TAREA VII

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES
DE 2° ORDEN

① Muestre que las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ son soluciones LI de la ED lineal dada y además encuentre la solución general de dicha ecuación diferencial.

① $y_1 = \sin(3x)$, $y_2 = \cos(3x)$ y $y'' + 9y = 0$

→ Con $y_1 = \sin(3x)$

$$y_1 = \sin(3x) \longrightarrow y_1' = 3\cos(3x) \longrightarrow y_1'' = 3(-3\sin(3x))$$
$$= -9\sin(3x)$$

① Sustituimos en ED

$$-9\sin(3x) + 9(\sin(3x)) = 0$$
$$\underbrace{0 = 0}_{\text{Identidad}} \longrightarrow \therefore\ y_1(x) = \sin(3x) \text{ es solución de la ED}$$

→ Con $y_2 = \cos(3x)$

$$y_2 = \cos(3x) \longrightarrow y_2' = -3\sin(3x) \longrightarrow y_2'' = -3(3\cos(3x))$$
$$= -9\cos(3x)$$

① Sustituimos en ED

$$-9\cos(3x) + 9(\cos(3x)) = 0$$
$$\underbrace{0 = 0}_{\text{Identidad}} \longrightarrow \therefore\ y_2(x) = \cos(3x) \text{ es solución de la ED}$$

→ Vemos si son LI

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin(3x) & \cos(3x) \\ 3\cos(3x) & -3\sin(3x) \end{vmatrix} = -3\sin^2 - 3\cos^2(3x) \neq 0$$

$\therefore\ y_1(x) = \sin(3x)$ y $y_2(x) = \cos(3x)$ son soluciones LI

→ Solución general

$$y(x) = C_1\sin(3x) + C_2\cos(3x)$$

Scanned with CamScanner

② $y_1(x) = e^{-4x}$, $y_2(x) = xe^{-4x}$ y $y'' + 8y' + 16y = 0$

→ Con $y_1(x) = e^{-4x}$

$y_1(x) = e^{-4x} \longrightarrow y_1' = -4e^{-4x} \longrightarrow y_1'' = 16e^{-4x}$

① Sustituimos en ED

$16e^{-4x} + 8(-4e^{-4x}) + 16(e^{-4x}) = 0$

$16e^{-4x} - 32e^{-4x} + 16e^{-4x} = 0$

$\underbrace{0 = 0}$

Identidad ⟶ ∴ $y_1(x) = e^{-4x}$ es solución de la ED

→ Con $y_2(x) = xe^{-4x}$

$y_2(x) = xe^{-4x} \longrightarrow y_2' = (x)'e^{-4x} + (x)(e^{-4x})'$
$= e^{-4x} + -4xe^{-4x}$
$= e^{-4x} - 4xe^{-4x}$

$\longrightarrow y_2'' = -4e^{-4x} + (-4)(e^{-4x} - 4xe^{-4x})$
$= -4e^{-4x} - 4e^{-4x} + 16xe^{-4x}$
$= -8e^{-4x} + 16xe^{-4x}$

① Sustituimos en ED

$-8e^{-4x} + 16xe^{-4x} + 8(e^{-4x} - 4xe^{-4x}) + 16(xe^{-4x}) = 0$

$\cancel{-8e^{-4x}} + \cancel{16xe^{-4x}} + \cancel{8e^{-4x}} - 32xe^{-4x} + \cancel{16xe^{-4x}} = 0$

$\underbrace{0 = 0}$

Identidad ⟶ $y_2(x) = xe^{-4x}$ es solución de la ED

→ Vemos si son LI

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-4x} & xe^{-4x} \\ -4e^{-4x} & e^{-4x} - 4xe^{-4x} \end{vmatrix} = (e^{-8x} - 4xe^{-8x}) - (-4xe^{-8x}) = e^{-8x} \neq 0$$

∴ $y_1(x) = e^{-4x}$ y $y_2(x) = xe^{-4x}$ son soluciones LI

→ Solución general

$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$

Scanned with CamScanner

③ $Y_1(x) = e^{-3x}\cos(4x)$, $Y_2(x) = e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)$ y $y'' + 6y' + 25y = 0$

