

# Algebra Lineal

Universidad Autónoma

De Aguascalientes

Depto. de Matemáticas y Física

Ejemplos de espacios vectoriales  $\mathbb{M}_{n \times n}$ .



$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{matrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$v = a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + \dots + a_n \vec{v_n}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & 2 & -1 \\ 1+x_4 & -3 & 1 \\ 4-2x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{3x_4}{11}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_4 & -1 \\ 2 & 1+x_4 & 1 \\ 1 & 4-2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9x_4 - 11}{-11} = -1 + \frac{9x_4}{11}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10x_4 - 22}{-11} = 2 - \frac{10x_4}{11}$$

$$J^k = \begin{bmatrix} J^k_{m_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J^k_{m_2}(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J^k_{m_{s-1}}(\lambda_{s-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J^k_{m_s}(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

Si  $A \in M_{2 \times 2} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A$

Si  $A \in M_3 \rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 - \text{tr}(A)\lambda^2 + (P_{11} + P_{22} + P_{33})\lambda - \det A$

Comprobamos la primera propiedad:  $T(u+v) = Tu + Tv$

$T(f+g) = T f + T g$

$\int_0^1 (f(x) + g(x))g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 g(x)g(x)dx$

$\int_0^1 (f(x)g(x) + f(x)g(x))dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)g(x)dx$

$\int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)g(x)dx$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$p_A(\lambda) = \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$= \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right)$

$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - [a_{12}a_{21}]$

$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$

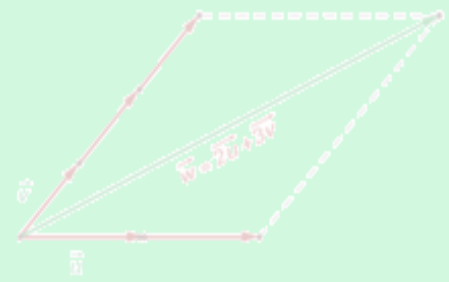
$= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} +$$

$$v = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

## 2.1. Espacios vectoriales.



$$V = \{[u_x, u_y] | u_x \geq 0, u_y \geq 0\}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & -3 & 1 \\ 1+x_4 & 1 & 1 \\ 4-2x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{3x_4}{11}$$

► Si  $A \in M_{2 \times 2} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_4 & -1 \\ 2 & 1+x_4 & 1 \\ 1 & 4-2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{9x_4}{11}$$

► Si  $A \in M_{3 \times 3} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 - \text{tr}(A)\lambda^2 + (P_{11} + P_{22} + P_{33})\lambda - \det A$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10x_4 - 22}{-11} = 2 - \frac{10x_4}{11}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= [(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)] - [a_{12}a_{21}] \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

$$J^k = \begin{bmatrix} J_{m_1}^k(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}^k(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{m_{s-1}}^k(\lambda_{s-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J_{m_s}^k(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

Comprobamos la primera propiedad:  $T(u+v) = Tu + Tv$   
 $T(f+g) = Tf + Tg$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f_1(x) + f_2(x))g(x) dx &= \int_0^1 f_1(x)g(x) dx + \int_0^1 f_2(x)g(x) dx \\ \int_0^1 (f_1(x)g(x) + f_2(x)g(x)) dx &= \int_0^1 f_1(x)g(x) dx + \int_0^1 f_2(x)g(x) dx \\ \int_0^1 f_1(x)g(x) dx + \int_0^1 f_2(x)g(x) dx &= \int_0^1 f_1(x)g(x) dx + \int_0^1 f_2(x)g(x) dx \end{aligned}$$









## 2.1. Espacios vectoriales.

Para este ejercicio, la cuestión es, ¿Es espacio vectorial?

Para responder, primero debemos de fijarnos en responder las siguientes cuestiones:

¿En donde están definidos los elementos del conjunto? ¿Qué características tienen los elementos del conjunto?



## 2.1. Espacios vectoriales.

Para este ejercicio, la cuestión es, ¿Es espacio vectorial?

Para responder, primero debemos de fijarnos en responder las siguientes cuestiones:

¿En donde están definidos los elementos del conjunto? ¿Qué características tienen los elementos del conjunto?

1. Los elementos del conjunto  $V$  son vectores definidos en  $\mathbb{R}^2$ .



## 2.1. Espacios vectoriales.

Para este ejercicio, la cuestión es, ¿Es espacio vectorial?

Para responder, primero debemos de fijarnos en responder las siguientes cuestiones:

¿En donde están definidos los elementos del conjunto? ¿Qué características tienen los elementos del conjunto?

