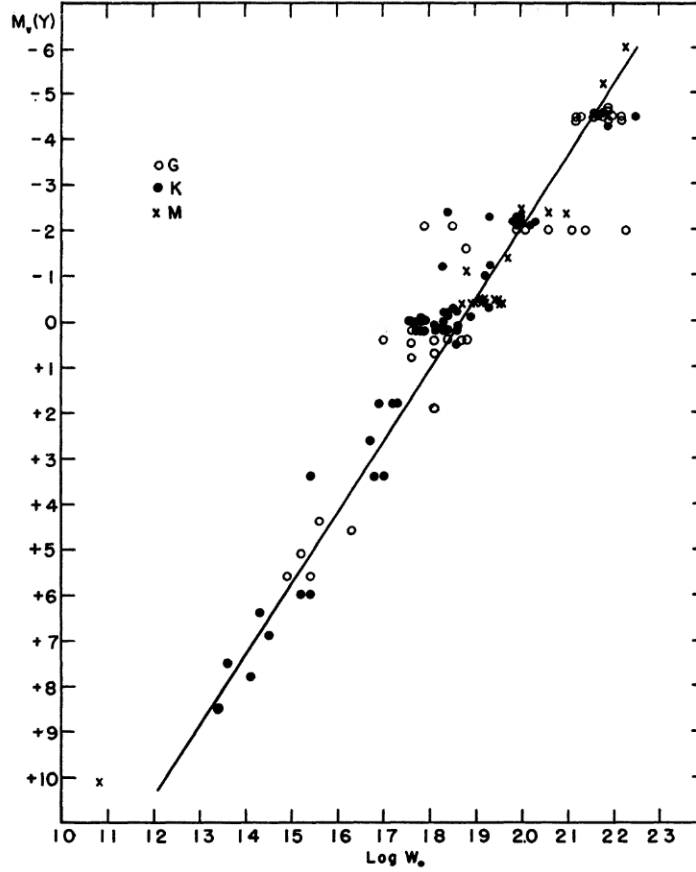


Fig. 3.1. Relación entre el logaritmo de los anchos de emisión corregidos de Ca II y las magnitudes absolutas de Yerkes en el artículo de [Wilson & Bappu \(1957\)](#). El conjunto de estrellas ha sido dividido en tres tipos espectrales G, K, M.

La evidencia presentada por Wilson y Bappu sugiere fuertemente que el ancho de la línea de emisión de Ca II es función únicamente de la magnitud absoluta de la estrella y por lo tanto, el mecanismo que la produce debe ser intrínseco a la física estelar. Finalmente, en su artículo se adelantan a los trabajos futuros comentando que, “...*O bien los anchos de la línea son una manifestación del efecto Doppler, es decir, movimientos probablemente de naturaleza turbulenta, o se deben a un gran espesor óptico...*”.

3.3. Estudios Posteriores

Ya que M_v no es un parámetro estelar fundamental, W_0 depende físicamente de la luminosidad $L \sim M_\star g^{-1} T_{\text{eff}}^4$ y en consecuencia, de la gravedad y temperatura. Los

trabajos posteriores acerca del WBE se concentraron en buscar una relación del ancho de la línea con los parámetros físicos de las estrellas como temperatura efectiva (T_{eff}), gravedad superficial ($\log g$) y metalicidad principalmente.

Reimers (1973) publicó un trabajo importante acerca de la relación entre W_0 con $\log g$ y T_{eff} . En su artículo, considerando la corrección bolométrica para M_v como una función lineal de T_{eff} , y una relación estadística entre la luminosidad estelar con la masa/radio, encuentra que $W_0 \sim g^{-0,2} T_{\text{eff}}^{1,1}$. Reimers además menciona que posiblemente el WBE representa una propiedad fundamental de las velocidades de turbulencia en la atmósfera de estrellas frías.

Usando como referencia el trabajo de D. Reimers, Neckel (1974) presenta una posible generalización del efecto Wilson-Bappu para estrellas frías. Asumiendo la relación $\log W_0 = -\alpha \log g + \beta \log T_{\text{eff}} + C$, donde α , β y C son constantes; y mediante resultados previos de otros autores, Neckel llega a: $\log W_0 = -0,223 \log g + 1,273 \log T_{\text{eff}} - 2,265$. Sin embargo, tanto Reimers como Neckel asumen en sus trabajos una relación entre la masa y la luminosidad que no es totalmente válida para estrellas que se mueven verticalmente en el diagrama HR, ya que actualmente están perdiendo masa mientras incrementan su radio. Un hecho que fue reconocido por ambos autores.

Por otro lado, a diferencia de la explicación propuesta por Reimers, Ayres et al. (1975) sugieren que la correlación ancho-luminosidad del WBE puede ser atribuida a la variación de la densidad de masa columnar fotosférica con la gravedad, si la profundidad óptica del continuo en el mínimo de la temperatura estelar (τ_c^*), es aproximadamente independiente de la gravedad. Usando una muestra de 13 estrellas con tipo espectral entre F - K y luminosidades entre III - IV, ellos demuestran que su consideración de $\tau_c^* \approx \text{constante}$, reproduce exitosamente el incremento del ancho de la línea con M_v ¹.

Más adelante, Lutz & Pagel (1982) realizan un estudio detallado de la dependencia del efecto Wilson-Bappu con $\log g$, T_{eff} y $[\text{Fe}/\text{H}]$ para una muestra de 55 estrellas gigantes con tipos espectrales entre G8 - K0 y luminosidades entre Ib - V. Ellos determinan que: $\log W_0 = -0,22 \log g + 1,65 \log T_{\text{eff}} + 0,10[\text{Fe}/\text{H}] - 3,69$. Sin embargo, el estudio de Gomez et al. (2012) demostraría finalmente que el WBE es insensible a la metalicidad al usar una muestra de estrellas con M_v entre +13 a -5 y cubriendo desde enanas M a supergigantes Ia, pertenecientes a dos cúmulos globulares; en conjunto con paralajes de *Hipparcos* y observaciones del Apache Point Observatory.

Posteriormente, Park et al. (2013) realizan un estudio del WBE como un excelente indicador de la gravedad superficial y como indicador de distancia estelar, para una muestra de 125 estrellas de tipo tardío. Usando los modelos de atmósferas estelares de Kurucz ATLAS9 (Kurucz, 1993) y el código de análisis de abundancias MOOG (Snedden,

¹Se dará una explicación detallada posteriormente.

1973), encuentran la temperatura efectiva, la gravedad superficial, la metalicidad y la microturbulencia. Finalmente proponen una relación entre $\log g$ y W_0 de la forma $\log g = -5,85 \log W_0 + 9,97 \log T_{\text{eff}} - 23,48$.

3.4. La Física del WBE

Las líneas H y K de Ca II (396.8 nm y 393.3 nm respectivamente) se generan en la región de la atmósfera estelar entre la parte superior de la fotosfera y la parte inferior de la cromósfera, donde la temperatura y la densidad decaen lo suficiente para producirlas.

Anteriormente, tanto la línea H como la línea K de Ca II eran usadas para estudiar el WBE debido a la baja resolución de los espectros usados. Sin embargo, con la espectroscopía de alta resolución, se encontró que la línea H se ve contaminada por otras líneas adyacentes (Lutz, 1970), por lo tanto, en este trabajo se usará únicamente la línea K para estudiar el WBE.

En particular, el perfil de la línea K presenta las siguientes características (ver Fig. 3.2) las cuales se han nombrado como sigue:

- La absorción K_1 se genera en la fotosfera, donde el material se vuelve ópticamente grueso debido a que la temperatura decae, a medida que la altura de la atmósfera aumenta.
- La emisión K_2 se genera en la cromósfera. En la base de esta capa la densidad disminuye de manera que el material se vuelve ópticamente delgado, además ésta no se encuentra en equilibrio radiativo y su temperatura se incrementa con la altura. Para el caso del Sol, la temperatura en esta región pasa de los 5700 K a los 20000 K en la zona más externa (Vernazza et al., 1973). Por lo tanto, las líneas de emisión de Ca II se generan debido a las condiciones de baja densidad y alta temperatura.
- Debido al gran incremento de la temperatura en las capas superiores de la cromósfera, la densidad electrónica no es suficiente para mantener el equilibrio local termodinámico y la dispersión de los fotones da como resultado una temperatura de excitación mucho menor que la temperatura cinética, generando con ello una autoabsorción en el centro las líneas K_3 .

Los picos máximos de la emisión K_2 en el lado «azul» y «rojo» (K_{2B} y K_{2R}) no siempre tienen igual intensidad. La interpretación de dichas asimetrías aún no es del todo clara y puede ser bastante complicada. Una autoabsorción K_3 desplazada hacia el azul es interpretada generalmente como un indicador de un fuerte viento estelar. Sin embargo, una acreción con simetría no esférica de material en la cromósfera, puede producir una aparente autoabsorción desplazada hacia el azul (Linsky, 1980).

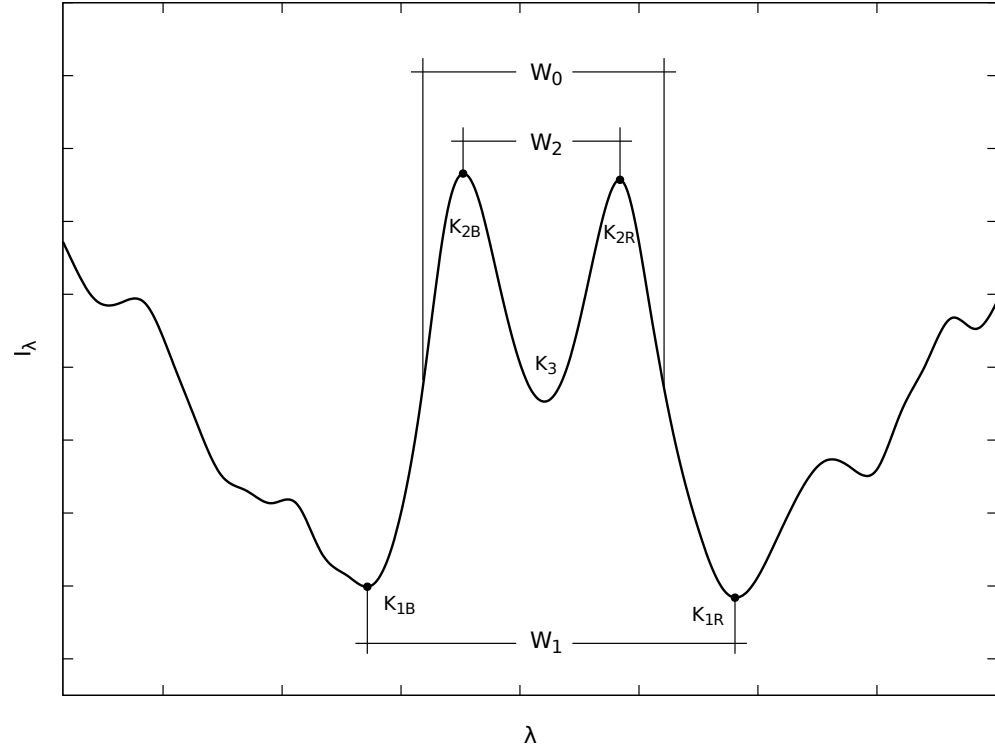


Fig. 3.2. Perfil típico de la línea de emisión K de Ca II. Se indican los mínimos de la emisión como K_{1B} y K_{1R} , los máximos como K_{2B} y K_{2R} , y la autoabsorción como K_3 . Los subíndices B y R corresponden al lado «azul» y «rojo» de la línea de emisión.

Si bien originalmente [Wilson & Bappu \(1957\)](#) usaron el ancho de los bordes mínimos de la emisión de la línea K de Ca II para sus estudios (W_1 en la Fig. 3.2), [Lutz \(1970\)](#) demostró que el ancho a la altura media del máximo, definido como la diferencia en longitud de onda entre la mitad de la intensidad de dos picos de emisión (W_0 en la Fig. 3.2) está mejor correlacionado con M_V .

Siguiendo el trabajo de [Reimers \(1973\)](#) y [Neckel \(1974\)](#), se puede mostrar la relación entre W_0 y los parámetros estelares $\log g$, M_* , T_{eff} . Del trabajo de [Wilson & Bappu \(1957\)](#) sabemos que W_0 y M_V cumplen la relación

$$\log W_0 = C_1 M_V + C_2 \quad (3.1)$$

con C_1 y C_2 constantes. Sin embargo, la magnitud bolométrica (M_{Bol}) y la magnitud visual (M_V) cumplen que

$$M_{\text{Bol}} = M_V + \text{BC}_V \quad (3.2)$$

donde BC_V es la *corrección bolométrica* para la magnitud visual. Teniendo en cuenta la relación entre M_{Bol} y la luminosidad estelar L_\star

$$M_{\text{Bol}} = 4,74 - 2,5 \log \left(\frac{L_\star}{L_\odot} \right) \quad (3.3)$$

donde $L_\odot = 3,828 \times 10^{26}$ W es la luminosidad solar. Sustituyendo las ecuaciones 3.2 y 3.3 en 3.1 llegamos a

$$\log W_0 = -2,5C_1 \log \left(\frac{L_\star}{L_\odot} \right) - C_1 \text{BC}_V + C_3 \quad (3.4)$$

con $C_3 = 4,74 + C_2$. Teniendo en cuenta la relación de L_\star con R_\star y T_{eff} (ecuación 2.4), dividiendo entre L_\odot y aplicando el logaritmo

$$\log \left(\frac{L_\star}{L_\odot} \right) = \log \left(\frac{4\pi\sigma}{L_\odot} \right) + \log (R_\star^2) + 4 \log T_{\text{eff}} \quad (3.5)$$

Sustituyendo 3.5 en 3.4 y agrupando constantes

$$\log W_0 = -2,5C_1 \log (R_\star^2) - 10C_1 \log T_{\text{eff}} - C_1 \text{BC}_V + C_4 \quad (3.6)$$

con $C_4 = 4,74 + C_2 - 2,5C_1 \log(4\pi\sigma/L_\odot)$. El primer termino a la derecha de la ecuación 3.6 se puede asociar matemáticamente a la gravedad superficial, mientras que los últimos términos dependen básicamente de la temperatura efectiva.

Los trabajos de Ayres et al. (1975) y Ayres (1979) muestran que el WBE puede entenderse como una variación de la densidad de masa columnar (σ_{cm}) con la gravedad (g), si el promedio de la profundidad óptica del continuo al mínimo de temperatura estelar (T_{min}) es relativamente independiente de la gravedad superficial. Sin embargo, ellos no consideran la dependencia de W_0 con T_{eff} , ya que la variación en la temperatura es relativamente pequeña comparada con la gravedad superficial, para la muestra estelar considerada en su trabajo.

Ayres et al. (1975) inician su estudio considerando un equilibrio hidrostático ($\partial P / \partial z = -\rho g$) y teniendo en cuenta la ecuación 2.9, la presión del gas (P_g) estará relacionada con la gravedad (g) y la densidad de masa columnar (σ_{cm}) (aumentando hacia adentro) como

$$P_g \propto g \cdot \sigma_{\text{cm}} \quad (3.7)$$

En el rango de temperatura considerado $3000 \text{ K} \leq T_{\text{min}} \leq 5000 \text{ K}$, el hidrógeno es predominantemente neutro y la presión electrónica (P_e) está dominada por la ionización de metales, en consecuencia

$$P_e \propto P_g \cdot A_{\text{met}} = g \cdot \sigma_{\text{cm}} \cdot A_{\text{met}} \quad (3.8)$$

donde A_{met} es la abundancia de metales fácilmente ionizables relativa al hidrógeno. A su vez, la presión electrónica y la opacidad (κ) son proporcionales ($P_e \propto \kappa$), por lo tanto

$$\kappa \propto g \cdot \sigma_{\text{cm}} \cdot A_{\text{met}} \quad (3.9)$$

Integrando sobre σ_{cm} , la profundidad óptica del continuo en el mínimo de la temperatura estelar (τ_c^*), escala como

$$\tau_c^* \propto g \cdot \sigma_{\text{cm}}^* \cdot A_{\text{met}} \quad (3.10)$$

donde σ_{cm}^* es la densidad de masa columnar en el mínimo de temperatura estelar. Ahora, si todas las cromósferas tienen la misma profundidad óptica del continuo en el mínimo de temperatura, entonces $\tau_c^* \sim \text{constante}$, lo cual implica directamente que τ_c^* es independiente de la gravedad y con ello

$$\sigma_{\text{cm}}^* \propto g^{-1/2} \cdot A_{\text{met}}^{-1/2} \quad (3.11)$$

Esto implica en términos físicos que, estrellas con baja gravedad, requieren más masa sobre sus fotósferas que estrellas con alta gravedad para profundidades ópticas similares en el continuo. O dicho de otro modo, atmósferas estelares con baja gravedad son menos densas, y si están geométricamente muy extendidas, sus capas exteriores tendrán una gran profundidad óptica.

Finalmente, [Ayres et al. \(1975\)](#) obtienen la relación entre W_0 y g al considerar un ensanchamiento de la línea por presión e ignorando los efectos de ensanchamiento por Van der Waals, de manera que

$$\tau_c^* \propto A_{\text{Ca}} \cdot \sigma_{\text{cm}}^* / W_0^2 \quad (3.12)$$

donde A_{Ca} es la abundancia de calcio relativa al hidrógeno, asumiendo que todos los átomos de calcio están en el estado base de Ca^+ . Además, el mínimo de la línea K aparece aproximadamente en la región donde la profundidad óptica se vuelve $\tau \approx 2/3$ en el mínimo de temperatura, por lo tanto

$$\sigma_{\text{cm}}^* \propto W_0^2 / A_{\text{met}} \quad (3.13)$$

donde asumen que la abundancia de otros elementos fácilmente ionizables escala igual que A_{Ca} . Sustituyendo 3.13 en 3.11 obtienen

$$W_0 \propto g^{-1/4} \cdot A_{\text{met}}^{1/4} \quad (3.14)$$

De la *ecuación de Saha* sabemos que, si la densidad de electrones libres se incrementa, el número de átomos en estados altos de ionización decrece; debido a que hay más electrones con los cuales el ión se puede recombinar. Por lo tanto, si la densidad de electrones libres crece debido a temperaturas estelares más altas, es de esperar que la fracción de átomos de calcio en el estado de ionización II, $N_{\text{Ca II}}/N_{\text{Ca Total}}$, también aumente, provocando en consecuencia un ensanchamiento de la línea.

Teniendo en cuenta lo anterior, el ancho de la línea K de Ca II está relacionado principalmente con la densidad de masa columnar (ecuación 3.13), que a su vez depende directamente de la gravedad superficial (ecuación 3.11); sin embargo, por la ecuación de Saha, se puede esperar una segunda dependencia relacionada con la temperatura, la cual afecta a la cantidad de átomos de Ca II. Matemáticamente

$$\boxed{\log W_0 = \alpha \log g + f(T_{\text{eff}}) + C} \quad (3.15)$$

donde $f(T_{\text{eff}})$ es una función de la temperatura efectiva y C es una constante. Se especificará más adelante la función de la temperatura.

Capítulo 4

Parámetros Físicos de la Muestra Estelar

Como se mostró en el capítulo anterior, el WBE depende en principio de los parámetros fundamentales de la estrella tales como T_{eff} , M_{\star} y $\log g$. En este capítulo se detalla las técnicas y mediciones realizadas para la determinación de los parámetros físicos de la muestra de estrellas a trabajar.

4.1. Selección de la Muestra Estelar

La muestra de estrellas a estudiar se seleccionó de manera que cubra un rango en el tipo espectral desde estrellas F a G en su mayoría, y de luminosidades entre Ia/Ib a IV. Se realizó una inspección visual de 968 espectros de la base de datos del TIGRE y de ellos, se escogió únicamente 14 que cumplan con las características de tipo espectral y luminosidad antes mencionadas. Además, los espectros debían tener una buena S/N (~ 100) que permita la correcta medición de la línea K de Ca II.

Se escogieron además dos estrellas de la secuencia principal para mejorar la estimación de la dependencia de W_0 con $\log g$. Estas estrellas se diferencian principalmente de las demás al tener una gravedad superficial mayor al resto de la muestra y sirven como límite superior en $\log g$ (ver la Fig. 6.2).

4.2. Temperatura Efectiva

Gracias a la enorme cantidad de espectros de alta resolución recolectados por el proyecto *Gaia* ([Gaia Collaboration, 2018](#)), se hizo necesario el desarrollo de nuevas herramientas informáticas para el análisis de datos, que permitan un procesamiento eficaz de los espectros estelares.

