TAREA V

Ley De Enfriamiento De Newton

① La temperatura de una cerveza en el momento que se saca de la hielera es de 2°C. La temperatura del medio ambiente es de 25°C. Despues de 3 minutos la temperatura de la cerveza es de 12°C.

a) Obtenga la ecuación diferencial que modela el comportamiento de la temperatura de la cerveza.

b) Resuelva la ED obtenida en a) para determinar cuánto tiempo tomará para que la temperatura suba a 15°C

c) Determine si existe un tiempo en que la temperatura de la cerveza sea 46°C

a)

Modelo	Datos	Sustitución en modelo
$\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm)$, sujeto a $T(0) = T_0$	$Tm = 25°C$ $T_0 = 2°C$ $k = ?$ $T(3) = 12°C$	$\frac{dT}{dt} = -k(T-25)$, sujeto a $T(0) = 2°$ $T(3) = 12$

→ Resolviendo

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-25) \longrightarrow \frac{dT}{dt} = -kT + 25k \longrightarrow \frac{dT}{dt} + kT = 25k$$

① Sacar FI

$$\mu(t) = e^{\int p(t)} = e^{\int k\,dt} = e^{k\int dt} = e^{kt}$$

② Multiplicar FI por ED

$$e^{kt}\left(\frac{dT}{dt} + kT\right) = 25k\left(e^{kt}\right) \rightarrow \underbrace{e^{kt}\frac{dT}{dt} + e^{kt}kT}_{\text{derivada de un producto}} = 25ke^{kt}$$

$$\rightarrow \frac{d\left(e^{kt} \cdot T\right)}{dt} = 25ke^{kt}$$

③ Integramos

$$\int \frac{d(e^{kt}\cdot T)}{dt}\,dt = \int 25ke^{kt}\,dt$$

$u = kt$

$du = k\,dt$

$dt = \frac{du}{k}$

$\int ke^{u}\frac{du}{k}$

$$e^{kt}T = 25\int ke^{kt}\,dt$$

$$e^{kt}\cdot T = 25e^{kt} + C$$

$$T(t) = \frac{25e^{kt}}{e^{kt}} + \frac{C}{e^{kt}} = 25 + \frac{C}{e^{kt}} = \underline{25 + Ce^{-kt}}$$

Solución general ①

④ Se busca solución particular que cumpla $T(0) = 2$

$$2 = 25 + Ce^{-k(0)} = 25 + C \longrightarrow 2 - 25 = C \longrightarrow C = -23$$

⑤ Sustituir C en Sol. general

$$\underline{T(t) = 25 - 23e^{-kt}}$$

Solución del PVI ②

⑥ Se busca solución que cumpla $T(3) = 12$

$$T(3) = 25 - 23e^{-k(3)} = 12$$

$$= 25 - 23e^{-3k} = 12 - 25$$

$$= -23e^{-3k} = -13$$

$$= e^{-3k} = \frac{-13}{-23}$$

$$= e^{-3k} = 0.5652$$

$$= \ln e^{-3k} = \ln|0.5652|$$

$$= -3k = \ln|0.5652|$$

$$= k = \frac{\ln|0.5652|}{-3}$$

$$= \underline{k = 0.1917}$$

7. Sustituir K en 2

$$\underbrace{T(t) = 25 - 23e^{-0.1917t}}_{\text{Función temperatura de cerveza}}$$

b) tiempo para temperatura = 15°

→ Se busca t^* tal que $T(t^*) = 15°$

$$25 - 23e^{-0.1917t} = 15$$
$$-23e^{-0.1917t} = 15 - 25$$
$$-23e^{-0.1917t} = -10$$
$$e^{-0.1917t} = \frac{-10}{-23}$$
$$e^{-0.1917t} = 0.4347$$
$$\ln e^{-0.1917t} = \ln|0.43471|$$
$$-0.1917t = \ln|0.43471|$$
$$t = \frac{\ln|0.43471|}{-0.1917} = 4.3456 \text{ minutos después de sacarla}$$

