



Centro de Ciencias Básicas

ESTRUCTURAS COMPUTACIONALES AVANZADAS

Proyecto Final

Matrimonio estables y equilibrio de Nash

Ingeniería en Computación Inteligente

Semestre

3° A

agosto-diciembre 2022

Integrantes:

Elías del Hoyo César

Eduardo

Rivera Delgadillo Ximena

Sandoval Pérez José Luis

ID

262045

261261

261731

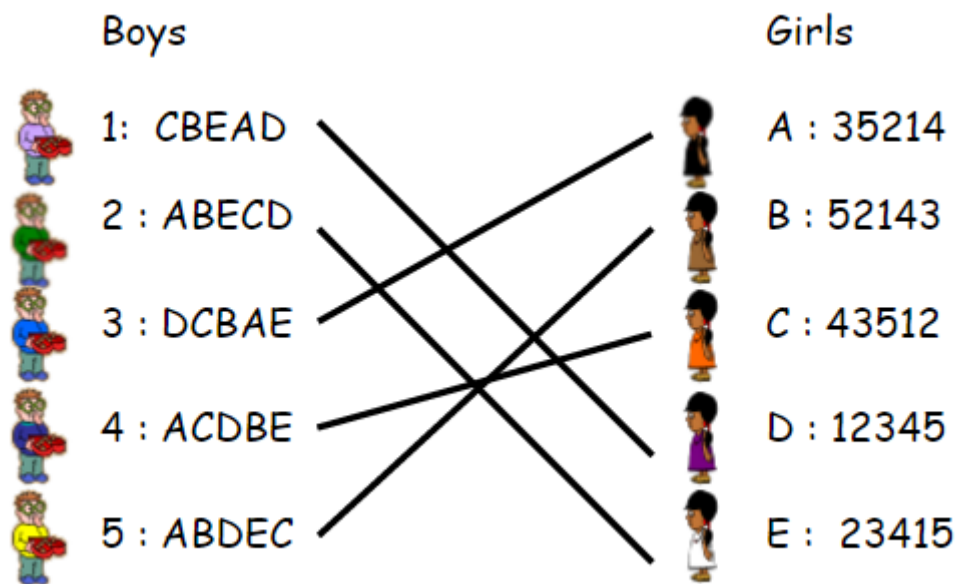
MATRIMONIO ESTABLE

En el área de las matemáticas, economía e informática el problema del matrimonio estable se define como la búsqueda de un emparejamiento estable entre dos conjuntos de elementos de igual tamaño, teniendo en cuenta un orden dado de preferencias para cada elemento de ambos conjuntos. Un emparejamiento es una biyección de los elementos de un conjunto al otro conjunto.

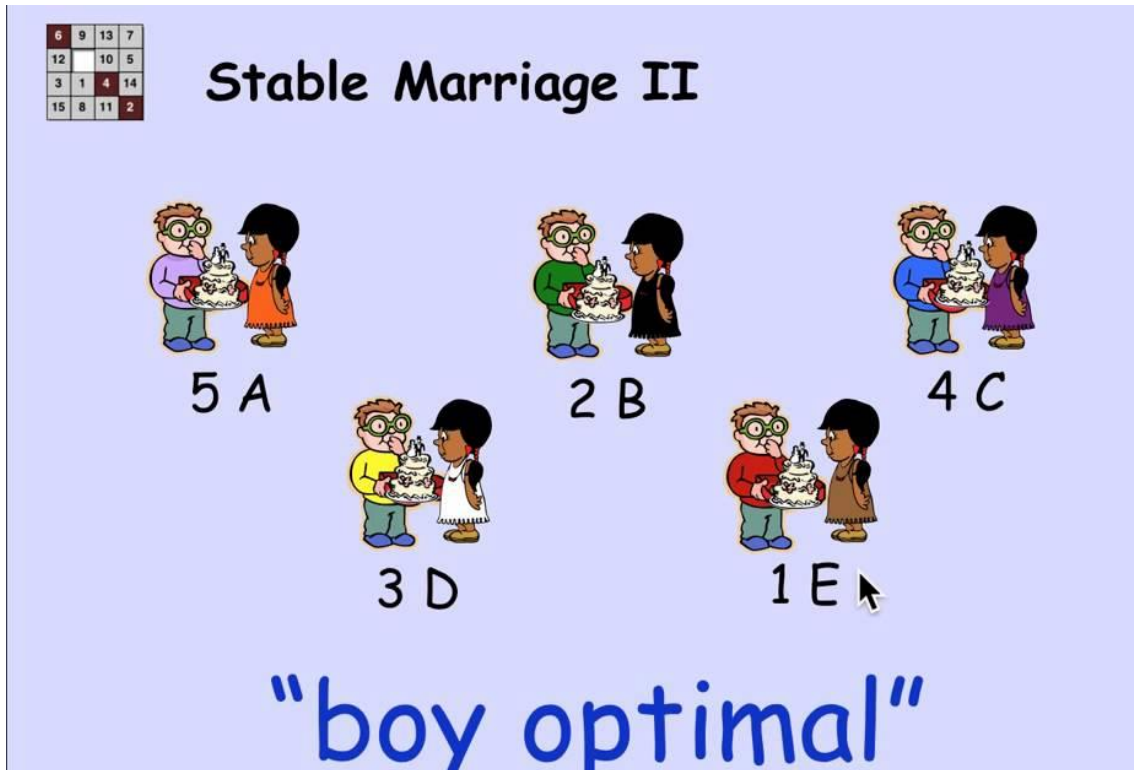
Un emparejamiento es estable cuando no existe ningún emparejamiento (A, B) en el que ambos se prefieran entre sí a su pareja actual bajo el emparejamiento.

