Algebra Lineal

Universidad Autónoma De Aguascalientes

Depto. de Matemáticas y Física

Ejemplos de espacios vectoriales $\mathbb{M}_{n\times n}$.

2.1. Espacios vectoriales.

$$\mathbb{M}_{n\times n} = \left\{A = [a_{ij}]_{n\times n} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$$

Sean $A, B, C \in \mathbb{M}_{n\times n}$ y $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ arbitrarios dados.

A_1

$$A + B = [a_{ij}]_{n\times n} + [b_{ij}]_{n\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{n\times n}$$

Como $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, para toda $i, j = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{n\times n} = [b_{ij} + a_{ij}]_{n\times n} = [b_{ij}]_{n\times n} + [a_{ij}]_{n\times n}$$

$$\therefore\ A + B = B + A$$

2.1. Espacios vectoriales.

A_2

$$A+(B+C)=[a_{ij}]_{n\times n}+\left([b_{ij}]_{n\times n}+[c_{ij}]_{n\times n}\right)$$
$$=[a_{ij}]_{n\times n}+[b_{ij}+c_{ij}]_{n\times n}$$
$$=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]_{n\times n}$$

Y como $a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$, para toda $i,j=1,2,\dots,n$, entonces

$$A+(B+C)=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]_{n\times n}=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]_{n\times n}$$
$$A+(B+C)=[a_{ij}+b_{ij}]_{n\times n}+[c_{ij}]_{n\times n}$$
$$A+(B+C)=\left([a_{ij}]_{n\times n}+[b_{ij}]_{n\times n}\right)+[c_{ij}]_{n\times n}$$

$$\therefore\quad A+(B+C)=(A+B)+C$$

2.1. Espacios vectoriales.

A_3

Proponemos $X \in \mathbb{M}_{n\times n}$(por determinarse) tal que $A + X = A$ (1)

Nótese que $A + X = A \Longrightarrow [a_{ij}]_{n\times n} + [x_{ij}]_{n\times n} = [a_{ij}]_{n\times n}$

$$\Longrightarrow [a_{ij} + x_{ij}]_{n\times n} = [a_{ij}]_{n\times n}$$

Por igualdad de matrices se tiene:

$$a_{ij} + x_{ij} = a_{ij}, i,j = 1,2,\ldots,n$$

Que al resolver para x_{ij}, se tiene: $x_{ij} = 0$, para $i,j = 1,2,\ldots,n$ y en consecuencia $X = [x_{ij}]_{n\times n} = [0]_{n\times n}$, para $i,j = 1,2,\ldots,n$

Para la unicidad procedemos como sigue:

2.1. Espacios vectoriales.

Suponemos que el neutro aditivo no es único.

es decir, existe $X^* \in \mathbb{M}_{n\times n}$con $X \neq X^*$, tal que $A + X^* = A$ (2)

En particular, al sustituir $A = X^*$ en (1) se tiene, $X^* + X = X^*$, y al sustituir $A = X$ en (2) se tiene $X + X^* = X$, al comparar estas dos ultimas expresiones vemos se tiene que $X = X^*$, lo cual viola la hipótesis de que $X \neq X^*$, esto nos implica que es falsa la suposición que se hizo al principio, de que el neutro aditivo no es único.

Y como consecuencia se tiene que el neutro aditivo es único.

Al ser único, lo podemos representar con un “símbolo”, así

$$0 = [0]_{n\times n}$$

2.1. Espacios vectoriales.

A_4.

Proponemos $Y \in \mathbb{M}_{n\times n}$(por determinarse) tal que $A + Y = 0$ (a)

Nótese que $A + Y = 0 \Longrightarrow [a_{ij}]_{n\times n} + [y_{ij}]_{n\times n} = [0]_{n\times n}$

$$\Longrightarrow [a_{ij} + y_{ij}]_{n\times n} = [0]_{n\times n}$$

Por igualdad de matrices se tiene:

$$a_{ij} + y_{ij} = 0, i, j = 1,2, \dots, n$$

Que al resolver para y_{ij}, se tiene: $y_{ij} = -a_{ij}$, para $i, j = 1,2, \dots, n$ y en consecuencia $[y_{ij}]_{n\times n} = [-a_{ij}]_{n\times n}$, para $i, j = 1,2, \dots, n$

Para la unicidad procedemos como sigue:

2.1. Espacios vectoriales.

Suponemos que el neutro aditivo no es único.

es decir, existe $Y^* \in \mathbb{M}_{n\times n}$ con $Y \neq Y^*$, tal que $A + Y^* = 0$ (b)

En particular, al sustituir $A = Y^*$ en (a) se tiene, $Y^* + Y = 0$, y al sustituir $A = Y$ en (b) se tiene $Y + Y^* = 0$, al comparar estas dos ultimas expresiones vemos se tiene que $Y = Y^*$, lo cual viola la hipótesis de que $Y \neq Y^*$, esto nos implica que es falsa la suposición que se hizo al principio, de que el inverso aditivo no es único.