1. Los elementos del conjunto  $V$  son vectores definidos en  $\mathbb{R}^2$ . ¡¡¡podemos hacer gráficos!!!





## 2.1. Espacios vectoriales.

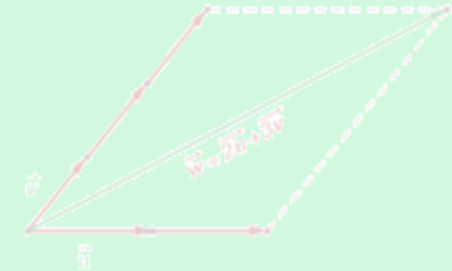
Para este ejercicio, la cuestión es, ¿Es espacio vectorial?

Para responder, primero debemos de fijarnos en responder las siguientes cuestiones:

¿En donde están definidos los elementos del conjunto? ¿Qué características tienen los elementos del conjunto?

1. Los elementos del conjunto  $V$  son vectores definidos en  $\mathbb{R}^2$ . ¡¡¡podemos hacer gráficos!!!

2. Las entradas de cada vector son mayores o iguales a cero.



$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} =$$

$$v = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

## 2.1. Espacios vectoriales.



$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & -3 & 1 \\ 1+x_4 & -1 & 1 \\ 4-2x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{9x_4}{11}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_4 & -1 \\ 2 & 1+x_4 & 1 \\ 1 & 4-2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{9x_4}{11}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10x_4 - 22}{-11} = 2 - \frac{10x_4}{11}$$

$$J^k = \begin{bmatrix} J_{m_1}^k(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}^k(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{m_{s-1}}^k(\lambda_{s-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J_{m_s}^k(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

Pensando en la primera observación, todos los vectores del conjunto  $V$ , se “localizan” en el primer cuadrante.

► Si  $A \in M_{2 \times 2} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \text{tr} A \lambda + \det A$

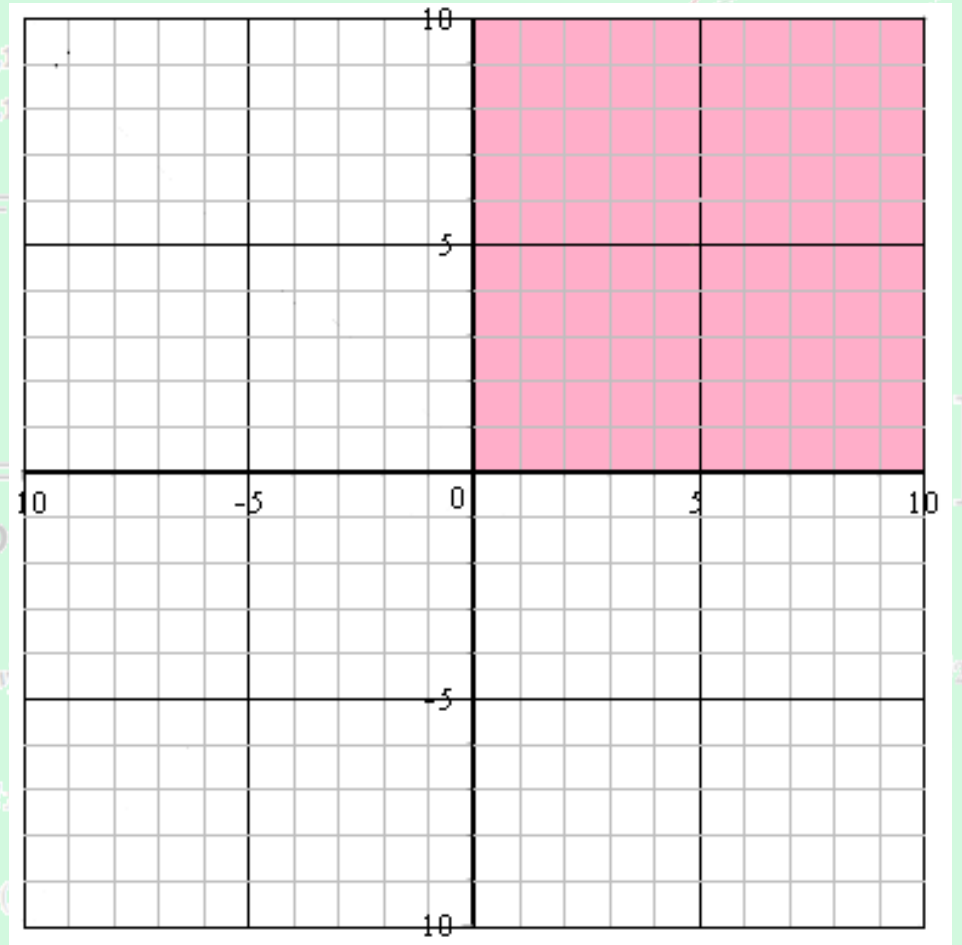
► Si  $A \in M_{3 \times 3} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 + (P_{11} + P_{22} + P_{33})\lambda^2 + \dots + \det A$

