

---

# OPTIMIZACIÓN INTELIGENTE

---

**Dr. en C. Luis Fernando Gutiérrez Marfileño**  
*Universidad Autónoma de Aguascalientes*

---

---

*Centro de Ciencias Básicas*  
*Departamento de Ciencias de la Computación*  
*Academia de Inteligencia Artificial y Fundamentos Computacionales*

---

---

**7 de Agosto de 2023**

# Índice general

<b>1. INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN</b>	<b>2</b>
1.1. Introducción a la optimización . . . . .	2
1.2. Antecedentes matemáticos . . . . .	4
1.3. Optimización unidimensional . . . . .	7
1.4. Optimización multidimensional . . . . .	10
<b>2. OPTIMIZACIÓN BASADA EN ALGORITMOS EVOLUTIVOS</b>	<b>14</b>
2.1. Naturaleza de las metaheurísticas . . . . .	14
2.2. Elementos para la modelación de problemas . . . . .	17
2.3. Algoritmo genético . . . . .	20

# Índice de figuras

1.1. Gráfico de un paraboloides . . . . .	3
1.2. Criterio de eliminación de regiones . . . . .	9
1.3. Métodos de búsqueda en rejilla . . . . .	11
1.4. Oscilación del método de máximo descenso . . . . .	13
2.1. Problema de optimización . . . . .	14
2.2. Proceso evolutivo natural . . . . .	20

# **Índice de tablas**

---

## Unidad 1

---

# INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN

---

*“Enunciar conceptos básicos relacionados con la optimización, clasificar problemas y técnicas y formular problemas, y aplicar métodos de optimización numérica unidimensional y multidimensional no restringidas.”*

### Objetivos específicos 1 y 2

## 1.1. Introducción a la optimización

**E**N el lenguaje común, **optimizar** es buscar la mejor manera de realizar una actividad [DRALE], aquí el término *mejor* depende del contexto en el que se trabaje, podría significar una solución que minimiza los costos, o maximiza los beneficios, o que hace que la distancia recorrida sea mínima, etc..

En matemáticas, la Optimización es una disciplina que se ocupa de encontrar los extremos (mínimos y máximos) de números, funciones o sistemas.

Los filósofos y matemáticos antiguos crearon sus cimientos definiendo el óptimo (como un extremo, máximo o mínimo) sobre varios dominios fundamentales como números, formas geométricas, óptica, física, astronomía, la calidad de la vida humana, el gobierno estatal, y varios otros.

El abordar un problema real de Optimización supone básicamente dos etapas:

- Determinar el modelo matemático que rige el problema.
- Resolver dicho problema usando una serie de técnicas matemáticas.

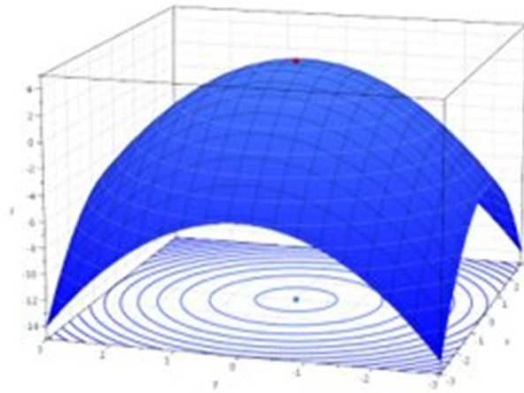


Figura 1.1: Gráfico de un paraboloid

Los problemas que pueden ser resueltos mediante la Optimización Matemática son aquellos que pueden expresarse en la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} f(X) & \text{MIN} f(X) \\ X \in CS & X \in CS \end{array}$$

Donde CS corresponde al conjunto solución.

La optimización matemática de una sola variable se clasifica en:

- Optimización sin restricciones
- Con restricciones de igualdad
- Con restricciones de desigualdad





## 1.2. Antecedentes matemáticos

**E**N matemáticas, algunas de las principales técnicas de solución para problemas de optimización son:

- Programación lineal
- Programación lineal entera mixta
- Programación cuadrática
- Programación no lineal
- Optimización estocástica
- Programación dinámica
- Teoría de grafos

### Definición (Problemas de optimización)

Son aquellos que se ocupan de elegir la decisión óptima de solución de un problema, es decir, encontrar cual es el máximo o mínimo de un determinado criterio (una función) sujeto a las condiciones dadas por el problema.

### Clasificación

Los problemas de optimización se pueden dividir en dos categorías, dependiendo de si las variables son **continuas** o **discretas**:

1. Un problema con variables continuas se conoce como **optimización continua**, en la que se debe encontrar un valor óptimo de una función continua. Pueden incluir problemas restringidos y problemas multimodales.
2. Un problema de optimización con variables discretas se conoce como **optimización discreta**, en la que un objeto como un número entero, una permutación o un gráfico se debe encontrar en un conjunto contable.

