

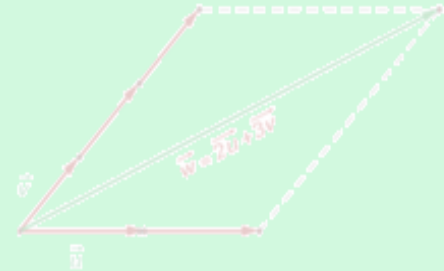
Algebra Lineal

Universidad Autónoma

De Aguascalientes

Depto. de Matemáticas y Física

Ejemplos de espacios vectoriales $\mathbb{M}_{n \times n}$.



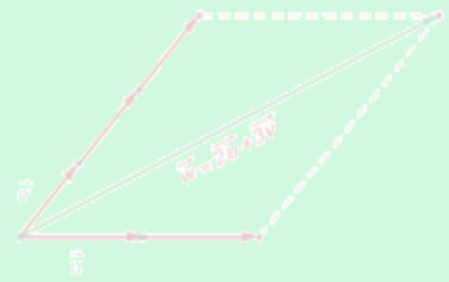
Para este ejercicio, la cuestión es, ¿Es espacio vectorial?

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} =$$

$$v = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

2.1. Espacios vectoriales.



$$V = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 | a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_0 \neq 0\}$$

Para este ejercicio, la cuestión es, ¿Es espacio vectorial?

Para responder, primero debemos de fijarnos en responder las siguientes cuestiones:

¿En donde están definidos los elementos del conjunto? ¿Qué características tienen los elementos del conjunto?

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -x_4 & 2 \\ 1 & 1+x_4 & -3 \\ 4 & -2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}} = \frac{-3x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{10x_4}{11}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}} = \frac{10x_4 - 22}{-11} = 2 - \frac{10x_4}{11}$$

Comprobamos la primera propiedad: $T(u+v) = Tu + Tv$
 $T(f+g) = Tf + Tg$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(x) + g(x))g(x) dx &= \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 g(x)g(x) dx \\ \int_0^1 (f(x)g(x) + f(x)g(x)) dx &= \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx \\ \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx &= \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx \end{aligned}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\begin{aligned} &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= [(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)] - [a_{12}a_{21}] \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

$$J^k = \begin{bmatrix} J_{m_1}^k(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}^k(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{m_{s-1}}^k(\lambda_{s-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J_{m_s}^k(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

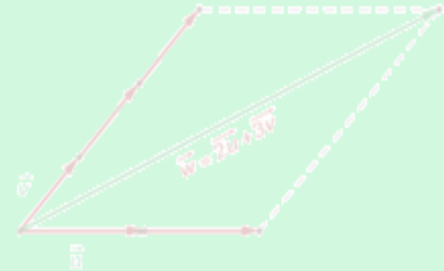
2.1. Espacios vectoriales.

Para este ejercicio, la cuestión es, ¿Es espacio vectorial?

Para responder, primero debemos de fijarnos en responder las siguientes cuestiones:

¿En donde están definidos los elementos del conjunto? ¿Qué características tienen los elementos del conjunto?

1. Los elementos del conjunto V son polinomios de grado 2, con coeficientes reales.



2.1. Espacios vectoriales.

Para este ejercicio, la cuestión es, ¿Es espacio vectorial?

Para responder, primero debemos de fijarnos en responder las siguientes cuestiones:

¿En donde están definidos los elementos del conjunto? ¿Qué características tienen los elementos del conjunto?

1. Los elementos del conjunto V son polinomios de grado 2, con coeficientes reales.

2. El termino constante es no nulo.

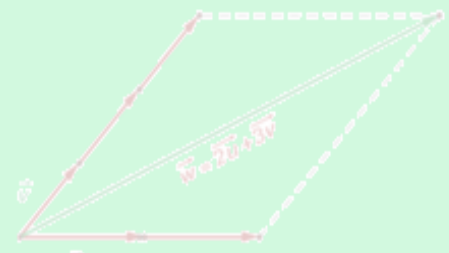


$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} =$$

$$v = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

2.1. Espacios vectoriales.



La segunda característica es precisamente la que utilizaremos para probar que le conjunto es (o no) un espacio vectorial.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & 2 & 1 \\ 1+x_4 & -3 & 1 \\ 4-2x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{3x_4}{11}$$

► Si $A \in M_{2 \times 2} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_4 & -1 \\ 2 & 1+x_4 & 1 \\ 1 & 4-2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{9x_4}{11}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10x_4 - 22}{-11} = 2 - \frac{10x_4}{11}$$

► Si $A \in M_{3 \times 3} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 - \text{tr}(A)\lambda^2 + (P_{11} + P_{22} + P_{33})\lambda - \det A$

Comprobamos la primera propiedad: $T(u+v) = Tu + Tv$
 $T(f+g) = Tf + Tg$

$$J^k = \begin{bmatrix} J_{m_1}^k(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}^k(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{m_{s-1}}^k(\lambda_{s-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J_{m_s}^k(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 (f_1(x) + f_2(x))g(x)dx = \int_0^1 f_1(x)g(x)dx + \int_0^1 f_2(x)g(x)dx$$

$$\int_0^1 (f_1(x)g(x) + f_2(x)g(x))dx = \int_0^1 f_1(x)g(x)dx + \int_0^1 f_2(x)g(x)dx$$

$$\int_0^1 f_1(x)g(x)dx + \int_0^1 f_2(x)g(x)dx = \int_0^1 f_1(x)g(x)dx + \int_0^1 f_2(x)g(x)dx$$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$\begin{aligned} &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= [(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)] - [a_{12}a_{21}] \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

2.1. Espacios vectoriales.

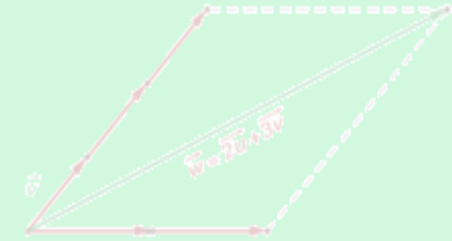
La segunda característica es precisamente la que utilizaremos para probar que le conjunto es (o no) un espacio vectorial.