Comprobamos la primera propiedad:  $T(u+v) = T(u) + T(v)$

$$\int_0^1 (f_1(x) + f_2(x))g(x)dx = \int_0^1 f_1(x)g(x)dx + \int_0^1 f_2(x)g(x)dx$$

$$\int_0^1 f_1(x)g(x)dx + \int_0^1 f_2(x)g(x)dx = \int_0^1 (f_1(x) + f_2(x))g(x)dx$$

$$\int_0^1 f_1(x)g(x)dx + \int_0^1 f_2(x)g(x)dx = \int_0^1 f_1(x)g(x)dx + \int_0^1 f_2(x)g(x)dx$$



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

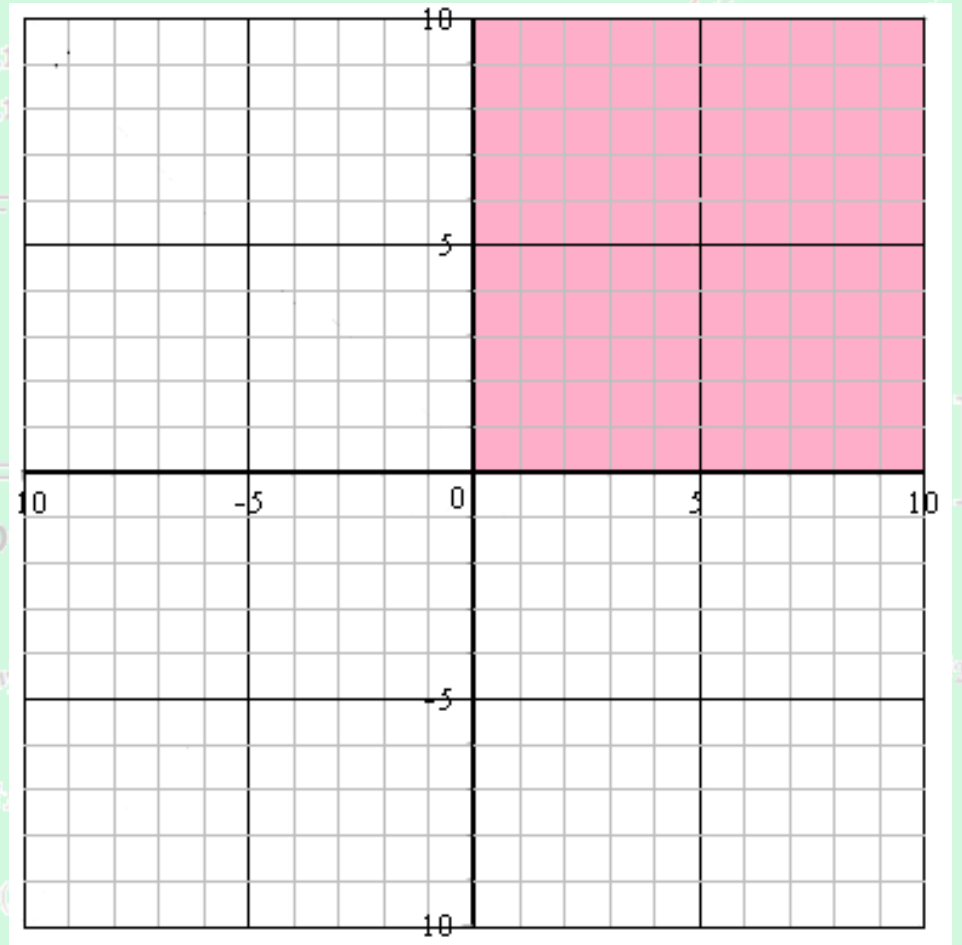
$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$v = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

# 2.1. Espacios vectoriales.



Así por ejemplo, si consideramos el vector  $v = [10,10]$   
 Claramente el vector está en el conjunto  $V$



