

Datos de Identificación de tareas



Centro de Ciencias Básicas

Materia: Ecuaciones Diferenciales

Tarea V

Ley de Enfriamiento de Newton

Ingeniería en Computación Inteligente Semestre 5° A

Alumno: Jose Luis Sandoval Perez

ID:261731

Profesor: Jaime Salvador Medina González

Fecha de entrega: 22/10/2023

TAREA V

Ley De Enfriamiento De Newton

① La temperatura de una cerveza en el momento que se saca de la heladera es de 2°C . La temperatura del medio ambiente es de 25°C . Despues de 3 minutos la temperatura de la cerveza es de 12°C .

- Obtenga la ecuación diferencial que modela el comportamiento de la temperatura de la cerveza.
- Resuelva la ED obtenida en a) para determinar cuánto tiempo tomará para que la temperatura suba a 15°C .
- Determine si existe un tiempo en que la temperatura de la cerveza sea 46°C .

a)

Modelo

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_m), \text{ sujeto}$$

$$\text{a } T(0) = T_0$$

Datos

$$T_m = 25^{\circ}\text{C}$$

$$T_0 = 2^{\circ}\text{C}$$

$$K = ?$$

$$T(3) = 12^{\circ}\text{C}$$

Sustitución en modelo

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - 25), \text{ sujeto}$$

$$T(0) = 2$$

$$T(3) = 12$$

→ Resolviendo

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - 25) \rightarrow \frac{dT}{dt} = +KT + 25K \rightarrow \frac{dT}{dt} + KT = 25K$$

① Sacar F1

$$M(t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int K dt} = e^{Kt} = e^{\frac{KT}{K}} = e^{\frac{KT}{K}}$$

② Multiplicar F1 por ED

$$e^{KT} \left(\frac{dT}{dt} + KT \right) = 25K(e^{KT}) \rightarrow \underbrace{e^{KT} \frac{dT}{dt} + e^{KT} KT}_{\text{derivada de un producto}} = 25Ke^{KT}$$
$$\rightarrow \frac{d(e^{KT} \cdot T)}{dt} = 25Ke^{KT}$$

③ Integraremos

$$\int \frac{dt}{e^{kt}} = \int 25K e^{kt} dt$$

$$\begin{aligned} u &= kt \\ du &= kdt \\ dt &= \frac{du}{k} \end{aligned}$$

$$\int k e^{kt} \frac{du}{k} =$$

$$e^{kt} = 25 \int k e^{kt} dt$$

$$e^{kt} \cdot T = 25 e^{kt} + C$$

$$T(t) = \frac{25 e^{kt}}{e^{kt}} + \frac{C}{e^{kt}} = 25 + \frac{C}{e^{kt}} = 25 + C e^{-kt}$$