El software *iSpec* (Blanco-Cuaresma et al., 2014), permite un tratamiento eficaz de las observaciones espectrales así como la determinación de los principales parámetros estelares aplicando dos de las estrategias más populares: 1) la técnica de ajuste de espectros sintéticos y 2) el método de ancho equivalente.

Para el primer caso, *iSpec* compara un espectro observado con otro sintético. Un algoritmo de mínimos cuadrados minimiza la diferencia entre el espectro sintético y el observado. En cada iteración, el algoritmo varía un parámetro libre a la vez y pronostica en qué dirección debe moverse. Se pueden seleccionar regiones específicas del espectro para minimizar el tiempo de cálculo, centrándose en las regiones más relevantes para identificar mejor las estrellas (es decir, las alas del triplete $H\alpha$ /Mg I, líneas Fe I y Fe II).

Para el segundo caso, *iSpec* ajusta modelos gaussianos a una lista determinada de líneas de Fe I y Fe II; y de su área integrada, deriva su ancho equivalente y por lo tanto, su abundancia. El algoritmo para determinar los parámetros atmosféricos se basa en la misma técnica de mínimos cuadrados mencionada anteriormente (Blanco-Cuaresma et al., 2014).

Teniendo en cuenta el tipo espectral, mediante la comparación con espectros sintéticos y realizando un ajuste del continuo, se encontró con *iSpec* la temperatura efectiva de cada una de las estrellas. La Tabla 4.1 muestra los resultados obtenidos para la temperatura efectiva (T_{eff}), la gravedad superficial ($\log g$) y la metalicidad ($[M/H]$). Sin embargo, el cálculo de T_{eff} para la estrella HD156014 arrojó un valor de ≈ 4471 K, lo cual dudosamente corresponde al valor real, teniendo en cuenta que es una gigante de tipo espectral M. *iSpec* no es muy eficiente a bajas temperaturas, además los anchos considerables de las bandas moleculares y la presencia de polvo en espectros de estrellas frías dificulta la correcta estimación. Por lo tanto, se muestra el valor de T_{eff} encontrado por Moravveji et al. (2013). Se dan más detalles sobre esto en el capítulo 6.

4.3. Masa Estelar

La masa estelar es otro de los parámetros fundamentales dentro del WBE como se mostró en la ecuación 3.6. Estimar la masa de una estrella a partir de parámetros observables no es una tarea trivial y existen básicamente dos formas de hacerlo: 1) la determinación directa usando estrellas binarias o 2) la inferencia de la masa estelar usando modelos estelares y/o evolutivos.

Para el primer caso basta con aplicar la mecánica newtoniana, en particular la tercera ley de Kepler, a los espectros de las estrellas que muestran *líneas espectrales duplicadas* debido a la superposición de sus espectros. Por otra parte, para el segundo caso en donde las estrellas no son binarias o se desconoce que lo sean, el método consiste

Tabla 4.1. Resultados de T_{eff} , $\log g$ y $[M/H]$ encontrados con **iSpec**

1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	Star	ST ¹	T_{eff} (K)	ΔT_{eff} (K)	$\log g^3$ (dex)	$\Delta(\log g)^3$ (dex)	$[M/H]$ (dex)	$\Delta[M/H]$ (dex)
1	HD8512	K0IIIb	4685	11	2.18	0.05	-0.04	0.01
2	HD10476	K1V	5096	32	4.36	0.07	-0.12	0.02
3	HD27371	G9.5IIIab	4710	11	2.03	0.02	0.10	0.01
4	HD28305	G9.5III	4675	10	1.77	0.04	0.11	0.01
5	HD28307	G9III	4737	12	2.05	0.03	0.10	0.01
6	HD31398	K3II-III	4384	19	1.60	0.06	0.16	0.02
7	HD81797	K3IIIa	4195	5	1.12	0.02	0.07	0.01
8	HD82210	G5III-IV	5256	23	3.60	0.04	-0.22	0.02
9	HD96833	K1III	4545	9	1.89	0.02	0.01	0.01
10	HD114710	F9.5V	5962	17	4.41	0.04	-0.09	0.01
11	HD124897	K1.5III	4332	9	1.19	0.02	-0.49	0.01
12	HD156014 ²	M5Ib-II	3280	87	2.11	0.03	0.50	0.01
13	HD159181	G2Ib-IIa	5294	14	1.73	0.04	-0.01	0.01
14	HD186791	K3II	4163	5	0.74	0.03	0.00	0.01
15	HD205435	G8III	5020	13	2.93	0.05	-0.04	0.01
16	HD209750	G2Ib	5289	10	1.30	0.03	0.00	0.01

¹ Tipo espectral mostrado en la base de datos SIMBAD.² T_{eff} por [Moravveji et al. \(2013\)](#).³ El valor de $\log g$ se muestra únicamente como referencia y no se usará en este trabajo ya que es un valor encontrado mediante un ajuste sintético al espectro.

en aplicar un modelo estelar evolutivo basado en la estimación de su temperatura efectiva y su luminosidad, lo cual implica conocer la distancia a la que se encuentra. Sin embargo, este segundo método requiere una calibración precisa usando estrellas con masa conocida por el primer método.

El diagrama Hertzsprung-Russell (en adelante HRD), es un gráfico de dispersión de estrellas en donde se indica la relación entre la luminosidad estelar y la temperatura efectiva. La Fig. 4.1 muestra un ejemplo de este diagrama, donde se han indicado sus clasificaciones de acuerdo al sistema Morgan-Keenan utilizando las letras O, B, A, F, G, K, y M, representando desde las más calientes (tipo O) a las más frías (tipo M). Además, cada clase se subdivide usando un dígito numérico, con el 0 para las estrellas más calientes y 9 para las más frías, de esta forma una secuencia de mayor a menor temperatura sería G8, G9, K0, K1. El sistema MK añade un número romano que indica la clase de luminosidad y se dividen básicamente en: Ia - Ib para las *supergigantes*, II - III para las *gigantes*, IV para las *subgigantes*, V para estrellas de la *secuencia principal* y D para las *enanas blancas*.

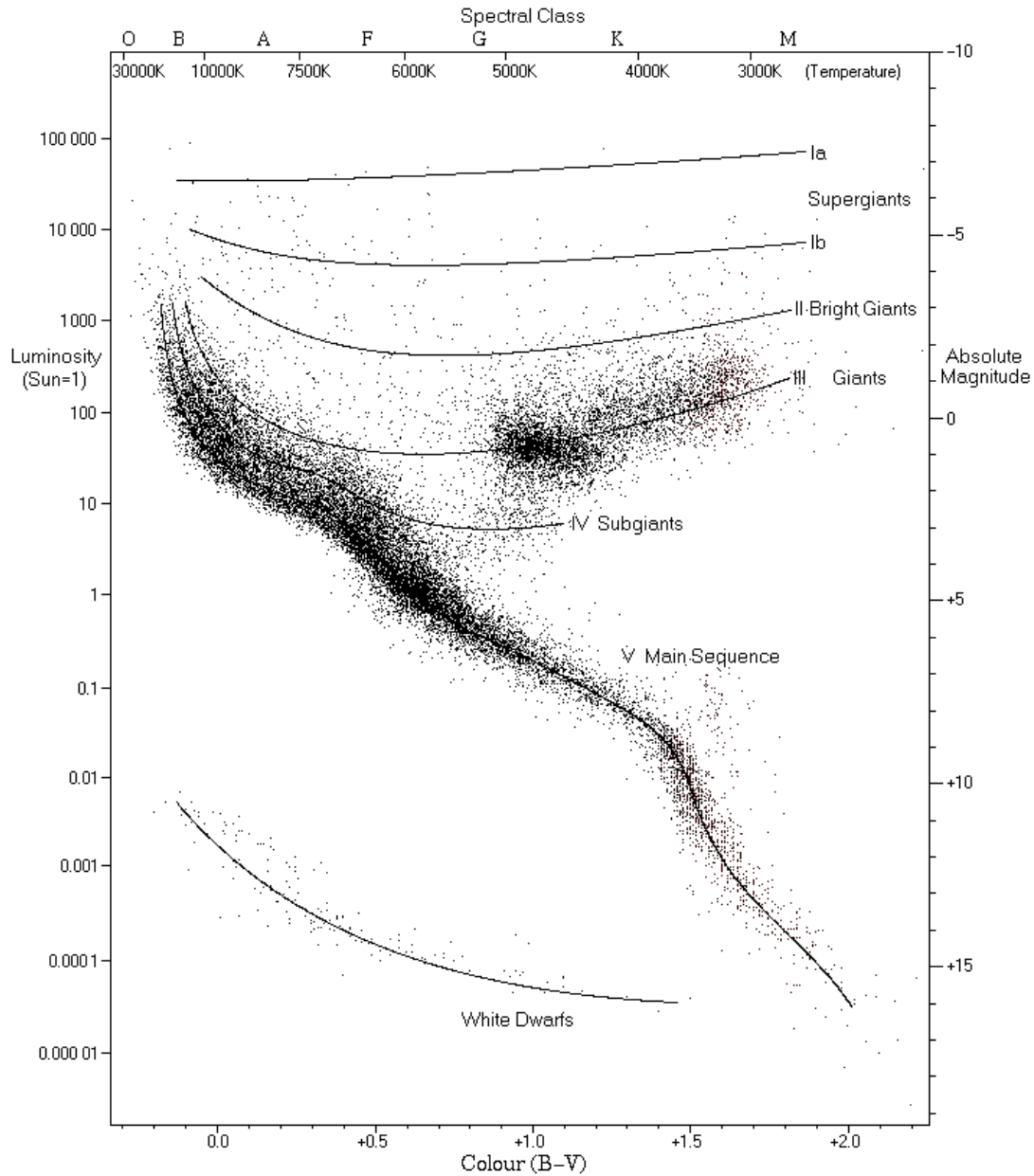


Fig. 4.1. Diagrama Hertzsprung-Russell observacional con 22.000 estrellas del Catálogo *Hipparcos* y 1.000 del Catálogo *Gliese* de estrellas cercanas. Imagen original creada por Richard Powell, Fuente: <http://www.atlasoftheuniverse.com/hr.html>

Se dice que una estrella se encuentra en la secuencia principal, cuando su principal fuente de energía es la fusión de hidrógeno en helio dentro de su núcleo mediante la cadena protón-protón ($p - p$), la cual transforma cuatro núcleos de H en uno de He. El tiempo que una estrella pasa en la fase de secuencia principal depende en principio

de la masa de la misma, desde unos pocos millones de años para las más masivas, a incluso trillones para las menos masivas.

Posteriormente, la fuente de energía mediante la cadena $p - p$ cesa en su núcleo y éste se contrae, provocando un incremento de su temperatura y permitiendo la fusión de H en He en la capa adyacente al núcleo mediante el ciclo CNO (carbono, nitrógeno, oxígeno). En esta etapa la estrella empieza a incrementar gradualmente su tamaño y causando un decaimiento de su temperatura superficial llevándola a la fase de subgigante. En ésta etapa la estrella se mueve hacia la parte derecha del HRD a una luminosidad casi constante.

Cuando la capa de convección se mezcla con la capa donde se está fusionando hidrógeno, ocurre un incremento de la abundancia superficial de He (efecto conocido como *first dredge up*), provocando un crecimiento del tamaño y la luminosidad debido a la eficacia de la convección como método de transporte energético. Una estrella que se encuentra en esta etapa se dice que está en su fase de gigante roja.

[Pols et al. \(1998\)](#) calcularon una malla empírica de trayectorias evolutivas para un rango de masas entre 0.5 y 50 M_{\odot} , espaciadas aproximadamente 0.1 en $\log M_{\star}$ y con metalicidades $Z = 0,0001, 0,0003, 0,001, 0,004, 0,01, 0,02, 0,03$. El código trata la mezcla convectiva y semiconvectiva como un proceso de difusión, resolviendo simultáneamente las ecuaciones para la estructura y la composición química. Las abundancias iniciales de hidrógeno y helio se asumieron como funciones de la metalicidad $Z = [M/H]$ de acuerdo a $X = 0,76 - 3,0Z$ y $Y = 0,24 + 2,0Z$ y considerando $Z_{\odot} = 0,02$. Este código fue puesto a prueba mediante test cuantitativos usando binarias eclipsantes ζ Aurigae, las cuales tienen una estrella gigante o supergigante de tipo tardío como miembro primario ([Schröder et al., 1997](#)).

Teniendo en cuenta la relación entre la magnitud bolométrica y la luminosidad estelar dada por la ecuación 3.3, y usando la ecuación 3.2 obtenemos

$$\log \left(\frac{L_{\star}}{L_{\odot}} \right) = \frac{4,74 - M_{\text{Bol}}}{2,5} = \frac{4,74 - M_V - BC_V}{2,5} \quad (4.1)$$

Las magnitudes absolutas se obtuvieron a partir de las magnitudes aparentes de la literatura y la paralaje del catálogo de *Gaia* DR2 ([Gaia Collaboration, 2018](#)). Solo para estrellas muy brillantes donde la estimación de la distancia mediante las paralajes de *Gaia* presenta demasiada incertidumbre de acuerdo al trabajo de [Bailer-Jones et al. \(2018\)](#), se usaron los datos del catálogo *Hipparcos* ([ESA, 1997](#)).

Para calcular la luminosidad estelar mediante la ecuación 4.1, se usaron los resultados del trabajo de [Flower \(1996\)](#), el cuál expresa la corrección bolométrica en

el filtro V (BC_V) como una función de la temperatura efectiva de la estrella con un polinomio de la forma

$$BC_V = a + b(\log T_{\text{eff}}) + c(\log T_{\text{eff}})^2 + \dots \quad (4.2)$$

para tres diferentes rangos de temperatura. Los coeficientes a, b, c, \dots se muestran en su Tabla 6 para cada intervalo, pero debido a un error tipográfico, las potencias de diez de dichos coeficientes fueron omitidos. Hecho que fue aclarado y corregido por [Torres \(2010\)](#).

[Flower \(1996\)](#) calcula $\log T_{\text{eff}}$ como una función polinómica del índice de color B-V de la forma

$$\log T_{\text{eff}} = a + b(B-V) + c(B-V)^2 + \dots \quad (4.3)$$

donde los coeficientes a, b, c, \dots se toman separadamente para supergigantes o para estrellas de la secuencia principal, subgigantes y gigantes.

Sin embargo, en nuestra muestra los valores de BC_V varían un poco si se considera el valor asociado al índice de color usando las ecuaciones 4.2 y 4.3; o directamente aplicando la ecuación 4.2 a los valores de temperatura efectiva encontrados con *iSpec*. Para tener una mejor aproximación y eliminar las posibles diferencias, se considera un promedio de los valores de BC_V asociados a B-V y a T_{eff} . No se realizan correcciones por extinción interestelar ya que las distancias de nuestra muestra son menores a 150 pc. La Tabla 4.2 muestra los resultados de nuestros cálculos.

Usando las luminosidades de la Tabla 4.2 y las temperaturas efectivas de la Tabla 4.1 se ubican las estrellas en un diagrama Hertzsprung-Russell (ver Fig. 4.2) y se estiman las masas estelares usando una malla de trayectorias evolutivas correspondientes a diferentes masas estelares pero con metalicidad solar ($[M/H]_{\odot} = 0,02$). Esta malla se calculó mediante el código desarrollado por [Pols et al. \(1998\)](#).

La mayoría de las estrellas de la muestra tiene una metalicidad muy cercana a la solar (ver la Tabla 4.1). Sin embargo, para las estrellas con una diferencia considerable en relación a la metalicidad solar, se debe tener en cuenta que un aumento de metalicidad produce un incremento de opacidad radiativa estelar, haciendo a la estrella menos luminosa, más fría y provocando en consecuencia un corrimiento de la trayectoria evolutiva hacia la derecha y hacia abajo ([Schröder et al., 2013](#)).

Tabla 4.2. Paralajes, magnitudes y luminosidades de la muestra estelar

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	Star	π^1	$\Delta\pi^1$	B-V ³	$\Delta(B-V)^3$	M_V	ΔM_V	BC_V^7	ΔBC_V^7	$\log\left(\frac{L_\star}{L_\odot}\right)$	$\Delta \log\left(\frac{L_\star}{L_\odot}\right)$
		(mas)	(mas)	(mag)	(mag)	(mag)	(mag)	(mag)	(mag)	(dex)	(dex)
1	HD8512	28.6	0.4	1.06	0.08	0.87	0.04	-0.46	0.05	1.73	0.04
2	HD10476	131.49	0.15	0.84	0.02	5.834	0.012	-0.250	0.015	-0.342	0.011
3	HD27371	22.6	0.5	0.99	0.12	0.42	0.06	-0.41	0.07	1.89	0.05
4	HD28305 ⁴	20.3	0.4	1.01	0.15	0.07	0.09	-0.44	0.09	2.04	0.07
5	HD28307 ⁵	21.4	0.3	0.94	0.08	0.49	0.04	-0.38	0.05	1.85	0.04
6	HD31398 ²	6.6	0.4	1.5	0.3	-3.21	0.13	-0.9	0.4	3.54	0.23
7	HD81797 ²	18.09	0.18	1.45	0.06	-1.74	0.03	-0.95	0.07	2.97	0.04
8	HD82210	30.93	0.16	0.77	0.04	2.022	0.021	-0.192	0.019	1.160	0.016
9	HD96833	21.0	0.5	1.14	0.12	-0.38	0.06	-0.56	0.07	2.27	0.05
10	HD114710 ⁴	108.9	0.3	0.59	0.07	4.44	0.06	-0.053	0.020	0.14	0.03
11	HD124897 ²	88.8	0.5	1.23	0.04	-0.308	0.022	-0.70	0.03	2.29	0.02
12	HD156014 ^{6, 7}	9.9	0.5	1.16	0.23	-1.67	0.11	-1.9	0.4	3.31	0.19
13	HD159181	8.2	0.6	1.0	0.3	-2.62	0.17	-0.25	0.20	3.04	0.15
14	HD186791 ²	7.1	0.8	1.5	0.5	-3.0	0.3	-1.0	0.7	3.52	0.38
15	HD205435	25.66	0.23	0.89	0.06	1.07	0.03	-0.29	0.03	1.580	0.024
16	HD209750	12.9	0.8	1.0	0.3	-1.51	0.14	-0.25	0.20	2.59	0.14

¹ Paralajes de *Gaia* DR2 ([Gaia Collaboration, 2018](#)).² Paralajes de *Hipparcos* ([ESA, 1997](#)).³ Magnitudes de [Ducati \(2002\)](#).⁴ Magnitud en el filtro V de [Van Belle & Von Braun \(2009\)](#).⁵ Magnitudes en B y V de [Oja \(1993\)](#).⁶ Magnitud en el filtro V de [Moravveji et al. \(2013\)](#).⁷ Corrección bolométrica en el filtro V, usando un valor promedio de las estimaciones asociadas a B-V y a T_{eff} , incluidas en el trabajo de [Flower \(1996\)](#) y corregidos en [Torres \(2010\)](#).

Teniendo en cuenta las metalicidades de la muestra estelar registradas en la Tabla 4.1, si el valor de $[M/H]$ es positivo, la masa será mayor a la estimada mediante las trayectorias evolutivas de la Fig. 4.2; si el valor es negativo la masa será menor; y si es igual muy cercana a $[M/H]_\odot$, entonces la masa será muy aproximada a la estimada con la Fig. 4.2.

Las estimaciones de M_\star se muestran en la Tabla 4.3. La incertidumbre en la estimación se ha considerado alrededor del 10 %. Sin embargo, para las estrellas con $|[M/H]| \geq 0.20$ se considera un error del 20 %.