$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & -3 & 1 \\ 1+x_4 & -3 & 1 \\ 4-2x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_4 & -1 \\ 2 & 1+x_4 & 1 \\ 1 & 4-2x_4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{9x_4}{11}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_4 & -1 \\ 2 & 1+x_4 & 1 \\ 1 & 4-2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{9x_4}{11}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10x_4 - 22}{-11} = 2 - \frac{10x_4}{11}$$

$$J^k = \begin{bmatrix} J^k_{m_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J^k_{m_2}(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J^k_{m_{s-1}}(\lambda_{s-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J^k_{m_s}(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

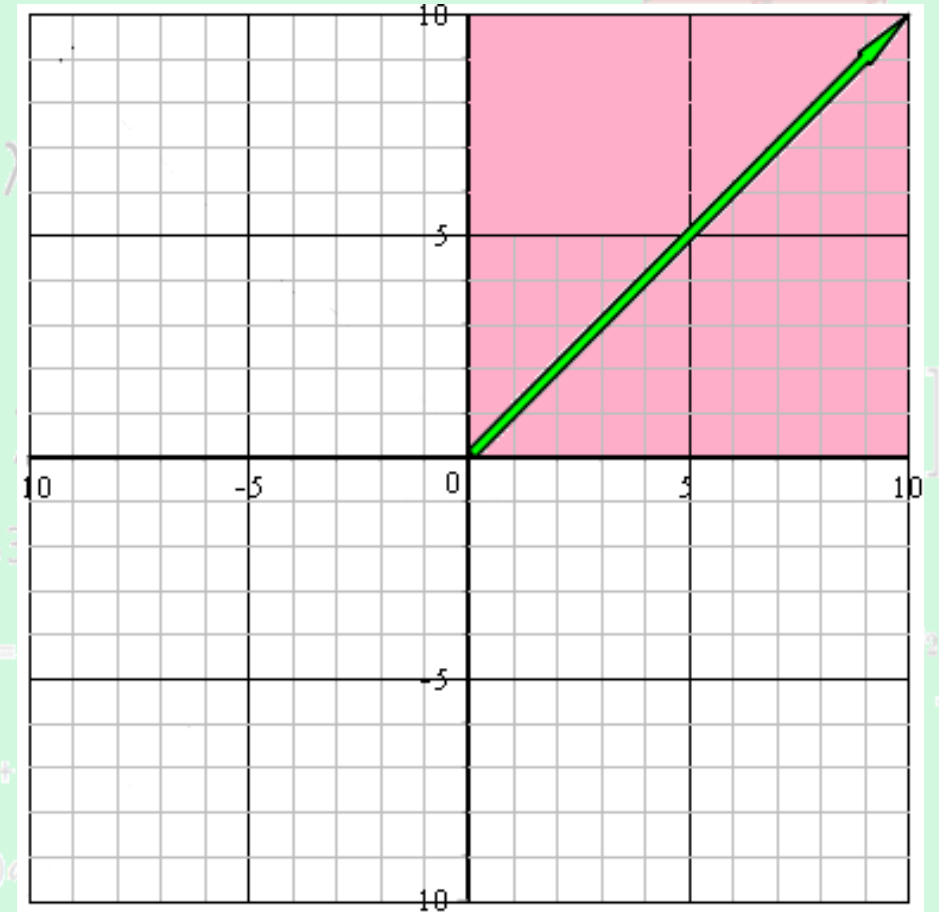
► Si  $A \in M_{2 \times 2} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \det A$   
 ► Si  $A \in M_{3 \times 3} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + (P_{11} + P_{22} + P_{33})\lambda + \det A$   
 Comprobamos la primera propiedad:  $T(u+v) = T(u) + T(v)$   
 $T(f+g) = T f + T g$   
 $\int_0^1 (f(x) + g(x))g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 g(x)g(x) dx$   
 $\int_0^1 (f(x)g(x) + f(x)g(x)) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx$   
 $\int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx$

## 2.1. Espacios vectoriales.

Así por ejemplo, si consideramos el vector

$$v = [10, 10]$$

Claramente el vector está en el conjunto  $V$ , como lo podemos ver en la imagen.