→ Con $Y_1(x) = e^{-3x}\cos(4x)$

$$Y_1(x) = e^{-3x}\cos(4x)$$

$$Y_1' = (e^{-3x})'(\cos(4x)) + (e^{-3x})((\cos(4x))'$$

$$= -3e^{-3x}\cos(4x) + e^{-3x}(-4\operatorname{sen}(4x))$$

$$= -3e^{-3x}\cos(4x) - 4e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)$$

$$Y_1'' = -3\left[-3e^{-3x}\cos(4x) - 4e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)\right] - 4(-3e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) + 4e^{-3x}\cos(4x))$$

$$= 9e^{-3x}\cos(4x) + 12e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) + 12e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) - 16e^{-3x}\cos(4x)$$

$$= -6e^{-3x}\cos(4x) + 24e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)$$

① Sustituimos en ED

$$-6e^{-3x}\cos(4x) + 24e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) + 6(-3e^{-3x}\cos(4x) - 4e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)) + 25(e^{-3x}\cos(4x)) = 0$$

$$-7e^{-3x}\cos(4x) + 24e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) - 18e^{-3x}\cos(4x) - 24e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) + 25e^{-3x}\cos(4x) = 0$$

$$-25e^{-3x}\cos(4x) + 25e^{-3x}\cos(4x) + 24e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) - 24e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) = 0$$

$$\underbrace{0 = 0}_{\text{Identidad}} \rightarrow \therefore Y_1(x) = e^{-3x}\cos(4x) \text{ es solución de la ED}$$

→ Con $Y_2(x) = e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)$

$$Y_1(x) = e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)$$

$$Y_1' = -3e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) + 4e^{-3x}\cos(4x)$$

$$Y_2'' = -3\left[-3e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) + 4e^{-3x}\cos(4x)\right] + 4\left[-3e^{-3x}\cos(4x) - 4e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)\right]$$

$$= +9e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) - 12e^{-3x}\cos(4x) - 12e^{-3x}\cos(4x) - 16e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)$$

$$= -7e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) - 24e^{-3x}\cos(4x)$$

① Sustituimos en ED

$$-7e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) - 24e^{-3x}\cos(4x) + 6(-3e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) + 4e^{-3x}\cos(4x)) + 25(e^{-3x}\operatorname{sen}(4x))$$

$$-7e^{-3x}\operatorname{sen}(4x - 24e^{-3x}\cos(4x) - 18e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) + 24e^{-3x}\cos(4x) + 25e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)$$

$$18e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) - 18e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) - 24e^{-3x}\cos(4x) + 24e^{-3x}\cos(4x)$$

$$\underbrace{0 = 0}_{\text{identidad}} \rightarrow \therefore Y_2(x) = e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) \text{ es solución de la ED}$$

→ Vemos si son LI

$$w(y_1, y_2) \begin{vmatrix} e^{-3x}\cos(4x) & e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) \\ -3e^{-3x}\cos(4x) - 4e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) & -3e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) + 4e^{-3x}\cos(4x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{-3x}\cos(4x)(-3e^{-3x}\operatorname{sen}(4x) + 4e^{-3x}\cos(4x)) - (e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)(-3e^{-3x}\cos(4x) - 4e^{-3x}\operatorname{sen}(4x))$$

$$= -3e^{-6x}\cos(4x)\operatorname{sen}(4x) + 4e^{-6x}\cos^2(4x) + 3e^{-6x}\operatorname{sen}(4x)\cos(4x) + 4e^{-6x}\operatorname{sen}^2(4x)$$

$$= 4e^{-6x}\cos^2(4x) + 4e^{-6x}\operatorname{sen}^2(4x) \neq 0$$

$\therefore$ $y_1(x) = e^{-3x}\cos(4x)$ y $y_2(x) = e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)$ son soluciones LI

→ Solución general

$$y(x) = C_1 e^{-3x}\cos(4x) + C_2 e^{-3x}\operatorname{sen}(4x)$$

④ $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ y $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

