Datos de Identificación de tareas

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES

Centro de Ciencias Básicas

Materia: **Ecuaciones Diferenciales**

Tarea VI

Poblaciones

Ingeniería en Computación Inteligente Semestre 5° A

Alumno: Jose Luis Sandoval Perez **ID:261731**

Profesor: **Jaime Salvador Medina González**

Fecha de entrega: 03/11/2023

TAREA VI

POBLACIONES

① La población de México (1970-2010) se muestran en la tabla 1

Año	1970	1980	1990	2000	2010	2020
Población en millones	48.225	66.846	83.249	97.483	112.336	127.09

a) Utiliza los datos de los censos de los años 2010 y 2020 para determinar un modelo tipo Malthus que describa el comportamiento de la población. Con la solución de dicho modelo encuentra la población en los años 2000 y 2030.

① Modelo

$$\frac{dP}{dt} = aP, \text{ sujeto a } P(0) = P_0$$

② Sustituyendo

$$\frac{dP}{dt} = aP, \text{ sujeto a } P(2010) = 112.336, \; P(2020) = 127.09$$

③ Resolviendo

→ Separamos variables

$$\frac{dP}{dt} = aP \rightarrow dP = aP\,dt \rightarrow \frac{dP}{P} = a\,dt$$

→ Integramos

$$\int \frac{dP}{P} = \int a\,dt \rightarrow \ln|P| = at + C \rightarrow e^{\ln|P|} = e^{at+C}$$

$$\rightarrow |P| = e^{at} \cdot e^{c} \rightarrow P = \pm e^{at} \cdot e^{c}$$

$$\rightarrow P(t) = Ce^{at}$$

Solución General

→ Se busca solución que cumpla $P(2010) = 112.336$

$$Ce^{a(2010)} = 112.336$$

$$C = \frac{112.336}{e^{a(2010)}}$$

$$C = 112.336e^{-a(2010)}$$

→ Sustituimos en solución general

$$P(t) = 112.336e^{-a(2010)}e^{at}$$
$$= 112.336e^{at-a(2010)}$$
$$\underbrace{= 112.336e^{a(t-2010)}}_{\text{Solución del PVI}} \quad ②$$

→ Se busca solución que cumpla $P(2020) = 127.09$

$$127.09 = 112.336e^{a(t-2010)}$$

$$\ln\left|\frac{127.09}{112.336}\right| = \cancel{\ln e}^{\,a(2020-2010)}$$

$$\ln|1.131331| = a(2020-2010)$$

$$a = \frac{\ln|1.131331|}{10}$$

$$a = 0.012340$$

→ Sustituimos a en ②

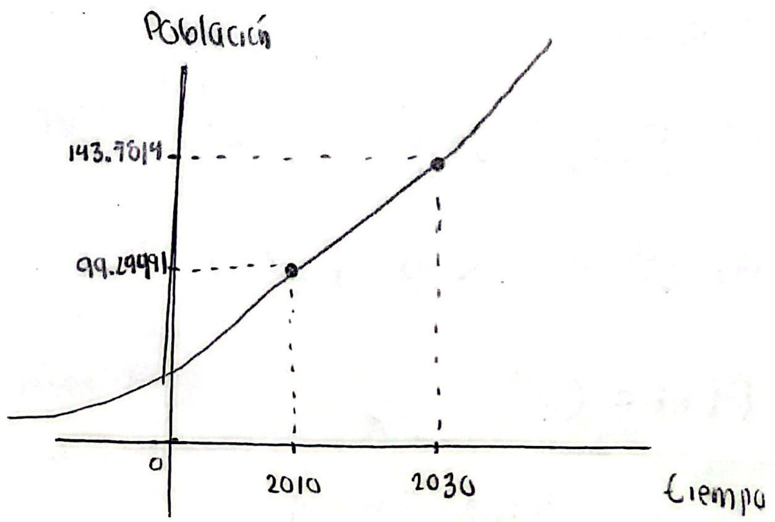
$$\underbrace{P(t) = 112.336e^{0.012340(t-2010)}}_{\text{Función de Población}}$$

→ Población en 2000

$$P(2010) = 112.336e^{0.012340(2000-2010)}$$
$$= 99.29491 \text{ millones}$$

→ Población en 2030

$$P(2030) = 112.336e^{0.012340(2030-2010)}$$
$$= 143.78144 \text{ millones}$$



b) Utiliza los datos de los censos de los años 1990, 2000, 2010 para determinar un modelo logístico que describa el comportamiento de la población en México. Con la solución de dicho modelo encuentra el tamaño de la población en el año 2020 y la población límite.