$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} =$$

$$v = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

# 2.1. Espacios vectoriales.



Sin embargo al considerar el escalar  $\alpha = -1$ , se tiene que

$$\alpha v = (-1)[10, 10]$$

Si  $A \in M_{2 \times 2} \rightarrow p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & -3 & 1 \\ 1+x_4 & -3 & 1 \\ 4-2x_4 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{9x_4}{11}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_4 & -1 \\ 2 & 1+x_4 & 1 \\ 1 & 4-2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{9x_4}{11}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10x_4 - 22}{-11} = 2 - \frac{10x_4}{11}$$

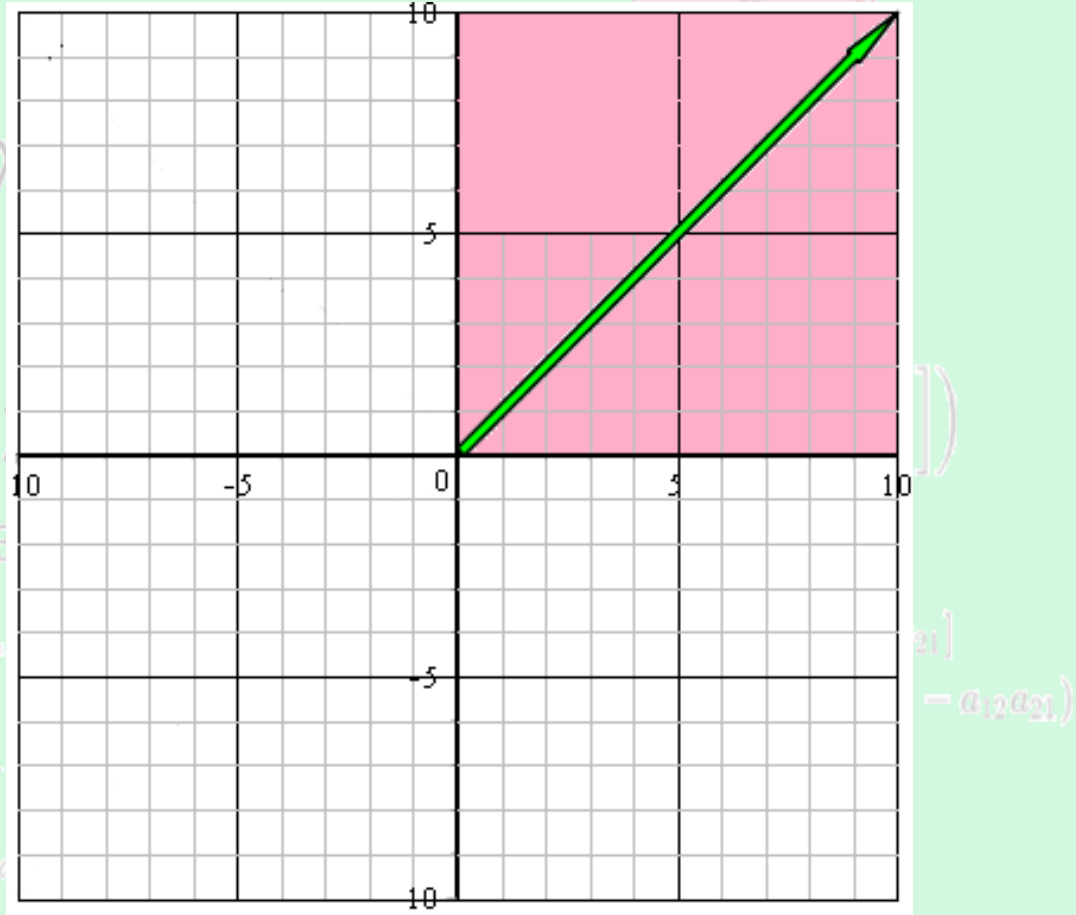
$$J^k = \begin{bmatrix} J_{m_1}^k(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}^k(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{m_{s-1}}^k(\lambda_{s-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J_{m_s}^k(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

Comprobamos la primera propiedad:  $T(u+v) = T(u) + T(v)$

$$T(f+g) = T f + T g$$

$$\int_0^1 (f(x) + g(x))g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 g(x)g(x) dx$$