### Modelado del problema

Un modelo de optimización es la representación matemática de un problema real, en el cual se identifican aspectos de la realidad y se representan mediante fórmulas.

Una vez representado el problema, se pueden utilizar algoritmos para encontrar rápidamente las mejores soluciones.





Los modelos de optimización tienen 4 elementos principales:

- Parámetros
- Variables
- Restricciones
- Función objetivo.

### Descripción matemática

Maximizar:  $f(x)$  función objetivo

Sujeto a:

$h(x) = 0$  Restricción de igualdad

$g(x) \geq 0$  Restricción de desigualdad

Donde:

- $x \in \mathfrak{R}^n$  es un vector de  $n$  variables como:  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- $h(x)$  es un vector de igualdades de dimensión  $m_1$
- $g(x)$  es un vector de desigualdades de dimensión  $m_2$

### Solución

Para resolver un problema de optimización de forma correcta se va a establecer una serie de pasos que harán más sencillo el planteamiento y la resolución:

1. Establecer cuál o cuáles son las **incógnitas** que plantea el problema.
2. Buscar y plantear qué es lo que se tiene que maximizar o minimizar:  $f(x, y)$ .
3. Buscar la condición que se plantea. En la mayoría de los problemas la función a maximizar o minimizar dependerá de dos variables, por tanto, la condición permitirá relacionar estas dos variables para poner una en función de la otra.
4. Una vez, despejado una variable en función de la otra, suponer  $y$  en función de  $x$ . Sustituir la función a optimizar, quedándose ahora en función de una sola variable:  $f(x)$ .
5. **Derivar** la función e igualar a cero:  $f'(x) = 0$ .
6. Una vez obtenidas las soluciones, comprobar si realmente se trata de un máximo o un mínimo, para ello, realizar la segunda derivada de tal forma que:
  - si  $f''(x) = 0$ , entonces se trata de un **mínimo**.
7. Una vez teniendo  $x$ , ir al paso 3, donde se despeja  $y$ , hallar el valor de  $y$ , y dar la solución.







### **Características de las técnicas de optimización matemáticas**

- Buscan el óptimo localmente
- Garantizan el óptimo numérico
- Permiten un elevado número de restricciones





### 1.3. Métodos numéricos de optimización unidimensional no restringida

**M**uchos métodos de optimización de problemas con restricciones (univariab-  
les y multivariab-les) involucran la resolución de un problema de optimi-  
zación en una dimensión.

Existen dos tipos de métodos numéricos, a saber:

- **Métodos directos:** sólo utilizan los valores de la función objetivo.
- **Métodos indirectos:** utilizan las condiciones necesarias, las derivadas (analíti-  
cas o numéricas) y la función objetivo.

Los métodos indirectos requieren el cálculo de las derivadas primeras y segundas. Sin embargo, muchas veces obtener las derivadas es una tarea difícil, y hasta es posible que ni siquiera se conozca la forma analítica de la función objetivo. Esto plantea la necesidad de contar con métodos capaces de trabajar únicamente con los valores (experimentos) de la función objetivo.

#### Métodos numéricos para optimización de funciones de una variable

Para la aplicación de estos métodos es necesario conocer el intervalo inicial  $\Delta^0$ , donde está contenido el óptimo de la función objetivo, y asegurar la unimodalidad de la función en el intervalo en estudio.

Un método de optimización para una función de una sola variable podría ser determinar una matriz (tan fina como se quiera) de valores de  $x$  y calcular los valores de  $f(x)$  en cada valor de la matriz, el óptimo sería el mejor valor de  $f(x)$ .

#### Métodos indirectos

##### Método de Newton

El objetivo de este método es calcular el máximo o mínimo de una función, haciendo uso de una aproximación cuadrática dada por la serie de Taylor.

Dicha aproximación cuadrática es:

$$q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

El máximo o mínimo de la función  $q(x)$  se calcula haciendo  $q'(x) = 0$ .

Con lo que se obtiene:

$$f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$$





### Algoritmo

1. Dado un valor inicial  $x_0$  y una función cuyas primera y segunda derivada existan
2. Se calcula la  $i$ -ésima aproximación utilizando la fórmula:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f'(x_{i-1})}{f''(x_{i-1})}$$

3. Se repite el paso 2 hasta lograr la convergencia.

### Ejemplo

Use el método de Newton para encontrar el máximo de la función:

$$f(x) = 2\text{seno}(x) - x^2/10$$

con el valor inicial  $x_0 = 2,5$ .

### Solución

$i$	$x_0$	$x_1$
1	2.5000	0.9951
2	0.9951	1.4690
3	1.4690	1.4276
4	1.4276	1.4276

### Método de Cuasi-Newton

Este método es una solución a las limitaciones del método de Newton.

En el caso en que la función objetivo no sea conocida o no puedan evaluarse las derivadas, estas pueden reemplazarse por aproximaciones de diferencias finitas:

La desventaja adicional de este método consiste en la necesidad de evaluar funciones adicionales en cada iteración, también es necesario conocer el valor de  $h$  (paso de la diferencia finita).

