Centro de Ciencias Básicas

Materia: **Calculo Diferencial**

Tarea

APUNTES DE LA MATERIA

Ingeniería en Computación Inteligente

Semestre 1° A

Nombre alumno: Sandoval Perez Jose Luis

ID: 261731

Profesor: **Jaime Salvador Medina González**

13/Ago/2021

FUNCIONES

- ejemplo:

$f(x) = x$
$f(x) = 2x+1$
$f(x) = x^2$
$f(x) = x^2 + 2x + 4$
$f(x) = 1$
$f(x) = \tan x$
$f(x) = \ln x$
$f(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = x^3$

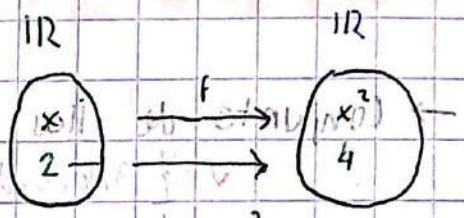
Regla de asignación

$f(x) = x^2 \rightarrow$ indica que f relaciona el valor de x con x^2.

x es un número real
x^2 tambien es un número real.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$
$x \rightarrow x^2$

= La principal caracteristica de una función es que relaciona valores entre 2 conjuntos mediante una regla de asignación.



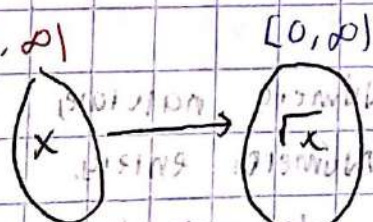
$f(x) = x^2$

$f(X) = \sqrt{x}$ $\rightarrow$ indica que f relaciona al valor de x con $\sqrt{x}$, en donde x es un número mayor o igual a cero. $\sqrt{x}$ es un número real mayor o igual a cero. $x \geq 0$

$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ($x \rightarrow \sqrt{x}$)
$f(x) = \sqrt{x}$ $x \in [0, \infty)$

Dominio: $[0, \infty)$ — contradominio: $[0, \infty)$

Regla de asignación: $f(x) = \sqrt{x}$ $x \in [0, \infty)$



Función es: dominio, contradominio y regla de asignación.

TERMINOLOGIA DE CONJUNTOS

Es una colección de objetos, a los cuales llamaremos elementos del conjunto.

Colección = Agrupación

Generalmente se utilizan letras mayúsculas para denotar conjuntos; A, B, C, D, V, U, H, etc.

ejemplo

→ Conjunto de las vocales.

$V = \{a, b, c, d, e\}$ → Notación en lista

$V = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$ → Notación por comprensión

→ Conjunto de los dígitos

$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$D = \{x \mid x \text{ es un dígito}\}$

El símbolo $\in$ significa "pertenece" y se usa para establecer cuando un elemento pertenece a un conjunto. Similarmente $\notin$ significa no pertenece.

$a \in V$

$1 \in V$

$a \notin D$

$1 \notin D$

CONJUNTO DE NÚMEROS

$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ⟶ Números naturales

$\mathbb{Z} = \{-03, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ⟶ Números enteros.

$Q = \{x \mid x = m/n$ donde $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ → Números racionales

$\frac{37}{24} \in \mathbb{Q}$ ya que $37, 24 \in \mathbb{Z}$ y $24 \neq 0$

$\mathbb{Q}^c = \{x \mid x \neq m/n$ donde $m, n \in \mathbb{Z}$ $n \neq 0\}$ → Números irracionales.

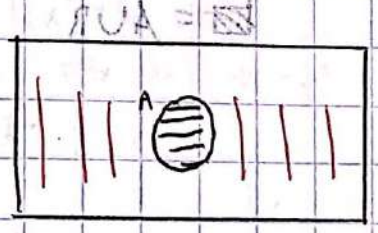
$\sqrt{2}$ → Irracional.

CONJUNTO ESPECIAL y OPERACIONES entre conjuntos

U = conjunto Universo

$\emptyset$ = Conjunto vacío

Representación con diagrama de venn.



