Datos de Identificación de tareas

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES

Centro de Ciencias Básicas

Materia: **Ecuaciones Diferenciales**

Tarea I

Soluciones

Ingeniería en Computación Inteligente Semestre 5° A

Alumno: Jose Luis Sandoval Perez **ID:261731**

Profesor: **Jaime Salvador Medina González**

Fecha de entrega: 04/09/2023

Tarea 1
Soluciones de ED

① Clasifique las ecuaciones diferenciales completando la siguiente tabla

Ecuación Diferencial	Orden	Var. Ind	Var. Dep	Lineal
$y' = x^2 + 5y$	1	x	y	Si
$y'' - 4y - 5y = e^{3x}$	2	x	y	Si
$\frac{du}{dt} = k\frac{d^2u}{dx^2}$	1	t, x	u	Si
$\frac{dP}{dt} = \sqrt{rP}$	1	t	P	No
$\frac{d^2x}{dt^2} - 3x = \sin t$	2	t	x	Si
$(2z + y)dx + (x - 3y)dy = 0$	1	z, x z, y	y x	$\frac{dx}{dy}$ Si $\frac{dy}{dx}$ No

② Demuestre que $y(x) = 3x^2e^{2x}$ es una solución de la ED $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}$

① Derivamos 1 y 2 veces

$$\frac{dy}{dx} = 3[(x^2)'e^{2x} + x^2[e^{2x}]']$$

$$= 3[2xe^{2x} + 6x^2 2e^{2x}$$

$$= 6xe^{2x} + 6x^2e^{2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx} = [6(x'e^{2x} + x(e^{2x})')] + [6((x^2)'e^{2x} + x^2(e^{2x})')]$$

$$= [6e^{2x} + 12xe^{2x}] + [12xe^{2x} + 6x^2e^{2x}]$$

$$= 6e^{2x} + 24xe^{2x} + 6x^2e^{2x}$$

② Sustituimos en ED

$$6e^{2x}+24xe^{2x}+6x^2e^{2x}-4(6xe^{2x}+6x^2e^{2x})+4(3x^2e^{2x})=6e^{2x}$$

$$6e^{2x}+\cancel{24xe^{2x}}+6x^2e^{2x}-\cancel{24xe^{2x}}-24x^2e^{2x}+12x^2e^{2x}=6e^{2x}$$

$$6e^{2x}+6x^2e^{2x}-24x^2e^{2x}+12x^2e^{2x}=6e^{2x}$$

$$6e^{2x}-6x^2e^{2x}=6e^{2x}$$ No es identidad $\therefore$ $y=3x^2e^{2x}$ no es solución

③ Demuestre que $y=3x^{-4}-x^2$ es una solución de la ED $x^2y''+2xy'-12y=6x^2$

① Derivamos 1 y 2 veces

$$\frac{dy}{dx}=-12x^{-5}-2x$$

$$\frac{d^2y}{dx}=60x^{-6}-2$$

② Sustituimos en ED

$$x^2(60x^{-6}-2)+2x(-12x^{-5}-2x)-12(3x^{-4}-x^2)=6x^2$$

$$60x^{-4}-2x^2-24x^{-4}-4x^2-36x^{-4}+12x^2=6x^2$$

$$\cancel{60x^{-4}}-\cancel{24x^{-4}}-\cancel{36x^{-4}}-2x^2-4x^2+12x^2=6x^2$$

$$-6x^2+12x^2=6x^2$$

$$\underbrace{6x^2=6x^2}_{\text{Identidad}}$$

$\therefore$ $y=3x^{-4}-x^2$ es solución de la ED

④ Demuestre que $y=5e^{x^2}-1$ es solución del PVI $\frac{dy}{dx}-2xy=2x$, $y(0)=4$

① Derivamos y

$$\frac{dy}{dx}=5[e^{x^2}\cdot(x^2)']-1$$
$$=5[e^{x^2}\cdot 2x]$$
$$=10xe^{x^2}$$

② Sustituimos en PVI

$$10xe^{x^2}-2x(5e^{x^2}-1)=2x$$

$$\cancel{10xe^{x^2}}-\cancel{10xe^{x^2}}+2x)=2x$$

$$\underbrace{2x=2x}$$ identidad $\therefore$ $y=5e^{x^2}-1$ es solución de ED

③ Evaluamos condiciones

$y(0)=4$

$$y(0)=5e^{(0)^2}-1$$
$$y(0)=5e^0-1$$
$$=5(1)-1$$
$$=5-1$$
$$=4$$

$\underbrace{y(0)=4}$

$\therefore$ es solución del PVI y cumple con la condición del PVI

⑤ Demuestre que $P(t) = P_0 e^{at}$ es solución de PVI $\frac{dP}{dt} = aP$ sujeto a $P(0) = P_0$ donde a y P_0 son constantes.