Definición formal

El problema del matrimonio estable establece que dados N hombres y N mujeres, donde cada persona ha clasificado a todos los miembros del sexo opuesto en orden de preferencia se debe casar a los hombres y mujeres juntos de tal manera que no haya dos personas del sexo opuesto que prefieran tenerse ambos entre sí que sus parejas actuales. Si no existen tales personas, todos los matrimonios son “estables”.



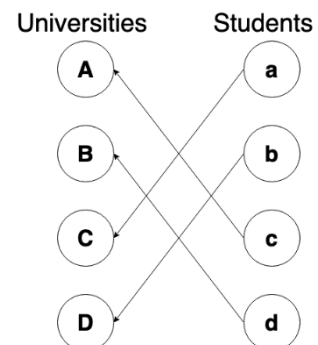
Esta imagen nos demuestra cual es la preferencia de los chicos hacia las chicas y la preferencia de las chicas hacia los chicos.



Esta segunda imagen nos muestra los matrimonios estables en relación con la preferencia de los chicos hacia las chicas. Siguiendo la definición anterior y siguiendo la relación de los matrimonios podemos decir que todos los matrimonios son estables.

Origen

El problema de los matrimonios estables se plantea y se resuelve por primera vez en 1962 por David Gale y Lloyd Shapley, teniendo este en cuenta el problema de la asignación de estudiantes a diferentes cursos universitarios. En este se dice que un emparejamiento de estudiantes con escuelas es estable si no hay un estudiante y una escuela que prefieran ser emparejados entre sí más que sus coincidencias actuales. Gale y Shapley introdujeron un algoritmo llamado *aceptación diferida* que produciría una coincidencia estable.



Situaciones posibles del problema en distintos casos de listas y de grafos no bipartitos

Existe un problema el cual se usa con listas, el problema del compañero de cuarto estable (SRP). Un emparejamiento es una separación del conjunto en pares disjuntos “compañeros de cuarto”. El emparejamiento es *estable* si no hay dos elementos que no sean compañeros de cuarto y que ambos se prefieran a su compañero de cuarto bajo el emparejamiento. Esto es distinto del problema del matrimonio estable en que el problema de los compañeros de cuarto estables permite coincidencias entre dos elementos cualesquiera, no solo entre clases de "hombres" y "mujeres".

A diferencia del problema del matrimonio estable, es posible que no exista un emparejamiento estable para ciertos conjuntos de participantes y sus preferencias. Para un ejemplo mínimo de un emparejamiento estable que no existe, considere 4 personas A, B, C y D , cuyas clasificaciones son:

En este ranking, cada uno de A, B y C es la persona más preferible para alguien. En cualquier solución, uno de A, B o C *debe* emparejarse con D y los otros dos entre sí (por ejemplo, AD y BC), sin embargo, para cualquiera que esté asociado con D , otro miembro lo habrá calificado más alto, y el compañero de D , a su vez, preferirá a este otro miembro sobre D . En este ejemplo, AC es un emparejamiento más favorable que AD , pero el emparejamiento restante necesario de BD plantea el mismo problema, ilustrando la ausencia de un emparejamiento estable para estos participantes y sus preferencias.

Existe un algoritmo eficiente para la solución de este problema que determinara para cualquier instancia del problema si existe una coincidencia estable.