→ Con $y_1(x) = x^2$

$y_1(x) = x^2 \rightarrow y_1' = 2x \longrightarrow y_1'' = 2$

① Sustituimos en ED

$x^2(2) - 4x(2x) + 6(x^2) = 0$

$2x^2 - 8x^2 + 6x^2$

$8x^2 - 8x^2 = 0$

$\underbrace{0 = 0}_{}$

identidad → $\therefore$ $y_1(x) = x^2$ es solución de la ED

→ Con $y_2(x) = x^3$

$y_2(x) = x^3 \rightarrow y_2' = 3x^2 \rightarrow y_2'' = 6x$

① Sustituimos en ED

$x^2(6x) - 4x(3x^2) + 6(x^3) = 0$

$6x^3 - 12x^3 + 6x^3 = 0$

$12x^3 - 12x^3 = 0$

$\underbrace{0 = 0}_{}$

identidad → $\therefore$ $y_2(x) = x^3$ es solución de la ED

→ Ver si son LI

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4$$

$x^4 \neq 0$ $\therefore$ $y_1(x) = x^2$ y $y_2(x) = x^3$ son soluciones LI

→ Solución general

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x^3$$

⑤ $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$ y $y'' = 0$

→ con $y_1(x) = 1$

$y_1(x) = 1 \longrightarrow y' = 0 \longrightarrow y'' = 0$

① Sustituimos en ED

$\underbrace{0 = 0}$

Identidad → ∴ $y_1(x) = 0$ es solución de la ED

→ Con $y_2(x) = x$

$y_2(x) = x \rightarrow y_2' = 1 \rightarrow y_2'' = 0$

① Sustituimos en ED

$\underbrace{0 = 0}$

Identidad → ∴ $y_2(x) = x$ es solución de la ED

→ Vemos si son LI

$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$ ∴ $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = x$ son soluciones LI

→ Solución general

$y(x) = C_1 + C_2 x$

② Encuentre la solución general de las siguientes ED's lineales de coeficientes constantes

a) $y'' - 8y' + 16y = 0$ * Supongamos que la ED tiene solución de la forma $y(x) = e^{mx}$

① $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2e^{mx}$

② Sustituimos en la ED y obtenemos la identidad

$m^2e^{mx} - 8(me^{mx}) + 16(e^{mx}) = 0$

$e^{mx}(m^2 - 8m + 16) = 0$

$m^2 - 8m + 16 = 0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar

$(m-4)(m-4) = 0$

$m_1 = 4 \ , \ m_2 = 4$

③ Sustituimos en e^{mx}

$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = e^{4x} \\ y_2(x) = e^{4x} \end{array}\right\}$ Soluciones de la ED $\rightarrow$ Las soluciones son LD ∴ no hay forma de crear solución general

④ Se busca una segunda solución $y_2(x) \ni y_1$ y y_2 sean LI

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{(y_1)^2} dx$$

$$y_2(x) = e^{4x} \int \frac{e^{-\int -8dx}}{(e^{4x})^2} dx$$

$$y_2(x) = e^{4x} \int \frac{e^{8x}}{e^{8x}} dx$$

$$y_2(x) = xe^{4x}$$

⑤ Vemos si son LI

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{4x} & xe^{4x} \\ 4e^{4x} & e^{4x} + 4xe^{4x} \end{vmatrix} = e^{8x} + \cancel{4xe^{8x}} - \cancel{4xe^{8x}}$$
$$= e^{8x} \neq 0$$

∴ las soluciones y_1 y y_2 son LI

⑥ Solución general

$$y(x) = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}$$

Scanned with CamScanner

(b) $y'' - 3y' = 0$ * Supongamos que la ED tiene solución de la forma $y(x) = e^{mx}$

(1) $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2 e^{mx}$

(2) Sustituimos en la ED y obtenemos la identidad

$m^2e^{mx} - 3me^{mx} = 0$

$e^{mx}(m^2 - 3m) = 0$

$m^2 - 3m = 0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar

$m(m-3) = 0$

$\boxed{m_1 = 0}, \boxed{m_2 = 3}$

(3) Sustituimos en e^{mx}

$y_1(x) = e^{(0)x}$

$y_2(x) = e^{3x}$

$\therefore$ Son soluciones LI

(4) $w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & e^{3x} \\ 0 & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{3x} - 0 = 3e^{3x} \neq 0$

(5) Solución general

$y(x) = C_2 e^{3x}$

(c) $6y'' + y' - 2y = 0$ * Supongamos que la ED tiene solución de la forma $y(x) = e^{mx}$

(1) $y = e^{mx} \longrightarrow y_1' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2e^{mx}$

(2) Sustituimos en ED y obtenemos la identidad

$6(m^2e^{mx}) + me^{2x} - 2(e^{mx}) = 0$

$e^{mx}(6m^2 + m - 2) = 0$

$6m^2 + m - 2 = 0 \rightarrow$ Ecuación auxiliar

$$m = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(6)(-2)}}{2(6)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12}$$

$m_1 = \frac{-1+7}{12} = \frac{6}{12} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$m_2 = \frac{-1-7}{12} = \frac{-8}{12} = \boxed{-\frac{2}{3}}$