Solución general

①

④ Se busca solución particular que cumpla $T(0) = 2$

$$T(0) = 25 + C e^{-k(0)} = 25 + C \rightarrow 2 - 25 = C \rightarrow C = -23$$

⑤ Sustituir C en Sol. general

$$T(t) = 25 - 23 e^{-kt} \quad \text{Solución del PVI} \quad ②$$

⑥ Se busca solución que cumpla $T(3) = 12$

$$T(3) = 25 - 23 e^{-3k} = 12$$

$$= 25 - 23 e^{-3k} = 12 - 25$$

$$= -23 e^{-3k} = -13$$

$$= e^{-3k} = \frac{-13}{-23}$$

$$= e^{-3k} = 0.5652$$

$$= \ln e^{-3k} = \ln |0.5652|$$

$$= -3k = \ln |0.5652|$$

$$= K = \frac{\ln |0.5652|}{-3}$$

$$= K = 0.1917$$

⑦ Sustituir K en 2

$$T(t) = \underbrace{25 - 23e^{-0.1917t}}$$

Función temperatura de revereza

b) tiempo para temperatura = 15°

→ Se busca t^* tal que $T(t^*) = 15^\circ$

$$25 - 23e^{-0.1917t} = 15$$

$$-23e^{-0.1917t} = 15 - 25$$

$$-23e^{-0.1917t} = -10$$

$$e^{-0.1917t} = \frac{-10}{-23}$$

$$e^{-0.1917t} = 0.4347$$

$$\ln e^{-0.1917t} = \ln 0.4347$$

$$-0.1917t = \ln 0.4347$$

$$t = \frac{\ln 0.4347}{-0.1917} = 4.3456 \text{ minutos después de sacarla}$$

c) tiempo para temperatura = 45°

→ Se busca t^* tal que $T(t^*) = 45^\circ$

$$25 - 23e^{-0.1917t} = 45$$

$$-23e^{-0.1917t} = 45 - 25$$

$$-23e^{-0.1917t} = 20$$

$$e^{-0.1917t} = \frac{20}{-23}$$

$$e^{-0.1917t} = -0.8695$$

$$\ln e^{-0.1917t} = \ln -0.8695$$

$$-0.1917t = \ln -0.8695$$

$$t = \frac{\ln -0.8695}{-0.1917}$$

$$t = ? \text{ enor}$$

∴ No existe tiempo en que la revereza alcance $46^\circ C$.

(2) Se coloca una báscula de aluminio cuya temperatura inicial es de 250°C , en un medio ambiente con temperatura constante $T_m = 15^{\circ}\text{C}$. Al registrar las temperaturas de la báscula en diferentes tiempos, se obtuvieron los siguientes datos:

Tiempo en segundos 0 60 120 300
 Temperatura $250 \quad 58.6 \quad 23.1 \quad 100$

Temperatura según modelo 116.23414°

a) Obtenga la ecuación diferencial que modela el comportamiento de la temperatura de la báscula de aluminio y obtener la solución general de dicha ED.

① Modelo $\frac{dT}{dt} = -K(T - T_m)$, sujeto a $T(0) = T_0$

② Datos $T_m = 15^{\circ}$ $T(60) = 58.6^{\circ}$
 $T_0 = 250^{\circ}$
 $K = ?$

③ Sustituyendo en modelo ① $\frac{dT}{dt} = -K(T - 15)$, sujeto a $T(0) = 250^{\circ}$
 $T(60) = 58.6^{\circ}$

④ Resolver ED (método de lineales)

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - 15)$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} = -KT + 15K$$

$$\rightarrow \underline{\frac{dT}{dt} + KT = 15K}$$

• Sacar $F1$
 $M(t) = e^{\int p(x) dt} = e^{\int K dt} = e^{Kt} = e^{kt}$

• Multiplicar F1 por ED

$$e^{kt} \left(\frac{dT}{dt} + KT \right) = (15K)e^{kt}$$

$$\underline{e^{kt} \frac{dT}{dt} + e^{kt} KT = 15Ke^{kt}}$$

derivada de
un producto

$$\frac{d(e^{kt} \cdot T)}{dt} = 15Ke^{kt}$$

• Integrar

$$\int \frac{d(e^{kt} \cdot T)}{dt} dt = \int 15e^{kt} dt$$

$$e^{kt} \cdot T = 15e^{kt} + C$$

$$T(t) = \frac{15e^{kt}}{e^{kt}} + \frac{C}{e^{kt}}$$

$$T(t) = 15 + Ce^{kt}$$

Solución
general de
la ED

$$u = kt$$

$$du = K dt$$

$$dt = \frac{du}{K}$$

b) Utilice los datos de temperatura y determine la función de la temperatura de la barra