Ejemplificando tenemos lo siguiente:

Cada participante ordena a sus posibles compañeras según sus preferencias. Cada chica elige una compañera y ésta acepta o no la oferta. En caso de no aceptar se entiende que rechaza a la chica que le ha hecho la propuesta. En el ejemplo de la tabla el AZUL indica la elegida, el VERDE la que acepta y el ROJO la rechazada.

1ª ETAPA

- Cada chica propone a su compañera favorita.
- La elegida acepta, pero si es elegida por más de una, acepta la mejor propuesta y rechaza las demás.
- Las rechazadas esperan para ser aceptadas más adelante.
- Si alguna chica es rechazada por todas no existe una solución estable.

Ana	Berta	Delia	Flor	Clara	Eva
Berta	Delia	Eva	Flor	Ana	Clara
Clara	Delia	Eva	Flor	Ana	Berta
Delia	Flor	Clara	Ana	Eva	Berta
Eva	Flor	Clara	Delia	Berta	Ana
Flor	Ana	Berta	Delia	Clara	Eva

Aunque Berta elige a Delia, ella prefiere a Clara y es rechazada. Igualmente, aunque Eva elige a Flor, ella prefiere a Delia y es rechazada.

Ana	Berta	Delia	Flor	Clara	Eva
Berta	Delia	Eva	Flor	Ana	Clara
Clara	Delia	Eva	Flor	Ana	Berta
Delia	Flor	Clara	Ana	Eva	Berta
Eva	Flor	Clara	Delia	Berta	Ana
Flor	Ana	Berta	Delia	Clara	Eva

Ahora Berta propone a Eva que acepta y Eva propone a Clara que acepta.

2ª ETAPA

- Todas desechan las posibles compañeras que son menos deseadas que la actualmente aceptada.

Ana rechaza a Clara y a Eva, Berta rechaza a Clara, y así sucesivamente.

Ana	Berta	Delia	Flor	Clara	Eva
Berta	Delia	Eva	Flor	Ana	Clara
Clara	Delia	Eva	Flor	Ana	Berta
Delia	Flor	Clara	Ana	Eva	Berta
Eva	Flor	Clara	Delia	Berta	Ana
Flor	Ana	Berta	Delia	Clara	Eva

Así las opciones quedan reducidas a las siguientes:

A	B	F	
B	E	F	A
C	D	E	
D	C		
E	C	B	
F	A	B	D

3ª ETAPA

- Elige una participante X que tenga al menos dos opciones.
- Busca su segunda preferencia Y.
- Sea Z la última preferencia de Y.
- Repite el proceso hasta que se llegue a X.
- Elimina las parejas (Y,Z) y sus simétricas.
- Repite el proceso hasta que todas tengan una única opción.

A	F	
B	E	F
C	D	
D	C	
E	B	
F	A	B

A	F
D	C
E	B
A	

B	F
B	

Los emparejamientos son: Ana y Flor, Berta y Eva, Clara y Delia.

A	B	C	D
B	C	A	D
C	A	B	D
D	A	B	C

En este caso no hay una solución estable, pues nadie quiere ir con D.

EQUILIBRIOS DE NASH

El equilibrio de Nash es una situación en donde los individuos o jugadores no tienen ningún incentivo a cambiar su estrategia tomando en cuenta las decisiones de sus oponentes.

En esta situación la estrategia que elige cada uno de los participantes de un conflicto o juego es óptima, dada la estrategia que han elegido los demás. Podemos decir que nadie ganara nada si decide cambiar su estrategia bajo el supuesto de que los demás individuos no cambien la suya.

Con esto dicho tenemos que destacar que bajo este equilibrio no necesariamente se obtiene la mayor ganancia para todos los individuos o jugadores en conjunto, solo se cumple que cada uno responde de manera óptima ante la estrategia de los demás. En muchos casos a los individuos les gustaría poder alcanzar otro equilibrio con mayores ganancias, pero no logran hacerlo debido a que enfrentan el riesgo de ser traicionados.

	Tú encubres	Tú traicionas
Él encubre	Máximo beneficio común	Tú ganas, él pierde
Él traiciona	Él gana, tú pierdes	Máximo perjuicio común

Dentro de la imagen podemos ver que podemos obtener un mayor beneficio si ambos encubren, si alguien modifica su decisión el equilibrio se pierde y a pesar de que uno gane el otro debe de perder.

Origen

El concepto de equilibrio de Nash comienza su desarrollo con Antoine Augustin Cournot y su trabajo sobre oligopolios (1838). En este se plantea el modelo de varias empresas que compiten por el mercado de un mismo bien y que pueden elegir cuánto producir para intentar maximizar su ganancia en función de la producción de las otras. Se establece un equilibrio de Cournot cuando la producción de cada empresa maximiza sus beneficios, dada la

producción de las otras empresas, lo que es una situación de estrategia pura en el equilibrio de Nash.