(3) Sustituimos en e^{mx}

$y_1(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

$y_2(x) = e^{-\frac{2}{3}x}$

Scanned with CamScanner

④ Vemos si son LI

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\frac{1}{2}x} & e^{-\frac{2}{3}x} \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} & -\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{6}x} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{6}x} = -\frac{7}{6}e^{-\frac{1}{6}x} \neq 0$$

∴ las soluciones son LI

⑤ Solución general

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{2}{3}x}$$

ⓓ $y'' - 6y' + 9y = 0$ *Supongamos que la ED tiene solución de la forma $y(x) = e^{mx}$

① $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2e^{mx}$

② Sustituimos en ED y obtenemos identidad

$$m^2e^{mx} - 6(me^{mx}) + 9(e^{mx}) = 0$$

$$e^{mx}(m^2 - 6m + 9) = 0$$

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \longrightarrow \text{Ecuación auxiliar}$$

$$(m-3)(m-3)$$

$y_1(x) = e^{3x}$

$y_2(x) = e^{3x}$

$\left.\begin{matrix} m_1 = 3 \\ m_2 = 3 \end{matrix}\right\}$ Nos damos cuenta que son soluciones LD

③ Se busca una segunda solución $y_2(x) \Rightarrow y_1, y_2$ sean LI

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{(y_1)^2} dx$$

$$y_2(x) = e^{3x} \int \frac{e^{6x}}{e^{6x}} dx = xe^{3x}$$

④ Vemos si son LI

$$w_1(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} + \cancel{3xe^{6x}} - \cancel{3xe^{6x}} = e^{6x} \neq 0$$

∴ las soluciones son LI

⑤ Solución general

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x}$$

ⓔ $y''-4y'-5y=0$ *Supongamos que la ED tiene soluciones de la forma $y(x)=e^{mx}$

① $y=e^{mx} \longrightarrow y'=me^{mx} \longrightarrow y''=m^2e^{mx}$

② Sustituimos en ED y obtenemos identidad

$m^2e^{mx}-4(me^{mx})-5(e^{mx})=0$

$e^{mx}(m^2-4m-5)=0$

$m^2-4m-5=0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar

$m) = \frac{-(4) \pm \sqrt{(-4)^2-4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2}$

$m) = \frac{-4 \pm 6}{2}$, $y_1(x) = \frac{-4+6}{2} = 1$, $y_2(x) = \frac{-4-6}{2} = -5$

③ Sustituimos en $y(x)=e^{mx}$

$y_1(x)=e^{1x}$

$y_2(x)=e^{-5x}$

④ vemos si son LI

$w(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} e^{1x} & e^{-5x} \\ e^{x} & -5e^{-5x} \end{vmatrix} = -5e^{-4x} - e^{-4x} = -6e^{4x} \neq 0$ ∴ Las soluciones son LI

⑤ Solución general

$y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-5x}$

ⓕ $y''+4y'+5y=0$ * Supongamos que la ED tiene soluciones de la forma $y(x)=e^{mx}$

① $y=e^{mx} \longrightarrow y'=me^{mx} \longrightarrow y''=m^2e^{mx}$

② Sustituimos en la ED y obtenemos identidad

$m^2e^{mx}+4(me^{mx})+5(e^{mx})=0$

$e^{mx}(m^2+4m+5)=0$

$m^2+4m+5=0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar

$m = \frac{-(4) \pm \sqrt{4^2-4(1)(5)}}{2(1)}$

$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$m = \frac{-4 \pm 2i}{2}$ $m_1=-2+i$ $m_2=-2-i$

Scanned with CamScanner

③- Sustituimos en $y(x) = e^{mx}$

$$\left.\begin{aligned} y_1^*(x) &= e^{(-2+i)x} \\ y_2^*(x) &= e^{(-2-i)x} \end{aligned}\right\} \text{Soluciones complejas}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-2x}\cos(x) \\ y_2(x) &= e^{-2x}\operatorname{sen}(x) \end{aligned}\right\} \text{Soluciones "reales" de la ED}$$

④ Solución general

$$y(x) = C_1 e^{-2x}\cos(x) + C_2 e^{-2x}\operatorname{sen}(x)$$

⑨ $y'' + 2y + 4y = 0$ * Supongamos que la ED tiene soluciones de la forma $y(x) = e^{mx}$