c) tiempo para temperatura = 45°

→ Se busca t^* tal que $T(t^*) = 45°$

$$25 - 23e^{-0.1917t} = 45$$
$$-23e^{-0.1917t} = 45 - 25$$
$$-23e^{-0.1917t} = 20$$
$$e^{-0.1917t} = \frac{20}{-23}$$
$$e^{-0.1917t} = -0.8695$$
$$\ln e^{-0.1917t} = \ln|-0.86951|$$
$$-0.1917t = \ln|-0.86951|$$

$$t = \frac{\ln|0.86951|}{-0.1917}$$

$t = ?$ error

∴ No existe tiempo en que la cerveza alcance 46°C.

② Se coloca una barra de aluminio cuya temperatura inicial es de 250° C, en un medio ambiente con temperatura constante $T_m = 15°C$. Al registrar las temperaturas de la barra en diferentes tiempos, se obtuvieron los siguientes datos:

Tiempo en segundos	0	60	120	30
Temperatura	250	58.6	23.1	100
Temperatura según modelo				116.23414°

a) Obtenga la ecuación diferencial que modela el comportamiento de la temperatura de la barra de aluminio y obtener la solución general de dicha ED.

① Modelo $\frac{dT}{dt} = -k(T-T_m)$, sujeto a $T(0)=T_0$

② Datos $T_m = 15°$ $T(60) = 58.6°$
$T_0 = 250°$
$k = ?$

③ Sustituyendo en modelo ① $\frac{dT}{dt} = -k(T-15)$, sujeto a $T(0) = 250°$, $T(60) = 58.6°$

④ Resolver ED (método de lineales)

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-15)$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} = -kT + 15k$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} + kT = 15k$$

- Sacar FI

$$\mu(t) = e^{\int p(x)} = e^{\int k\,dt} = e^{k\int dt} = e^{kt}$$

- Multiplicar FI por ED

$$e^{kt}\left(\frac{dT}{dt} + kT\right) = (15k)e^{kt}$$

$$\underbrace{e^{kt}\frac{dT}{dt} + e^{kt}kT}_{\text{derivada de un producto}} = 15ke^{kt}$$

$$\frac{d(e^{kt}\cdot T)}{dt} = 15ke^{kt}$$

- Integrar

$$\int \frac{d(e^{kt}\cdot T)}{dt} = \int 15ke^{kt}\,dt$$

$u = kt$
$du = k\,dt$
$dt = \frac{du}{k}$

$$e^{kt}\cdot T = 15e^{kt} + C$$

$$T(t) = \frac{15e^{kt}}{e^{kt}} + \frac{C}{e^{kt}}$$

②

$$T(t) = 15 + Ce^{-kt}$$

Solución general de la ED

b) Utilice los datos de temperatura y determine la función de la temperatura de la barra