### Método de la Secante

El método de la secante combina el método de Newton con un esquema de reducción de intervalo para encontrar, si existe, la raíz de la ecuación  $f'(x) = 0$ , en el intervalo  $(a, b)$ .

$$f'(x^k) + m(x - x^k) = 0$$

En este método la condición necesaria se resuelve mediante la siguiente expresión: donde  $m$  es la pendiente de la recta que une los puntos  $x^p$  y  $x^q$ , dada por:





$$m = \frac{f'(x^q) - f'(x^p)}{x^q - x^p}$$

Este método aproxima la derivada de la función a una línea recta,  $m$  aproxima la segunda derivada de la función.

### Métodos directos

#### Eliminación de regiones

Este tipo de métodos se centra en la búsqueda de las soluciones óptimas mediante sucesivas reducciones del intervalo de estudio y en la eliminación de subintervalos.

Si la función es unimodal, se puede definir un criterio para eliminar regiones donde seguro el óptimo no se encuentra.

Para ello necesitamos evaluar la función en dos puntos y aplicar algo de lógica. En la figura siguiente se indica cual sería la región eliminada para los tres casos posibles en la búsqueda de un máximo.

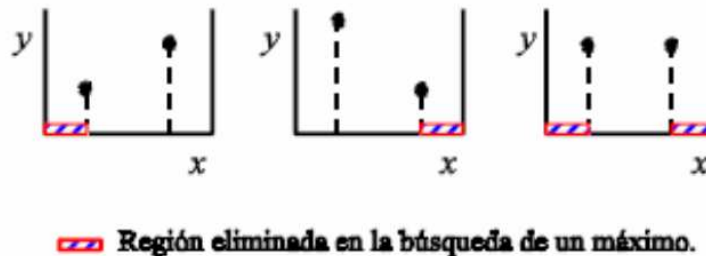


Figura 1.2: Criterio de eliminación de regiones

Es fundamental el hecho de que la función estudiada sea unimodal, al menos dentro del dominio de interés.

La utilidad de esta propiedad radica en el hecho de que si  $f(x)$  es unimodal, entonces solamente es necesario comparar  $f(x)$  en dos puntos diferentes para predecir en cuál de los subintervalos definidos por esos puntos no se va a encontrar el óptimo.

Cuando el subintervalo *sobreviviente* tenga una longitud suficientemente pequeña, la búsqueda termina. La gran ventaja de estos métodos de búsqueda es que solamente requieren evaluaciones de la función y no necesitamos ninguna hipótesis adicional acerca de la derivabilidad de la misma.





## 1.4. Métodos numéricos de optimización multidimensional no restringida

Una forma de clasificación de las múltiples técnicas de optimización no restringida multidimensional tiene que ver con si requieren la evaluación de la derivada o no.

Los procedimientos que no requieren dicha evaluación se llaman **métodos directos** o sin gradiente.

Aquellos que requieren derivadas se conocen como **métodos de gradiente**.

### Métodos directos

#### Búsqueda aleatoria

La búsqueda aleatoria implica generar y evaluar entradas aleatorias a la función objetivo.

Es eficaz porque no asume nada sobre la estructura de la función objetivo.

Esto puede ser beneficioso para problemas en los que hay mucha experiencia en el dominio que puede influir o sesgar la estrategia de optimización, lo que permite descubrir soluciones no intuitivas.

La búsqueda aleatoria también puede ser la mejor estrategia para problemas muy complejos con áreas ruidosas o no uniformes (discontinuas) del espacio de búsqueda que pueden generar algoritmos que dependen de gradientes confiables.

Se puede generar una muestra aleatoria de un dominio usando un generador de números pseudoaleatorios.

Cada variable requiere un límite o rango bien definido y se puede muestrear un valor aleatorio uniforme del rango y luego evaluarla

Generar muestras aleatorias es sencillo desde el punto de vista computacional y no ocupa mucha memoria, por lo tanto, puede ser eficiente generar una muestra grande de entradas y luego evaluarlas.

Cada muestra es independiente, por lo que las muestras se pueden evaluar en paralelo si es necesario para acelerar el proceso.

#### Método de búsqueda en rejilla

Los métodos básicos de diseño de experimentos discutidos en muchos textos de estadística se pueden aplicar también a minimización de funciones.

Se pueden seleccionar una serie de puntos alrededor de un punto base de referencia (creando una rejilla) de acuerdo a algunos de los diseños del tipo que se muestra en la figura 1.3.

Después se pasa al punto que más mejora la función objetivo y se continua la búsqueda.