① Derivar

$$\frac{dP}{dt} = P_0 e^{at}$$
$$= P_0 (e^{at} \cdot (at)')$$
$$= P_0 (a e^{at})$$
$$= P_0 a e^{at}$$

② Sustituir en ED

$$\underbrace{P_0 a e^{at} = a P_0 e^{at}}_{\text{identidad}}$$

∴ $P(t) = P_0 e^{at}$ es solución de ED

③ Evaluar PVI

$$P(0) = P_0$$
$$P(0) = P_0 e^{a(0)}$$
$$= P_0 e^0$$
$$= P_0(1)$$
$$\boxed{= P_0}$$

$P(t) = P_0 e^{at}$ ∴ Si es solución del PVI

⑥ Demuestre que la función $T(t) = T_m + Ce^{-kt}$ es solución general de la ED $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$ donde $k > 0$, C y $T_m \in \mathbb{R}$ son constantes

① Derivamos función $T(t)$

$$\frac{dT}{dt} = T_m + Ce^{-kt}$$
$$= C(e^{-kt})'$$
$$= C(e^{-kt} \cdot (kt)')$$
$$= C(e^{-kt} \cdot k)$$
$$= kCe^{-kt}$$

② Sustituimos

$$kCe^{-kt} = -k((T_m + Ce^{-kt}) - T_m)$$
$$kCe^{-kt} = -kT_m + kCe^{-kt} + kT_m$$
$$\underbrace{kCe^{-kt} = kCe^{-kt}}_{\text{identidad}}$$

∴ $T(t) = T_m + Ce^{-kt}$ es solución de la ED y al tener 1 constante es solución general

⑦ Determine si $y = 6xe^{2x}$ es solución del PVI $y'' - 4y' + 4y = 0$ sujeto a $y(0) = 0$ $y'(0) = 6$

① Derivamos

$$\frac{dy}{dx} = 6xe^{2x}$$
$$= 6[(x')e^{2x} + x(e^{2x})']$$
$$= 6[e^{2x} + 2xe^{2x}]$$
$$\underline{= 6e^{2x} + 12xe^{2x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6e^{2x} + 12xe^{2x}$$
$$= 6[e^{2x}] + 12[x'e^{2x} + xe^{2x'}]$$
$$= 6[2e^{2x}] + 12e^{2x} + 24xe^{2x}$$
$$= 12e^{2x} + 12e^{2x} + 24xe^{2x}$$
$$\underline{= 24e^{2x} + 24xe^{2x}}$$

② Sustituimos en ED

$$24e^{2x} + 24xe^{2x} - 4(6e^{2x} + 12xe^{2x}) + 4(6xe^{2x}) = 0$$
$$\rightarrow \cancel{24e^{2x}} + 24xe^{2x} - \cancel{24e^{2x}} - 48xe^{2x} + 24xe^{2x} = 0$$
$$\underline{0 = 0} \quad \text{identidad}$$

→ ∴ $6xe^{2x}$ es solución de la ED

③ Evaluamos PVI

$y(0)=0$
$y(0)=6(0)e^{2(0)}$
$=0(e^1)$
$=0(1)$
$=0$

$y'(0)=6$
$y'(0)=6e^{2(0)}+12(0)e^{2(0)}$
$=6e^0+0$
$=6(1)$
$=6$

$\therefore y=6xe^{2x}$ es solución del PVI

⑧ Compruebe que $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+2e^{4x}$ es solución general de la ED
$y''-2y'-3y=10e^{4x}$

① Derivamos 2 veces

$\frac{dy}{dx}=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+2e^{4x}$
$=C_1(e^{3x})'+C_2(e^{-x})'+2(e^{4x})'$
$=3C_1e^{3x}-C_2e^{-x}+8e^{4x}$

$\frac{d^2y}{dx}=3C_1e^{3x}-C_2e^{-x}+8e^{4x}$
$=3C_1(e^{3x})'-C_2(e^{-x})'+8(e^{4x})'$
$=9C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+32e^{4x}$

② Sustituimos en ED

$9C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+32e^{4x}-2(3C_1e^{3x}-C_2e^{-x}+8e^{4x})-3(C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+2e^{4x})=10e^{4x}$
$\rightarrow 9C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+32e^{4x}-6C_1e^{3x}+2C_2e^{-x}-16e^{4x})-3C_1e^{3x}-3C_2e^{-x}-6e^{4x}=10e^{4x}$
$\rightarrow 9C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+32e^{4x}-6C_1e^{3x}+2C_2e^{-x}-16e^{4x}-6e^{4x}=10e^{4x}$
$\rightarrow \cancel{9C_1e^{3x}}-\cancel{6C_1e^{3x}}-\cancel{3C_1e^{3x}}+\cancel{C_2e^{-x}}+\cancel{2C_2e^{-x}}-\cancel{3C_2e^{-x}}+32e^{4x}-16e^{4x}-6e^{4x}=10e^{4x}$
$\rightarrow 32e^{4x}-22e^{4x}=10e^{4x}$
$\rightarrow 10e^{4x}=10e^{4x}$

identidad

$\therefore$ Es solución $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+2e^{4x}$ de la ED