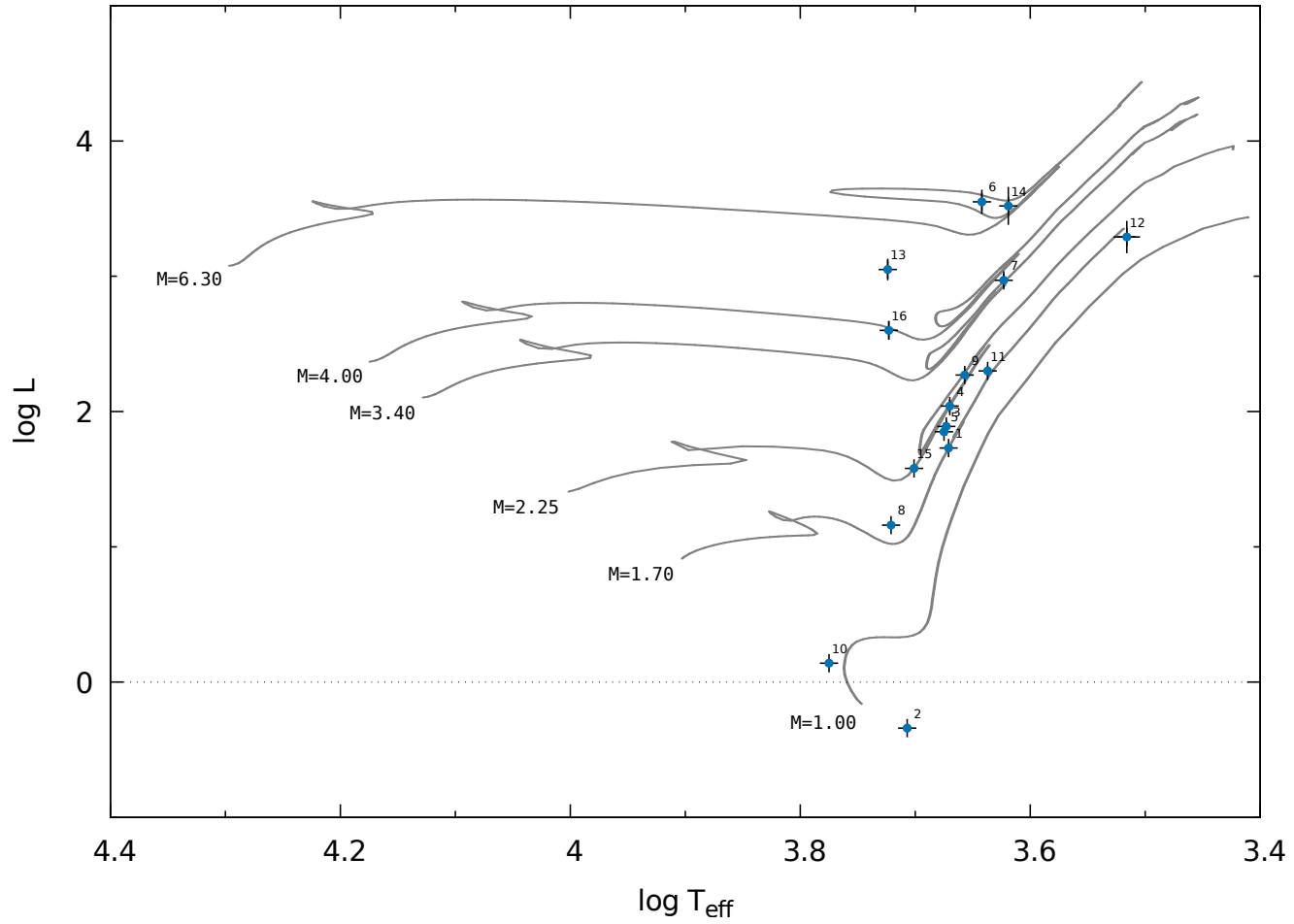


Fig. 4.2. Malla de trayectorias evolutivas con $[M/H] = 0,02$ para diferentes masas estelares. La malla se calculó usando el código de [Pols et al. \(1998\)](#). Las barras representan la incertidumbre en luminosidad estelar y temperatura efectiva.

Tabla 4.3. Estimación de la masa para la muestra estelar

1	2	3	4
N	Star	M_{\star}	ΔM_{\star}
		(M_{\odot})	(M_{\odot})
1	HD8512	1.65	0.16
2	HD10476	0.85	0.09
3	HD27371	2.7	0.3
4	HD28305	2.7	0.3
5	HD28307	2.6	0.3
6	HD31398	7.0	0.7
7	HD81797	3.4	0.3
8	HD82210	1.9	0.4
9	HD96833	2.25	0.23
10	HD114710	1.10	0.11
11	HD124897	1.10	0.22
12	HD156014	2.7	0.5
13	HD159181	5.5	0.6
14	HD186791	6.1	0.6
15	HD205435	2.10	0.21
16	HD209750	4.5	0.5

4.4. Gravedad Superficial

Usando los resultados previos de temperatura efectiva (Tabla 4.1), luminosidad (Tabla 4.2) y masa estelar (Tabla 4.3), podemos encontrar la gravedad superficial de la muestra. Por la *ley de gravitación universal* sabemos que la gravedad está dada por

$$g = \frac{GM_{\star}}{R_{\star}^2} \quad (4.4)$$

donde M_{\star} y R_{\star} son la masa y radio estelar respectivamente, y $G = 6,67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ es la *constante de gravitación universal*. Aplicando el logaritmo a la anterior ecuación obtenemos

$$\log g = \log (GM_{\star}) - \log R_{\star}^2 \quad (4.5)$$

Teniendo en cuenta la luminosidad estelar definida en la ecuación 2.4, dividiendo por la luminosidad solar $L_{\odot} = 3,85 \times 10^{26} \text{ W}$ y aplicando el logaritmo

$$\log \left(\frac{L_\star}{L_\odot} \right) = \log \left(\frac{4\pi\sigma}{L_\odot} \right) + \log R_\star^2 + 4 \log T_{\text{eff}} \quad (4.6)$$

Y por lo tanto

$$\log R_\star^2 = \log \left(\frac{L_\star}{L_\odot} \right) - \log \left(\frac{4\pi\sigma}{L_\odot} \right) - 4 \log T_{\text{eff}} \quad (4.7)$$

Sustituyendo 4.7 en 4.5 llegamos a

$$\log g = \log (GM_\star) + \log \left(\frac{4\pi\sigma}{L_\odot} \right) - \log \left(\frac{L_\star}{L_\odot} \right) + 4 \log T_{\text{eff}} \quad (4.8)$$

Juntando todas las constantes y considerando la masa solar $M_\odot = 1,98847 \times 10^{30}$ kg y la temperatura efectiva solar $T_\odot = 5777$ K, entonces

$$\log g = \log \left(\frac{4\pi\sigma GM_\odot T_\odot^4}{L_\odot} \right) + \log \left(\frac{M_\star}{M_\odot} \right) - \log \left(\frac{L_\star}{L_\odot} \right) + 4 \log \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_\odot} \right) \quad (4.9)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que el primer término de la anterior ecuación es $\log g_\odot = 4,437$ dex (en unidades del cgs), la gravedad superficial estará dada por

$$\boxed{\log g = 4,437 + \log \left(\frac{M_\star}{M_\odot} \right) - \log \left(\frac{L_\star}{L_\odot} \right) + 4 \log \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_\odot} \right)} \quad (4.10)$$

La ecuación 4.10 nos permite determinar la gravedad superficial de la muestra de estrellas, usando los resultados previamente encontrados. La Tabla 4.4 muestra los resultados de nuestras estimaciones para la gravedad superficial. Para el cálculo de la incertidumbre relacionada con la estimación de la gravedad, se ha considerado la propagación de errores de cada uno de los términos en la ecuación 4.10.

Tabla 4.4. Estimación de la gravedad superficial para la muestra estelar

1	2	3	4
N	Star	$\log g$	$\Delta \log g$
		(dex)	(dex)
1	HD8512	2.58	0.08
2	HD10476	4.49	0.07
3	HD27371	2.63	0.10
4	HD28305	2.46	0.12
5	HD28307	2.66	0.09
6	HD31398	1.3	0.3
7	HD81797	1.45	0.09
8	HD82210	3.39	0.11
9	HD96833	2.11	0.10
10	HD114710	4.40	0.08
11	HD124897	1.69	0.11
12	HD156014	0.6	0.3
13	HD159181	1.99	0.20
14	HD186791	1.1	0.4
15	HD205435	2.94	0.07
16	HD209750	2.34	0.18

Capítulo 5

Medición del Ancho de Emisión de la Línea K de Ca II

Las características físicas de la línea de emisión K de Ca II mostradas en la sección 3.4, dificultan el ajuste mediante los perfiles mas usados en el análisis de líneas espectrales: los perfiles gaussiano, lorentziano, o una convolución de ambos denominado *perfil de Voigt* y donde los perfiles gaussiano y lorentziano son casos límite de éste.

Lutz (1970) demuestra que, para el caso más simple de líneas de emisión K de Ca II las cuales no presentan autoabsorción central (K_3 en la Fig. 3.2), el ajuste mediante un perfil lorentziano no se ajusta correctamente ni a los mínimos o «alas» de la línea, ni a la parte superior o «pico». Por otra parte, un ajuste gaussiano se ajusta mejor a las «alas» de la línea pero no al «pico», debido a que éste es mucho más ancho que el ajuste realizado por la gaussiana.

Si se consideran líneas de emisión K de Ca II con autoabsorción central, como es el caso de la muestra estudiada en este trabajo (ver Apéndice B), el perfil de la línea es mucho más complicado y no corresponde para nada a ninguno de los tres perfiles anteriormente mencionados. Por lo tanto, un ajuste de la línea K mediante estos perfiles generará valores incorrectos del ancho de la línea.

Usando los mismos espectrogramas de Wilson & Bappu (1957), Lutz (1970) finalmente demuestra que el ancho a media altura de la línea de emisión K de Ca II, definido como la diferencia en longitud de onda entre la mitad de la intensidad de los picos de emisión «rojo» y «azul» (W_0 en la Fig. 3.2), está mejor correlacionado con M_V a diferencia del método original usado por Wilson & Bappu (1957).

Para medir el ancho de la línea de emisión K de Ca II en los espectros de la muestra estelar aquí estudiados, se escribió un programa en C++ (ver Apéndice A). El programa determina el ancho de la línea de emisión siguiendo el método mostrado por Lutz (1970) y usado posteriormente por muchos otros autores hasta la actualidad.

HIEW (Half-Intensity Emission Width), como se ha nombrado al programa, trabaja bajo una rutina que se puede dividir en 5 etapas principales:

1. Lectura del archivo de configuración y del espectro
2. Ajuste de la línea K usando splines cúbicos para reducir las variaciones causadas por el ruido electrónico en los espectros.
3. Determinación de los mínimos y máximos (K_1 y K_2) en cada uno de los picos B y R del perfil de la línea K
4. Determinación del valor medio de la intensidad entre máximo y mínimo
5. Cálculo de W_0 como el ancho a media altura entre los picos B y R

5.1. Etapa 1: Lectura de datos

En la primera etapa del programa se realiza la lectura del espectro previamente convertido a ASCII y para ello, es necesario leer el archivo de configuración `HIEW_Config.cfg`, con los parámetros definidos por el usuario para realizar la medición de W_0 . A continuación se detalla el contenido del archivo de configuración.

- **FILE:** Nombre del archivo con espectro a medir. Debe escribirse todo el nombre del archivo incluyendo la extensión.
- **OUTR:** Nombre del archivo con los resultados de la medición. Este será necesario para realizar la gráfica del espectro medido.
- **OUTD:** Nombre del archivo con los datos del espectro que serán interpolados con splines cúbicos.
- **OUTS:** Nombre del archivo generado al interpolar con splines cúbicos los datos del espectro original.
- **LMIN:** Longitud de onda mínima desde la cual se analizará la línea K.
- **LMAX:** Longitud de onda máxima hasta la cual se analizará la línea K.
- **LLIN:** Longitud de onda central de la absorción K_3 .
- **RANG:** Rango alrededor de longitud de onda central de la absorción K_3 .
- **NSPL:** Número de datos que se generarán usando la interpolación por splines cúbicos.

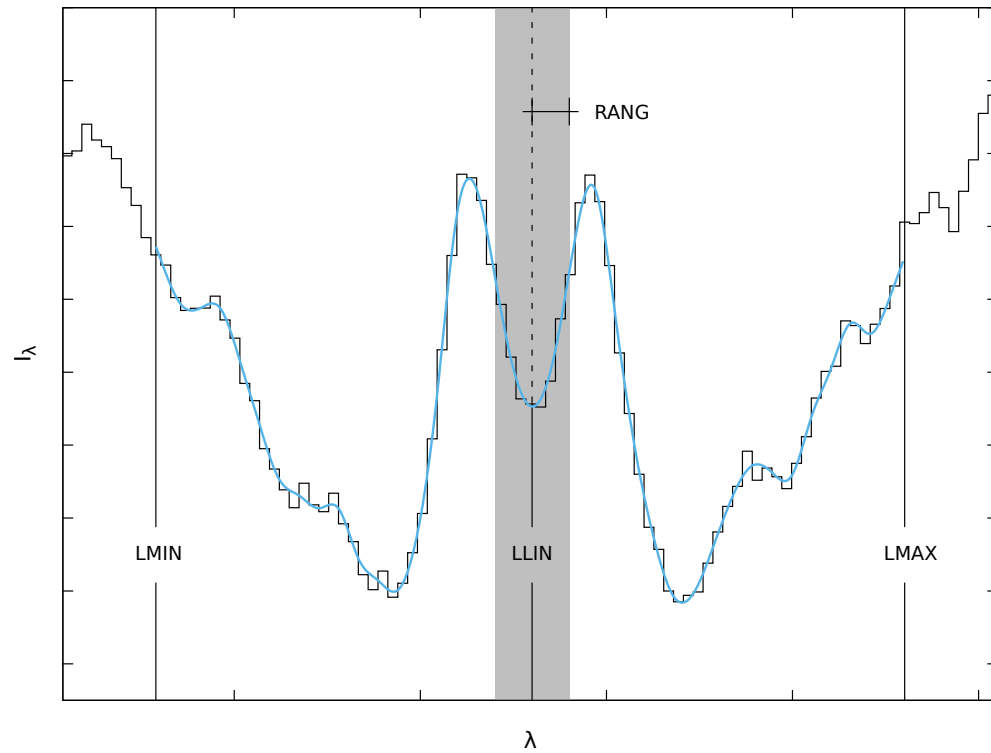


Fig. 5.1. Definición de los parámetros LMIN, LMAX, LLIN y RANG necesarios en el archivo de configuración de HIEW. Con línea azul se muestra la interpolación realizada a los datos del espectro en el rango (LMIN, LMAX). La zona gris representa la sección del espectro que el programa omitirá al encontrar los valores mínimos y máximos en la etapa 3.

En la Fig. 5.1 se muestra como se deben especificar los parámetros LMIN, LMAX, LLIN y RANG dentro del archivo de configuración.

Una vez leído el archivo de configuración, se lee el espectro y se guardan los datos correspondientes al rango (LMIN, LMAX) en un archivo de texto con el nombre definido en OUTD.

5.2. Etapa 2: Ajuste del espectro usando splines

En la segunda etapa se ajustan los datos del espectro que se encuentran dentro del rango (LMIN, LMAX) usando splines cúbicos. El programa usa la librería `spline.h` creada por Tino Kluge bajo licencia GNU. El número de datos que serán generados mediante la interpolación por splines se define en el parámetro NSPL del archivo de configuración.

La interpolación por splines cúbicos permite reducir las variaciones aleatorias de los espectros causados por el ruido electrónico sin afectar el verdadero perfil de la línea. La Fig. 5.1 muestra con línea azul el resultado de la interpolación de los datos del espectro de HD124897 usando splines cúbicos.

5.3. Etapa 3 y 4: Mínimos, máximos y valor medio de la línea de emisión K

En la etapa 3 se determina los mínimos y máximos de intensidad I_{K1} e I_{K2} , usando los datos interpolados en la etapa anterior. Una vez encontrados estos valores, se buscan sus correspondientes en longitud de onda λ_{K1} y λ_{K2} , en el espectro interpolado por splines. Se repite el mismo proceso para cada uno de los picos B y R.

Cuando han sido encontrados los puntos mínimos y máximos de intensidad de cada pico, en la etapa 4 se encuentra el valor medio usando

$$I_M = I_{K1} + \left(\frac{I_{K2} - I_{K1}}{2} \right) \quad (5.1)$$

Y se busca su valor correspondiente en longitud de onda λ_M , en los datos interpolados del espectro para cada uno de los picos B y R. La Fig. 5.2 muestra la definición de todos estos valores.

5.4. Etapa 5: Cálculo de W_0

En esta etapa se determina W_0 con su incertidumbre ΔW_0 . El valor de W_0 es simplemente la diferencia

$$W_0 = \lambda_{M,R} - \lambda_{M,B} \quad (5.2)$$

Sin embargo, ΔW_0 tiene asociado a su vez dos valores de incertidumbre, $\Delta \lambda_{M,B}$ y $\Delta \lambda_{M,R}$, para los picos «azul» y «rojo» respectivamente. $\Delta \lambda_M$ es simplemente el valor medio de las diferencias entre el límite superior λ_{M+} y el límite inferior λ_{M-} , con respecto a λ_M para cada uno de los picos B y R. Matemáticamente

$$\Delta \lambda_M = \frac{(\lambda_{M+} - \lambda_M) + (\lambda_M - \lambda_{M-})}{2} \quad (5.3)$$

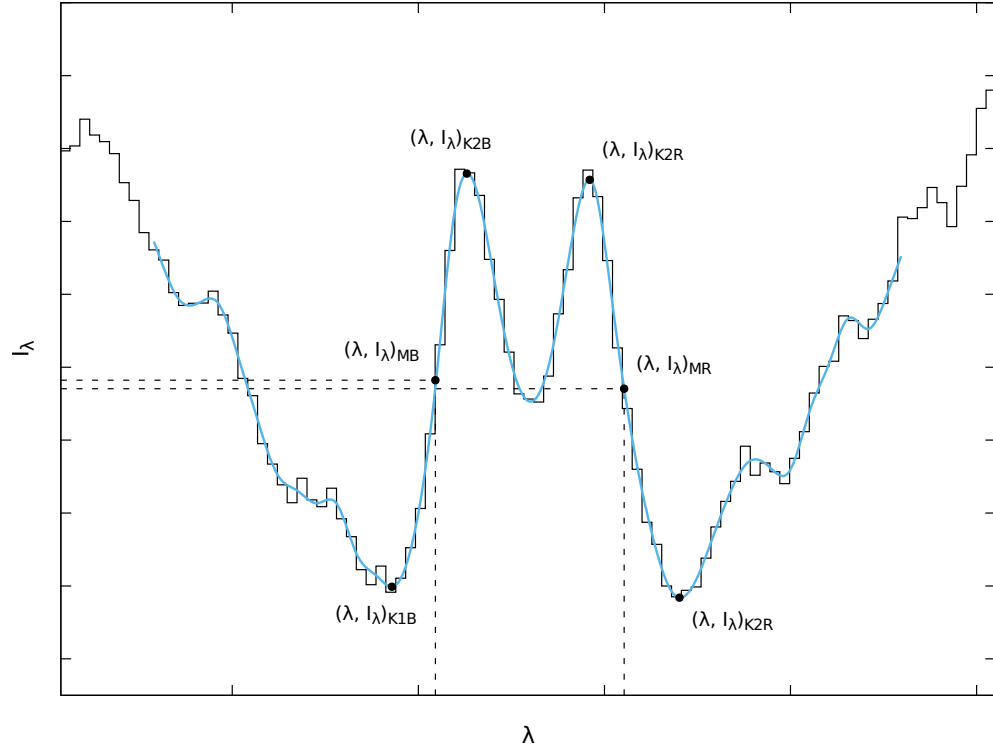


Fig. 5.2. Definición de λ_{K1} , λ_{K2} , I_{K1} , I_{K2} , λ_M e I_M . Se han marcado con el subíndice B y R los valores correspondientes a los picos «azul» y «rojo» respectivamente.

Los límites superior e inferior λ_{M+} y λ_{M-} , corresponden a la longitud de onda más cercana a λ_M , hacia la derecha e izquierda, existente en el espectro de la estrella sin interpolar. Finalmente ΔW_0 será

$$\Delta W_0 = \sqrt{(\Delta \lambda_{M,B})^2 + (\Delta \lambda_{M,R})^2} \quad (5.4)$$

Los resultados del cálculo se exportan al archivo definido en `OUTR` para realizar posteriormente la gráfica en *Gnuplot* usando el script, `plot_script_HIEW.plt`. La compilación del código fuente, ejecución del programa, lectura y gráfica de los resultados se ha automatizado mediante el script para *bash*, `HIEW_gnuplot.sh`.