① Se busca solución particular que cumpla $T(0) = 250^\circ$

$$T(0) = 15 + Ce^{-K(0)} = 250$$

$$\rightarrow Ce^{-K(0)} = 250 - 15$$

$$\rightarrow C = 235$$

• Sustituimos en solución general

$$T(t) = 15 + 235e^{-Kt} \quad ③$$

② Se busca solución particular que cumpla $T(60) = 58.6$

$$T(60) = 15 + 235e^{-K(60)} = 58.6$$

$$\rightarrow 235e^{-60K} = 58.6 - 15$$

$$\rightarrow 235e^{-60K} = 43.6$$

$$\rightarrow e^{-60K} = \frac{43.6}{235}$$

$$\rightarrow e^{-60K} = 0.18553$$

$$\rightarrow \ln e^{-60K} = \ln |0.18553|$$

$$\rightarrow -60K = \ln |0.18553|$$

$$\rightarrow K = \frac{\ln |0.18553|}{-60}$$

$$\rightarrow K = 0.02807$$

③ Sustituir en ③

$$T(t) = 15 + 235e^{-0.02807t}$$

Funció n temperatura de la barra

c) Determinar el tiempo en que la temperatura de la bolla sea de 100°C

(2) ① Se busca t^* tal que $T(t^*) = 100^{\circ}\text{C}$

$$\rightarrow 15 + 235e^{-0.02807t} = 100$$

$$\rightarrow 235e^{-0.02807t} = 100 - 15$$

$$\rightarrow e^{-0.02807t} = \frac{85}{235}$$

$$\rightarrow \ln e^{-0.02807t} = \ln 0.361701$$

$$\rightarrow -0.02807t = \ln 0.361701$$

$$\rightarrow t = \frac{\ln 0.361701}{-0.02807}$$

$$\rightarrow t = 36.22 \text{ segundos}$$

d) Determine la temperatura de la bolla a los 30 segundos

$$T(30) = 15 + 235e^{-0.02807(30)}$$

$$= 15 + 101.2391$$

$$= 116.23914^{\circ}$$

③ El prof y Thalia están en una fiesta. El mesón les ofrece las últimas dos cervezas una al tiempo y una fría. Sugiere que la temperatura de la cerveza al tiempo es de 20° , la del salón de fiesta es de 12°C y la fría de 4°C .

Se genera una polémica, porque el prof le propone a Thalia la idea de mezclar ambas cervezas, con la finalidad de tomar dicha mezcla.

Demuéstre que si deciden mezclarlas, no importa cuánto dure la discusión ambos tomarán la cerveza a 12°C .

Obtenga una descripción geométrica

① Modelo

Datos

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m), \quad T_m = 12^\circ\text{C}$$

$$T_0 = 20^\circ\text{C}$$

$$T(0) = T_0$$

$$T_0 = 4^\circ\text{C}$$

② Sacamos fórmula y ecuación para ambas cervezas

a) $T_0 = 20^\circ\text{C}$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 12)$$

$$= -kT + 12k$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} + kT = 12k$$

• Sacamos F1

$$F1(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}$$

• Multiplicamos F1 por ED

$$e^{kt} \left(\frac{dT}{dt} + kT \right) = (e^{kt}) 12k$$

derivada

de un producto

$$\frac{d(e^{kt} \cdot T)}{dt}$$

• Integraremos

$$\int \frac{d(e^{kt} \cdot T)}{dt} dt = \int 12e^{kt} dt$$

$$\int e^{du} = e^u$$

integral completa

$$e^{kt} \cdot T = 12e^{kt} + C$$

$$T(t) = \frac{12e^{kt}}{e^{kt}} + \frac{C}{e^{kt}}$$

$$T(t) = 12 + Ce^{-kt}$$

Solución general

• Se busca solución que satisfaga $T(0) = 20$

$$20 = 12 + ce^{-kt}$$

$$20 - 12 = ce^{-k(0)}$$

$$\underline{8 = c}$$

• Sustituir c en sol general

$$\underline{T(t) = 12 + 8e^{-kt}} \quad \text{sol del PVI}$$

b) $T_0 = 4^\circ$

• Se busca solución que satisfaga $T(0) = 4$

$$4 = 12 + ce^{-kt}$$

$$4 - 12 = ce^{-k(0)}$$

$$\underline{-8 = c}$$

• Sustituir en sol general

$$\underline{T(t) = 12 - 8e^{-kt}} \quad \text{sol del PVI}$$

③ Sumamos ecuaciones, dividimos entre 2 e igualamos a 12°

$$\frac{(12 + 8e^{-kt}) + (12 - 8e^{-kt})}{2} = 12$$

∴ Al mezclar T_0 , (en vez q)
ambas estan a 12°

$$\rightarrow \frac{24}{12} = 12 \quad \underline{\text{A}}$$

a) Tiempo para carne a 60°

④ Estudiantes de un grupo de ingeniería realizan una reunión con carne asada y botana. Se sabe que la temperatura de congelación de la carne marinada es de entre -1°C y -2°C. A partir de las 7:00 AM se extrae la carne del congelador, cuya temperatura fue de -10°C y se expone en la cocina con $T_m = 18^\circ\text{C}$.