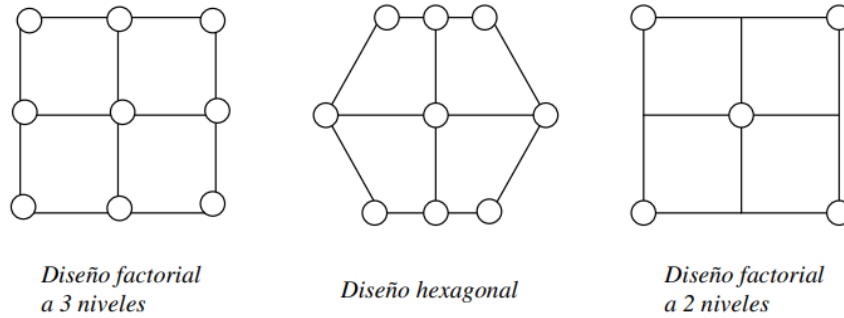


Figura 1.3: Métodos de búsqueda en rejilla

Sin embargo, el sistema es muy ineficaz, por ejemplo, con  $n = 10$  y una búsqueda factorial a tres niveles se deben realizar  $3^{10} - 1 = 59,048$  evaluaciones de la función objetivo, lo cual es obviamente impráctico.

### Métodos indirectos

Los métodos indirectos, en contraste con los métodos anteriores hacen uso de las derivadas en la determinación de la dirección de búsqueda (aunque no todos).

Una buena dirección de búsqueda debería reducir (para minimización) la función objetivo, de tal manera que si  $x^0$  es el punto inicial y  $x^1$  es un nuevo punto:

$$f(x^1) \leq f(x^0)$$

### Método del Gradiente

El gradiente es un vector en un punto  $x$  que proporciona la dirección (local) de máxima variación de la función.

El vector gradiente es un vector ortogonal al contorno de la función en el punto. Por lo tanto, en la búsqueda de un mínimo la dirección de movimiento será contragradiente:

$$\mathbf{s}^k = -\nabla f(\mathbf{x})$$

En el método de máximo descenso la transición de un punto  $x^k$  a otro  $x^{k+1}$  viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^k + \lambda^k \mathbf{s}^k = \mathbf{x}^k - \lambda^k \nabla f(\mathbf{x}^k)$$

donde:

$\Delta \mathbf{x}^k$  = Vector desde  $\mathbf{x}^k$  hasta  $\mathbf{x}^{k+1}$

$\mathbf{s}^k$  = Dirección de búsqueda de máximo descenso

$\lambda^k$  = Escalar que determina la longitud de paso en la dirección  $\mathbf{s}$





El gradiente negativo da la dirección de movimiento, pero no la longitud de dicho movimiento.

Por lo tanto, existen varios procedimientos posibles dependiendo de la elección de  $\lambda^k$ .

### Algoritmo

1. Elegir un valor inicial  $\mathbf{x}^0$ . En pasos sucesivos será  $\mathbf{x}^k$ .
2. Calcular, analítica o numéricamente las derivadas parciales  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$   $j = 1, 3, 4, \dots, n$
3. Calcular el vector de búsqueda:  $\mathbf{s}^k = -\nabla f(\mathbf{x})$
4. Usar la relación  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda^k \mathbf{s}^k$  para obtener el siguiente punto. El valor de  $\lambda^k$  puede ser de valor fijo o calculado en cada paso mediante una búsqueda unidireccional.
5. Comparar  $\mathbf{x}^{k+1}$  con  $\mathbf{x}^k$ . Si el cambio es menor que una tolerancia preespecificada terminar, en caso contrario volver al paso dos y continuar con las iteraciones.

### Método del Gradiente conjugado

El método del gradiente conjugado debido a Fletcher y Reeves (1964) combina las características de la convergencia cuadrática del método de las direcciones conjugadas con las del método del gradiente.

El método supone una importante mejora del método del gradiente con sólo un pequeño incremento en el esfuerzo de cálculo.

Combina la información obtenida del vector gradiente con la información acerca del vector gradiente de iteraciones previas.

Lo que hace el método es calcular la nueva dirección de búsqueda utilizando una combinación lineal del gradiente en la etapa considerada y el de la etapa anterior.

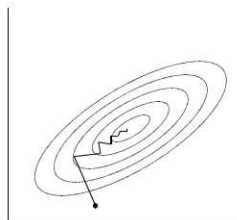


Figura 1.4: Oscilación del método de máximo descenso



---

## Unidad 2

---

# OPTIMIZACIÓN BASADA EN ALGORITMOS EVOLUTIVOS

---

*“Describir las partes que constituyen la modelación metaheurística de un problema e implementar el algoritmo genético como un algoritmo evolutivo clásico.”*

### Objetivos específicos 1 y 2

## 2.1. Naturaleza de las metaheurísticas

**L**os algoritmos de optimización inteligente (**metaheurísticas**) son algoritmos que simulan fenómenos y comportamientos naturales mediante iteraciones basadas en poblaciones.

Son una solución para problemas NP-duros difíciles de resolver con los algoritmos deterministas clásicos.