① Modelo

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2, \text{ sujeto a } \begin{matrix} P(t_0) = P_0 \\ P(t_1) = P_1 \\ P(t_2) = P_2 \end{matrix}, \text{ donde } t_2 - t_1 = t_1 - t_0$$

Sabemos que:

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-a(t-t_0)}}, \quad a = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln\left|\frac{P_2(P_1 - P_0)}{P_0(P_2 - P_1)}\right|, \quad b = \frac{a}{P_1}\left|\frac{P_1^2 - P_0P_2}{P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2}\right|$$

② Datos

$t_0 = 1990$ $\quad t_1 = 2000$ $\quad t_2 = 2010$

$P_0 = 83.249$ $\quad P_1 = 97.483$ $\quad P_2 = 112.336$

③ Resolvemos

$$a = \frac{1}{10} \ln\left|\frac{112.336(97.483 - 83.249)}{83.249(112.336 - 97.483)}\right| = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{1598.99062}{1236.49939}\right| = \underline{0.025708}$$

$$b = \frac{0.025708}{97.483}\left|\frac{(97.483)^2 - (83.249)(112.336)}{(83.249)(97.483) - 2(83.249)(112.336) + (97.483)(112.336)}\right| = \frac{0.025708}{97.483}\left|\frac{151.07562}{362.493227}\right|$$

$$= \underline{0.0001099}$$

$$a - bP_0 = 0.025708 - 0.0001099(83.249)$$
$$= \underline{0.0165581}$$

④ Sustituimos en $P(t)$

$$P(t) = \frac{0.025708(83.249)}{(0.0001099)(83.249) + (0.016558)e^{-0.025708(t-1990)}}$$

Función Población

⑤ Población 2020

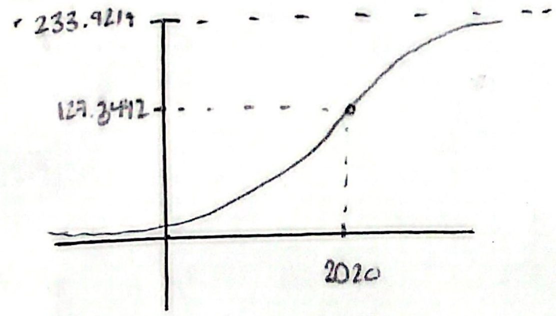
$$P(2020) = \frac{0.025708(83.249)}{(0.0001099)(83.249)+(0.016358)e^{-0.025708(2020-1990)}} = \frac{2.140165}{0.016806}$$

$$= 127.34427 \text{ millones}$$

⑥ Población limite

$$\frac{a}{b} = \frac{0.025708}{0.0001099} = 233.921747 \text{ millones}$$

⑦ Gráfica



c) Ahora modelo logístico con datos del censo en 1980, 2000 y 2020

① Modelo

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2, \text{ sujeto a } P(t_0)=P_0,\ P(t_1)=P_1,\ P(t_2)=P_2, \text{ donde } t_2 - t_1 = t_1 - t_0$$

Sabemos que

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0+(a-bP_0)e^{-a(t-t_0)}}, \quad a = \frac{1}{t_1-t_0}\ln\left|\frac{P_2(P_1-P_0)}{P_0(P_2-P_1)}\right|, \quad b = \frac{a}{P_1}\left|\frac{P_1^2-P_0P_2}{P_0P_1-2P_0P_2+P_1P_2}\right|$$