También se registró otra lectura de la carne a las 9:00 AM, la cual fue de -3°C.

a) Determine el tiempo necesario para llevar carne a 60°C.

b) ¿Qué temperatura tendrá la carne a las 14:00?

c) Realice una tabla para organizar los datos de tiempo y temperaturas desde las 7:00 AM hasta las 14:00 PM:

d) Modelo

Datos

Sustitución

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

$$T_m = 18^\circ\text{C}$$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 18)$$

$$T_0 = -10^\circ$$

$$T(2) = -3^\circ$$

$$T(0) = T_0$$

$$T(2) = -3^\circ$$

$$T(0) = -10^\circ$$

$$h = ?$$

① Sacamos fórmula de enfriamiento

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} = -k(T - 18) \rightarrow \frac{dT}{dt} = -kT + 18k$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} + kt = 18k$$

Sacamos FI

$$M(t) = e^{\int p(x) dt} = e^{\int k dt} = e^{kt}$$

Multiplicando por ED

$$e^{kt} \left(\frac{dT}{dt} + kt \right) = 18k e^{-kt}$$

$$\frac{d(e^{kt} \cdot T)}{dt} = 18k e^{-kt}$$

Integramos

+ Integral completa $\int e^u \cdot e^u = e^u$

$$\frac{\int 18ne^{ne} dt}{dx} = \int 18ne^{ne}$$

$$\rightarrow e^{ne} \cdot T = 18e^{ne} + C$$

$$\rightarrow T(\epsilon) = \frac{18e^{ne}}{e^{ne}} + \frac{C}{e^{ne}}$$

$$\rightarrow T(\epsilon) = 18 + Ce^{-ne} \quad | \quad ②$$

Solución general

Se busca solución que cumpla $T(0) = -10$

$$-10 = 18 + Ce^{-n \cdot 0}$$

$$-18 - 18 = Ce^{-n \cdot 0}$$

$$C = -36$$

Sustituir en solución general

$$T(\epsilon) = 18 - 36e^{-n\epsilon} \quad | \quad ③$$

Se busca solución que cumpla $T(2) = -3$

$$-3 = 18 - 36e^{-n(2)}$$

$$-3 - 18 = -36e^{-2n}$$

$$-21 = -36e^{-2n}$$

$$\frac{-21}{-36} = e^{-2n}$$

$$\ln \left| \frac{-21}{-36} \right| = \ln e^{-2n}$$

$$K = \frac{\ln \left| \frac{-21}{-36} \right|}{-2} = \underline{\underline{0.14384}} \quad |$$

Sustituimos K en 3

$$T(\epsilon) = 18 - 36e^{-0.14384\epsilon}$$

ecuación enfriamiento
corriente

a) Tiempo para carne a 6°

$$t^* \text{ tal que } T(t^*) = 6^{\circ}$$

$$\rightarrow 6 = 18 - 28e^{-0.14384t}$$

$$\rightarrow 6 - 18 = -28e^{-0.14384t}$$

$$\rightarrow \frac{-12}{-28} = e^{-0.14384t}$$

$$\rightarrow \ln|0.42857| = 10e^{-0.14384t}$$

$$\rightarrow \frac{\ln|0.42857|}{-0.14384} = t$$

$$\rightarrow t = 5.90583 \text{ hrs}$$

b) Temperatura a las 14:00 hrs

$$T(7) = 18 - 28e^{-0.14384(7)}$$

$$= 18 - 10.22000$$

$$\underline{= 7.77000^{\circ}\text{C}}$$

c)

tiempo

7am, $T(0)$

9am, $T(2)$

11am, $T(4)$

13:00, $T(6)$

14:00, $T(7)$

temperatura

-10°C

-3°C

$$T(4) = 18 - 28e^{-0.14384(4)} = 2.24993^{\circ}\text{C}$$

$$T(6) = 18 - 28e^{-0.14384(6)} = 6.18742^{\circ}\text{C}$$

7.77000°C

Interciones

⑤ El profesor de ED del grupo de ingeniería se entera de la reunión con corne ayuda, pero el día siguiente! así que les recomienda realizar otro evento para mejorar la calidad del tejido. Se logra que la cantidad de agua en el tejido sea óptima y así mejorar su calidad.

La carne se encuentra en el congelador a temperatura -10°C .