⑨ Demuestre que $y = e^{-3x}\text{sen}(2x)$ es una solución particular de la ED

$$y'' + 6y' + 13y = 0$$

① Derivamos 1 y 2 veces

$$\frac{dy}{dx} = e^{-3x}\text{sen}\,2x$$

$$= (e^{-3x})'\,\text{sen}(2x) + (e^{-3x})(\text{sen}(2x))'$$

$$= -3e^{-3x}\text{sen}(2x) + (e^{-3x})(\cos(2x)(2x)')$$

$$= -3e^{-3x}\text{sen}(2x) + 2e^{-3x}\cos(2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx} = -3e^{-3x}\text{sen}(2x) + 2e^{-3x}\cos(2x)$$

$$= [-3((e^{-3x})'\,\text{sen}\,2x) + e^{-3x}(\text{sen}(2x))'] + [2((e^{-3x})'\cos(2x) + e^{-3x}(\cos(2x))')]$$

$$= 9e^{-3x}\text{sen}(2x) - 6e^{-3x}\cos(2x) - 6e^{-3x}\cos(2x) - 4e^{-3x}\sin(2x)$$

② Sustituimos en ED

$$5e^{-3x}\text{sen}(2x) - 12e^{-3x}\cos(2x) + 6(-3e^{-3x}\text{sen}(2x) + 2e^{-3x}\cos(2x)) + 13(e^{-3x}\text{sen}(2x))$$

$$\rightarrow 5e^{-3x}\cancel{\text{sen}(2x)} - 12\cancel{e^{-3x}}\cos(2x) - 18e^{-3x}\cancel{\text{sen}(2x)} + 12\cancel{e^{-3x}}\cos(2x) + 13\cancel{e^{-3x}}\text{sen}(2x)$$

$$\rightarrow \underbrace{0 = 0}_{\text{identidad}}$$

$\therefore$ $y = e^{-3x}\text{sen}(2x)$ es solución de la ED y al no tener constante y llegar a $0=0$ es solución particular

(10) Compruebe que $y = C_1 + C_2 \ln(x) + \frac{x^4}{16}$ es solución general de la ED $x^2 y'' + xy' = x^4$

(1) Derivamos 2 veces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC_1}{dx} + \frac{dC_2\ln(x)}{dx} + \frac{d\left(\frac{x^4}{16}\right)}{dx} = \frac{C_2\, d\ln(x)}{dx} + \frac{d\frac{1}{16}\cdot x^4}{dx}$$

$$= \frac{C_2}{x} + \frac{4x^3}{16} = \underline{\frac{C_2}{x} + \frac{x^3}{4}}$$

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{C_2}{x}' + \frac{x^3}{4}'$$

$$= \underbrace{\frac{-C_2}{x^2} + \frac{3x^2}{4}}$$

(2) Sustituimos en ED

$$\cancel{x^2}\left(\frac{-C_2}{\cancel{x^2}} + \frac{3x^2}{4}\right) + \cancel{x}\left(\frac{C_2}{\cancel{x}} + \frac{x^3}{4}\right) = x^4$$

$$\cancel{-C_2} + \frac{3x^4}{4} + \cancel{C_2} + \frac{x^4}{4} = x^4$$

$$\frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}} = x^4$$

$$\underbrace{x^4 = x^4}_{\text{identidad}}$$

$\therefore$ $y = C_1 + C_2\ln(x) + \frac{x^4}{16}$ es solución general de la ED

(11) Determine si la relación $xy^2-y^3=c$ define una solución implícita de la ED $y'=\frac{y}{3y-2x}$

(1) Derivamos con respecto a x

$$\frac{d\,xy^2-y^3}{dx}=\frac{dc}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{dxy^2}{dx}-\frac{dy^3}{dx}=0$$

$$\frac{dx}{dx}y^2+x\frac{dy^2}{dx}-3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow y^2+x2y\frac{dy}{dx}-3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\rightarrow y(y+2xy'-3yy')=0$$

$$\rightarrow y+y'(2x-3y)=\frac{0}{y}$$

$$\rightarrow y'(2x-3y)=-y$$

$$\rightarrow y'=\frac{-y}{2x-3y}=y'=\frac{y}{3x-2y}$$

$\therefore$ $xy^2-y^3=c$ es una solución implícita de la ED

(12) Determine si la relación $y-\ln y=x^2+c$ define una solución implícita para la ED $y'=\frac{2xy}{y-1}$

(1) Derivamos con respecto a x

$$\frac{d\,y-\ln y}{dx}=\frac{dx^2+c}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{d\ln y}{dx}=2x$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx}-\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\rightarrow y'\left(1-\frac{1}{y}\right)=2x$$

$$\rightarrow y'=\frac{2x}{1-\frac{1}{y}}$$

$$\rightarrow y'=\frac{2x(y)}{(1-\frac{1}{y})(y)}$$

$$\rightarrow y'=\frac{2xy}{(1-y)}$$

$\therefore$ $y-\ln y=x^2+c$ es solución implícita de la ED