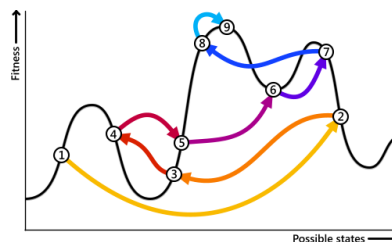


Figura 2.1: Problema de optimización





Y pueden encontrar soluciones subóptimas factibles para problemas complejos en un tiempo relativamente corto.

La gran versatilidad, la alta velocidad y la solidez del algoritmo de optimización inteligente brindan una variedad de soluciones de toma de decisiones para problemas de optimización combinatoria y numéricos complejos con múltiples restricciones, como la composición de servicios con múltiples objetivos, la programación del flujo de trabajo, la asignación de recursos de fabricación y la evaluación y el control de la calidad del producto, etc. en un sistema de fabricación orientado a servicios en red.

Como se mencionó, los problemas de optimización se encuentran en muchos dominios: ciencia, ingeniería, administración y negocios.

Un problema de optimización puede estar definido por el par  $(S, f)$ , donde  $S$  representa el conjunto de soluciones factibles, y  $f : S \rightarrow R$  la función objetivo a optimizar.

La función objetivo asigna a cada solución  $s \in S$  del espacio de búsqueda un número real que indica su valor y permite definir una relación de orden total entre cualquier par de soluciones en el espacio de búsqueda.

### Características de las metaheurísticas

- Las metaheurísticas son estrategias generales que guían el proceso de búsqueda.
- El objetivo es una búsqueda eficiente que encuentre soluciones casi óptimas.
- Pueden incorporar mecanismos para evitar la exploración en regiones del espacio de búsqueda no óptimas.
- El procedimiento de cualquier metaheurística es genérico, no depende del problema.
- Las metaheurísticas utilizan métodos heurísticos específicos que son controlados por una estrategia de más alto nivel.
- Las metaheurísticas utilizan funciones de bondad para cuantificar el grado de adecuación de una determinada solución.

Hay diferentes formas de clasificar las metaheurísticas: basadas en la naturaleza (algoritmos bioinspirados) o no basadas en la naturaleza, basadas en memoria o sin memoria, con función objetivo estática o dinámica, etc.

La clasificación más empleada es la que se basa en si la técnica utiliza un único punto del espacio de búsqueda o trabaja sobre un conjunto o población.

Según esta clasificación las metaheurísticas se dividen en las basadas en trayectoria y las basadas en población.





### Metaheurísticas basadas en poblaciones

Las técnicas metaheurísticas basadas en población trabajan con un conjunto de individuos que representan otras tantas soluciones. Su eficiencia y resultado depende fundamentalmente de la forma con la que se manipula la población en cada iteración.

A continuación algunas de éstas técnicas:

### Algoritmos Evolutivos

Están basadas en un aspecto de la naturaleza, en este caso, en la evolución de las especies.

Se inspiran en la capacidad de la evolución de seres o individuos para adaptarlos a los cambios de su entorno.

Cada individuo representa una posible solución.

El funcionamiento básico de estos algoritmos es el siguiente:

La población se genera de forma aleatoria.

Cada individuo de la población tiene asignado un valor de su bondad con respecto al problema considerado, por medio de una función de aptitud, capacidad, adaptabilidad o estado, también denominada con bastante frecuencia por la palabra inglesa *fitness*.

El valor de la *aptitud* de un individuo es la información que el algoritmo utilizar para realizar la búsqueda.

La modificación de la población se efectúa mediante la aplicación de tres operadores: selección, recombinación y mutación.

En estos algoritmos se pueden distinguir la fase de selección, explotación de buenas soluciones, y la fase de reproducción, búsqueda de nuevas regiones.

Se debe de mantener un equilibrio entre estas dos fases.

La política de reemplazo permite la aceptación de nuevas soluciones que no necesariamente mejoran las existentes.

Los algoritmos evolutivos se pueden clasificar en las siguientes tres categorías: Programación Evolutiva (PE), Estrategias Evolutivas (EE), y los Algoritmos Genéticos (AG), que constituyen una de las técnicas más conocidas, y que fueron introducidos por Holland.





## 2.2. Elementos para la modelación de problemas

**E**Tapas para construir un buen modelo de un problema:

1. **Fase de Conceptualización.** Tener un profundo conocimiento de la realidad que se trata de modelar, es decir, ser capaces de representar conceptualmente el problema sin ningún tipo de contradicciones lógicas ni de errores de análisis.
2. **Fase de Formalización.** Establecer de forma clara y correcta (matemáticamente) las relaciones entre los elementos, para que, además, sea fácilmente entendible y detectar rápidamente los errores.
3. **Fase de Evaluación.** En esta fase, además de establecer la forma en la que debe ser el procedimiento de resolución a emplear, se debe poder interpretarlo correctamente.