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx$$





## 2.1. Espacios vectoriales.

Sin embargo al considerar el escalar

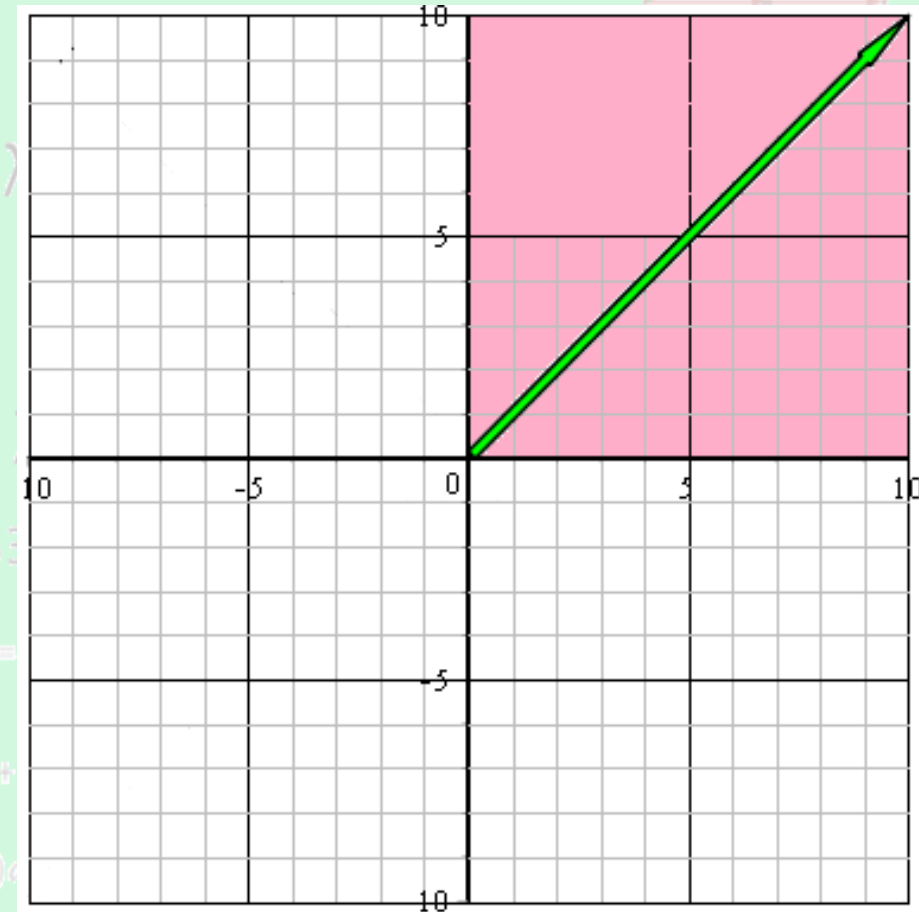
$\alpha = -1$ , se tiene que

$$\alpha v = (-1)[10, 10]$$

Así el vector

$$\alpha v = [-10, -10]$$

No se encuentra en el conjunto  $V$



## 2.1. Espacios vectoriales.

Sin embargo al considerar el escalar

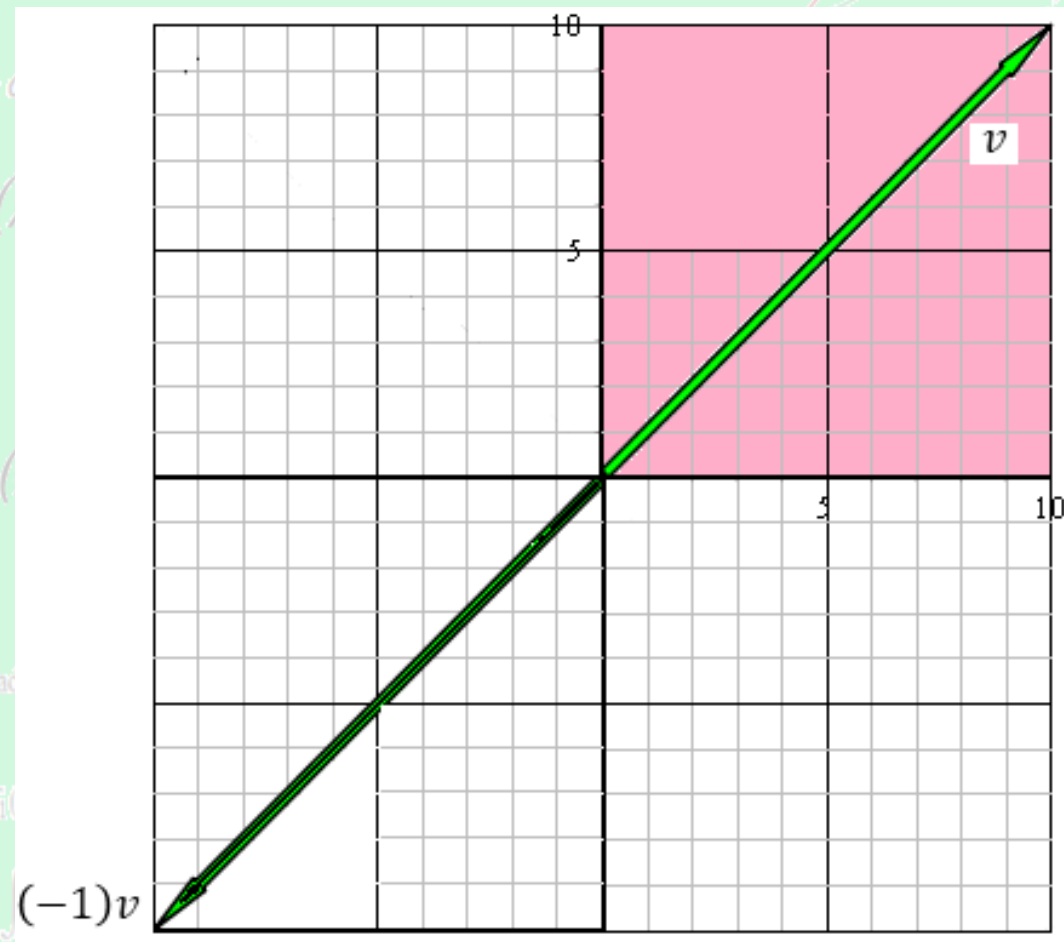
$\alpha = -1$ , se tiene que