Como $a_0 \neq 0$, claramente los polinomios

$p(x) = a_2x^2 + a_1x + 1, q(x) = b_2x^2 + b_1x - 1$ son elementos del conjunto V

Sin embargo la suma de ambos

$$p(x) + q(x) = (a_2x^2 + a_1x + 1) + (b_2x^2 + b_1x - 1)$$



2.1. Espacios vectoriales.

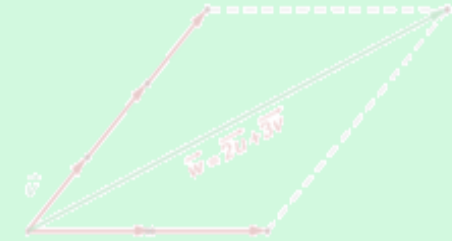
La segunda característica es precisamente la que utilizaremos para probar que le conjunto es (o no) un espacio vectorial.

Como $a_0 \neq 0$, claramente los polinomios

$p(x) = a_2x^2 + a_1x + 1, q(x) = b_2x^2 + b_1x - 1$ son elementos del conjunto V

Sin embargo la suma de ambos

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_2x^2 + a_1x + 1) + (b_2x^2 + b_1x - 1) \\ \Leftrightarrow p(x) + q(x) &= (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (1 - 1) \end{aligned}$$



2.1. Espacios vectoriales.

La segunda característica es precisamente la que utilizaremos para probar que le conjunto es (o no) un espacio vectorial.

Como $a_0 \neq 0$, claramente los polinomios

$p(x) = a_2x^2 + a_1x + 1, q(x) = b_2x^2 + b_1x - 1$ son elementos del conjunto V

Sin embargo la suma de ambos

$$p(x) + q(x) = (a_2x^2 + a_1x + 1) + (b_2x^2 + b_1x - 1)$$

$$\Leftrightarrow p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (1 - 1)$$

$$\therefore p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x$$



2.1. Espacios vectoriales.

La segunda característica es precisamente la que utilizaremos para probar que le conjunto es (o no) un espacio vectorial.

Como $a_0 \neq 0$, claramente los polinomios

$p(x) = a_2x^2 + a_1x + 1, q(x) = b_2x^2 + b_1x - 1$ son elementos del conjunto V

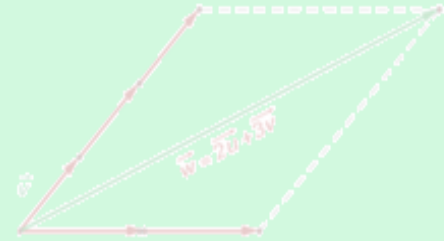
Sin embargo la suma de ambos

$$p(x) + q(x) = (a_2x^2 + a_1x + 1) + (b_2x^2 + b_1x - 1)$$

$$\Leftrightarrow p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (1 - 1)$$

$$\therefore p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x$$

Donde, es claro que $p(x) + q(x)$ no se encuentra en el conjunto V .



2.1. Espacios vectoriales.

La segunda característica es precisamente la que utilizaremos para probar que le conjunto es (o no) un espacio vectorial.

Como $a_0 \neq 0$, claramente los polinomios

$p(x) = a_2x^2 + a_1x + 1, q(x) = b_2x^2 + b_1x - 1$ son elementos del conjunto V

Sin embargo la suma de ambos

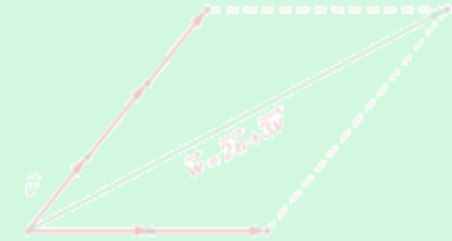
$$p(x) + q(x) = (a_2x^2 + a_1x + 1) + (b_2x^2 + b_1x - 1)$$

$$\Leftrightarrow p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (1 - 1)$$

$$\therefore p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x$$

Donde, es claro que $p(x) + q(x)$ no se encuentra en el conjunto V .

Esto implica que V no es un espacio vectorial.



2.1. Espacios vectoriales.

Referencias:

1. Álgebra Lineal. Stanley I. Grossman, sexta edición, Mc Graw Hill, México.
2. Álgebra Lineal con Aplicaciones y Matlab. Bernard Kolman, Octava Edición, Prentice Hall.
3. Introducción al Álgebra lineal. Howard Antón, Tercera Edición, Noriega Editores, México.
4. Álgebra Lineal. Claudio Pita Ruiz, Mc Graw Hill, México.
5. Álgebra Lineal con Aplicaciones. Nakos George, Joyner David, Internacional Thomson Editores.