Para la aplicación práctica para modelar un problema de optimización se pueden seguir las siguientes reglas basadas en la experiencia:

### Reglas de modelado

**1 Análisis del problema.** Establecer claramente cuál es el objetivo que se persigue, qué limitaciones existen, etc. Todo ello debe tenerse en cuenta aunque no esté formalizado, sino simplemente una relación de las diferentes condiciones.

**2 Definición de las variables.** Identificar las posibles decisiones. Esta es una de las fases críticas de la modelización, por ello es conveniente prestar mucha atención a esta definición. En esta fase hay que identificar (e interpretar el significado) y denominar a las variables que intervienen. Este segundo aspecto, aunque puede parecer trivial, es también de gran importancia.

**3 Identificación y formalización de las restricciones.** Identificar cuáles son las limitaciones a las que está sujeto el problema, y plantearlas matemáticamente. A veces esto no resulta muy sencillo. En esta fase hay que denominar e identificar a las restricciones con los nombres adecuados, de forma que sea fácil interpretar los resultados obtenidos.

**4 Identificar la función objetivo.** La cuantificación de los resultados que se desean alcanzar. Aunque no en todos los problemas es inmediato definir el objetivo, siempre es posible encontrar una función que permita evaluar los resultados de cada una de las acciones.

A continuación algunos principios básicos de modelado:





### **Principios de modelado**

#### **I. Formular un modelo simple y agregar características junto con la ejecución de la optimización.**

Un modelo a optimizar debe desarrollarse logrando un equilibrio razonable entre los objetivos de precisión mejorada en el modelo (lo que generalmente implica mayor complejidad en la formulación) y mayor facilidad de optimización.

#### **II. Uso de funciones derivables.**

Probablemente, la propiedad más fundamental de las funciones del problema con respecto a la facilidad de optimización, es la derivabilidad, que es importante porque los algoritmos se basan en el uso de funciones disponibles.

#### **III. Evitar definir funciones de problemas que sean el resultado de algún procedimiento iterativo (como la solución de una ecuación diferencial o la evaluación de una integral).**

Las funciones del problema definidas por un procedimiento iterativo son a menudo la fuente de sutiles discontinuidades que pueden obstaculizar el progreso de la optimización. La solución de estos subproblemas con la máxima precisión de la máquina (incluso si es posible) generalmente requiere un esfuerzo computacional considerable.

#### **IV. Análisis cuidadoso sobre la naturaleza de las restricciones.**

No siempre se aprecia que pueden producirse mejoras sustanciales en el rendimiento y la robustez cuando los métodos explotan las diferentes propiedades de los límites simples, las restricciones lineales y las restricciones no lineales. Siempre que sea posible, se deben aislar las restricciones lineales de las no lineales y utilizar un software que diferencie entre los tipos de restricciones durante la optimización.

#### **V. No intente eliminar las restricciones de igualdad del problema.**

Los modeladores a menudo asumen que dado que puede no haber significado físico para un punto en el que se violan las restricciones de igualdad no lineal, dichas restricciones deben cumplirse exactamente en todas las etapas de la optimización. En consecuencia, los usuarios a menudo intentan "eliminar" las restricciones de igualdad no lineal del problema mediante el siguiente método. Las variables se dividen en conjuntos independientes y dependientes.

#### **VI. Distinguir entre restricciones duras y suaves**

En muchos problemas, las restricciones pueden clasificarse por lotes como duras o blandas. Por ejemplo, las restricciones duras podrían especificar la región en la que las funciones del problema están bien definidas. Una restricción suave podría representar un límite cuya violación puede tolerarse si esto resulta en una gran disminución en la función objetivo, en algunos casos, las variables pueden tener un límite flexible y un límite rígido.

#### **VII. Evite modelar restricciones de igualdad casi dependientes.**

Las restricciones ocurren en las formulaciones de problemas por una variedad de razones. A menudo, la naturaleza misma de las variables impone una restricción





de igualdad; por ejemplo, si las variables  $z_i$  representan proporciones o probabilidades, esto da lugar a una restricción. Las restricciones de este tipo son igualdades genuinas, en el sentido de que la solución calculada debe satisfacerlas exactamente (donde exactamente significa dentro de la precisión de trabajo).

**VIII. Usar información sobre el problema para escalar las variables y restricciones.**

Es bien sabido que la escala correcta de variables y restricciones puede mejorar drásticamente la eficiencia y precisión de los métodos de optimización. La escala de un problema es la medida de la importancia relativa de las variables y restricciones o, de manera equivalente, la escala de un problema es una declaración de lo que es grande y lo que es pequeño en un problema.

**IX. Trate de proporcionar tanta información sobre la función como sea posible.**

Como regla general, los algoritmos tienden a ser más eficientes y robustos cuando se proporciona mayor información sobre el problema. Por ejemplo, si las funciones del problema son simples, los algoritmos que utilizan la primera y la segunda derivada realizan mejores algoritmos mixtos que usan valores de función únicamente.