① $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2 e^{mx}$

② Sustituimos en ED y obtenemos identidad

$$m^2e^{mx} + 2(me^{mx}) + 4(e^{mx}) = 0$$

$$e^{mx}(m^2 + 2m + 4) = 0$$

$$m^2 + 2m + 4 = 0 \longrightarrow \text{Ecuación auxiliar}$$

$$m = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}i}{2}$$

$$m_1 = \frac{-2}{2} + \frac{4\sqrt{3}i}{2} = -1 + 2\sqrt{3}i$$

$$m_2 = \frac{-2}{2} - 2\sqrt{3}i = -1 + 2\sqrt{3}i$$

③ Sustituimos en $y(x) = e^{mx}$

$$\left.\begin{aligned} y_1^*(x) &= e^{(-1+2\sqrt{3}i)x} \\ y_2^*(x) &= e^{(-1-2\sqrt{3}i)x} \end{aligned}\right\} \text{Soluciones complejas}$$

$$y_1(x) = e^{-x}\cos(2\sqrt{3}x)$$

$$y_2(x) = e^{-x}\operatorname{sen}(-2\sqrt{3}x)$$

④ Solución general

$$y(x) = C_1 e^{-x}\cos(2\sqrt{3}x) + C_2 e^{-x}\operatorname{sen}(-2\sqrt{3}x)$$

(h) $y'' + k^2 y = 0$ * Supongamos que la ED tiene soluciones de tipo $y(x) = e^{mx}$

① $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} = y'' = m^2 e^{mx}$

② Sustituimos en ED y obtenemos identidad

$m^2 e^{mx} + k^2(e^{mx}) = 0$

$e^{mx}(m^2 + k^2) = 0$

$m^2 + k^2 = 0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar

$$m = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(k^2)}}{2(1)}$$

$$m = \frac{\pm\sqrt{-4k^2}}{2} = \frac{\pm 2ki}{2}$$

$m_1 = -ki$

$m_2 = ki$

③ Sustituimos en $y(x) = e^{mx}$

$y_1^*(x) = e^{(-ki)x}$, $y_2^*(x) = e^{(ki)x}$ } Soluciones complejas

$y_1(x) = e^{0x}\cos(kx)$, $y_2(x) = e^{0x}\operatorname{sen}(kx)$ } Soluciones de la "reales" ED

④ Solución general

$y(x) = C_1\cos(kx) + C_2\operatorname{sen}(kx)$

③ Encuentre la solución de los siguientes problemas de valor inicial

(a) $y'' + 5y' - 14y = 0$ sujeto a $y(0) = 5$ $y'(0) = 1$

① Supongamos que la ED tiene soluciones de la forma $y = e^{mx}$ $m = ?$

② $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2 e^{mx}$

③ Sustituir en ED y obtenemos la identidad

$m^2 e^{mx} + 5(me^{mx}) - 14(e^{mx}) = 0$

$e^{mx}(m^2 + 5 - 14) = 0$

$m^2 + 5 \cdot 14 = 0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar

$(m + 7)(m - 2)$

$m_1 = -7$

$m_2 = 2$

④ Sustituimos en $y = e^{mx}$

$y_1(x) = e^{-7x}$, $y_2(x) = e^{2x}$ } Soluciones LI

⑤ Solución general

$y(x) = C_1 e^{-7x} + C_2 e^{2x}$

Note que:

$y'(x) = -7C_1 e^{-7x} + 2C_2 e^{2x}$

Scanned with CamScanner

⑥ Se busca solución particular que cumpla $y(0)=5$ y $y'(0)=1$

$y(0) \longleftrightarrow$ ① $C_1e^{-7(0)} + C_2e^{2(0)} = 5$

$y'(0) \longleftrightarrow$ ② $-7C_1e^{-7(0)} + 2C_2e^{2(0)} = 1$

→ sistema de ecuaciones

① $C_1 + C_2 = 5$ $\xrightarrow{①\times 7}$ $\cancel{7C_1} + 7C_2 = 35$

② $-7C_1 + 2C_2 = 1$ $\quad -\cancel{7C_1} + 2C_2 = 1$

$9C_2 = 36$

$C_2 = \frac{36}{9} = 4$

$C_1 = 5 - 4$

$C_1 = 1$

⑦ Sustituimos en sol general

$y(x) = e^{-7x} + 4e^{2x}$

⑥ $y'' + k^2y = 0$ sujeto a $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$