Los equilibrios de Nash en estrategias puras son limitados en muchos aspectos y fue con el desarrollo de la teoría moderna de juegos que surgen los equilibrios en estrategias mixtas (aquellas en las que los jugadores pueden elegir aleatoriamente entre varias estrategias).

Fue John Forbes Nash quien en su tesis de doctorado (1951) define los equilibrios que hoy llevan su nombre, tratando de manera general las estrategias mixtas y demostrando que cualquier juego con un número finito de estrategias tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Posteriormente se encontraron algunos casos en los que los equilibrios de Nash no llevaban a predicciones totalmente adecuadas para los comportamientos de los jugadores, o comportamientos estables que no se podían encontrar como equilibrios de Nash, lo que dio paso a la búsqueda y desarrollo de nuevos equilibrios (muchas veces como refinamientos de los equilibrios de Nash) y conceptos de solución de un juego.

Aplicación del equilibrio de Nash en el problema de matrimonios estables

Investigando un poco acerca del algoritmo de matrimonios estables y el equilibrio de Nash, podemos decir que son problemas muy similares, donde se tiene una elección de opciones y una mejor a escoger. Podemos decir que, el equilibrio de Nash permitiría tener una mejor relación de parejas en los matrimonios. ¿En qué sentido va esto? Lo explico a continuación.

El algoritmo de matrimonios estables permite unir a un hombre con una mujer de forma que sea recíproco y donde ninguna de las personas involucradas en la pareja, prefiera a alguien más por encima de su misma pareja. Sin embargo, esta decisión no se puede tomar ha cierto punto, pues N hombres tiene una lista ordenada de las mujeres que prefieren, y viceversa; las N mujeres tiene una lista de los hombres que tiene. Aquí el detalle es el siguiente. Los matrimonios estables, en ocasiones no salen de la manera óptima para cierta persona, porque te pueden relacionar con el peor de tu lista, aunque termine siendo estable porque, tanto para uno, como para otro, no tienen una mejor opción que esa, se toma el matrimonio.

Con ayuda del equilibrio de Nash, podemos plantear una estrategia que permita que las parejas puedan darse de una manera más beneficiaría para ambos lados. Una idea que tomamos sería de elegir una estrategia donde puedas acomodar el orden de la lista, por ejemplo, en los hombres, si analizan la lista de los otros hombres, esto pueden tomar una estrategia donde el favorecido seas tú. Tomamos esto en base al siguiente ejemplo

		PRISIONERO 2	
		Confesar	Mentir
PRISIONERO 1	Confesar	<u>-8, -8</u>	0, -10
	Mentir	-10, 0	<u>-1, -1</u>

Existe un juego que aplica el equilibrio de Nash, nombrado “El dilema del prisionero”, donde cada uno de los prisioneros debe analizar la jugada de la otra persona, esta nos muestra una tabla donde cada una de las acciones tomadas, podrán perjudicarte a ti o favorecerte. En la tabla, el equilibrio se encuentra subrayado de rojo, pues permite a ambos prisioneros tener un equilibrio. Este ejemplo nos ayudó para analizar lo siguiente. Si un hombre, al analizar las listas de los demás hombres, puede tomar una estrategia que le permita favorecerse. Esto es, no es necesario tener que dar una lista en el orden de como las prefieres, sino que incluso puedes mentir con el fin de obtener un emparejamiento que te convenga a ti.

Si tomamos el ejemplo antes mencionado de Luis, Jorge y Mario. Mario obtiene su matrimonio con Clara, que en cierto punto es estable, pero es su última opción. ¿Qué pasaría si Mario miente dando la lista y coloca a Clara al inicio de su lista? Esto afectaría el matrimonio, porque al ser la primera en su lista, esta no tendría mucha estabilidad, pues al tener Clara más opciones no aceptaría. Ese es solo un ejemplo de cómo se podría hacer el uso del equilibrio de Nash.

Todo esto, es solo una muestra de lo que se puede hacer. Jugar con la estrategia de los demás. Así como dice la definición del equilibrio de Nash: “Esta es una estrategia que no asegura

que saldrás vencedor u obtendrás el mejor resultado en el 100 % de los casos. Pero, sí se encarga de maximizar el beneficio individual lo mejor posible”. La implementación del equilibrio de Nash nos permite crear un beneficio mayor en las parejas. No importa que ya haya un matrimonio estable, porque al fin de cuenta habrá parejas que no estén con la persona que más deseaban de la lista, pero al no tener otra opción, existe reciprocidad. Sin embargo, tanto hombres como mujeres pueden jugar con la estrategia, mintiendo (o no) para tener un beneficio óptimo, analizando la jugada de los demás (hablando de las listas) y favoreciéndote.