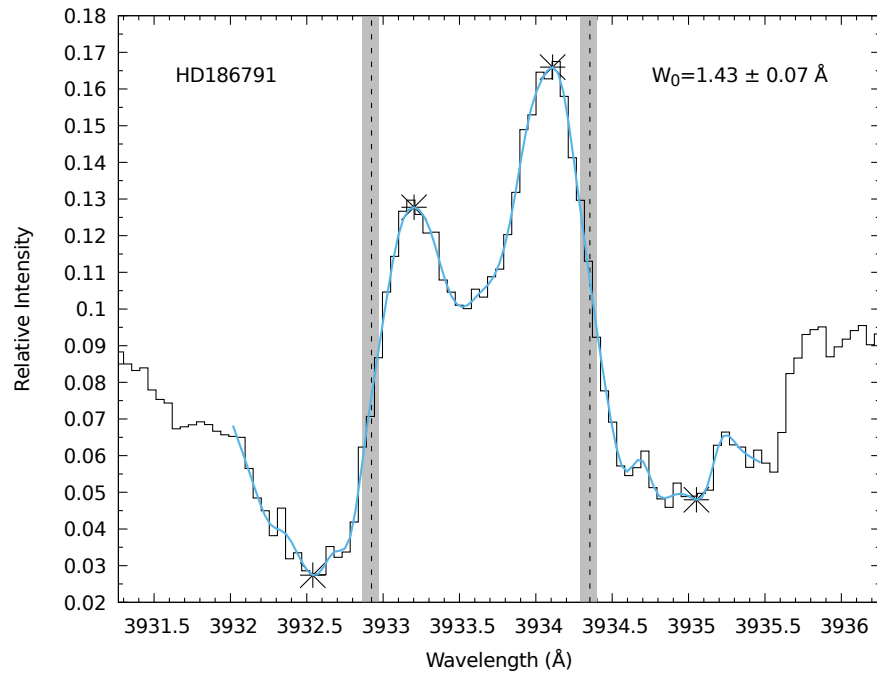
La Tabla 5.1 muestra los resultados de la medición de W_0 para toda la muestra estelar y en el Apéndice B, se incluyen todas las gráficas generadas por el programa HIEW. La Fig. 5.3 muestra los anchos y perfiles de la línea K para dos estrellas con baja y alta gravedad.

Tabla 5.1. Ancho de la línea de emisión de Ca II para la muestra estelar

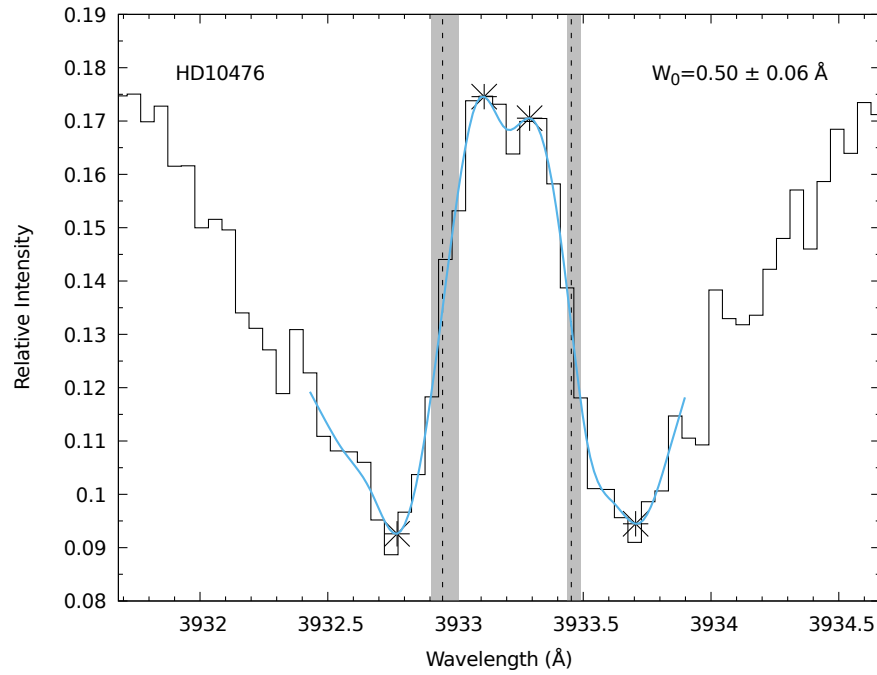
1	2	3	4	5	6	7	8
N	Star	W_0	ΔW_0	W_0	ΔW_0	$\log W_0^1$	$\Delta \log W_0^1$
		(Å)	(Å)	(km/s)	(km/s)	(dex)	(dex)
1	HD8512	0.91	0.06	69	5	1.84	0.03
2	HD10476	0.50	0.06	38	5	1.58	0.05
3	HD27371	0.88	0.07	67	5	1.83	0.03
4	HD28305	0.91	0.07	69	5	1.84	0.03
5	HD28307	0.95	0.07	72	5	1.86	0.03
6	HD31398	1.39	0.07	106	5	2.025	0.022
7	HD81797	1.24	0.06	95	5	1.975	0.021
8	HD82210	0.71	0.07	54	5	1.7	0.04
9	HD96833	0.99	0.06	75	5	1.9	0.03
10	HD114710	0.63	0.07	48	5	1.7	0.05
11	HD124897	1.00	0.06	76	5	1.9	0.03
12	HD156014	1.37	0.06	104	5	2.019	0.019
13	HD159181	2.06	0.04	157	3	2.196	0.008
14	HD186791	1.43	0.07	109	5	2.037	0.021
15	HD205435	0.85	0.04	65	3	1.811	0.020
16	HD209750	2.10	0.07	160	5	2.204	0.014

¹ Los valores de $\log W_0$ se calcularon a partir del valor de W_0 en km/s de la columna 5. Lo mismo para el respectivo error.

En la Fig. 5.4 se muestra una comparación de la medición de W_0 (Å) para algunas de las estrellas realizadas en este trabajo, con las reportadas previamente por otros autores. Wilson & Bappu (1957) en realidad midieron el ancho de los bordes mínimos de la emisión de la línea K de Ca II para sus estudios (W_1 en la Fig. 3.2) y no W_0 ; sin embargo, éstos se ajustan bien a la tendencia con otras mediciones.



(a)



(b)

Fig. 5.3. Anchos y perfiles de la línea de emisión K de Ca II para dos estrellas con diferente gravedad. a) Perfil para HD186791 con $\log g = 1,13$ y b) Perfil para HD10476 con $\log g = 4,49$. La línea punteada indica la mitad de la intensidad entre el máximo y el mínimo para cada uno de los picos azul y rojo. La zona gris representa la incertidumbre de la medición.

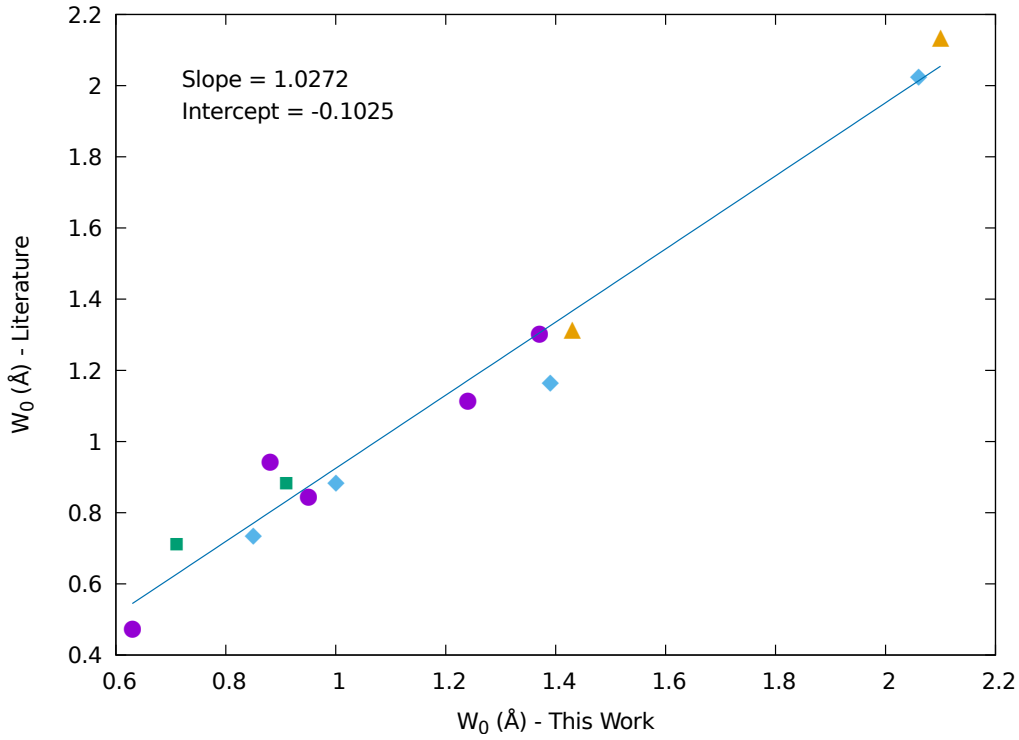


Fig. 5.4. Comparación de la medición de W_0 de la literatura con la realizada en este trabajo, para algunas estrellas de la muestra estelar. Círculos violetas corresponden a [Wilson & Bappu \(1957\)](#), cuadrados verdes a [Park et al. \(2013\)](#), rombos azules a [Wallerstein et al. \(1999\)](#) y triángulos amarillos a [Pace et al. \(2003\)](#).

Capítulo 6

Análisis y Discusión

6.1. Relación entre W_0 y g

Si consideramos una relación entre $\log W_0$ y $\log g$ de la forma

$$\log W_0 = \alpha \log g + C \quad (6.1)$$

donde α y C son constantes. Usando los resultados de $\log g$ y $\log W_0$ obtenidos en los capítulos previos (Tablas 4.4 y 5.1), podemos mostrar la relación entre estas dos cantidades para las estrellas estudiadas. La Fig. 6.1 muestra la relación entre $\log g$ y $\log W_0$ para la muestra estelar.

Si bien la muestra de estrellas es reducida, la relación entre $\log g$ y $\log W_0$ es bastante clara. Además, las estrellas 13) HD159181 y 16) HD209750 salen notablemente de la tendencia. De acuerdo a la escala de temperatura de la Fig. 6.1, se observa que la temperatura efectiva de éstas es relativamente más alta en comparación al resto de las estrellas de la muestra, sugiriendo una posible dependencia secundaria débil de W_0 con T_{eff} u otros efectos físicos que desconocemos en nuestro análisis.

Aplicando un ajuste lineal usando el software *Gnuplot*¹ y omitiendo las estrellas mencionadas anteriormente, se obtienen los siguientes resultados

- $\alpha = -0,108 \pm 0,009$
- $C = 2,119 \pm 0,021$

¹*Gnuplot* utiliza la rutina `fit` que aplica el algoritmo Marquardt-Levenberg para un ajuste por mínimos cuadrados no lineal. Mas detalles sobre esta rutina en http://www.gnuplot.info/docs_4.2/node82.html

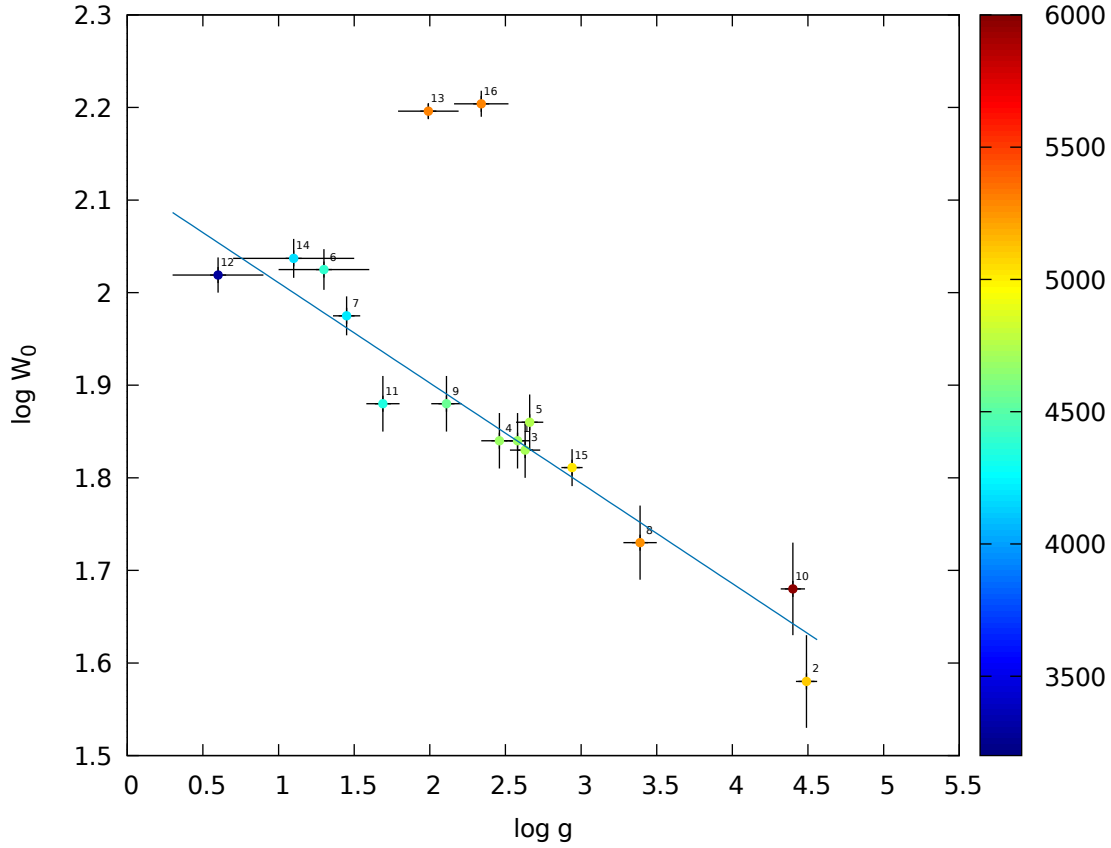


Fig. 6.1. Relación entre $\log g$ y $\log W_0$ para la muestra estelar. Las barras indican la incertidumbre de las cantidades. La línea azul corresponde a un ajuste lineal donde se omitieron las estrellas 13) HD159181 y 16) HD209750. El color de los puntos representa la temperatura efectiva estimada de acuerdo a una escala en kelvin.

Por otro lado, teniendo en cuenta las consideraciones teóricas mencionadas en la sección 3.4, ahora asumimos una dependencia secundaria débil con la temperatura en la relación entre $\log W_0$ y $\log g$ dada por la ecuación 3.15 de manera que

$$\log W_0 = \alpha \log g + \xi_{T_{\text{eff}}} + C \quad (6.2)$$

con $\xi_{T_{\text{eff}}}$ definido como

$$\xi_{T_{\text{eff}}} = \beta \log \left(\frac{T_{\text{eff}}}{4726} \right) \quad (6.3)$$

donde α , β y C son constantes, y T_{eff} medido en kelvin. El valor de 4726 K corresponde al promedio de las temperaturas efectivas de la muestra estelar.

Aplicando un ajuste con la forma de la ecuación 6.2 a los valores de $\log g$, T_{eff} y W_0 anteriormente encontrados; y esta vez sin omitir ninguna de las estrellas de la muestra, se obtiene

- $\alpha = -0,24 \pm 0,03$
- $\beta = 2,7 \pm 0,5$
- $C = 2,47 \pm 0,07$

Se puede separar la contribución mínima de la temperatura efectiva al ancho de la línea K de Ca II mediante las ecuaciones 6.2 y 6.3 de manera que

$$\log W'_0 = \log W_0 - \xi_{T_{\text{eff}}} \quad (6.4)$$

donde W'_0 sería el ancho de la línea que depende «puramente» de la gravedad. Aplicando la ecuación 6.4 a los datos de la Tabla 5.1 y teniendo en cuenta los valores de T_{eff} de la Tabla 4.1 con la ecuación 6.3, se obtienen los valores de $\xi_{T_{\text{eff}}}$ y $\log W'_0$ que se muestran en la Tabla 6.1

La Fig. 6.2 muestra la relación entre $\log W'_0$ y $\log g$. Aplicando un ajuste lineal se obtiene finalmente la dependencia «pura» de ancho de la línea K de Ca II con la gravedad superficial estelar.

- $\alpha' = -0,233 \pm 0,018$
- $C' = 2,45 \pm 0,05$

Finalmente podemos escribir la ecuación 6.2 como

$$\log W_0 = (-0,233 \pm 0,018) \log g + (2,7 \pm 0,5) \log \left(\frac{T_{\text{eff}}}{4726} \right) + (2,45 \pm 0,05) \quad (6.5)$$

Tabla 6.1. Ancho de la línea de emisión de Ca II para la muestra estelar considerando una dependencia débil con la temperatura

1	2	3	4	5	6
N	Star	$\xi_{T_{\text{eff}}}$ (dex)	$\Delta\xi_{T_{\text{eff}}}$ (dex)	$\log W_0'$ (dex)	$\Delta \log W_0'$ (dex)
1	HD8512	-0.0103	0.0006	1.85	0.03
2	HD10476	0.0884	0.0008	1.49	0.05
3	HD27371	-0.0039	0.0006	1.83	0.04
4	HD28305	-0.0127	0.0006	1.85	0.03
5	HD28307	0.0026	0.0006	1.86	0.03
6	HD31398	-0.0882	0.0008	2.113	0.023
7	HD81797	-0.1397	0.0005	2.115	0.021
8	HD82210	0.1246	0.0007	1.61	0.04
9	HD96833	-0.0459	0.0006	1.92	0.03
10	HD114710	0.2725	0.0006	1.41	0.05
11	HD124897	-0.1021	0.0006	1.98	0.03
12	HD156014	-0.4283	0.0016	2.447	0.021
13	HD159181	0.1330	0.0006	2.063	0.009
14	HD186791	-0.1489	0.0005	2.186	0.022
15	HD205435	0.0708	0.0006	1.741	0.021
16	HD209750	0.1320	0.0005	2.072	0.015

6.2. Dispersión e Incertidumbre de los Datos

Es bastante claro que la Fig. 6.2 muestra una menor dispersión de los datos en comparación a la Fig. 6.1, lo cual sugiere fuertemente la posibilidad de una dependencia secundaria débil con la temperatura efectiva como se ha asumido en nuestro análisis. Si bien se propone empíricamente una función de T_{eff} como se mostró en la ecuación 6.2, los resultados obtenidos son consecuentes con las estimaciones teóricas previas de otros autores, se discutirá esto mas adelante.

Aunque algunas de las estrellas de la muestra pueden pertenecer a sistemas binarios, se ha considerado que éstas sean suficientemente resueltas espacialmente por el TIGRE para descartar el posible efecto de su binariedad sobre los espectros y en particular sobre la línea K de Ca II. No obstante, puede existir un sesgo en nuestras estimaciones de W_0 y $\log g$, si su binariedad es desconocida.

Otro efecto en la dispersión de los datos puede ser causado por la alta actividad en la cromósfera estelar. Si existe una actividad variable no considerada, ésta puede afectar principalmente en la estimación de W_0 .

Algunas estrellas caen sobre la rama de las gigantes rojas, en la cual un pequeño

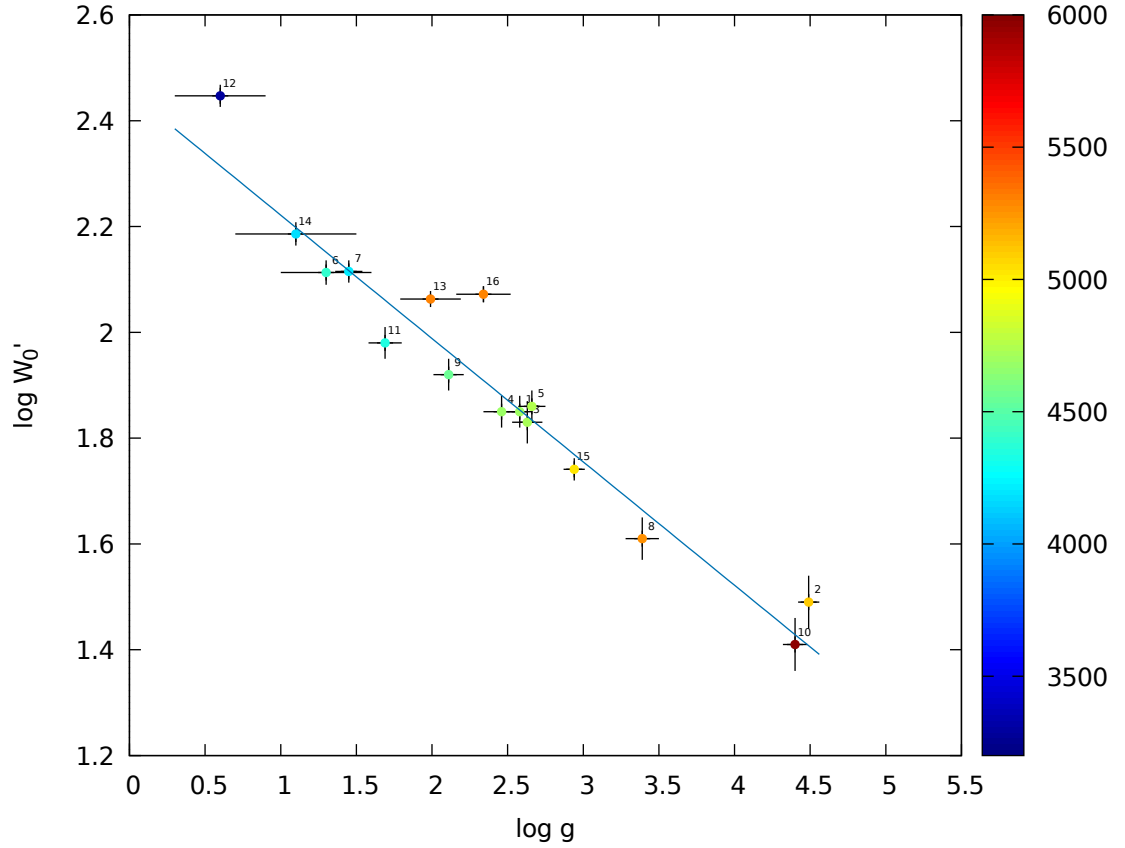


Fig. 6.2. Relación entre $\log g$ y $\log W'_0$ para la muestra estelar considerando una dependencia débil con la temperatura dada por la ecuación 6.2. Las barras indican la incertidumbre de las cantidades. La línea azul corresponde a un ajuste lineal. El color de los puntos representa la temperatura efectiva estimada de acuerdo a una escala en kelvin.

cambio en la temperatura efectiva causa una gran diferencia en la estimación de su masa estelar. A pesar de ello, considerando un error de 10 % y 20 % en la estimación de la masa, la tendencia de nuestros datos se mantiene bastante bien.