$$\alpha v = (-1)[10, 10]$$

Así el vector

$$\alpha v = [-10, -10]$$

No se encuentra en el conjunto  $V$ , como lo podemos ver en la siguiente imagen.



## 2.1. Espacios vectoriales.

Sin embargo al considerar el escalar

$\alpha = -1$ , se tiene que

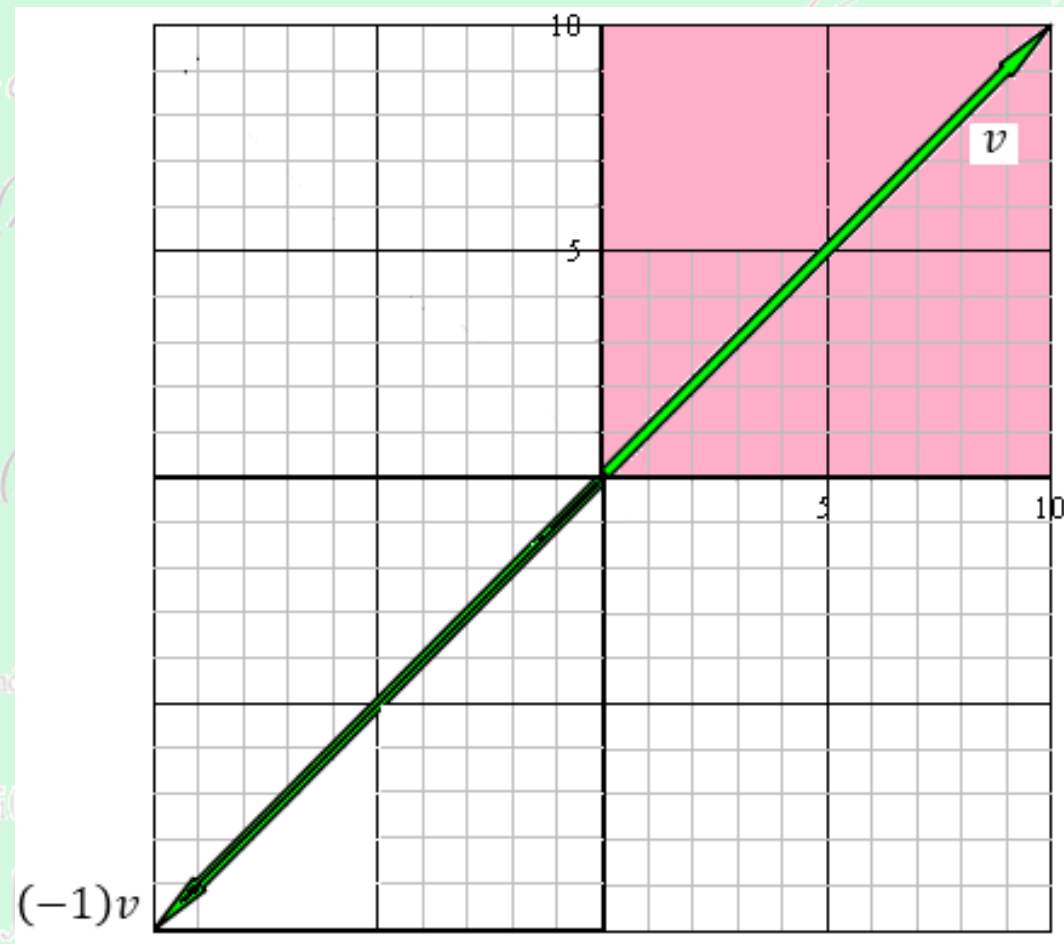
$$\alpha v = (-1)[10, 10]$$

Así el vector

$$\alpha v = [-10, -10]$$

No se encuentra en el conjunto  $V$ , como lo podemos ver en la siguiente imagen.

