

# Algebra Lineal

Universidad Autónoma

De Aguascalientes

Depto. de Matemáticas y Física

Ejemplos de espacios vectoriales  $\mathbb{M}_{n \times n}$ .



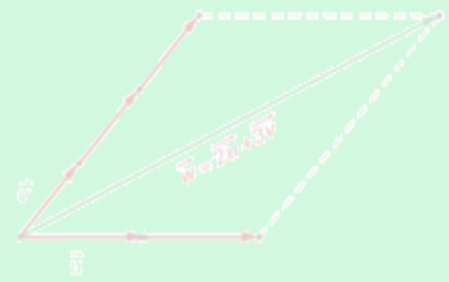




$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$v = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$



## 2.1. Espacios vectoriales.

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & 3 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Para este ejercicio, la cuestión es, ¿Es espacio vectorial?

Para responder, primero debemos de fijarnos en responder las siguientes cuestiones:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 4-2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{9x_4}{11}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10x_4 - 22}{-11} = 2 - \frac{10x_4}{11}$$

$$J^k = \begin{bmatrix} J_{m_1}^k(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}^k(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{m_{s-1}}^k(\lambda_{s-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J_{m_s}^k(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

► Si  $A \in M_{3 \times 3} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 - \text{tr}(A)\lambda^2 + (P_{11} + P_{22} + P_{33})\lambda - \det A$

Comprobamos la primera propiedad:  $T(u+v) = Tu + Tv$

$$T(f+g) = Tf + Tg$$

$$\int_0^1 (f(x) + g(x))g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 g(x)g(x) dx$$

$$\int_0^1 (f(x)g(x) + f(x)g(x)) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$= [(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)] - [a_{12}a_{21}]$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$











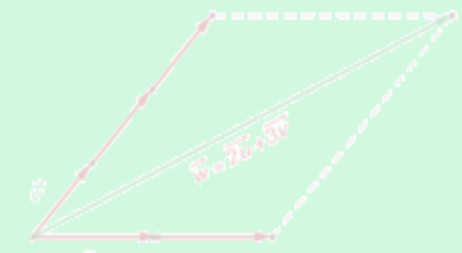


$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \dots &\dots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}$$

# 2.1. Espacios vectoriales.

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} =$$

$$v = a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + \dots + a_n \vec{v_n}$$



La segunda característica es precisamente la que utilizaremos para probar que el conjunto es (o no) un espacio vectorial.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & 2 & 1 \\ 1+x_4 & -3 & 1 \\ 4-2x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{3x_4}{11}$$

► Si  $A \in M_{2 \times 2} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_4 & -1 \\ 2 & 1+x_4 & 1 \\ 1 & 4-2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{9x_4}{11}$$

► Si  $A \in M_{3 \times 3} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 - \text{tr}(A)\lambda^2 + (P_{11} + P_{22} + P_{33})\lambda - \det A$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10x_4 - 22}{-11} = 2 - \frac{10x_4}{11}$$

$$\begin{aligned}
 p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
 &= \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right) \\
 &= [(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)] - [a_{12}a_{21}] \\
 &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\
 &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)
 \end{aligned}$$

$$J^k = \begin{bmatrix} J^k_{m_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J^k_{m_2}(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J^k_{m_{s-1}}(\lambda_{s-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J^k_{m_s}(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

Comprobamos la primera propiedad:  $T(u+v) = Tu + Tv$

$$\begin{aligned}
 T(f+g) &= T f + T g \\
 \int_0^1 (f(x) + g(x))g(x) dx &= \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 g(x)g(x) dx \\
 \int_0^1 (f(x)g(x) + f(x)g(x)) dx &= \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx \\
 \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx &= \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx
 \end{aligned}$$





## 2.1. Espacios vectoriales.

La segunda característica es precisamente la que utilizaremos para probar que el conjunto es (o no) un espacio vectorial.

Una propiedad importante que se debe cumplir es la del elemento neutro.

¿Qué dice esa propiedad?