Como caso particular, tres de las estrellas de la muestra parecen salir notoriamente de la tendencia en la Fig. 6.2, éstas son 12) HD156014, 13) HD159181 y 16) HD209750. A continuación se discuten con mayor profundidad.

6.2.1. HD156014

En el caso de HD156014, de acuerdo a lo comentado en el capítulo 4, la estimación de su temperatura efectiva usando *iSpec* fue bastante alejada del valor esperado teniendo en cuenta su tipo espectral. Como se mencionó anteriormente, *iSpec* no es

muy eficiente a bajas temperaturas y además, los anchos de las bandas moleculares sumado a la presencia de polvo en espectros de estrellas frías dificulta la correcta estimación. En consecuencia, se tomó la T_{eff} estimada por [Moravveji et al. \(2013\)](#) mediante técnicas de calibración basadas en fotometría. [Moravveji et al. \(2013\)](#) usaron un conjunto de 18 estrellas estándar de tipo espectral entre K a M y mediante un análisis de las líneas de TiO estimaron un valor de 3280 K para la temperatura efectiva de esta estrella. Existe por lo tanto un sesgo debido a la ausencia de una estimación más correcta de la temperatura efectiva para esta estrella.

Por otro lado, los valores considerados para la corrección bolométrica en el visible usando las Tablas de [Flower \(1996\)](#), fueron particularmente muy distintos al considerar por separado su índice de color $B - V$ y su T_{eff} , a saber $BC_{B-V} = -0,503$ y $BC_{T_{\text{eff}}} = -3,227$. Realizando un promedio de los valores anteriores se consigue un valor más congruente para BC_V . Sin embargo, esto puede influir bastante en la estimación tanto de su luminosidad como de su masa estelar y en consecuencia en la gravedad superficial, al ser dos de los tres parámetros considerados en la ecuación 4.10.

6.2.2. HD159181 y HD209750

De acuerdo al trabajo de [Roberts \(2011\)](#), estas estrellas no revelan en sus observaciones una estrella compañera. Entre sus explicaciones propone que la posible compañera, o bien se encuentra dentro del núcleo central de difracción de la imagen, o esta fuera del campo de visión. En caso de que exista una compañera desconocida que no pueda resolverse espacialmente, ésta podría afectar la estimación de W_0 y $\log g$.

Si las estrellas tienen una alta actividad en forma de viento estelar, esto puede afectar especialmente a las líneas de $H\alpha$ y $Ca II$ ([Dupree & Brickhouse \(1998\)](#), [Dupree \(2004\)](#)). Por lo tanto, el gran ancho que presenta la línea K de $Ca II$ para estas dos estrellas en comparación a las demás, puede ser causado por un exceso de actividad en forma de flujo estelar que no se ha considerado en este trabajo.

Como se mencionó anteriormente, la distancia de todas las estrellas de la muestra considerada no supera los 150 pc y por lo tanto, no se consideraron los efectos del enrojecimiento interestelar. Sin embargo, [Bersier \(1996\)](#) calcula en su trabajo un exceso de color no despreciable para estas estrellas y el cual no se consideró en nuestros análisis. Este exceso de color podría generar una contribución no despreciable a la estimación de la gravedad superficial.

6.3. Comparación con Resultados Previos

Con los resultados obtenidos en nuestro análisis, se propone básicamente una relación entre W_0 y $\log g$ de la forma

$$\log W_0 = -0,233 \log g + 2,7 \log \left(\frac{T_{\text{eff}}}{4726} \right) + 2,45 \quad (6.6)$$

Se puede notar que el resultado obtenido para el exponente α de la ecuación 6.2 es muy cercano al propuesto en los trabajos de otros autores como Neckel (1974), Ayres et al. (1975), Park et al. (2013), entre otros.

En la Fig. 6.3 se realiza una comparación de los valores de $\log W_0$ calculados mediante la ecuación 6.6 y los valores observados de la Tabla 5.1. Las Fig. 6.4(a) y 6.4(b) hacen lo mismo para las ecuaciones propuestas por Neckel (1974)

$$\log W_0 = -0,223 \log g + 1,273 \log T_{\text{eff}} - 2,265 \quad (6.7)$$

y Park et al. (2013)

$$\log W_0 = -0,171 \log g + 1,704 \log T_{\text{eff}} - 4,014 \quad (6.8)$$

De las Fig. 6.3, 6.4(a) y 6.4(b) se puede observar que la correlación entre los datos calculados y observados es mayor para la ecuación propuesta en este trabajo (ecuación 6.6). Por lo tanto, puede decirse que nuestro análisis es consecuente y más certero con respecto a trabajos previos realizados por otros autores.

6.4. α y la Densidad de Masa Columnar

En la sección 3.4 se explicó como Ayres et al. (1975) y Ayres (1979) muestran que el WBE puede entenderse como una variación de la densidad de masa columnar con la gravedad, si el promedio de la profundidad óptica del continuo al mínimo de temperatura estelar (T_{min}) es relativamente independiente de la gravedad superficial. Esto implica físicamente que, estrellas con baja gravedad, requieren más masa sobre sus fotosferas que estrellas con alta gravedad para profundidades ópticas similares en el continuo. O dicho de otro modo, atmósferas estelares con baja gravedad son menos densas, y si están geométricamente muy extendidas, sus capas exteriores tendrán una gran profundidad óptica.

Ayres et al. (1975) muestran que bajo sus consideraciones teóricas, el exponente de la gravedad debe ser $\alpha \approx -0,25$ (ecuación 3.14). Sin embargo, ellos no consideran la dependencia de W_0 con T_{eff} , ya que la variación de la temperatura es relativamente pequeña comparada con la gravedad superficial para la muestra estelar considerada.

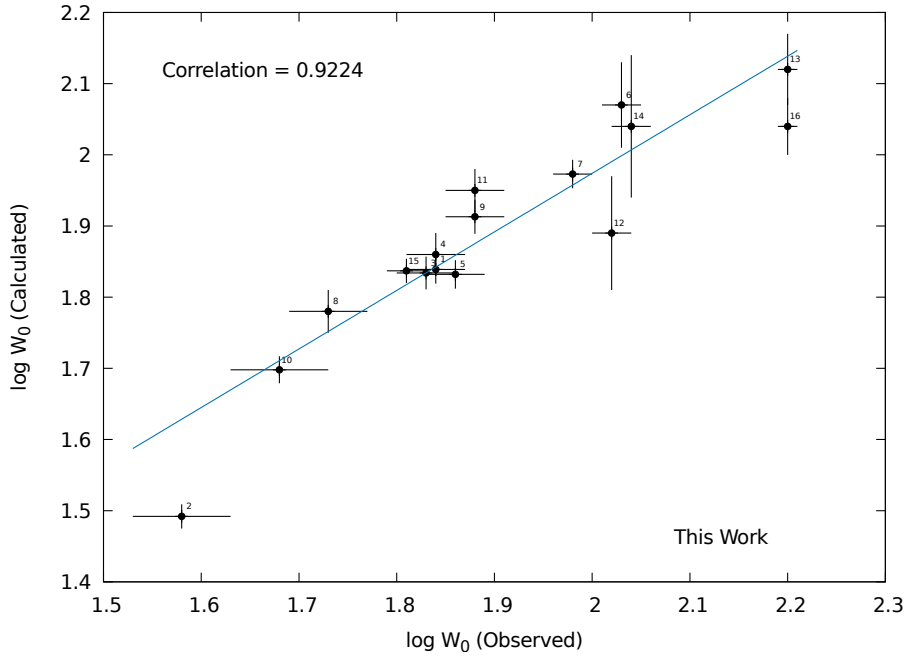
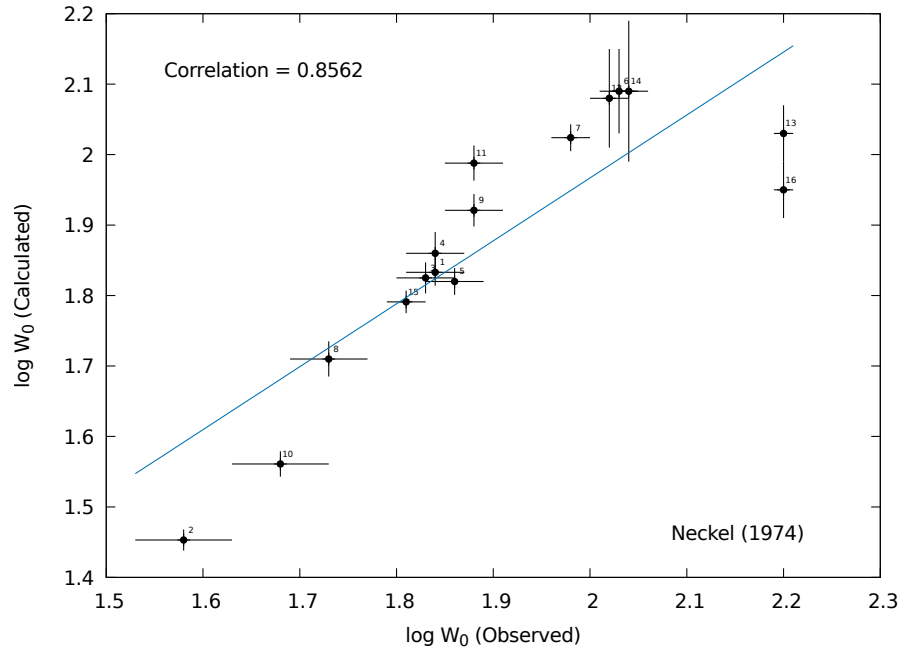


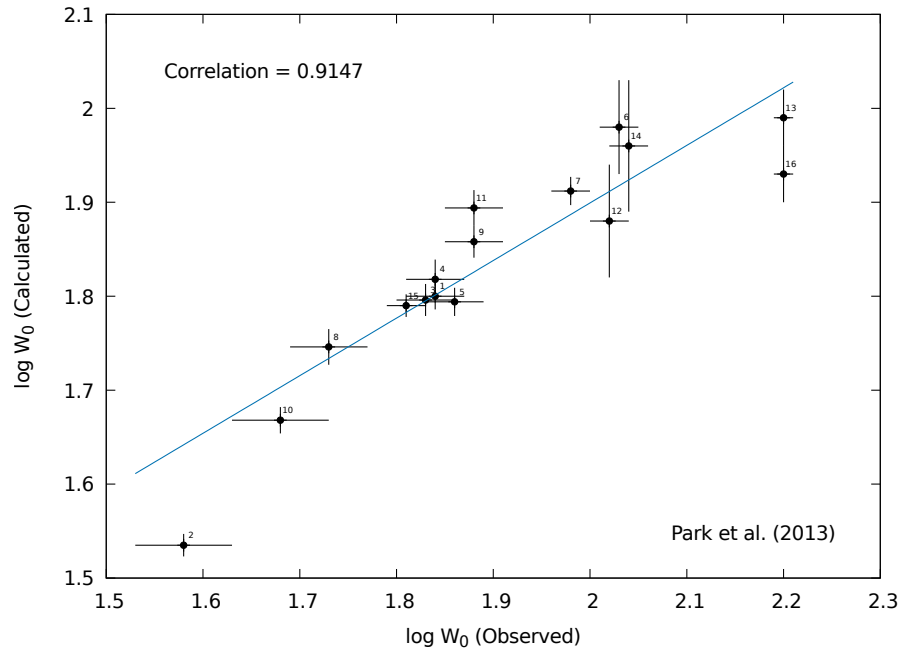
Fig. 6.3. Comparación de $\log W_0$ usando la ecuación 6.6 propuesta en este trabajo y los valores obtenidos en la Tabla 5.1. La línea azul corresponde a un ajuste lineal por mínimos cuadrados. Se muestra la correlación entre los valores calculados y observados.

Nuestro análisis no desprecia la contribución de la temperatura efectiva ya que, como se mostró al final de la sección 3.4, ésta explicaría mediante la ecuación de Saha el aumento de la fracción de átomos de calcio en el estado de ionización II, $N_{\text{Ca II}}/N_{\text{Ca Total}}$, y en consecuencia de la densidad de masa columnar (ecuación 2.9).

Los resultados obtenidos en este trabajo muestran un exponente α muy cercano al pronosticado por Ayres et al. (1975). Además, se aprecia que la relación propuesta en este trabajo entre W_0 y $\log g$ (ecuación 6.6) está mejor correlacionada con las observaciones. Con esto comprobamos la verdad detrás de la dependencia del ancho de la línea K de Ca II con la gravedad superficial (ecuación 3.14), la cual surge como una consecuencia directa de la densidad de masa columnar (ecuación 3.13) como Ayres et al. (1975) concluyeron acertadamente en su trabajo.



(a)



(b)

Fig. 6.4. Comparación de $\log W_0$ usando la ecuación propuesta por a) Neckel (1974) (ecuación 6.7) y b) Park et al. (2013) (ecuación 6.8) y los valores obtenidos en la Tabla 5.1. La línea azul corresponde a un ajuste lineal por mínimos cuadrados. Se muestra la correlación entre los valores calculados y observados.

Capítulo 7

Conclusiones

- Se confirma una relación entre el ancho de la línea K de Ca II (W_0) y la gravedad superficial ($\log g$) de la forma $\log W_0 \propto \alpha \log g$ para una muestra de 14 estrellas frías de tipo F-M con luminosidades entre Ia, Ib, II, III; y 2 estrellas de la secuencia principal usando espectros de alta resolución obtenidos con el telescopio TIGRE.
- Las estimaciones del ancho de la línea K de Ca II mediante la creación de un programa en C++ parecen correctas y se ajustan a lo esperado. Además, el programa creado para este trabajo permitió reducir las posibles incertidumbres provocadas por el ruido en los espectros mediante un ajuste con splines cúbicos.
- Las nuevas paralajes estelares del proyecto *Gaia* (*Gaia* DR2, [Gaia Collaboration, 2018](#)), en conjunto con estimaciones precisas de la temperatura efectiva usando los espectros sintéticos generados sobre la marcha por el software *iSpec* ([Blanco-Cuaresma et al., 2014](#)); permitió determinar de manera más precisa la gravedad superficial de la muestra estelar, revelando la posibilidad de una dependencia débil del WBE con la temperatura efectiva.
- El factor empírico propuesto que depende de T_{eff} en la ecuación 6.2, comprueba una dependencia secundaria débil de W_0 con la temperatura efectiva. El factor propuesto ajusta la dispersión de los datos y genera como resultado un exponente $\alpha = -0,233 \pm 0,018$, el cual es bastante cercano a las estimaciones teóricas de [Ayres et al. \(1975\)](#) al considerar que el efecto Wilson-Bappu puede entenderse como una variación de la densidad de masa columnar con la gravedad, si el promedio de la profundidad óptica del continuo al mínimo de temperatura estelar es relativamente independiente de la gravedad superficial.
- Se comprueba observacionalmente que la relación entre el ancho de la línea K de Ca II y la gravedad superficial es una consecuencia directa de la variación de la densidad de masa columnar en la cromósfera de estrellas frías, y donde la temperatura efectiva juega un papel no despreciable dentro del aumento de la fracción de átomos de calcio en dicho estado de ionización.

7.1. Trabajo Futuro

- Analizar la posible variabilidad temporal del ancho de la línea K de Ca II en estrellas frías con tipo espectral entre F a M y luminosidades entre Ia a IV.
- Determinar una mejor relación entre W_0 y $\log g$ ampliando la muestra de estrellas y realizando una mejor estimación de la masa estelar teniendo en cuenta la metalicidad de las mismas.
- Considerar el posible efecto de la binariedad, alta actividad en forma de vientos estelares y del enrojecimiento interestelar, al determinar la gravedad superficial y el ancho de la línea K de Ca II en estrellas frías.

Bibliografía

- Alvarez, H. & Campusano, L. E. 1981, RMxAA, 6, 379
- Ayres, T. R. 1979, ApJ, 228, 509
- Ayres, T. R., Linsky, J. L., & Shine, R. A. 1975, ApJ, 195, L121
- Ayres, T. R., Linsky, J. L., Vaiana, G. S., Golub, L., & Rosner, R. 1981, ApJ, 250, 293
- Bailer-Jones, C. A. L., Rybizki, J., Fouesneau, M., Mantelet, G., & Andrae, R. 2018, AJ, 156, 58
- Bersier, D. 1996, A&A, 308, 514
- Blanco-Cuaresma, S., Soubiran, C., Heiter, U., & Jofré, P. 2014, A&A, 569, A111
- Carroll, B. W. & Ostlie, D. A. 2006, An Introduction to Modern Astrophysics and Cosmology, 2nd edn. (San Francisco: Pearson, Addison-Wesley), 1357
- Ducati, J. R. 2002, yCat, 2237, 0
- Dupree, A. 2004, in IAUS, Vol. 219, 623
- Dupree, A. & Brickhouse, N. 1998, in AAS, Vol. 192, 56.04
- Eberhard, G. & Schwarzschild, K. 1913, ApJ, 38, 292
- ESA. 1997, A&A, 323, 49
- Flower, P. 1996, ApJ, 469, 355
- Gaia Collaboration. 2018, A&A, 1, A1
- Gomez, T. A., Wallerstein, G., & Pancino, E. 2012, PASP, 124, 1246
- Guerra-Olvera, C. 2014, Revisiting the Wilson-Bappu Effect, Msc thesis, Universidad de Guanajuato
- Hauschildt, P. & Baron, E. 2005, MSAIS, 7, 140
- Huensch, M. & Schröder, K. P. 1996, A&A, 309, L51

- Husser, T. O., Wende-von Berg, S., Dreizler, S., et al. 2013, *A&A*, 553, 1
- Kurucz, R. 1993, *ATLAS9 Stellar Atmosphere Programs and 2 km/s grid*. Kurucz CD-ROM No. 13
- Linsky, J. L. 1980, in *Proceedings of 51th Colloquium*, University of Western Ontario, 248–277
- Linsky, J. L. & Haisch, B. M. 1979, *ApJ*, 229, L27
- Lutz, T. E. 1970, *AJ*, 75, 1007
- Lutz, T. E. & Pagel, B. E. J. 1982, *MNRAS*, 199, 1101
- Moravveji, E., Guinan, E. F., Khosroshahi, H., & Wasatonic, R. 2013, *AJ*, 146, 148
- Neckel, H. 1974, *A&A*, 35, 99
- Oja, T. 1993, *A&AS*, 100, 591
- Pace, G., Pasquini, L., & Ortolani, S. 2003, *A&A*, 401, 997
- Park, S., Kang, W., Lee, J. E., & Lee, S. G. 2013, *ApJ*, 146, 73
- Pérez-Martínez, M. I. 2013, *Pérdidas radiativas de la cromósfera*, Phd thesis, Universidad de Guanajuato
- Pols, O. R., Schröder, K. P., Hurley, J. R., Tout, C. A., & Eggleton, P. P. 1998, *MNRAS*, 298, 525
- Reimers, D. 1973, *A&A*, 24, 79
- Reimers, D. 1982, *A&A*, 107, 292
- Reimers, D., Huensch, M., Schmitt, J. H. M. M., & Toussaint, F. 1996, *A&A*, 310, 813
- Roberts, L. 2011, *MNRAS*, 413, 1200
- Rybicki, G. B. & Lightman, A. P. 1986, *Radiative Processes in Astrophysics* (Weinheim: Wiley-VCH), 400
- Schmitt, J. H. M. M., Schröder, K. P., Rauw, G., et al. 2014, *AN*, 335, 787
- Schröder, K. P., Mittag, M., Hempelmann, A., & Schmitt, J. H. M. M. 2013, *A&A*, 554, A50
- Schröder, K. P., Pols, O. R., & Eggleton, P. P. 1997, *MNRAS*, 285, 696