El proceso es el siguiente:

A partir de las 7:00AM del día anterior al evento, se traslada a una cámara de refrigeración con temperatura de 2°C . Durante 24h, luego se cambia a un medio ambiente de 2°C durante 24h. Luego se cambia a un medio constante de $T_m = 18^{\circ}\text{C}$.

Utilice el valor del coeficiente de transferencia de calor, obtenida en el Problema 9 para responder:

- Temperatura carbón día del evento
- Tiempo necesario para a 60°
- Temperatura 14:00 del evento

a)
① Sacamos fórmula para calcular temp

Modelo

$$\frac{dT}{dt} = -h(T-T_m)$$
$$T(0) = T_0$$

Datos

$$T_0 = -10$$

$$T_m = 2$$

$$T(24) = ?$$

Sustitución

$$\frac{dT}{dt} = -h(T-2)$$
$$T(0) = -10$$

$$\frac{dT}{dt} = -hT + 2h \rightarrow \frac{dT}{dt} + hT = 2h$$

\rightarrow sacar F1

$$F1 = e^{\int p(x)dx} = e^{\int h dt} = e^{ht}$$

① Sacamos fórmula de enfriamiento con nuevos datos

Modelo	Datos	Sustituir
$\frac{dT}{dt} = -k(T-T_m)$	$T_m = 18^\circ\text{C}$ $T_0 = 1.61987^\circ$	$\frac{dT}{dt} = -k(T-18)$, $T(0) = 1.61987^\circ$
$T(t) = T_0$		

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} = -KT + 18K \rightarrow \frac{dT}{dt} + KT = 18K$$