Violando la cerradura del producto de un escalar por un vector.



## 2.1. Espacios vectoriales.

Sin embargo al considerar el escalar

$\alpha = -1$ , se tiene que

$$\alpha v = (-1)[10, 10]$$

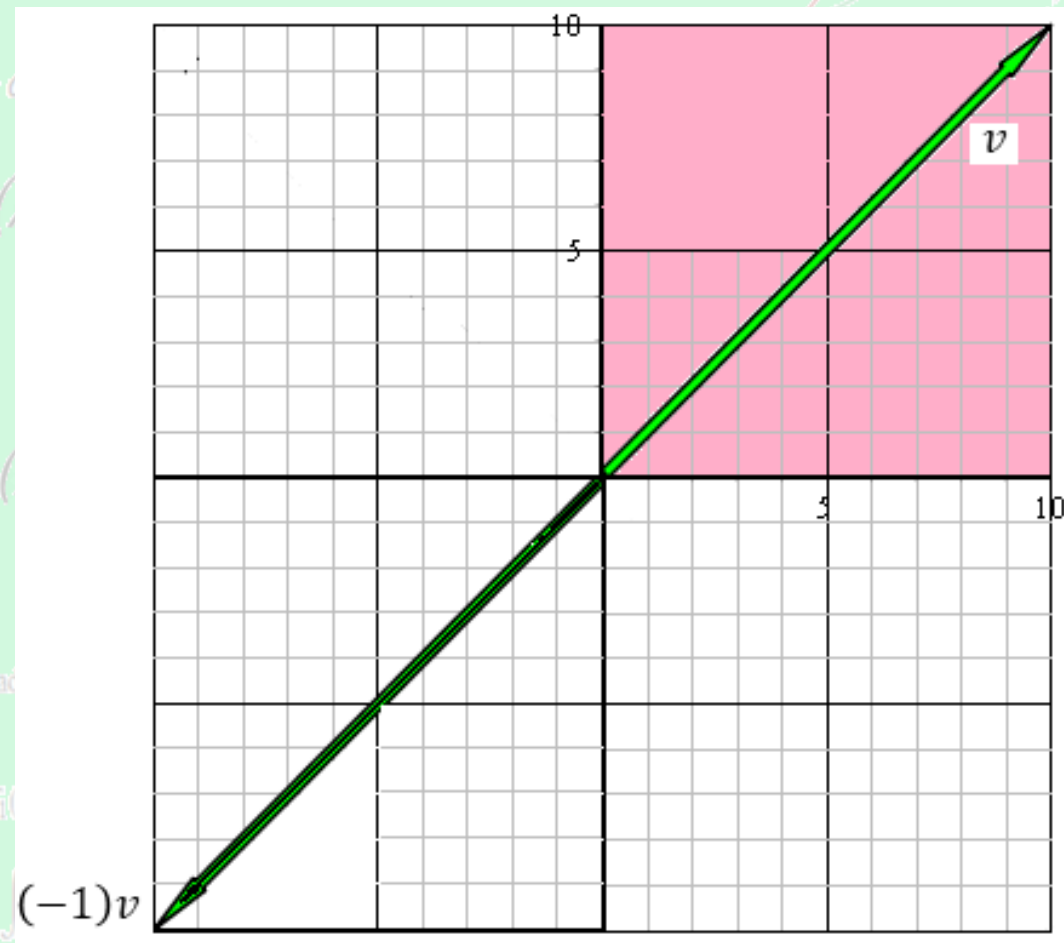
Así el vector

$$\alpha v = [-10, -10]$$

No se encuentra en el conjunto  $V$ , como lo podemos ver en la siguiente imagen.

Violando la cerradura del producto de un escalar por un vector.

Por esta razón, el conjunto  $V$ , no es espacio vectorial.



## 2.1. Espacios vectoriales.

### Referencias:

1. Álgebra Lineal. Stanley I. Grossman, sexta edición, Mc Graw Hill, México.
2. Álgebra Lineal con Aplicaciones y Matlab. Bernard Kolman, Octava Edición, Prentice Hall.
3. Introducción al Álgebra lineal. Howard Antón, Tercera Edición, Noriega Editores, México.
4. Álgebra Lineal. Claudio Pita Ruiz, Mc Graw Hill, México.
5. Álgebra Lineal con Aplicaciones. Nakos George, Joyner David, Internacional Thomson Editores.