- Schröder, K. P. & Schmitt, J. H. M. M. 2013, in *New Quests in Stellar Astrophysics III: A Panchromatic View of Solar-Like Stars, With and Without Planets*, Vol. 472, 225–230
- Schröder, K. P., Schmitt, J. H. M. M., Mittag, M., Gómez-Trejo, V., & Jack, D. 2018, *MNRAS*, 480, 2137
- Snedden, C. 1973, *Carbon and Nitrogen Abundances in Metal-Poor Stars*, Phd thesis, The University of Texas at Austin
- Torres, G. 2010, *AJ*, 140, 1158
- Van Belle, G. T. & Von Braun, K. 2009, *ApJ*, 694, 1085
- Vernazza, J. E., Avrett, E. H., & Loeser, R. 1973, *ApJ*, 184, 605
- Wallerstein, G., Machado-Pelaez, L., & Gonzalez, G. 1999, *PASP*, 111, 335
- Wilson, O. C. & Bappu, M. K. V. 1957, *ApJ*, 125, 661
- Zirin, H. 1971, *RSPTA*, 270, 183

Apéndice A

Código fuente del programa Half-Intensity Emission Width (HIEW)

```
1 // ----- //
2 // //
3 //      Filename:  HIEW.cpp //
4 //      Description: Half Intensity Emission Width Program for K line //
5 // //
6 //      Version: 2.0.1 //
7 //      Created: 23/05/2019 //
8 //      Compiler: g++ //
9 // //
10 //      Author: Faiber Rosas //
11 //      Email: frosas@astro.ugto.mx //
12 //      Company: Dept. of Astronomy - University of Guanajuato //
13 // //
14 // ----- //
15 // ----- //
16 // //
17 // //
18 // Compile with: //
19 // //
20 // g++ -o HIEW.out HIEW.cpp //
21 // //
22 // ----- //
23
24 /* Header files */
25
26 #include <iostream>
27 #include <stdlib.h>
28 #include <string.h>
29 #include <math.h>
30 #include <vector>
31 #include "spline.h"
32
33 using namespace std;
34
35 /* Constants */
36
37 // #define Pi 3.14159265
38
39 /* Function prototypes */
40
41 int Count(char name[25]);
42 double Near_Value(double array_1[], int size, double value, double array_2[], double lim_l, double lim_u);
43 double Min(double array_1[], int size, double array_2[], double lim_l, double lim_u);
44 double Max(double array_1[], int size, double array_2[], double lim_l, double lim_u);
45 char * Read_Config(char config_name[20], char config[6]);
46
47 /* Main function */
48
49 int main(int argc, char** argv)
50 {
51     if(argc<1)
52     {
53         printf("usage: %s <>\n", argv[0]);
```

```

54     exit(EXIT_FAILURE);
55 }
56
57 cout<<"\n// =====//<<endl;
58 cout<<"//      HIEW v2.0.1 - Half Intensity Emission Width Program for K line //<<endl;
59 cout<<"// //<<endl;
60 cout<<"//      Created by: Faiber Rosas - frosas@astro.ugto.mx //<<endl;
61 cout<<"//      Dept. of Astronomy - University of Guanajuato //<<endl;
62 cout<<"// =====//\n"<<endl;
63
64 /* In and Out files */
65
66 FILE *DATA_IN_FILE; /* Data in */
67 FILE *DATA_OUT_FILE; /* Data out */
68 FILE *SPLINE_OUT_FILE; /* Spline out file */
69 FILE *RESULTS_FILE; /* Results file */
70
71 /* Initial parameters */
72
73 double L_Min, L_Max, L_Lin, Range;
74 int NS;
75
76 /* Variables of configuration file */
77
78 char CFG_FILE[]="HIEW_Config.cfg";
79 char FILE[]="FILE=", OUTR[]="OUTR=", OUTD[]="OUTD=", OUTS[]="OUTS=";
80 char LMIN[]="LMIN=", LMAX[]="LMAX=", LLIN[]="LLIN=", RANG[]="RANG=", NSPL[]="NSPL=";
81
82 /* Variables of STAGE 1 */
83
84 int NT=Count(Read_Config(CFG_FILE, FILE)); /* The total data number is determined using the Count function */
85
86 double * Array_L; /* Array for Lambda and Intensity */
87 Array_L=new double[NT];
88
89 double * Array_I;
90 Array_I=new double[NT];
91
92 double L, I; /* Variables Lambda and Intensity */
93 double New_LMin, New_LMax; /* Variables for calculate the I_Min and I_Max */
94 double Lf, If, Ll, Il, C2, C3, C5, C6, C7; /* Dummy variables */
95
96 /* Read the configuration file using the Read_Config function */
97
98 const char *Data_File=Read_Config(CFG_FILE, FILE); /* Name of star file */
99 DATA_IN_FILE=fopen(Data_File,"r");
100
101 L_Min=atof(Read_Config(CFG_FILE, LMIN)); /* Lambda minimum */
102 L_Max=atof(Read_Config(CFG_FILE, LMAX)); /* Lambda maximum */
103 L_Lin=atof(Read_Config(CFG_FILE, LLIN)); /* Lambda of central line */
104 Range=atof(Read_Config(CFG_FILE, RANG)); /* Range of central line */
105 NS=atof(Read_Config(CFG_FILE, NSPL)); /* Number of data generated by spline interpolation */
106
107 cout<<"-----"<<endl;
108 cout<<"                STAGE 1: Reading Data                "<<endl;
109 cout<<"-----\n"<<endl;
110
111 printf("Data_File=%s\n", Data_File); /* Shows the file read */
112 printf("NT=%i\n", NT); /* Print the total data number */
113
114 /* Fill the arrays of L and I, only save the first and fourth columns */
115
116 for(int i=0; i<NT; i++)
117 {
118     fscanf(DATA_IN_FILE, "%lf %lf %lf %lf %lf %lf", &L, &C2, &C3, &I, &C5, &C6, &C7);
119     Array_L[i]=L;
120     Array_I[i]=I;
121
122     /* First and last values of Ls and SF(Ls) */
123
124     if(i == 0)
125     {
126         Lf=Array_L[i];
127         If=Array_I[i];
128     }
129
130     if(i == (NT-1))
131     {
132         Ll=Array_L[i];
133         Il=Array_I[i];
134     }
135 }
136
137 fclose(DATA_IN_FILE);
138
139 /* Determine the closest value to L_Min and L_Max using the Near_Value function */
140
141 New_LMin=Near_Value(Array_L, NT, L_Min, Array_L, Lf, Ll);

```

```

142     New_LMax=Near_Value(Array_L, NT, L_Max, Array_L, Lf, Ll);
143
144     printf("L_Min=%0.3f | Near Value of L_Min=%f\n", L_Min, New_LMin);
145     printf("L_Max=%0.3f | Near Value of L_Max=%f\n", L_Max, New_LMax);
146
147     /* Output file for the spline routine */
148
149     const char *Data_Out=Read_Config(CFG_FILE, OUTD); /* Name of out file for spline routine */
150     DATA_OUT_FILE=fopen(Data_Out,"w");
151
152     for(int i=0; i<NT; i++)
153     {
154         if(Array_L[i] >= New_LMin && Array_L[i] <= New_LMax)
155         {
156             fprintf(DATA_OUT_FILE, "%f %f\n", Array_L[i], Array_I[i]);
157         }
158     }
159
160     fclose(DATA_OUT_FILE);
161
162     int ND=Count(Read_Config(CFG_FILE, OUTD)); /* The data number is determined using the Count function */
163
164     printf("\nND=%d\n", ND); /* Print the data number we will use */
165
166     cout<<"\n-----" <<endl;
167     cout<<"                      STAGE 2: Fit of Values Using Splines                      " <<endl;
168     cout<<"-----\n" <<endl;
169
170     double Ls, Is; /* Variables lambda and intensity for spline routine */
171     std::vector<double> VL(ND), VI(ND), SVL((ND/2)), SVI((ND/2));
172
173     DATA_OUT_FILE=fopen(Data_Out,"r");
174
175     for(int i=0; i<ND; i++)
176     {
177         fscanf(DATA_OUT_FILE, "%lf %lf", &Ls, &Is);
178         VL[i]=Ls;
179         VI[i]=Is;
180     }
181
182     fclose(DATA_OUT_FILE);
183
184     int NC=0;
185
186     for(int i=0; i<(ND/2); i++)
187     {
188         if(NC == 0)
189         {
190             SVL[i]=(VL[0]+VL[1])/2;
191             SVI[i]=(VI[0]+VI[1])/2;
192         }
193
194         if(NC >= ND)
195         {
196             SVL[i]=(VL[ND-1]+VL[ND])/2;
197             SVI[i]=(VI[ND-1]+VI[ND])/2;
198         }
199         else
200         {
201             SVL[i]=(VL[NC]+VL[NC+1])/2;
202             SVI[i]=(VI[NC]+VI[NC+1])/2;
203         }
204
205         NC=NC+2;
206     }
207
208     tk::spline SF; /* Spline function */
209     SF.set_points(SVL,SVI);
210
211     Ls=New_LMin; /* Spline interpolation from New_LMin to New_LMax */
212
213     double * New_AL; /* New array for Lambda and Intensity */
214     New_AL=new double[NS];
215
216     double * New_AI;
217     New_AI=new double[NS];
218
219     const char *Spline_Out=Read_Config(CFG_FILE, OUTS); /* Name of spline out file */
220     SPLINE_OUT_FILE=fopen(Spline_Out,"w");
221
222     for(int i=0; i<NS; i++)
223     {
224         fprintf(SPLINE_OUT_FILE, "%f %f\n", Ls, SF(Ls));
225
226         New_AL[i]=Ls;
227         New_AI[i]=SF(Ls);
228         //printf("%f %f\n", New_AL[i], New_AI[i]);
229

```

```

230     Ls=Ls+(New_LMax-New_LMin)/NS;
231 }
232
233 fclose(SPLINE_OUT_FILE);
234
235 SPLINE_OUT_FILE=fopen(Spline_Out,"r");
236
237 if(SPLINE_OUT_FILE != NULL) /* Warning */
238 {
239     cout<<"The fit by spline was successful!\n";
240
241     printf("ND=%d\n", Count(Read_Config(CFG_FILE, OUTS))); /* Print the data number generated by spline */
242 }
243
244 else
245 {
246     cout<<"\n ERROR: The fit by spline was not successful!\n";
247 }
248
249 fclose(SPLINE_OUT_FILE);
250
251 cout<<"\n-----"<<endl;
252 cout<<"                STAGE 3: Minimum & Maximum Values                "<<endl;
253 cout<<"-----\n"<<endl;
254
255 double Temp_LMin, Temp_LMax;
256 double I_Min[2], I_Max[2], I_Mid[2]; /* Minimum and maximum values */
257 double L_IMin[2], L_IMax[2]; /* Variables for calculate the FWHM */
258
259 /* Determine the minimum and maximum value of the intensity in the range of (L_Min, L_Lin-Range) and
260    (L_Lin+Range, L_Max) using the Min and Max functions */
261
262 Temp_LMin=New_LMin;
263 Temp_LMax=L_Lin-Range;
264
265 for(int i=0; i<2; i++)
266 {
267     I_Min[i]=Min(New_AI, NS, New_AL, Temp_LMin, Temp_LMax);
268     I_Max[i]=Max(New_AI, NS, New_AL, Temp_LMin, Temp_LMax);
269
270     for(int j=0; j<NS; j++)
271     {
272         if(New_AL[j] > Temp_LMin && New_AL[j] < Temp_LMax)
273         {
274             if(New_AI[j] == I_Min[i])
275             {
276                 L_IMin[i]=New_AL[j];
277             }
278
279             if(New_AI[j] == I_Max[i])
280             {
281                 L_IMax[i]=New_AL[j];
282             }
283         }
284     }
285
286     Temp_LMin=L_Lin+Range;
287     Temp_LMax=New_LMax;
288
289     if(i == 0)
290     {
291         printf("Values for V peak:\n\n");
292         printf("I_Min=%f | I_Max=%f | L_IMin=%f | L_IMax=%f\n", i, I_Min[i], I_Max[i], L_IMin[i], L_IMax[i]);
293     }
294
295     if(i == 1)
296     {
297         printf("\nValues for R peak:\n\n");
298         printf("I_Min=%f | I_Max=%f | L_IMin=%f | L_IMax=%f\n", i, I_Min[i], I_Max[i], L_IMin[i], L_IMax[i]);
299     }
300 }
301
302 cout<<"\n-----"<<endl;
303 cout<<"                STAGE 4: Half Value Intensity                "<<endl;
304 cout<<"-----\n"<<endl;
305
306 double Temp_IMid, Temp_NV;
307 double Array_FWHM[2];
308
309 /* Determine the half value of the intensity using the difference of I_Min and I_Max */
310
311 for(int i=0; i<2; i++)
312 {
313     I_Mid[i]=I_Min[i]+(I_Max[i]-I_Min[i])/2;
314 }
315
316 Temp_IMid=I_Mid[0];
317 Temp_LMin=L_IMin[0];

```

```

318 Temp_LMax=L_IMax[0];
319 Temp_NV=Near_Value(New_AI, NS, Temp_IMid, New_AL, Temp_LMin, Temp_LMax);
320
321 for(int i=0; i<2; i++)
322 {
323     for(int j=0; j<NS; j++)
324     {
325         if(New_AL[j] > Temp_LMin && New_AL[j] < Temp_LMax)
326         {
327             if(New_AI[j] == Temp_NV)
328             {
329                 Array_FWHM[i]=New_AL[j];
330
331                 //printf("j=%d FWHM=%f\n", j, Array_FWHM[0]);
332             }
333         }
334     }
335
336     if(i == 0)
337     {
338         printf("Values for V peak:\n\n");
339         printf("I_Mid=%f | Near Value of I_Mid=%f | L_IMid=%f\n", I_Mid[i], Temp_NV, Array_FWHM[i]);
340     }
341
342     if(i == 1)
343     {
344         printf("\nValues for R peak:\n\n");
345         printf("I_Mid=%f | Near Value of I_Mid=%f | L_IMid=%f\n", I_Mid[i], Temp_NV, Array_FWHM[i]);
346     }
347
348     Temp_IMid=I_Mid[i];
349     Temp_LMin=L_IMax[i];
350     Temp_LMax=L_IMin[i];
351     Temp_NV=Near_Value(New_AI, NS, Temp_IMid, New_AL, Temp_LMin, Temp_LMax);
352 }
353
354 cout<<"\n-----" <<endl;
355 cout<<"                               STAGE 5: Determine the HIEW                               " <<endl;
356 cout<<"-----\n" <<endl;
357
358 double Array_EFWHM[2][2], Array_Temp_EFWHM[2];
359 double FWHM, E_FWHM;
360
361 /* Determine the error of FWHM using closest values to Array_FWHM[i] in the range of (New_LMin, New_LMax) */
362
363 Temp_LMin=New_LMin;
364 Temp_LMax=L_Lin-Range;
365
366 for(int i=0; i<2; i++)
367 {
368     for(int j=0; j<NT; j++)
369     {
370         if(j == 0)
371         {
372             Array_Temp_EFWHM[i]=abs(Array_L[j]-Array_FWHM[i]);
373         }
374
375         if(Array_L[j] > Temp_LMin && Array_L[j] < Temp_LMax)
376         {
377             if(abs(Array_L[j]-Array_FWHM[i]) < Array_Temp_EFWHM[i])
378             {
379                 Array_Temp_EFWHM[i]=abs(Array_L[j]-Array_FWHM[i]);
380
381                 /* CASE 1: The closest value is less than Array_FWHM[i] */
382
383                 if((Array_L[j]-Array_FWHM[i]) < 0)
384                 {
385                     if(abs(Array_L[j]-Array_FWHM[i]) < 0.015)
386                     {
387                         Array_EFWHM[i][0]=abs(Array_L[j-1]-Array_FWHM[i]);
388                         Array_EFWHM[i][1]=abs(Array_L[j+1]-Array_FWHM[i]);
389
390                         //printf("CASE 1: i=%d Array_FWHM=%f\n", i, Array_FWHM[i]);
391                         //printf("Array_LN-1=%f Array_LN+1=%f\n", Array_L[j-1], Array_L[j+1]);
392                         //printf("Array_EFWHM_L=%f Array_EFWHM_U=%f\n", Array_EFWHM[i][0], Array_EFWHM[i][1]);
393                     }
394
395                     else
396                     {
397                         Array_EFWHM[i][0]=abs(Array_L[j]-Array_FWHM[i]);
398                         Array_EFWHM[i][1]=abs(Array_L[j+1]-Array_FWHM[i]);
399
400                         //printf("CASE 1: i=%d Array_FWHM=%f\n", i, Array_FWHM[i]);
401                         //printf("Array_LN=%f Array_LN+1=%f\n", Array_L[j], Array_L[j+1]);
402                         //printf("Array_EFWHM_L=%f Array_EFWHM_U=%f\n", Array_EFWHM[i][0], Array_EFWHM[i][1]);
403                     }
404                 }
405             }

```

```

406      /* CASE 2: The closest value is greater than Array_FWHM[i] */
407
408      if((Array_L[j]-Array_FWHM[i]) > 0)
409      {
410          if(abs(Array_L[j]-Array_FWHM[i]) < 0.015)
411          {
412              Array_EFWHM[i][1]=abs(Array_L[j+1]-Array_FWHM[i]);
413              Array_EFWHM[i][0]=abs(Array_L[j-1]-Array_FWHM[i]);
414
415              //printf("CASE 2: i=%d Array_FWHM=%f\n", i, Array_FWHM[i]);
416              //printf("Array_LN+1=%f Array_LN-1=%f\n", Array_L[j+1], Array_L[j-1]);
417              //printf("Array_EFWHM_L=%f Array_EFWHM_U=%f\n", Array_EFWHM[i][0], Array_EFWHM[i][1]);
418          }
419
420          else
421          {
422              Array_EFWHM[i][1]=abs(Array_L[j]-Array_FWHM[i]);
423              Array_EFWHM[i][0]=abs(Array_L[j-1]-Array_FWHM[i]);
424
425              //printf("CASE 2: i=%d Array_FWHM=%f\n", i, Array_FWHM[i]);
426              //printf("Array_LN=%f Array_LN-1=%f\n", Array_L[j], Array_L[j-1]);
427              //printf("Array_EFWHM_L=%f Array_EFWHM_U=%f\n", Array_EFWHM[i][0], Array_EFWHM[i][1]);
428          }
429      }
430  }
431  }
432  }
433
434      Temp_LMin=L_Lin+Range;
435      Temp_LMax=New_LMax;
436  }
437
438  /* Determine the Half Intensity Emission Width */
439
440  FWHM=Array_FWHM[1]-Array_FWHM[0];
441
442  printf("| FWHM_LL=%f +/- (%f, %f) |\n", Array_FWHM[0], Array_EFWHM[0][1], Array_EFWHM[0][0]);
443  printf("| FWHM_UL=%f +/- (%f, %f) |\n", Array_FWHM[1], Array_EFWHM[1][1], Array_EFWHM[1][0]);
444
445  /* Determine the error of the Half Intensity Emission Width using the average */
446
447  E_FWHM=abs(sqrt(pow(((Array_EFWHM[0][0]+Array_EFWHM[0][1])/2),2) +
448      pow(((Array_EFWHM[1][0]+Array_EFWHM[1][1])/2),2)));
449
450  printf("| FWHM=%f +/- %f |\n", FWHM, E_FWHM);
451
452  cout<<"\n-----\n"<<endl;
453
454  /* Export results to out file */
455
456  RESULTS_FILE=fopen(Read_Config(CFG_FILE, OUTR),"w");
457  fprintf(RESULTS_FILE, "# STAGE 1\n\n");
458  fprintf(RESULTS_FILE, "Data_File=\"%s\"\n", Data_File);
459  fprintf(RESULTS_FILE, "Data_Total_Number=%i\n", NT);
460  fprintf(RESULTS_FILE, "Spline_Out_File=\"%s\"\n", Spline_Out);
461  fprintf(RESULTS_FILE, "LMin=%f\n", New_LMin);
462  fprintf(RESULTS_FILE, "LMax=%f\n\n", New_LMax);
463  fprintf(RESULTS_FILE, "# STAGE 2\n\n");
464  fprintf(RESULTS_FILE, "#The fit by splines was successful!\n");
465  fprintf(RESULTS_FILE, "ND=%d\n\n", Count(Read_Config(CFG_FILE, OUTS)));
466  fprintf(RESULTS_FILE, "# STAGE 3\n\n");
467  fprintf(RESULTS_FILE, "L_IMin_1=%f\n", L_IMin[0]);
468  fprintf(RESULTS_FILE, "L_IMin_2=%f\n", L_IMin[1]);
469  fprintf(RESULTS_FILE, "IMin_1=%f\n", I_Min[0]);
470  fprintf(RESULTS_FILE, "IMin_2=%f\n", I_Min[1]);
471  fprintf(RESULTS_FILE, "L_IMax_1=%f\n", L_IMax[0]);
472  fprintf(RESULTS_FILE, "L_IMax_2=%f\n", L_IMax[1]);
473  fprintf(RESULTS_FILE, "IMax_1=%f\n", I_Max[0]);
474  fprintf(RESULTS_FILE, "IMax_2=%f\n\n", I_Max[1]);
475  fprintf(RESULTS_FILE, "# STAGE 4\n\n");
476  fprintf(RESULTS_FILE, "IMid_1=%f\n", I_Mid[0]);
477  fprintf(RESULTS_FILE, "IMid_2=%f\n", I_Mid[1]);
478  fprintf(RESULTS_FILE, "FWHM_LL=%f\n", Array_FWHM[0]);
479  fprintf(RESULTS_FILE, "FWHM_UL=%f\n", Array_FWHM[1]);
480  fprintf(RESULTS_FILE, "ELFWHM_LL=%f\n", Array_EFWHM[0][0]);
481  fprintf(RESULTS_FILE, "EUPWHM_LL=%f\n", Array_EFWHM[0][1]);
482  fprintf(RESULTS_FILE, "ELFWHM_UL=%f\n", Array_EFWHM[1][0]);
483  fprintf(RESULTS_FILE, "EUPWHM_UL=%f\n", Array_EFWHM[1][1]);
484  fprintf(RESULTS_FILE, "FWHM=%f\n", FWHM);
485  fprintf(RESULTS_FILE, "E_FWHM=%f\n", E_FWHM);
486  fclose(RESULTS_FILE);
487
488  return EXIT_SUCCESS;
489  } /* End of main */
490
491  /* Functions */
492
493  /* Counter function of the number of lines in a file */