① Se busca solución particular que cumpla $T(0) = 250°$

$T(0) = 15 + Ce^{-k(0)} = 250$

$\rightarrow Ce^{-k(0)} = 250 - 15$

$\rightarrow \underline{C = 235}$

• Sustituimos en solución general

$T(t) = 15 + 235e^{-kt}$ ③

② Se busca solución particular que cumpla $T(60) = 58.6$

$T(60) = 15 + 235e^{-k(60)} = 58.6$

$\rightarrow 235e^{-60k} = 58.6 - 15$

$\rightarrow 235e^{-60k} = 43.6$

$\rightarrow e^{-60k} = \dfrac{43.6}{235}$

$\rightarrow e^{-60k} = 0.18553$

$\rightarrow \ln e^{-60k} = \ln|0.18553|$

$\rightarrow -60k = \ln|0.18553|$

$\rightarrow k = \dfrac{\ln|0.18553|}{-60}$

$\rightarrow \underline{k = 0.02807}$

③ Sustituir en ③

$\underline{T(t) = 15 + 235e^{-0.02807t}}$ Función temperatura de la barra

2

c) Determinar el tiempo en que la temperatura de la bola fue de $100°C$

1 Se busca t^* tal que $T(t^*) = 100°C$

$\rightarrow 15 + 235e^{-0.02807t} = 100$

$\rightarrow 235e^{-0.02807t} = 100 - 15$

$\rightarrow e^{-0.02807t} = \frac{85}{235}$

$\rightarrow \ln e^{-0.02807t} = \ln|0.361701$

$\rightarrow -0.02807t = \ln|0.361701$

$\rightarrow t = \frac{\ln|0.361701}{-0.02807}$

$\rightarrow t = 36.22$ segundos

d) Determine la temperatura de la bola a los 30 segundos

$$T(30) = 15 + 235e^{-0.02807(30)}$$
$$= 15 + 101.2391$$
$$= 116.23914°$$

③ El prok y Thalia estón en una fiesta. El mesero les ofrece las ultimas dos cervezas una al tiempo y una fría. Suponga que la tempratura de la cerveza al tiempo es de 20°, la del salon de fiesta es de 12°c y la fría de 4°c.

Se genera una polemica, porque el profe propone a Thalia la idea de mezclar ambas cervezas, con la finalidad de tomar dicha mezcla.

Demuestre que si deciden mezclarlas, no importa cuanto dure la discusión ambos tomaran la cerveza a 12°.c.

Obtenga una descripción geometrica

① Modelo

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm),$$

$$T(0) = To$$

Datos

$Tm = 12°$

$To = 20°$

$To = 4°$

② Sacamos formula y ecuación para ambas cerveza,

a) $To = 20°$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-12)$$

$$= -kT + 12k$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} + kT = 12k$$

• Sacamos FI

$$\mu(t) = e^{\int p(x)} = e^{\int k\,dt} = e^{kt}$$

• Multiplicamos FI por ED

$$\underbrace{e^{kt}\left(\frac{dT}{dt} + kT\right)}_{\text{derivada de un producto}} = (e^{kt})12k$$

derivada de un producto

$$\frac{d(e^{kt} \cdot T)}{dt}$$

• Integramos

integral completa

$$\int e^{du} = e^{du}$$

$$\int \frac{d(e^{kt} \cdot T)}{dt} = \int 12e^{kt}k$$

$$e^{kt} \cdot T = 12e^{kt} + C$$

$$T(t) = \frac{12\cancel{e^{kt}}}{\cancel{e^{kt}}} + \frac{C}{e^{kt}}$$

$$\underbrace{T(t) = 12 + Ce^{-kt}}_{\text{Solución general}}$$

c) Determinar el tiempo en ... la ...

• Se busca solución que satisfaga $T(0) = 20$

$20 = 12 + ce^{-kt}$

$20 - 12 = ce^{-k(0)}$

$\underline{8 = c}$

• Sustituir c en sol general

$\underline{T(t) = 12 + 8e^{-kt}}$ $\underline{\text{Sol del PVI}}$

b) $T_0 = 4°$

• Se busca solución que satisfaga $T(0) = 4$

$4 = 12 + ce^{-kt}$

$4 - 12 = ce^{-k(0)}$

$\underline{-8 = c}$

• Sustituir en sol general

$\underline{T(t) = 12 - 8e^{-kt}}$ $\underline{\text{Sol del PVI}}$

3) Sumamos ecuaciones, dividimos entre 2 e igualamos a 12°

$$\frac{(12 + \cancel{8e^{-kt}}) + (12 - \cancel{8e^{-kt}})}{2} = 12$$

$$\rightarrow \frac{24}{12} = 12 \rightarrow \underline{12 = 12}$$

∴ Al mezclar las cervezas ambas estarán a 12°

Scanned with CamScanner

a) tiempo para carne a 6°

④ Estudiantes de un grupo de ingeniería realizaron una reunión con carne asada y botanas, se sabe que la temperatura de congelación de la carne marinada es de entre -1°C y -2°C. A partir de las 7:00 am se extrae la carne del congelador, cuya temperatura fue de -10°C y se expone en la cocina con Tm = 18°C.
También se registró otra lectura de la carne a las 9:00 am, la cual fue de -3°C.