Que para cualquier matriz  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 3 \end{bmatrix} \in V$  debe existir la matriz  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V$  tal que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 3 \end{bmatrix}$$

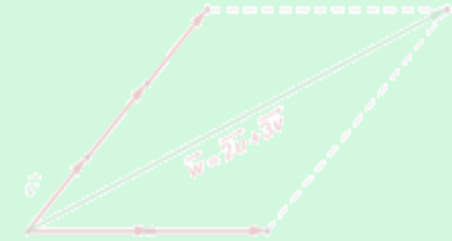
Comprobamos la primera propiedad:  $T(u+v) = Tu + Tv$

$$T(f+g) = Tf + Tg$$

$$\int_0^1 (f(x) + g(x))g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 g(x)g(x) dx$$

$$\int_0^1 (f(x)g(x) + f(x)g(x)) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx$$



## 2.1. Espacios vectoriales.

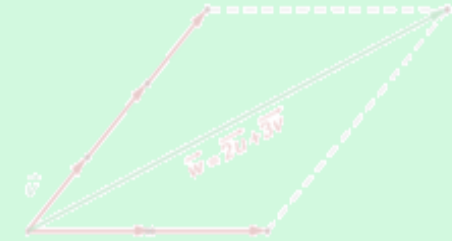
La segunda característica es precisamente la que utilizaremos para probar que el conjunto es (o no) un espacio vectorial.

Una propiedad importante que se debe cumplir es la del elemento neutro.

¿Qué dice esa propiedad?

Que para cualquier matriz  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 3 \end{bmatrix} \in V$  debe existir la matriz  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V$  tal que

Pero esta propiedad no se cumple, pues de la observación 2, el elemento  $a_{22}$  de cualquier matriz en  $V$  es igual a tres y en la matriz nula dicha entrada **¡¡¡es cero!!!**





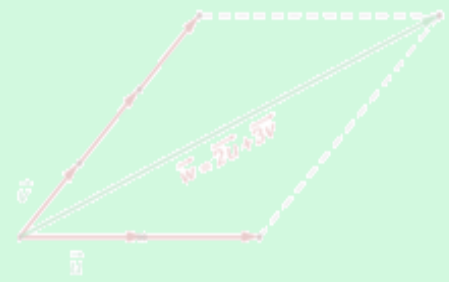
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{1,2}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} =$$

$$v = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

# 2.1. Espacios vectoriales.



Esto implica que  $V$  no es un espacio vectorial.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & -3 & 1 \\ 1+x_4 & -3 & 1 \\ 4-2x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{3x_4}{11}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_4 & -1 \\ 2 & 1+x_4 & 1 \\ 1 & 4-2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{9x_4}{11}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10x_4 - 22}{-11} = 2 - \frac{10x_4}{11}$$

► Si  $A \in M_{2 \times 2} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A$

► Si  $A \in M_{3 \times 3} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 - \text{tr}(A)\lambda^2 + (P_{11} + P_{22} + P_{33})\lambda - \det A$

Comprobamos la primera propiedad:  $T(u+v) = Tu + Tv$

$$T(f+g) = T f + T g$$

$$\int_0^1 (f(x) + g(x))g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 g(x)g(x) dx$$

$$\int_0^1 (f(x)g(x) + f(x)g(x)) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= [(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)] - [a_{12}a_{21}] \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

$$J^k = \begin{bmatrix} J_{m_1}^k(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}^k(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{m_{s-1}}^k(\lambda_{s-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J_{m_s}^k(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

## 2.1. Espacios vectoriales.

### Referencias:

1. Álgebra Lineal. Stanley I. Grossman, sexta edición, Mc Graw Hill, México.
2. Álgebra Lineal con Aplicaciones y Matlab. Bernard Kolman, Octava Edición, Prentice Hall.
3. Introducción al Álgebra lineal. Howard Antón, Tercera Edición, Noriega Editores, México.
4. Álgebra Lineal. Claudio Pita Ruiz, Mc Graw Hill, México.
5. Álgebra Lineal con Aplicaciones. Nakos George, Joyner David, Internacional Thomson Editores.