① Supongamos que la ED tiene soluciones de tipo $y = e^{mx}$, $m = ?$

② $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2e^{mx}$

③ Sustituimos en ED y obtenemos identidad

$m^2e^{mx} + k^2e^{mx} = 0$

$e^{mx}(m^2 + k^2) = 0$

$m^2 + k^2 = 0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar

$m_1 = -ki$

$m_2 = ki$

④ Sustituimos en $y(x) = e^{mx}$

$y_1(x) = e^{0k}\cos(kx)$

$y_2(x) = e^{0k}\operatorname{sen}(kx)$

⑤ Solución general

$y(x) = C_1\cos(kx) + C_2\operatorname{sen}(kx)$

⑥ Se busca solución particular que cumpla $y(0)=0$, $y'(0)=1$

$y(0) \longleftrightarrow$ ① $C_1\cos(k0) + C_2\,\text{Sen}(k0) = 0$

$y'(0) \longleftrightarrow$ ② $-C_1\,\text{Sen}(k0) + C_2\cos(k0) = 1$

$\longrightarrow$ Sistema de ecuaciones

$C_1 = 0$

$C_2 = 1$

⑦ Sustituimos en sol. general

$$\boxed{y(x) = \text{Sen}(kx)}$$

ⓒ $y'' + k^2y = 0$ sujeto a $y(0)=1$, $y'(0)=0$

① Supongamos que la ED tiene soluciones tipo $y=e^{mx}$, $m=?$

② $y=e^{mx} \longrightarrow y'=me^{mx} \longrightarrow y''=m^2e^{mx}$

③ Sustituimos en ED y obtenemos identidad

$m^2e^{mx} + k^2e^{mx} = 0$

$e^{mx}(m^2+k^2)=0$

$m^2+k^2=0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar

$$\boxed{\begin{array}{l} m_1 = -ki \\ m_2 = ki \end{array}}$$

④ Sustituimos en $y(x)=e^{mx}$

$y_1(x) = e^{0k}\cos(kx)$

$y_2(x) = e^{0n}\,\text{Sen}(kx)$

⑤ solución general

$y(x) = C_1\cos(kx) + C_2\,\text{Sen}(kx)$

⑥ Se busca solución particular que cumpla $y(0)=1$, $y'(0)=0$

$y(0) = C_1\cos(k(0)) + C_2\,\text{Sen}(k(0)) = 1$

$y'(0) = -C_1\,\text{Sen}(k(0)) + C_2\cos(k0) = 0$

$C_1 = 1$

$C_2 = 0$

⑦ Sustituimos en sol. general

$$\boxed{y(x) = \cos(kx)}$$

ⓓ $y'' - 4y' + 4y = 0$ Sujeto a $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

① Supongamos que la ED tiene soluciones de tipo $y(x) = e^{mx}$

② $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2e^{mx}$

③ Sustituir en ED y obtenemos la identidad

$m^2e^{mx} - 4me^{mx} + 4e^{mx} = 0$

$e^{mx}(m^2 - 4m + 4) = 0$

$m^2 - 4m + 4 = 0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar

$(m-2)(m-2) = 0$

$m_1 = 2$

$m_2 = 2$

④ Sustituimos en $y = e^{mx}$

$y(x) = C\,e^{2x}$

$y(x) = xe^{2x}$

⑤ Solución general

$y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

⑥ Se busca solución particular que cumpla

$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

$y(0) = C_1e^{2(0)} + C_2(0)e^{2(0)} = 1$

$y'(0) = 2C_1e^{2(0)} + 2C_2(0)e^{2(0)} + C_2e^{2(0)} = 1$

$C_1 + C_2 = 1$

$2C_1 + C_2 = 1$

$\downarrow$

$-\cancel{2C_1} + -2C_2 = -2$

$\cancel{2C_1} + C_2 = 1$

$0 - C_2 = -1$

$C_2 = 1$

$C_1 = 0$

⑦ Sustituimos en Sol. general

$y(x) = xe^{2x}$

ⓔ $2y'' + 5y' - 3y = 0$ Sujeto a $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{11}{2}$

① Supongamos que la ED tiene soluciones de tipo $y(x) = e^{mx}$

② $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2e^{mx}$

③ Sustituimos en ED y obtenemos la identidad

$2m^2e^{mx} + 5me^{mx} - 3e^{mx} = 0$

$e^{mx}(2m^2 + 5m - 3) = 0$

$2m^2 + 5m - 3 = 0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar

$$m = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$m_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{-5-7}{4} = -3$$