a) Determine el tiempo necesario para llevar carne a 6°C.
b) ¿Qué temperatura tendrá la carne a la 14:00?
c) Realice una tabla para organizar los datos de tiempo y temperatura desde las 7:00 am hasta las 14:00 pm.

a) Modelo

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm)$$
$$T(0) = T_0$$

Datos

$Tm = 18°C$
$T_0 = -10°$
$T(2) = -3°C$
$k = ?$

Sustitución

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 18),$$
$$T(2) = -3°$$
$$T(0) = -10°$$

① Sacamos fórmula de enfriamiento

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} = -k(T-18) \longrightarrow \frac{dT}{dt} = -kT + 18k$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} + kt = 18k$$

Sacamos FI

$$\mu(t) = e^{\int p(x)} = e^{\int k dt} = e^{kt}$$

Multiplicamos por ED

$$e^{kt}\left(\frac{dT}{dt} + kt\right) = 18ke^{-kt}$$

$$\frac{d(e^{kt} \cdot T)}{dt} = 18ke^{-kt}$$

Integramos

→ Integral completa $\int e^u = e^u$

$$\int \frac{d(e^{kt}T)}{dx} = \int 18ke^{kt}$$

$\rightarrow e^{kt}.T = 18e^{kt} + c$

$\rightarrow T(t) = \frac{18e^{kt}}{e^{kt}} + \frac{c}{e^{kt}}$

$\rightarrow T(t) = 18 + ce^{-kt}$ ②

Solución general

Se busca solución que cumpla $T(0) = -10$

$-10 = 18 + ce^{-kt}$

$-18 - 10 = ce^{-kt}$

$c = -28$

Sustituir en solución general

$T(t) = 18 - 28e^{-kt}$ ③

Se busca solución que cumpla $T(2) = -3$

$-3 = 18 - 28e^{-k(2)}$

$-3 - 18 = -28e^{-2k}$

$-21 = -28e^{-2k}$

$\frac{-21}{-28} = e^{-2k}$

$\ln\left|\frac{-21}{-28}\right| = \ln e^{-2k}$

$k = \frac{\ln\left|\frac{-21}{-28}\right|}{-2} = 0.14384$

Sustituimos k en 3

$T(t) = 18 - 28e^{-0.14384t}$

ecuación enfriamiento cerveza

a) tiempo para carne a 6°

t^* tal que $T(t^*) = 6°$

$\rightarrow 6 = 18 - 28e^{-0.14384t}$

$\rightarrow 6 - 18 = -28e^{-0.14384t}$

$\rightarrow \frac{-12}{-28} = e^{-0.14384t}$

$\rightarrow \ln|0.42857| = \ln e^{-0.14384t}$

$\rightarrow \frac{\ln|0.42857|}{-0.14384} = t$

$\rightarrow t = 5.90533$ hrs

b) temperatura a las 14:00 hrs

$T(7) = 18 - 28e^{-0.14384(7)}$

$= 18 - 10.22999$

$= 7.77000\,°C$

c)

tiempo	temperatura
7am, $T(0)$	$-10\,°C$
9am, $T(2)$	$-3\,°C$
11am, $T(4)$	$T(4) = 18 - 28e^{-0.14384(4)} = 2.24993\,°C$
13:00, $T(6)$	$T(6) = 18 - 28e^{-0.14384(6)} = 6.18742\,°C$
14:00, $T(7)$	$7.77000\,°C$

Interciamr

⑤ El profesor de ED del grupo de ingeniería se enteró de la reunión con carne asada, ¡pero al día siguiente! así que les recomienda realizar otro evento para mostrarles que mediante una descongelación lenta de la carne se logra que la cantidad de agua en los tejidos sea óptima y así mejorar su calidad.

La carne se encuentra en el congelador a temperatura $-10°c$.

El proceso es el siguiente:

A partir de las 7:00am del día anterior al evento se traslada a una cámara de refrigeración con temperatura de 2°c durante 24hrs, luego se cambia a un medio ambiente de 2°c durante 24 hrs. luego se cambia a un medio constante de $Tm = 18°c$.