② Datos

$t_0 = 1980$ $t_1 = 2000$ $t_2 = 2020$

$P_0 = 66.846$ $P_1 = 97.483$ $P_2 = 127.09$

Scanned with CamScanner

③ Resolvemos

$$a = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{127.09(97.463-66.846)}{66.846(127.09-97.463)}\right| = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{3893.65653}{1955.044962}\right| = 0.0344467$$

$$b = \frac{0.0344467}{97.463}\left|\frac{(97.463)^2-(66.846)(127.09)}{(66.846)(97.463)-2(66.846)(127.09)+(97.463)(127.09)}\right| = 0.00035336\left|\frac{1007.477149}{1938.611368}\right|$$

$$= 0.000183637$$

$$a - bP_0 = 0.0344467 - 0.000183637(66.846) = 0.02217060$$

④ Sustituimos en $P(t)$

$$P(t) = \underbrace{\frac{(0.0344467)(66.846)}{(0.000183637)(66.846)+(0.02217060)e^{-0.0344467(t-1980)}}}_{\text{Función Población}}$$

⑤ Población (2030)

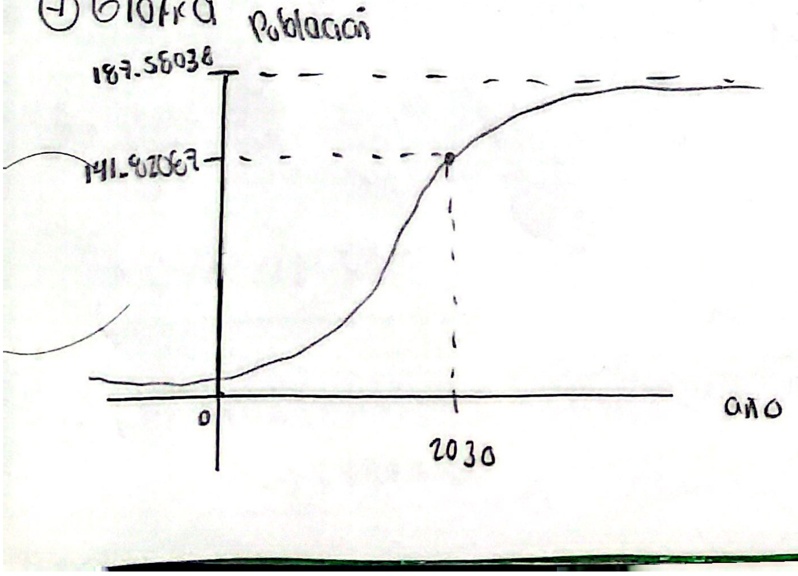
$$P(2030) = \frac{(0.0344467)(66.846)}{(0.000183637)(66.846)+(0.02217060)e^{-0.0344467(2030-1980)}} = \frac{2.3026241}{0.016236143}$$

$$= 141.82087 \text{ millones}$$

⑥ Población límite

$$\frac{a}{b} = \frac{0.0344467}{0.000183637} = 187.58038 \text{ millones}$$

⑦ Gráfica



d) Determine el tiempo en el que la población de México fue de 100 millones de acuerdo a las funciones de población obtenidas en los incisos a) y b)

a) Se busca t^* que satisfaga $P(t^*) = 100$ millones

$$100 = 112.336\, e^{0.012340(t-2010)}$$

$$\frac{100}{112.336} = e^{0.012340(t-2010)}$$

$$\ln\left|\frac{100}{112.336}\right| = \ln e^{0.012340(t-2010)}$$

$$-0.116324 = 0.012340(t-2010)$$

$$-9.426595 = t - 2010$$

$$-9.426595 + 2010 = 2000.5734 \text{ año}$$

b) $$100 = \frac{(0.025708)(83.249)}{(0.0001099)(83.249) + (0.016558)e^{-0.025708(t-1990)}}$$

$$100\left(0.0001099(83.249) + 0.016558e^{-0.025708(t-1990)}\right) = 2.1401652$$