(4) Sustituimos en $y(x) = e^{mx}$

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}x}$$
$$y_2 = e^{-3x}$$

(5) Ecuación general

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-3x}$$

$$y'(x) = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} - 3C_2 e^{-3x}$$

(6) Se busca solución particular que cumpla $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{-11}{2}$

$$y(0) = C_1 e^{\frac{1}{2}(0)} + C_2 e^{-3(0)} = 1$$
$$y'(0) = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}(0)} - 3C_2 e^{-3(0)} = \frac{-11}{2}$$

$$C_1 + C_2 = 1$$
$$\frac{1}{2} C_1 - 3C_2 = \frac{-11}{2}$$

$$\longrightarrow \quad \cancel{-\frac{1}{2} C_1} - \frac{1}{2} C_2 = -\frac{1}{2}$$
$$\cancel{\frac{1}{2} C_1} - 3C_2 = \frac{-11}{2}$$
$$\frac{-7}{2} C_2 = \frac{-12}{2}$$

$$C_2 = \frac{\frac{-12}{2}}{\frac{-7}{2}} = \frac{-24}{-14} = \frac{12}{7}$$

$$C_2 = \frac{12}{7}$$
$$C_1 = \frac{-5}{7}$$

(7) Sustituir en solución general

$$y(x) = \frac{-5}{7} e^{\frac{1}{2}x} + \frac{12}{7} e^{-3x}$$

(4) Encuentre la ecuación diferencial de segundo orden homogenea que tenga como soluciones a $y_1(x)$ y $y_2(x)$. Una ED para cada par de funciones

a) $y_1 = \sin(4x)$ $\quad y_2 = \cos(4x)$

(1) Se busca ED de la forma $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ para la cual y_1 y y_2 son soluciones.

(2) Derivamos y_1

$$y_1 = \text{sen}(4x),\ y_1' = 4\cos(4x) \longrightarrow y'' = -16\,\text{sen}(4x)$$

$$\longrightarrow y'' = 16y_1 \longrightarrow \underline{y_1'' - 16y_1 = 0}$$

(3) Derivamos y_2

$$y_2 = \cos(4x) \longrightarrow y_2' = -4\,\text{sen}(4x) \longrightarrow y_2'' = -16\cos(4x)$$

$$\longrightarrow y_2'' = -16y_2 \longrightarrow \underline{y_2'' + 16y_2 = 0}$$

(4) Observamos que es posible obtener una ED lineal de 2do orden homogenea identica $\therefore$ $\underline{y'' + 16y = 0}$

b) $y_1 = \sin kx$ $\quad y_2 = \cos kx$

(1) Se busca ED de la forma $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ para la cual y_1 y y_2 son soluciones.

(2) Derivamos y_1

$$y_1 = \text{sen}(kx) \longrightarrow y_1' = k\cos(kx) \longrightarrow y'' = -k^2\,\text{sen}(kx)$$

$$\longrightarrow y_1'' = -k^2 y_1 \longrightarrow \underline{y_1'' + k^2 y_1 = 0}$$

(3) Derivamos y_2

$$y_2 = \cos(kx) \longrightarrow y_2 = -k\,\text{sen}(kx) \longrightarrow y_2'' = -k^2\cos(kx)$$

$$\longrightarrow y_2'' = -k^2 y_2 = \underline{y_2'' + k^2 y_2 = 0}$$

(4) Observamos que es posible obtener una ED lineal de 2do orden homogénea idéntica $\therefore$ $\underline{y'' + k^2 y = 0}$

ⓒ $y_1(x) = e^{-3x}$ $\quad$ $y_2(x) = xe^{-3x}$

① Se busca ED de la forma $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ para la cual $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones

② Derivamos y_1

$y_1 = e^{-3x} \longrightarrow y_1' = -3e^{-3x} \longrightarrow y_1'' = 9e^{-3x}$

$y_1'' = -9e^{3x} + 18e^{3x} \longrightarrow y_1'' = -9y_1 - 6y' \longrightarrow \underline{y_1'' + 6y' + 9y = 0}$

③ Derivamos y_2

$y_2 = xe^{-3x} \longrightarrow y_2' = -3xe^{-3x} + e^{-3x} \longrightarrow y_2'' = -3e^{-3x} + 9xe^{-3x} - 3e^{-3x}$

$\longrightarrow y_2'' = 9xe^{-3x} - 6e^{-3x} = -9xe^{-3x} + 18xe^{-3x} - 6e^{-3x}$