Utilice el valor del coeficiente de transferencia de calor obtenido en el problema 4 para responder:

a) temperatura carne día del evento
b) tiempo necesario carne a 60
c) temperatura 14:00 día del evento

a)

① Sacamos formula para calcular temp

Modelo

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-Tm)$$

$T(0) = To$

Datos

$To = -10$
$Tm = 2$
$T(24) = ?$

Sustitución

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-2), \quad T(0) = -10$$

$$\frac{dT}{dt} = -kT + 2k \longrightarrow \frac{dT}{dt} + kT = 2k$$

$\longrightarrow$ Sacar FI

$$\mu(t) = e^{\int p(x)} = e^{\int k\,dt} = e^{kt}$$

b)

① Sacamos fórmula de enfriamiento con nuevos datos

Modelo

$\frac{dT}{dt} = -k(T-Tm)$

$T(0) = To$

Datos

$Tm = 18°C$

$To = 1.61987°$

Sustituir

$\frac{dT}{dt} = -k(T-18)$, $T(0) = 1.61987°$

$\rightarrow \frac{dT}{dt} = -kT + 18k \rightarrow \frac{dT}{dt} + kT = 18k$

$\rightarrow$ Sacar FI

$\mu(t) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int k\,dt} = e^{kt}$

$\rightarrow$ Multiplicar ED por FI

$e^{kt}\left(\frac{dT}{dt} + kT\right) = 18k(e^{kt})$

$\underbrace{e^{kt}\frac{dT}{dt} + kT}_{\text{derivada de un producto}} = 18ke^{kt}$

$\rightarrow$ Integramos

Integral completa

$\int e^{u} = e^{u} + c$

$\int \frac{d(e^{kt} \cdot T)}{dt} = \int 18ke^{kt}$

$e^{kt} \cdot T = 18e^{kt} + c$

$T(t) = \frac{18\cancel{e^{kt}}}{\cancel{e^{kt}}} + \frac{c}{e^{kt}} = 18 + ce^{-kt}$

Sol. general

$\rightarrow$ se busca solución que cumpla $T(0) = 1.61987°$

$1.61987 = 18 + ce^{-kt}$

$1.61987 - 18 = ce^{-k(0)}$

$-16.38013 = c$

$\rightarrow$ Sustituir c en sol general

$T(t) = 18 - 16.38013e^{-kt}$ ecuación enfriamiento

→ multiplicar ED por FI

$$e^{kt}\left(\frac{dT}{dt}+kT\right)=2k\left(e^{kt}\right)$$

$$\underbrace{e^{kt}\frac{dT}{dt}+kT}_{\text{derivada producto}}=2ke^{kt}$$

Integral completa $\int e^{u}du = e^{u}+c$

→ Integramos

$$\int\frac{(e^{kt}\cdot T)}{\cancel{dt}}=\int 2ke^{kt}\,dt$$

$$e^{kt}\cdot T = 2e^{-kt}+c$$

$$T(t)=\frac{2\cancel{e^{kt}}}{\cancel{e^{kt}}}+\frac{c}{e^{kt}}$$ Solución general