Está claro el caso de que debe haber un equilibrio, y es importante tomar eso en cuenta. Los mismos hombres, pueden tomar una estrategia que no solo te beneficie a ti, si no a los demás incluso. Y no solo ellos, incluso las mujeres.

Además, el algoritmo de matrimonios estables siempre tiene solución, mas no siempre es estable. Con ayuda del equilibrio de Nash, esto se puede corregir. Al tener una solución con un beneficio alto para cada individuo, permitirá que la estabilidad se de en todos los casos (si no es que en la mayoría de ellos).

En un ejemplo, leímos un apartado que decía “Para mejorar el emparejamiento, las mujeres podrían engañar en su lista de preferencias; siempre y cuando conozcan la lista de preferencias de todos los demás”. En efecto, es lo que hemos estado mencionando en esta explicación. Nosotros tomamos como ejemplo que los hombres mientan, pero como ya vimos ahí, también las mujeres pueden hacerlo, y efectivamente, el emparejamiento tiende a mejorar

CONCLUSIÓN DEL EQUIPO

Durante este proyecto, realizamos una investigación exhaustiva acerca del algoritmo de matrimonios estables y el equilibrio de Nash. Esto nos permitió conocer más a fondo dichos problemas y como obtener una solución a ello. Sin duda, podemos decir que el problema de los algoritmos estables, con ayuda del algoritmo de Nash, nos permite tener una solución que beneficia a cada uno de los individuos a emparejar. Este nos permitió tener una perspectiva de cómo obtener una solución óptima. Sin duda este problema de Nash puede ser de mucha utilidad en problemas que permitan tener un beneficio enfocado en estrategias. Coincidimos en que el ejercicio fue algo bastante interesante y puede ser aplicado incluso en la actualidad.

CONCLUSIONES PERSONALES

César Eduardo Elías del Hoyo

Concluyo mencionando que la investigación fue un poco larga pero muy útil. Logré sacar información de varios sitios web que me permitieron tener un criterio sobre cómo implementar el equilibrio de Nash en el problema. A pesar de no haber una conexión directa entre ambos problemas, tienen similitudes que nos permitieron encontrar una solución. Considero que el proyecto me sirvió para tener nuevos conocimientos en el ámbito y me gustaría investigar más al respecto en un futuro.

Ximena Rivera Delgadillo

A partir de la investigación realizada he logrado amplificar mi perspectiva respecto al equilibrio de Nash y su implantación en el problema de matrimonios estables. Donde aun sin haber una relación directa entre ambas logramos identificar los puntos en común y de esta forma darle una solución a la investigación.

José Luis Sandoval Pérez

El problema de matrimonios estables tiene infinitas aplicaciones para problemas de selección, los equilibrios de Nash me parecieron muy interesante, la forma en que se produce

un equilibrio es bastante peculiar. Sin duda una investigación necesaria para el fortalecimiento de lo aprendido en clase.

REFERENCIAS

- Algoritmo de Irving*. (s. f.). <http://matematicaseducativas.blogspot.com/2017/10/algoritmo-de-irving.html>
- Osipenko, A. (2022, 18 enero). *Gale–Shapley algorithm simply explained - Towards Data Science*. Medium. <https://towardsdatascience.com/gale-shapley-algorithm-simply-explained-caa344e643c2>
- KEI Group. (2022, 7 diciembre). *Una solución al problema del matrimonio estable*. <http://keigroup.blogspot.com/2013/11/una-solucion-al-problema-del-matrimonio.html>
- Problema de compañeros de piso estables*. (s. f.). hmn.wiki. https://hmn.wiki/es/Stable_roommates_problem
- Roldán, P. N. (2022, 24 noviembre). *Equilibrio de Nash*. Economipedia. <https://economipedia.com/definiciones/equilibrio-de-nash.html>
- Gallego, L. (2017, 2 noviembre). *Equilibrio de Nash - Policonomics*. Policonomics - Economics made simple. <https://policonomics.com/es/equilibrio-nash/>
- S., J. (2022, 13 septiembre). *Equilibrio de Nash: ¿Qué es y en qué circunstancias se produce?* Economía3. <https://economia3.com/equilibrio-nash-definicion/>