$\longrightarrow y_2'' = -9y_2 - 6y_2' \longrightarrow \underline{y_2'' + 6y_2' + 9y_2 = 0}$

④ Observamos que es posible encontrar una ED lineal de segundo orden homogenea identica $\therefore \underline{y'' + 6y' + 9y = 0}$

ⓓ $y_1(x) = e^{-3x}\cos(2x)$ $\quad$ $y_2(x) = e^{-3x}\operatorname{sen}(2x)$

• Se busca ED de la forma $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ para la cual y_1 y y_2 son soluciones

① Derivamos $y_1(x)$

$y_1(x) = e^{-3x}\cos(2x) \longrightarrow y_1' = -3e^{-3x}\cos(2x) - 2e^{-3x}\operatorname{sen}(2x)$

$y_1'' = 5e^{-3x}\cos(2x) + 12e^{-3x}\operatorname{sen}(2x) = -13e^{-3x}\cos(2x) + 18e^{-3x}\cos(2x) + 12e^{-3x}\operatorname{sen}(3x)$

$y_1'' = -13y_1 - 6y_1' \longrightarrow \underline{y_1'' + 6y_1' + 13y = 0}$

② Derivamos $y_2(x)$

$y_2(x) = e^{-3x}\operatorname{sen}(2x) \longrightarrow y_2(x)' = -3e^{-3x}\operatorname{sen}(2x) + 2e^{-3x}\cos(2x)$

$y_2(x)'' = 5e^{-3x}\operatorname{sen}(2x) - 12e^{-3x}\cos(2x) = -13e^{-3x}\operatorname{sen}(2x) + 18e^{-3x}\operatorname{sen}(2x) - 12e^{-3x}\cos(2x)$

$y_2(x)'' = -13y_2 - 6y_2' = \underline{y_2'' + 6y' + 13y = 0}$

③ Observamos que es posible obtener una ED lineal de 2do orden homogenea identica $\therefore \underline{y'' + 6y' + 13y = 0}$

Scanned with CamScanner

(e) $y_1(x) = e^{ax}\cos(Bx) \quad y_2(x) = e^{ax}\operatorname{sen}(Bx)$

- Se busca ED de la forma $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ para la cual y_1 y y_2 son soluciones

(1) Derivamos y_1

$y_1 = e^{ax}\cos(Bx) \longrightarrow y_1' = ae^{ax}\cos(Bx) - Be^{ax}\operatorname{sen}(Bx)$

$y_1'' = -(a^2+B^2)y_1 + 2ay_1' = \underline{y_1'' - 2ay_1' + (a^2+B^2)y_1 = 0}$

(2) Derivamos y_2

$y_2 = e^{ax}\operatorname{sen}(Bx) \longrightarrow y_2' = ae^{ax}\operatorname{sen}(Bx) + Be^{ax}\cos(Bx)$

$y_2'' = -(a^2+B^2)y_2 + 2ay_2' \rightarrow \underline{y_2'' - 2ay_2' + (a^2+B^2)y_2 = 0}$

(3) Observamos que es posible obtener una ED lineal de 2do orden homogenea identica. $\therefore \underline{y'' - 2ay' + (a^2+B^2)y = 0}$

(f) $y_1(x) = 1 \quad y_2(x) = x$

- Se busca ED de la forma $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ para la cual y_1 y y_2 son soluciones.

(1) Derivar $y_1 \longrightarrow y_1(x) = 1 \longrightarrow y_1'(x) = 0 \longrightarrow y_1''(x) = 0$

(2) Derivar $y_2 \longrightarrow y_2(x) = x \longrightarrow y_2'(x) = 1 \longrightarrow y_2'' = 0$

(3) Observamos que es posible obtener una ED lineal de segundo orden homogenea identica. $\therefore \underline{y'' = 0}$

(g) $y_1(x) = e^{-ax} \quad y_2 = xe^{-ax}$

- Deducimos que $m_1 = -a$, $m_2 = -a$
- Obtenemos ecuación auxiliar

$(m+a)(m+a) = 0 \longrightarrow m^2 + 2am + a^2 = 0$

$\rightarrow y_1'' = -a^2e^{-ax} + 2a^2y' = 0$

$\rightarrow \underline{y_1'' + 2ay' + a^2y = 0}$

$\therefore \underline{y'' + 2ay' + a^2y = 0}$

Scanned with CamScanner