→ Sacar FI

$$M(t) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int kdt} = e^{kt}$$

→ Multiplicar ED por FI

$$e^{kt} \left(\frac{dT}{dt} + KT \right) = 18K(e^{kt})$$

$$e^{kt} \frac{dT}{dt} + KT = 18Ke^{kt}$$

derivada de un producto

→ Integramos

Integral compleja
 $\int e^u du = e^u + C$

$$\int \frac{d(e^{kt} \cdot T)}{dt} = \int 18e^{kt}$$

$$e^{kt} \cdot T = 18e^{kt} + C$$

$$T(t) = \frac{18e^{kt}}{e^{kt}} + \frac{C}{e^{kt}} = 18 + Ce^{-kt}$$

sol. general

→ Se busca solución que cumpla $T(0) = 1.61987^\circ$

$$1.61987 = 18 + Ce^{-k \cdot 0}$$

$$1.61987 - 18 = Ce^{-k \cdot 0}$$

$$-16.38013 = C$$

→ Sustituir C en sol general

$$T(t) = 18 - 16.38013e^{-kt}$$

ecuación enfriamiento

→ multiplicar ED por FI

$$e^{nt} \left(\frac{dT}{dt} + nT \right) = 2K(e^{nt})$$

$$\underbrace{e^{nt} \frac{dT}{dt}}_{\text{derivada producto}} + nT = 2Ke^{nt}$$

integral completa para e^{nt}

derivada producto

→ Integrando

$$\frac{\int (e^{nt} \cdot T) dt}{dt} = \int 2ne^{nt} dt$$

$$e^{nt} \cdot T = 2e^{-nt} + C$$

$$T(t) = \frac{2e^{-nt}}{e^{nt}} + \frac{C}{e^{nt}}$$

solución general

$$T(t) = 2 + Ce^{-nt}$$

→ Se busca solución que satisfaga $T(0) = -10$

$$-10 = 2 + Ce^{-n \cdot 0}$$

$$-12 = Ce^{-n \cdot 0}$$

$$C = -12$$

→ Sustituir C en sol general

$$T(t) = 2 - 12e^{-nt}$$

→ Se busca temperatura en $T(24) = ?$

$$T(24) = 2 - 12e^{-0.14354(24)}$$

$$= 2 - 0.38012$$

$$= 1.61987^\circ$$

→ Se busca ϵ^* para $\text{COIN } 60^\circ$

$$T_0 = 18 - 16 \cdot 38013 e^{-\kappa \epsilon}$$

$$6 - 18 = -16 \cdot 38013 e^{-\kappa \epsilon}$$

$$\frac{-12}{-16 \cdot 38013} = e^{-\kappa \epsilon}$$

$$\ln |0.73259| = \ln e^{-0.14384 \epsilon}$$

$$\frac{+0.31116}{-0.14384} = \epsilon$$

$$\epsilon = 2.16325 \text{ hrs}$$

c) temperatura a las 14:00 hrs

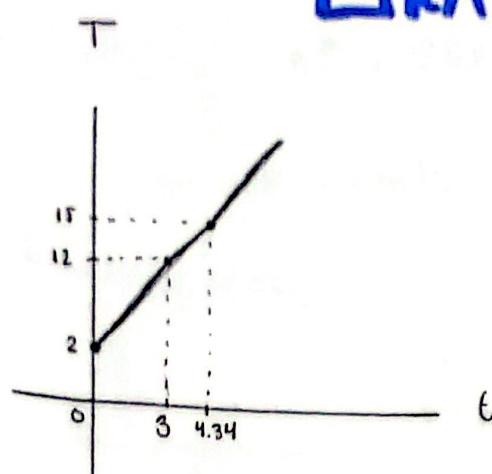
$$T(\tau) = 18 - 16 \cdot 38013 e^{-0.14384 \tau}$$

$$= 18 - 5.98459$$

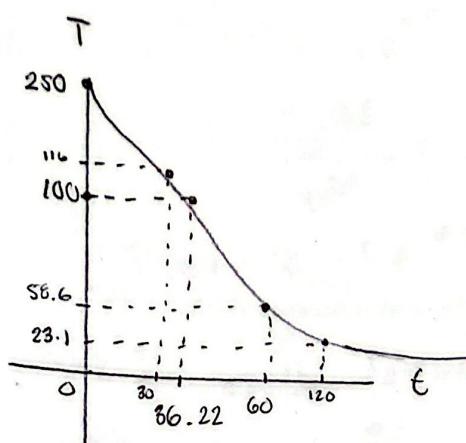
$$= 12.01540^\circ C$$

GRAFICAS

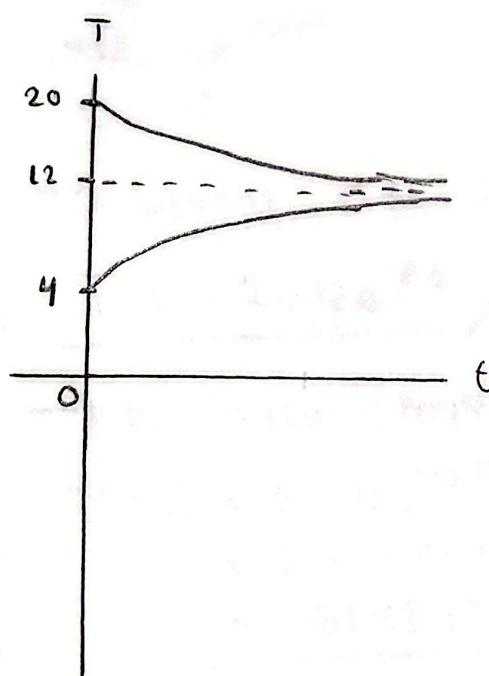
1



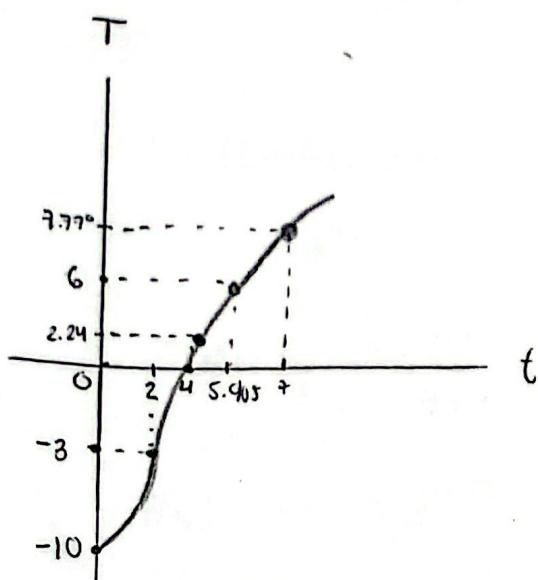
2



3



(4)



(5)