$$T(t)=2+ce^{-kt}$$

→ Se busca solución que satisfaga $T(0)=-10$

$$-10 = 2+ce^{-kt}$$

$$-12 = ce^{-k(t)}$$

$$c=-12$$

→ Sustituir c en Sol general

$$T(t)=2+12e^{-kt}$$

→ Se busca temperatura en $T(24)=?$

$$T(24)=2-12e^{-0.14384(24)}$$

$$=2-0.38012$$

$$=1.61987°$$

→ Se busca t* para cuando 6°

$T6 = 18-16.38013e^{-kt}$

$6-18 = -16.38013e^{-kt}$

$\frac{-12}{-16.38013} = e^{-kt}$

$\ln|0.73259| = \ln e^{-0.14384t}$

$\frac{-0.31116}{-0.14384} = t$

$t = 2.16325$ hrs

c) temperatura a las 14:00 hrs

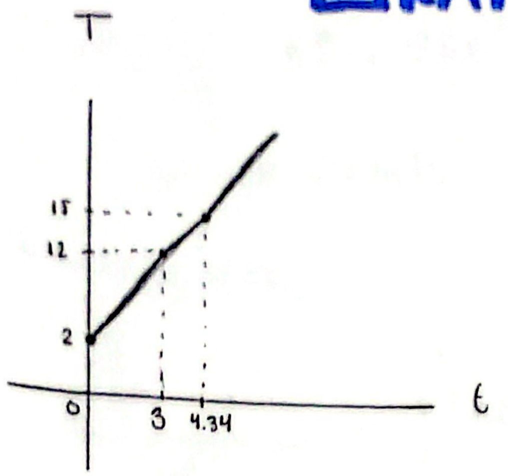
$T(7) = 18-16.38013e^{-0.14384(7)}$

$= 18 - 5.98459$

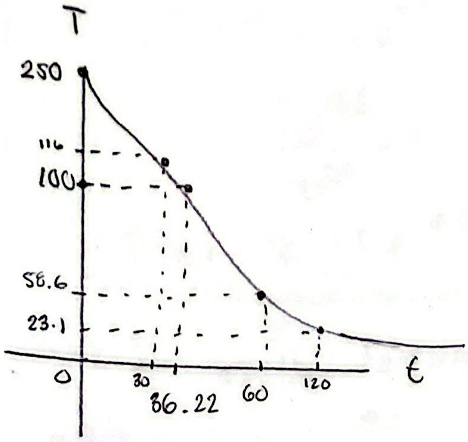
$= 12.01540°$ c

GRAFICAS

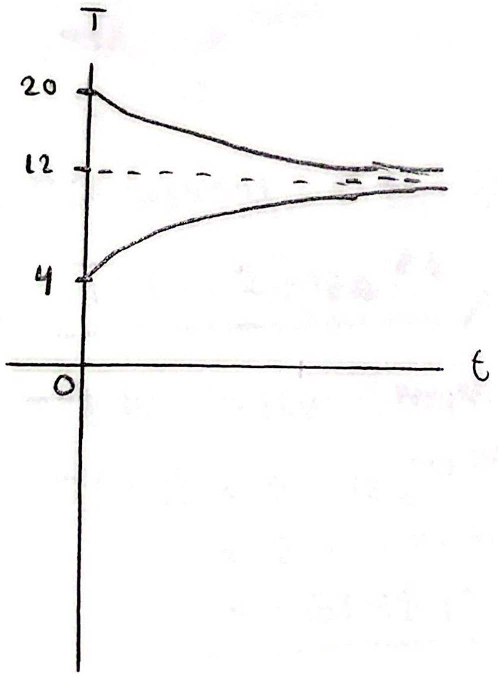
1



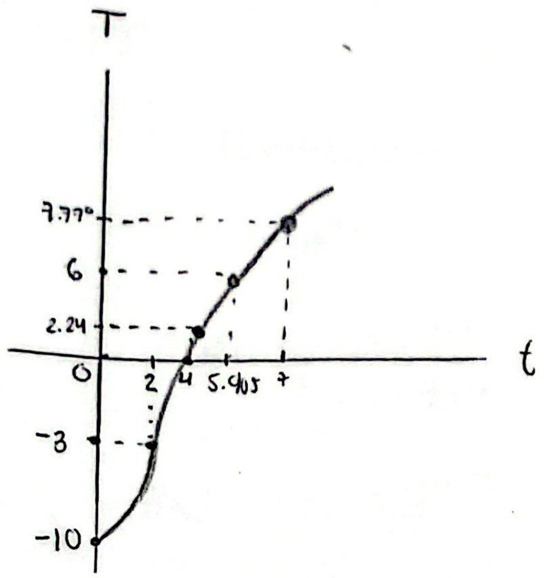
2



3



4



5