En general, se percibe que un algoritmo de segundas derivadas rara vez es útil porque el costo de calcular las segundas derivadas puede ser varios órdenes de magnitud mayor que el de calcular las derivadas primeras.

**X. Tener especial cuidado en verificar que las funciones del problema y sus derivadas estén programadas correctamente.**

Antes de emprender una serie de ejecuciones de optimización, el usuario debe verificar que el código que define las funciones del problema es correcto. Una verificación obvia es evaluar las funciones del problema en un punto donde se conocen sus valores.

Los errores en la programación de la función pueden ser bastante sutiles en el sentido de que el valor de la función puede casi correcto.





## 2.3. Algoritmo genético

**L**os Algoritmos Genéticos son métodos de optimización heurística que, entre otras aplicaciones, pueden usarse para encontrar el valor o los valores que consiguen maximizar o minimizar una función.

En este método los individuos de una población se reproducen generando nuevos descendientes cuyas características son combinaciones de las características de sus progenitores (más ciertas mutaciones), de ellos solo los mejores sobreviven y pueden reproducirse de nuevo.

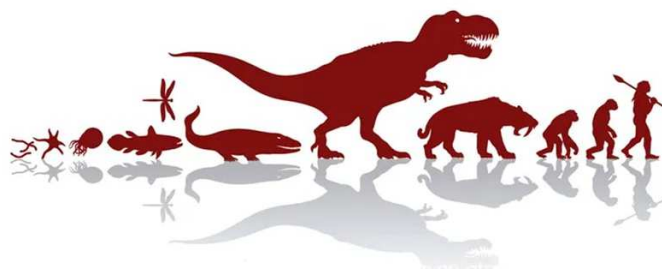


Figura 2.2: Proceso evolutivo natural

### Algoritmo

En términos generales la estructura de un AG para optimizar una función con una o múltiples comprende los siguientes pasos:

1. Crear una población inicial de  $P$  individuos, donde cada uno representa una combinación de valores de variables.
2. Calcular la aptitud (fitness) de cada individuo de la población. El fitness está relacionado con el valor de la función para cada individuo. Si se quiere maximizar, cuanto mayor sea el valor de la función para el individuo, mayor su fitness. En el caso de minimización, ocurre lo contrario.
3. Crear una nueva población vacía y repetir los siguientes pasos hasta que se hayan creado  $P$  nuevos individuos.
  - a) Seleccionar dos individuos de la población existente, donde la probabilidad de selección es proporcional al fitness de los individuos.
  - b) Cruzar los dos individuos seleccionados para generar un nuevo descendiente (crossover).
  - c) Aplicar un proceso de mutación aleatorio sobre el nuevo individuo.
  - d) Añadir el nuevo individuo a la nueva población.





4. Reemplazar la antigua población por la nueva.
5. Si no se cumple un criterio de parada, volver al paso 2

### Población inicial

En el contexto del AG, el término **individuo** hace referencia a cada una de las posibles soluciones del problema que se quiere resolver.

En el caso de maximización o minimización de una función, cada individuo representa una posible combinación de valores de las variables.

Para representar dichas combinaciones, se pueden emplear vectores, cuya longitud es igual al número total de variables, y cada posición toma un valor numérico.

Por ejemplo, supóngase que la función objetivo  $J(x,y,z)$  depende de las variables  $x,y,z$ . El individuo  $3,9.5,-0.5$ , equivale a la combinación de valores  $x=3,y=9.5,z=-0.5$ . El primer paso del algoritmo genético consiste en crear una población inicial aleatoria de individuos.

### Fitness de un individuo

Cada individuo de la población debe ser evaluado para cuantificar cómo de bueno es como solución al problema, a esta cuantificación se le llama (fitness). Dependiendo de si se trata de un problema de maximización o minimización, la relación del fitness con la función objetivo  $f$  puede ser:

**Maximización:** el individuo tiene mayor fitness cuanto mayor es el valor de la función objetivo  $f(\text{individuo})$

**Minimización:** el individuo tiene mayor fitness cuanto menor es el valor de la función objetivo  $f(\text{individuo})$ , o lo que es lo mismo, cuanto mayor es el valor de la función objetivo, menor el fitness.

Tal y como se describe más adelante, el algoritmo genético selecciona los individuos de mayor fitness, por lo que, para problemas de minimización, el fitness puede calcularse como  $-f(\text{individuo})$  o también  $1/(1+f(\text{individuo}))$

### Seleccionar individuos

La forma en que se seleccionan los individuos que participan en cada cruce difiere en las distintas implementaciones de los algoritmos genéticos. Por lo general, todas ellas tienden a favorecer la selección de aquellos individuos con mayor fitness. Algunas de las estrategias más comunes son:

**Método de ruleta:** la probabilidad de que un individuo sea seleccionado es proporcional a su fitness relativo, es decir, a su fitness dividido por la suma del fitness de todos los individuos de la población. Si el fitness de un individuo es el doble que el de otro, también lo será la probabilidad de que sea seleccionado. Este método presenta problemas si el fitness de unos pocos individuos es muy superior (varios órdenes de magnitud) al resto, ya que estos serán seleccionados de forma repetida y casi todos los individuos de la siguiente generación serán **hijos** de los mismos **padres** (poca variación).