```

```

494
495 int Count(char name[25])
496 {
497     FILE *File;
498     int c=0;
499     char temp[100]; /* If the account fails, increase the number */
500     File=fopen(name,"r");
501
502     while(fgets(temp,100,File) != NULL)
503     {
504         if(!feof(File))
505         {
506             /* Only if it's different from a control character */
507
508             if(temp[0] != '\n' && temp[0] != '\t' && temp[0] != '\v' &&
509                temp[0] != '\b' && temp[0] != '\r' && temp[0] != '\f' &&
510                temp[0] != '\a' && temp[0] != ' ' && temp[0] != '\0')
511             {
512                 c++;
513
514                 //cout<<c<<<"\n";
515                 //cout<<temp;
516             }
517         }
518     }
519
520     fclose(File);
521
522     return c; /* Return the number of lines */
523 } /* End of Count */
524
525 /* Read a configuration file */
526
527 char * Read_Config(char config_name[20], char config[6])
528 {
529     char configuration[5];
530     char temp[100];
531
532     memset(temp, 0, 100); /* Initialize the char with zeros */
533
534     FILE * config_file;
535     config_file=fopen(config_name, "r");
536
537     /* Copy the first 6 characters of each line of the configuration file */
538
539     while(fgets(configuration, 6, config_file))
540     {
541         /* If are equal returns 0 */
542
543         if (strcmp(configuration, config)==0)
544         {
545             /* Save the value in temp */
546             fgets(temp, 100, config_file);
547         }
548     }
549
550     fclose(config_file);
551
552     char * value = new char[strlen(temp)]; /* Char for definitive value */
553
554     memset(value, 0, strlen(temp)); /* Initialize the char with zeros */
555     strncpy(value, temp, strlen(temp)-1); /* Copy temp in value */
556     strcat(value, "\0"); /* Add the end line \0 to value */
557
558     return value; /* Return value */
559 } /* End of Read_Config */
560
561 /* Determine the closest value */
562
563 double Near_Value(double array_1[], int size, double value, double array_2[], double lim_l, double lim_u)
564 {
565     double temp;
566     double near_value;
567
568     for(int i=0; i<size; i++)
569     {
570         if(i == 0){temp=abs(array_1[i]-value);}
571         if(array_2[i] > lim_l && array_2[i] < lim_u)
572         {
573             if(abs(array_1[i]-value) < temp)
574             {
575                 near_value=array_1[i];
576                 temp=abs(array_1[i]-value);
577
578                 //printf("n=%i array=%f value=%f near_value_1=%f temp=%f\n", i, array_1[i], value, near_value, temp);
579             }
580         }
581     }

```

```

582
583     return near_value; /* Return near_value */
584 } /* End of Near_Value */
585
586 /* Determine the minimum and maximum value in the range of (lim_l, lim_u) */
587
588 double Min(double array_1[], int size, double array_2[], double lim_l, double lim_u)
589 {
590     double temp_min=1e9;
591     for(int i=0; i<size; i++)
592     {
593         if(array_2[i] > lim_l && array_2[i] < lim_u)
594         {
595             if(array_1[i] < temp_min)
596             {
597                 temp_min=array_1[i];
598
599                 //printf("n=%i L=%f I=%f I_Min=%f\n", i, array_2[i], array_1[i], temp_min);
600             }
601         }
602     }
603
604     return temp_min; /* Return temp_min */
605 } /* End of Min */
606
607 double Max(double array_1[], int size, double array_2[], double lim_l, double lim_u)
608 {
609     double temp_max=0;
610
611     for(int i=0; i<size; i++)
612     {
613         if(array_2[i] > lim_l && array_2[i] < lim_u)
614         {
615             if(array_1[i] > temp_max)
616             {
617                 temp_max=array_1[i];
618
619                 //printf("n=%i L=%f I=%f I_Max=%f\n", i, array_2[i], array_1[i], temp_max);
620             }
621         }
622     }
623
624     return temp_max; /* Return temp_max */
625 } /* End of Max */

```


Apéndice B

Anchos y perfiles de la línea de emisión K de Ca II de la muestra estelar

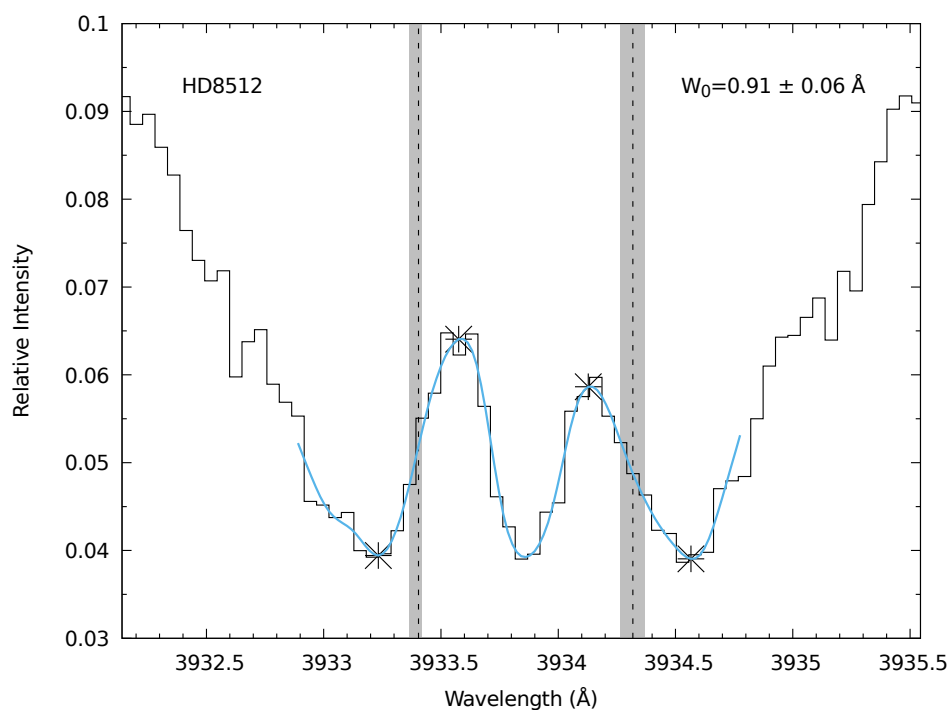


Fig. B.1. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD8512.

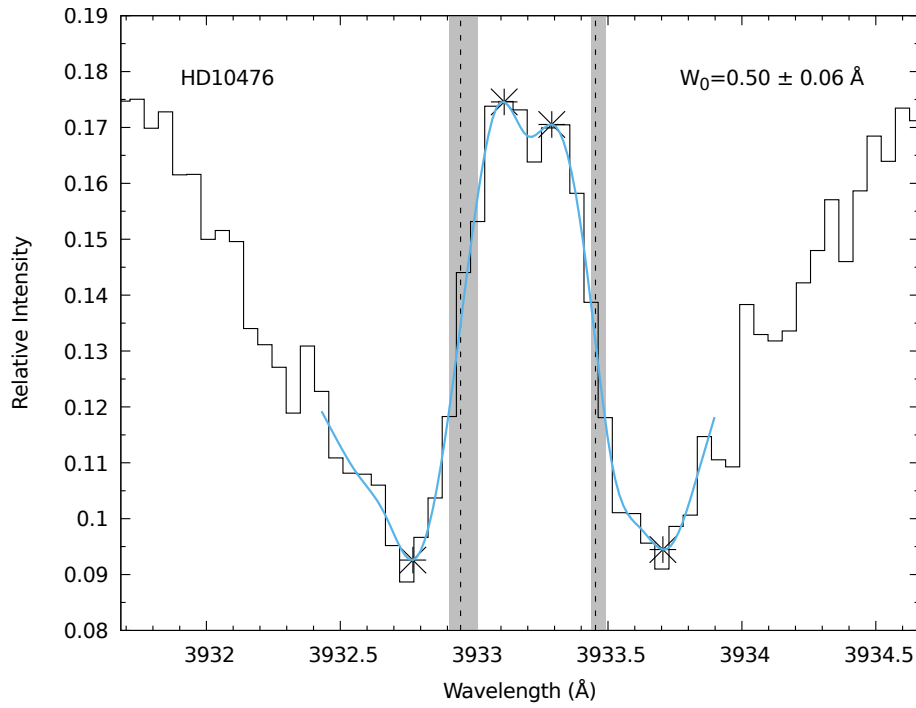


Fig. B.2. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD10476.

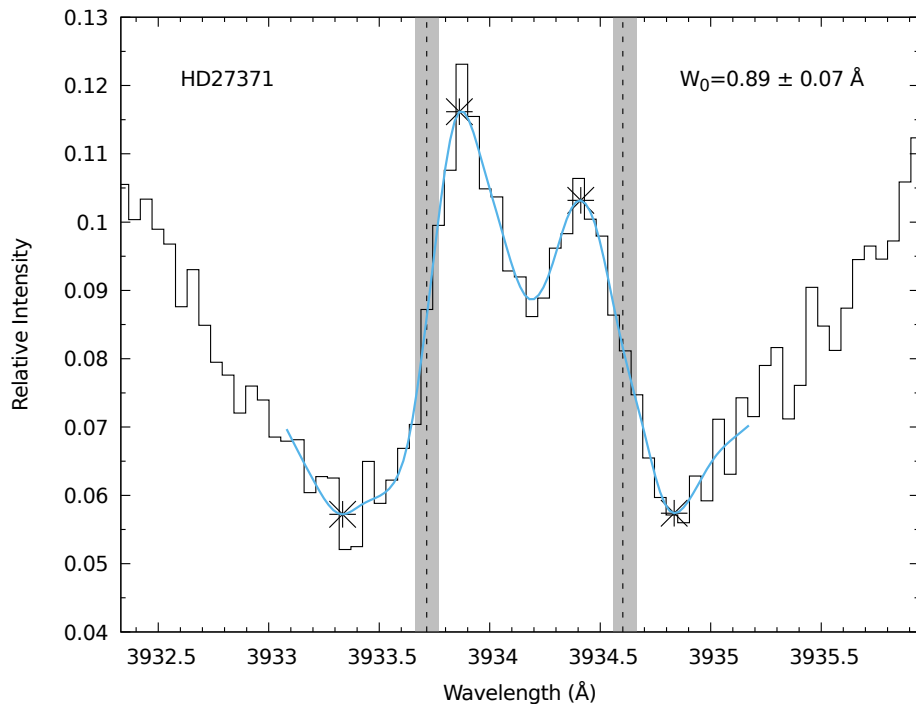


Fig. B.3. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD27371.

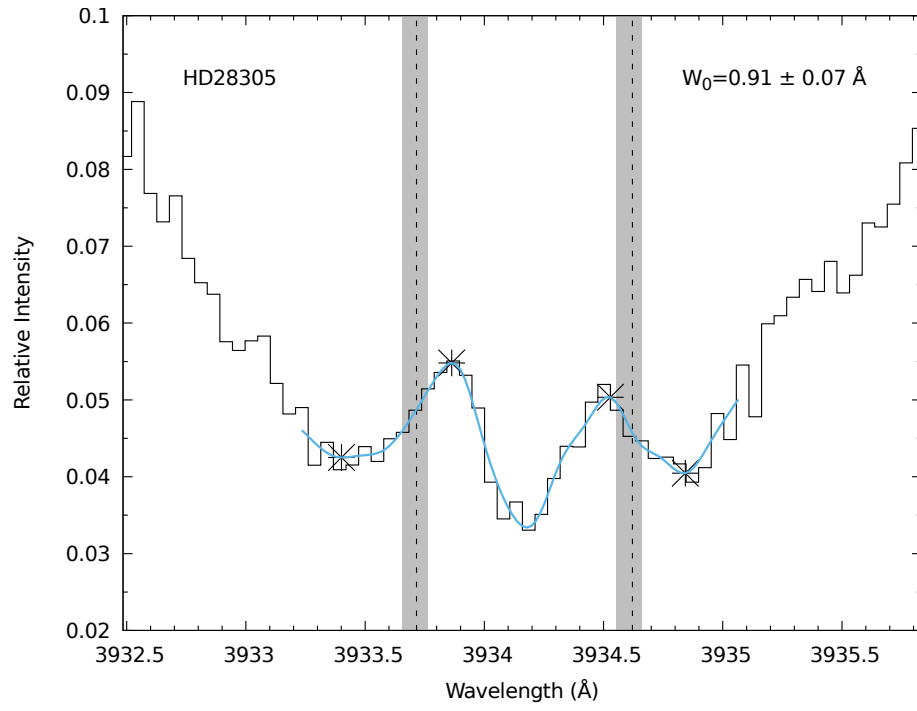


Fig. B.4. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD28305.

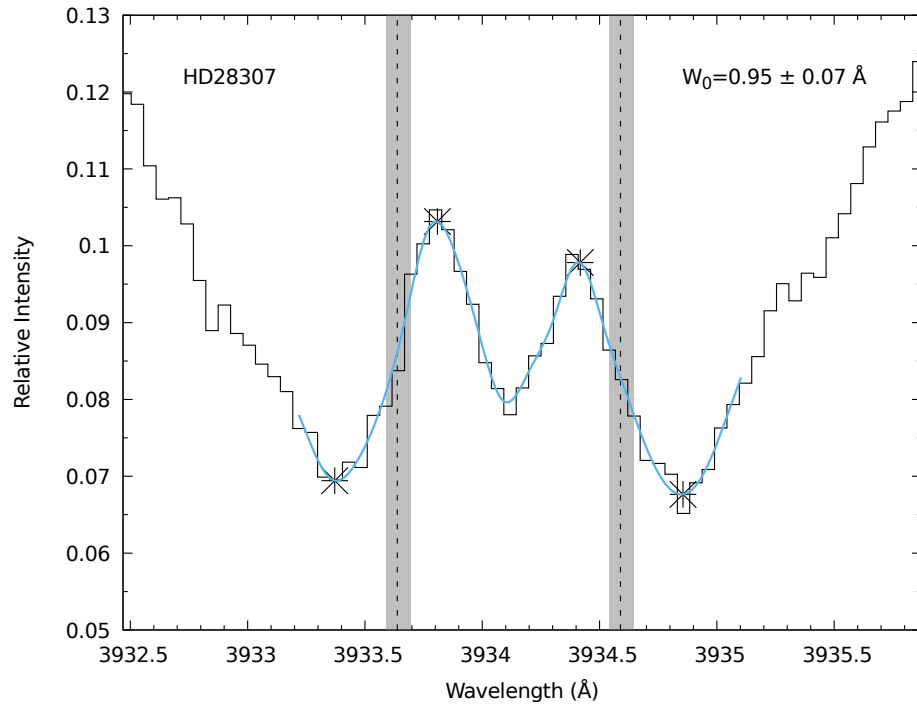


Fig. B.5. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD28307.

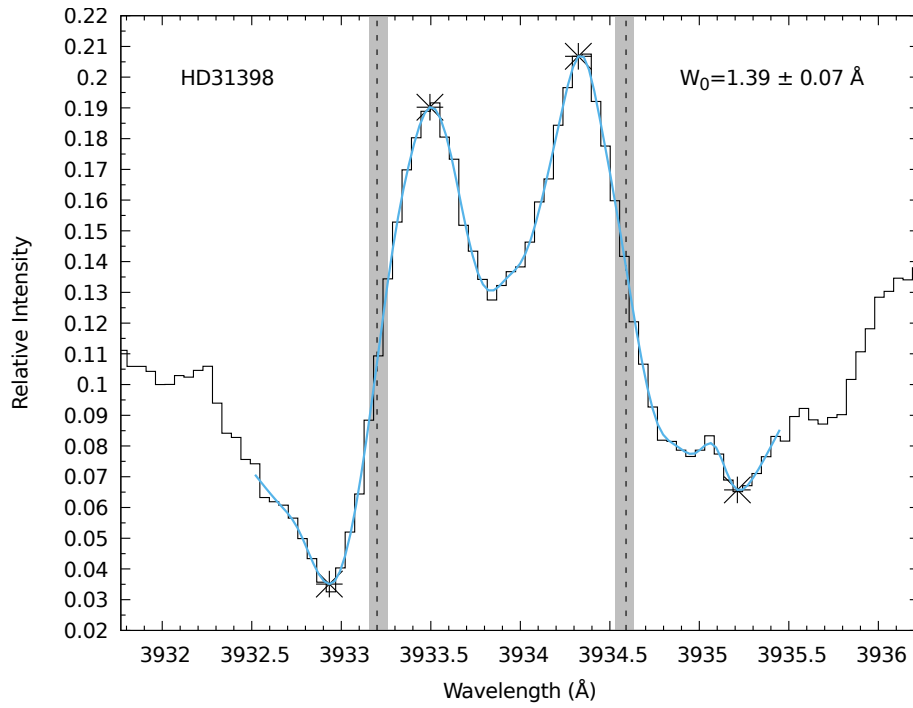


Fig. B.6. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD31398.

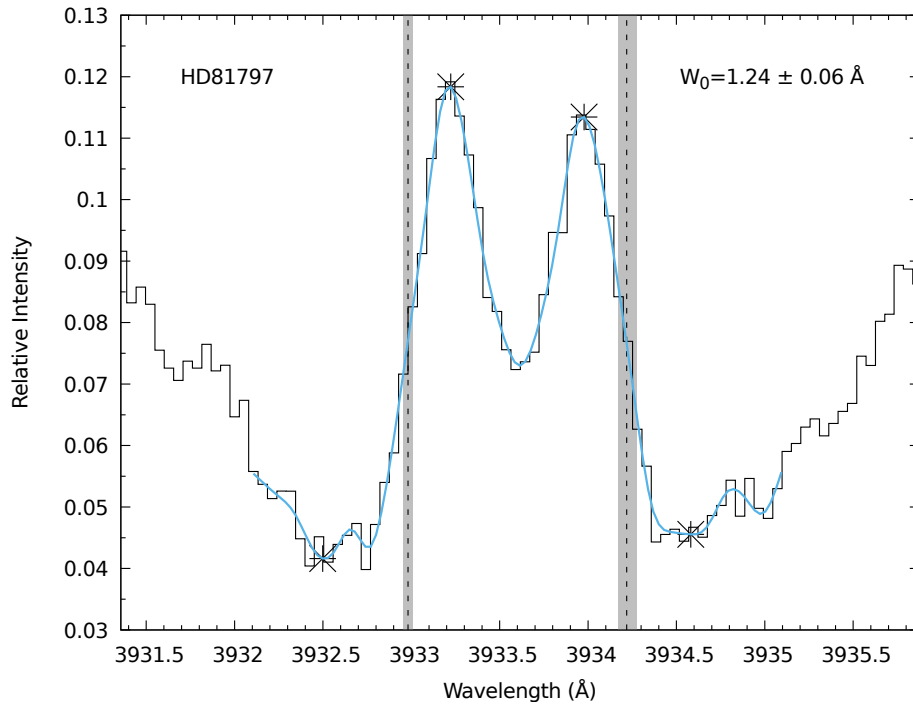


Fig. B.7. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD81797.