Y como consecuencia se tiene que el inverso aditivo es único.

Al ser único, lo podemos representar con un "símbolo", así

$$-A = \left[-a_{ij}\right]_{n\times n}$$

2.1. Espacios vectoriales.

M_1.

$$\alpha(A+B)=\alpha\left(\left[a_{ij}\right]_{n\times n}+\left[b_{ij}\right]_{n\times n}\right)=\alpha\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{n\times n}$$
$$=\left[\alpha\left(a_{ij}+b_{ij}\right)\right]_{n\times n}$$

Como $\alpha\left(a_{ij}+b_{ij}\right)=\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}$, para toda $i,j=1,2,\dots,n$, entonces

$$\alpha(A+B)=\left[\alpha\left(a_{ij}+b_{ij}\right)\right]_{n\times n}=\left[\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}\right]_{n\times n}$$
$$\alpha(A+B)=\left[\alpha a_{ij}\right]_{n\times n}+\left[\alpha b_{ij}\right]_{n\times n}$$
$$\alpha(A+B)=\alpha\left[a_{ij}\right]_{n\times n}+\alpha\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$$

$$\therefore\quad \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

2.1. Espacios vectoriales.

$M_2.$

$$(\alpha+\gamma)A = (\alpha+\gamma)\left[a_{ij}\right]_{n\times n} = \left[(\alpha+\gamma)a_{ij}\right]_{n\times n}$$

Como $(\alpha+\gamma)a_{ij} = \alpha a_{ij} + \gamma a_{ij}$, para toda $i, j = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$(\alpha+\gamma)A = \left[(\alpha+\gamma)a_{ij}\right]_{n\times n} = \left[\alpha a_{ij} + \gamma a_{ij}\right]_{n\times n}$$
$$(\alpha+\gamma)A = \left[\alpha a_{ij}\right]_{n\times n} + \left[\gamma a_{ij}\right]_{n\times n}$$
$$(\alpha+\gamma)A = \alpha\left[a_{ij}\right]_{n\times n} + \gamma\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$$

$$\therefore\ (\alpha+\gamma)A = \alpha A + \gamma A$$

2.1. Espacios vectoriales.

$M_3.$

$$(\alpha\gamma)A = (\alpha\gamma)\left[a_{ij}\right]_{n\times n} = \left[(\alpha\gamma)a_{ij}\right]_{n\times n}$$

Como $(\alpha\gamma)a_{ij} = \alpha\left(\gamma a_{ij}\right)$, para toda $i, j = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$(\alpha\gamma)A = \left[(\alpha\gamma)a_{ij}\right]_{n\times n} = \left[\alpha\left(\gamma a_{ij}\right)\right]_{n\times n}$$

$$(\alpha\gamma)A = \alpha\left[\gamma a_{ij}\right]_{n\times n}$$

$$(\alpha\gamma)A = \alpha\left(\gamma\left[a_{ij}\right]_{n\times n}\right)$$

$$\therefore \quad (\alpha\gamma)A = \alpha(\gamma A)$$

2.1. Espacios vectoriales.

M_4.

$$(1)A = (1)\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$$
$$= \left[(1)a_{ij}\right]_{n\times n}$$

Como $(1)a_{ij} = a_{ij}$, para toda $i, j = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$(1)A = \left[(1)a_{ij}\right]_{n\times n} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$$

$$\therefore \quad (1)A = A$$

Hemos visto que se cumplen los 8 axiomas en $\mathbb{M}_{n\times n}$, en consecuencia:

$\mathbb{M}_{n\times n}$ es un espacio vectorial.

2.1. Espacios vectoriales.

Referencias:

1. Álgebra Lineal. Stanley I. Grossman, sexta edición, Mc Graw Hill, México.
2. Álgebra Lineal con Aplicaciones y Matlab. Bernard Kolman, Octava Edición, Prentice Hall.
3. Introducción al Álgebra lineal. Howard Antón, Tercera Edición, Noriega Editores, México.
4. Álgebra Lineal. Claudio Pita Ruiz, Mc Graw Hill, México.
5. Álgebra Lineal con Aplicaciones. Nakos George, Joyner David, Internacional Thomson Editores.