**Método rank:** la probabilidad de selección de un individuo es inversamente proporcional a la posición que ocupa tras ordenar todos los individuos de mayor a menor fitness. Este método es menos agresivo que el método ruleta cuando la diferencia entre los mayores fitness es varios órdenes de magnitud superior al resto.

**Selección competitiva (tournament):** se seleccionan aleatoriamente dos parejas de individuos de la población (todos con la misma probabilidad). De cada pareja se selecciona el que tenga mayor fitness. Finalmente, se comparan los dos finalistas y se selecciona el de mayor fitness. Este método tiende a generar una distribución de la probabilidad de selección más equilibrada que las dos anteriores.

**Selección truncada (truncated selection):** se realizan selecciones aleatorias de individuos, habiendo descartado primero los  $n$  individuos con menor fitness.

Cuando no existe una gran diferencia entre el individuo de mayor fitness y el resto, con el método rank, el individuo con mayor fitness se selecciona con mucha más frecuencia que el resto.

Con los otros dos métodos, la probabilidad de selección decae de forma gradual. Cuando existe una gran diferencia entre el individuo de mayor fitness y el resto (uno o varios órdenes de magnitud), con el método ruleta, el individuo con mayor fitness se selecciona con mucha más frecuencia que el resto. A diferencia del caso anterior, en esta situación, la probabilidad de selección decae de forma más gradual con los métodos rank y tournament.

Teniendo en cuenta los comportamientos de selección de cada método, el método tournament parece ser la opción más equilibrada.

### **Cruzar dos individuos (crossover, recombinación)**

El objetivo de esta etapa es generar, a partir de individuos ya existentes (parentales), nuevos individuos (descendencia) que combinen las características de los anteriores. Este es otro de los puntos del algoritmo en los que se puede seguir varias estrategias. Tres de las más empleadas son:

**Cruzamiento a partir de uno solo punto:** se selecciona aleatoriamente una posición que actúa como punto de corte. Cada individuo parental se divide en dos partes y se intercambian las mitades. Como resultado de este proceso, por cada cruce, se generan dos nuevos individuos.

**Cruzamiento a partir múltiples puntos:** se seleccionan aleatoriamente varias posiciones que actúan como puntos de corte. Cada individuo parental se divide por los puntos de corte y se intercambian las partes. Como resultado de este proceso, por cada cruce, se generan dos nuevos individuos.

**Cruzamiento uniforme:** el valor que toma cada posición del nuevo individuo se obtiene de uno de los dos parentales. Por lo general, la probabilidad de que el valor proceda de cada parental es la misma, aunque podría, por ejemplo, estar condicionada al fitness de cada uno. A diferencia de las anteriores estrategias, con esta, de cada cruce se genera un único descendiente.







### Mutar individuo

Tras generar cada nuevo individuo de la descendencia, este se somete a un proceso de mutación en el que, cada una de sus posiciones, puede verse modificada con una probabilidad  $p$ . Este paso es importante para añadir diversidad al proceso y evitar que el algoritmo caiga en mínimos locales porque todos los individuos sean demasiado parecidos de una generación a otra.

Existen diferentes estrategias para controlar la magnitud del cambio que puede provocar una mutación.

**Distribución uniforme:** la mutación de la posición  $i$  se consigue sumándole al valor de  $i$  un valor extraído de una distribución uniforme, por ejemplo, una entre  $[-1, +1]$ .

**Distribución normal:** la mutación de la posición  $i$  se consigue sumándole al valor de  $i$  un valor extraído de una distribución normal, comúnmente centrada en 0 y con una determinada desviación estándar. Cuanto mayor la desviación estándar, con mayor probabilidad la mutación introducirá cambios grandes.

**Aleatorio:** la mutación de la posición  $i$  se consigue reemplazando el valor de  $i$  por nuevo valor aleatorio dentro del rango permitido para esa variable. Esta estrategia suele conllevar mayores variaciones que las dos anteriores. Hay que tener en cuenta que, debido a las mutaciones, un valor que inicialmente estaba dentro del rango permitido puede salirse de él. Una forma de evitarlo es: si el valor tras la mutación excede alguno de los límites acotados, se sobrescribe con el valor del límite. Es decir, se permite que los valores se alejen como máximo hasta el límite impuesto.



---

## Bibliografía

[Diccionario Larousse, 2003] “*Diccionario Larousse, Edición Premium*”, EDICIONES LAROUSSE MÉXICO y SPS EDITORIAL BARCELONA, (2003).

[Cambridge Dictionary, 2022] “*Cambridge Dictionary on-line*”, <https://dictionary.cambridge.org/>, (2022).

[DRALE] “*Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española*”, versión on-line (2017).