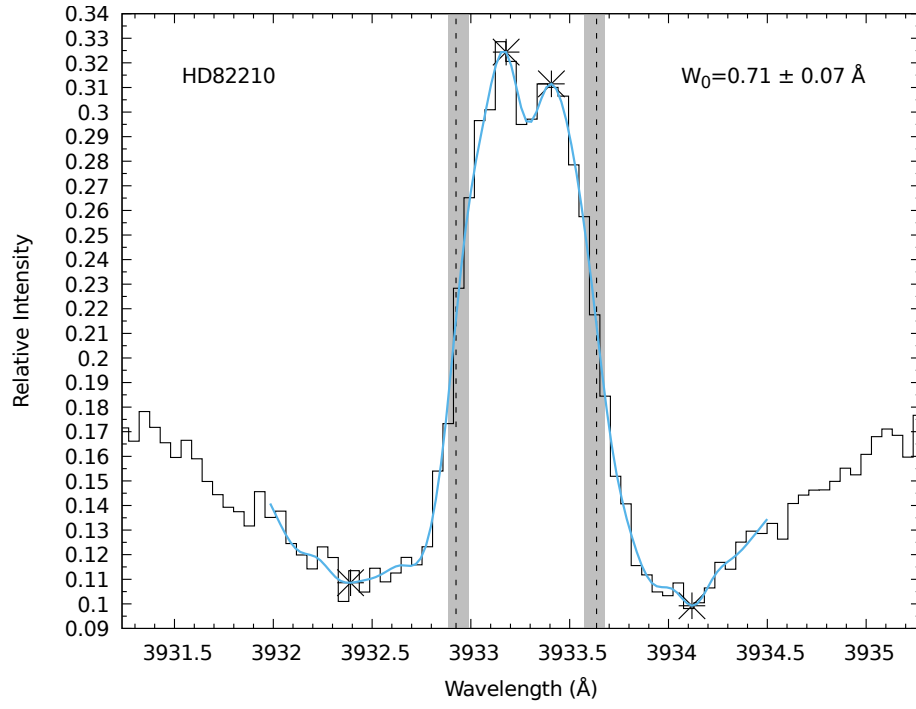


Fig. B.8. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD82210.

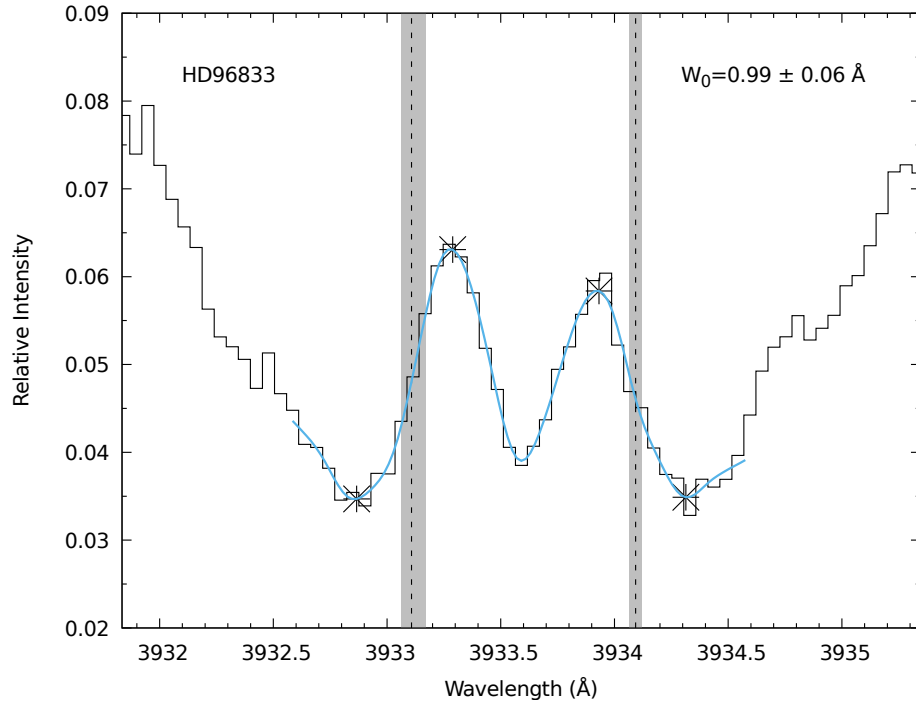


Fig. B.9. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD96833.

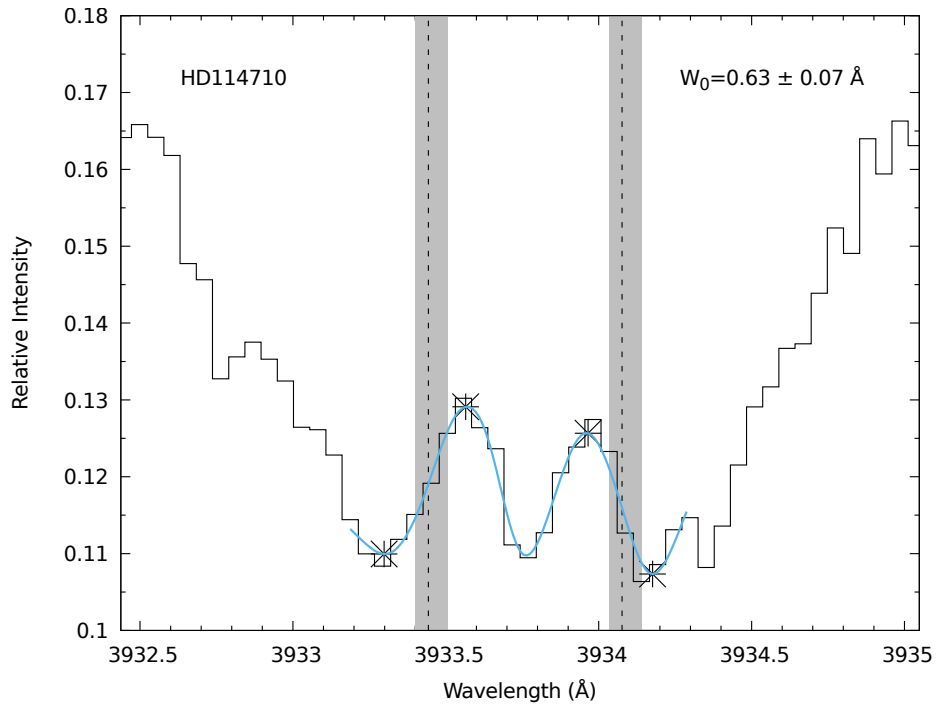


Fig. B.10. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD114710.

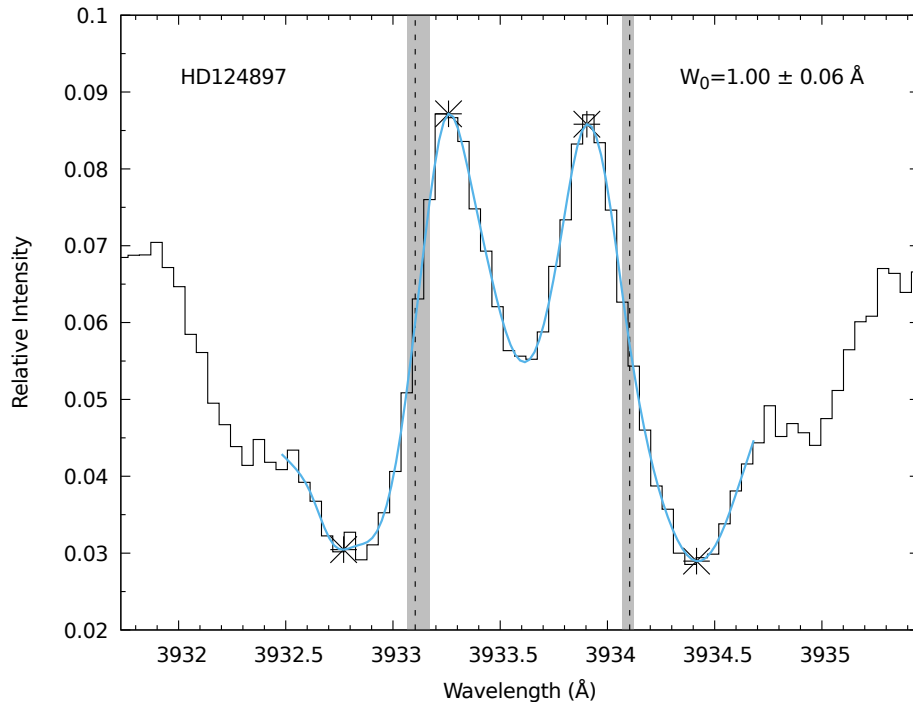


Fig. B.11. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD124897.

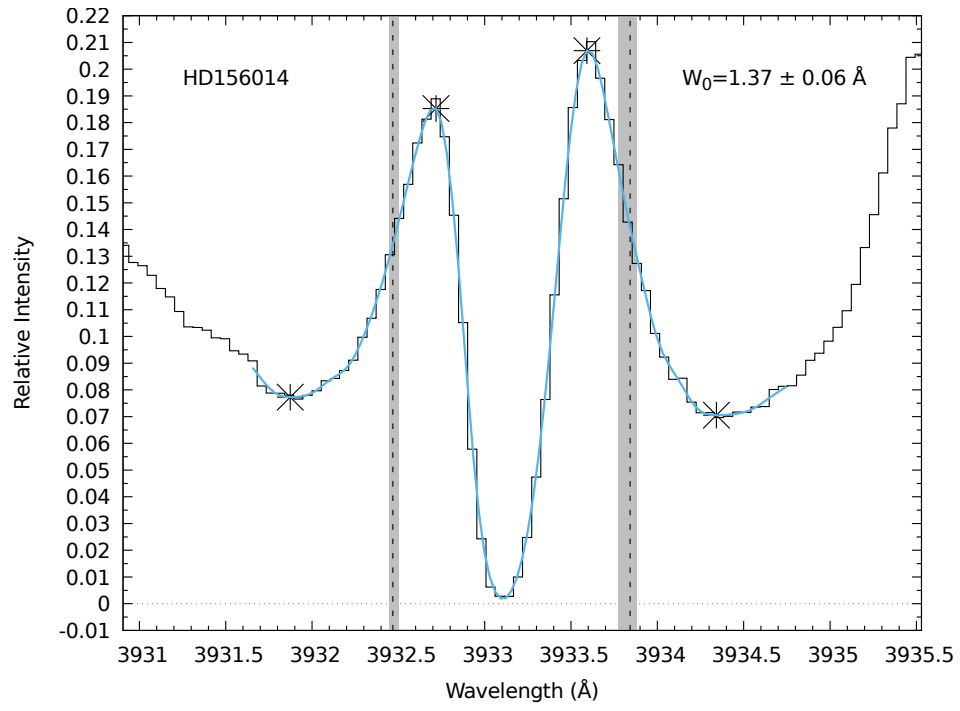


Fig. B.12. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD156014.

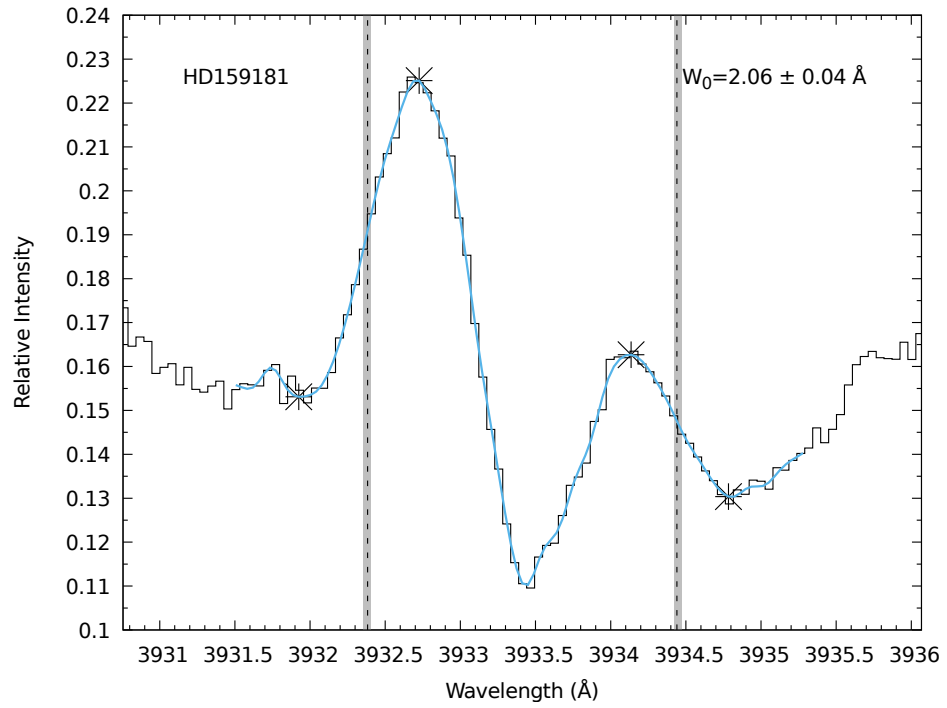


Fig. B.13. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD159181.

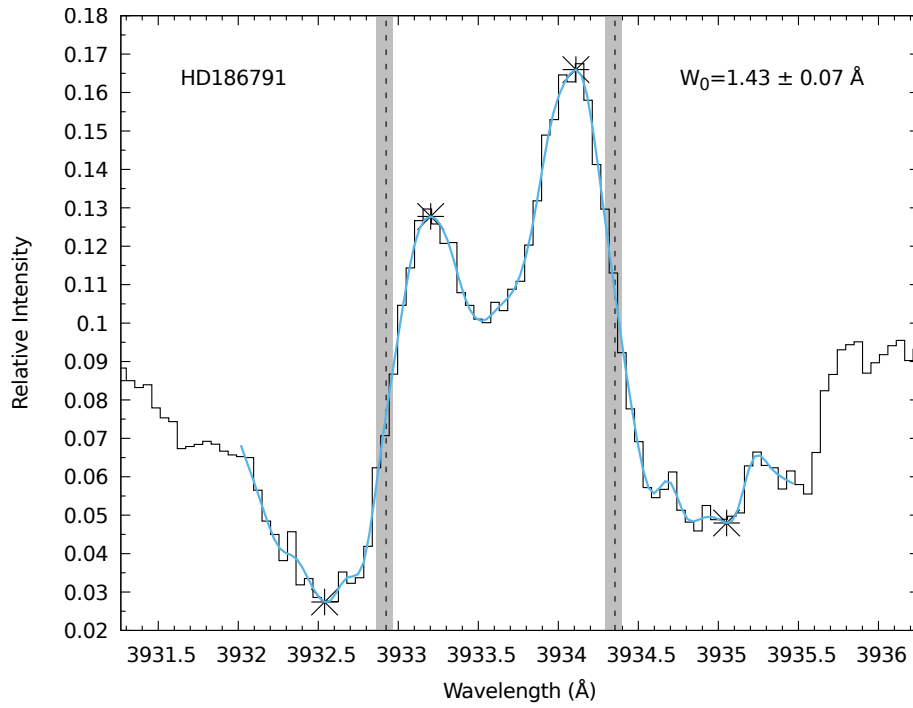


Fig. B.14. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD186791.

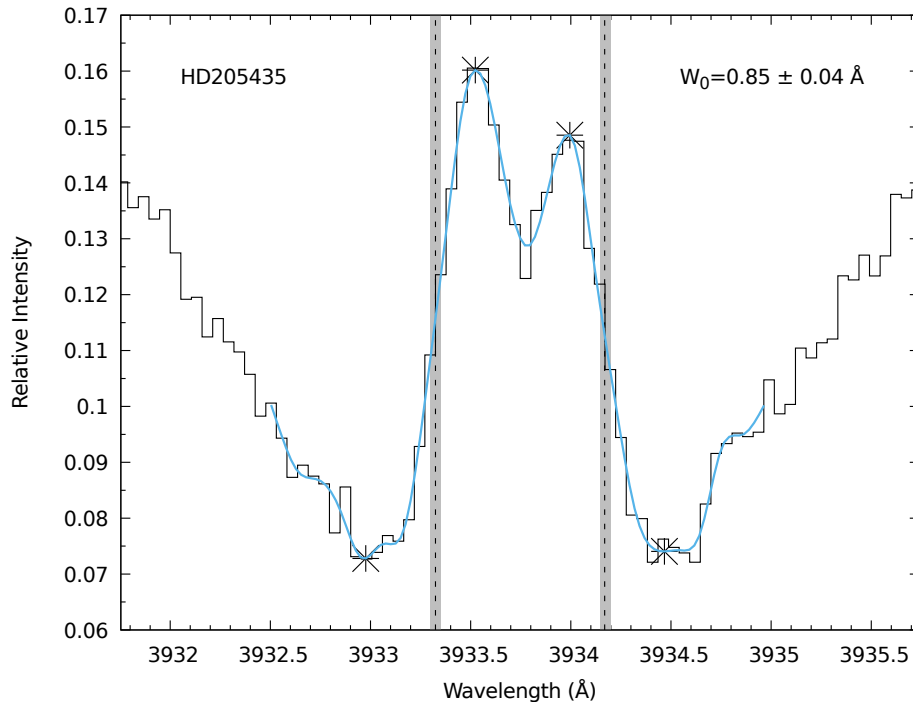


Fig. B.15. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD205435.

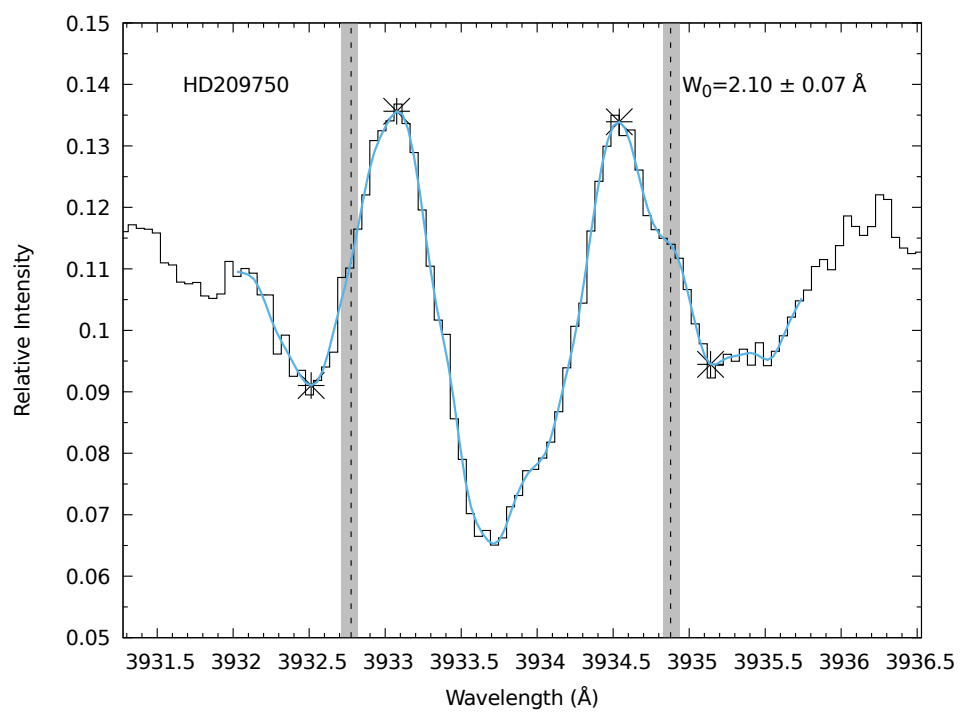


Fig. B.16. Ancho de la línea de emisión K de Ca II para HD209750.