$$0.0001099(83.249) + 0.016558e^{-0.025708(t-1990)} = \frac{2.1401652}{100}$$

$$0.016558e^{-0.025708(t^*-1990)} = \frac{2.1401652}{100} - 0.0091490$$

$$e^{-0.025708(t^*-1990)} = 0.0122526\left(\frac{1}{0.016558}\right)$$

$$\ln e^{-0.025708(t^*-1990)} = \ln|0.7399806|$$

$$t^* = \frac{\ln|0.7399806|}{-0.025708} + 1990$$

$$t^* = 2001.71352 \text{ años}$$

② Crecimiento de plantas de girasol. En la tabla 2 se registraron las alturas de una planta en función del tiempo. La unidad de tiempo en días y altura en centímetros.

tiempo	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
Altura	17.9	36.3	67.7	98.1	131.0	169.5	205.5	228.3	247.1	250.5	253.8	254.5

a) Encuentra un modelo logístico que describa el comportamiento del crecimiento de la planta conforme el tiempo transcurre. Se sugiere utilizar las alturas que corresponden a los tiempos 14, 42 y 70, o bien 42, 56 y 70

① Modelo

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2,$$ sujeto a $P(t_0) = P_0$, $P(t_1) = P_1$, $P(t_2) = P_2$, donde $t_2 - t_1 = t_1 - t_0$

Sabemos que:

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-a(t-t_0)}}, \quad a = \frac{1}{t_1 - t_0}\ln\left|\frac{P_2(P_1 - P_0)}{P_0(P_2 - P_1)}\right|, \quad b = \frac{a}{P_1}\left|\frac{P_1^2 - P_0P_2}{P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2}\right|$$

② Datos

$t_0 = 14$ $t_1 = 42$ $t_2 = 70$

$P_0 = 36.3$ $P_1 = 169.5$ $P_2 = 250.5$

③ Resolvemos

$$a = \frac{1}{42-14}\ln\left|\frac{250.5(169.5 - 36.3)}{36.3(250.5 - 169.5)}\right| = \frac{1}{28}\ln\left|\frac{33366.6}{2940.3}\right| = \underline{0.0867515}$$

$$b = \frac{0.0867515}{169.5}\left|\frac{(169.5)^2 - (36.3)(250.5)}{(36.3)(169.5) - 2(36.3)(250.5) + (169.5)(250.5)}\right| = 5.118082596 \times 10^{-4}\left|\frac{19637.1}{30426.3}\right|$$

$$= \underline{0.000330320}$$

$$a - bP_0 = 0.0867515 - 0.000330320(36.3)$$
$$= \underline{0.074760866}$$

(4) Sustituimos en $P(t)$

$$P(t) = \frac{0.0867515(36.3)}{(0.00033020)(36.3) + (0.074760860)e^{-0.0867515(t-14)}}$$

Función crecimiento planta girasol

b) Altura máxima

$$\frac{a}{b} = \frac{0.0867515}{0.00033020} = 262.72410 \text{ centimetros}$$

c) ¿En que momento la planta alcanzó la mitad de la altura maxima

$$\frac{262.72410}{2} = 131.36205$$

$$\frac{3.14907945}{0.01198626 + 0.074760860e^{-0.0867515(t^*-14)}} = 131.36203$$

$$3.14907945 = 131.36203\left(0.01198626 + 0.074760860e^{-0.0867515(t^*-14)}\right).$$

$$\frac{3.14907945}{131.36203} = 0.01198626 + 0.074760860e^{-0.0867515(t^*-14)}$$

$$\frac{3.14907945}{131.36203} - 0.01198626 = 0.074760860e^{-0.0867515(t^*-14)}$$

$$\left(\frac{3.14907945}{131.36203} - 0.01198626\right)\left(\frac{1}{0.074760860}\right) = e^{-0.0867515(t^*-14)}$$

$$\ln|0.16032806| = \ln e^{-0.0867517(t^*-14)}$$

$$\frac{-1.830533137}{-0.0867517} + 14 = t^*$$

$$t^* = 35.1008 \text{ días}$$

Scanned with CamScanner