Si A es un conjunto

$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$

A, B conjuntos

$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A$ y $x \in B\}$

$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A$ o $x \in B\}$

U = Corredores P = Correder 100mts Q = Correder 400mts

$P \wedge Q$ = Correder 100 mts y correder de 400 mts

$P \vee Q$ = Correder 100 mts y correder de 400 mts

Con y se deben cumplir ambas $x \in A$, $x \in A$

con o se debe cumplir al menos una $x \in A$, $x \in B$

$U = D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

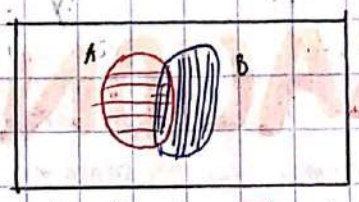
$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ y } x \in B\} = \{1, 3\}$

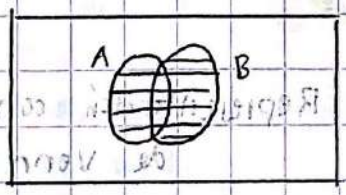
$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B\} = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

① $A \cap B$

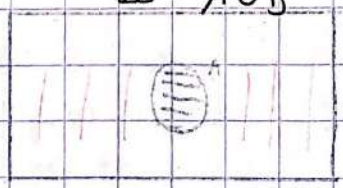


= A = B = $A \cap B$

② $A \cup B$



= $A \cup B$



Intervalos

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

abierto

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

semi abierto

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

cerrado

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

rayo = abierto

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

CONOCIMIENTOS PREVIOS

1. Efectue los siguientes productos notables.

a) $(x+7)(x-13)$
$= x^2 - 13x + 7x - 91$
$= x^2 - 6x - 91$

b) $(2x-7)(2x-7)$
$= 4x^2 - 14x - 14x + 49$
$= 4x^2 - 28x + 49$

c) $(2-5x)(5x+2)$
$(-5x+2)(5x+2)$
$= -25x^2 - 10x + 10x + 4$
$= -25x^2 + 4$

d) $(x^2-6)(x^2-4)$
$= x^4 - 4x^2 - 6x^2 + 24$
$= x^4 - 10x^2 + 24$

e) $(2x-3)^3$
$= (2x)^3 + 3(2x)^2(-3) + 3(2x)(-3)^2 + (-3)^3$
$= 8x^3 + 3(4x^2)(-3) + 3(2x)(9) - 27$
$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

f) $(x+2-3i)(x+2+3i)$
$= (x+2)^2 - (3i)^2$
$= x^2 + 2(2x) + 4 - (3i)^2$
$= x^2 + 4x + 4 - 9i$

g) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
$= x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}x - (\sqrt{2})(\sqrt{2})$
$= x^2 - 2$

h) $(x-\sqrt{2})^2$
$= x^2 - 2(\sqrt{2}) + 2$

i) $(x-3)(x^2+3x+9)$
$= x^3 + 3x^2 + 9x - 3x^2 - 9x - 27$
$= x^3 - 27$

2. Factorice las siguientes expresiones algebraicas

a) $x^2 + 64x$
$= x(x+64)$

b) $x^2 - 81$
$= (x-9)(x+9)$

c) $x^4 - 16$
$= (x^2-4)(x^2+4)$

Sandoval Pérez José Luis

Scribe

Sandoval Pérez José Luis

d) $125x^3 + 64$
$= (5x)^3 + (4)^3$
$= (5x + 4)(25x^2 - 20x + 16)$

e) $x^3 - 64$
$= (x)^3 - (4)^3$
$= (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

f) $x^2 - 16x + 64$
$= (x - 8)(x - 8)$

g) $4x^2 + 64x$
$= x(4x + 64)$

h) $x^2 - x - 20$
$= (x - 5)(x + 4)$

i) $x^3 + 9x^2$
$= x(x^2 + 9x)$

j) $x^2 - 12x + 35$
$= (x - 7)(x - 5)$

k) $x^2 - 12x + 36$
$= (x - 6)(x + 6)$

i) $x^3 - 2x$
$= x(x^2 - 2)$

3. Resolver las siguientes ecuaciones cuadraticas usando factorización

a) $x^2 - 11x + 18 = 0$
$= (x - 9)(x - 2) = 0$
$= x - 9 = 0$ y $x - 2 = 0$
$= x = 9$ y $x = 2$

b) $x^2 - 81 = 0$
$= (x)^2 - (9)^2 = 0$
$= (x + 9)(x - 9) = 0$
$= x + 9 = 0$ y $x - 9 = 0$
$= x = -9$ y $x = 9$

c) $x^2 + 12x + 36 = 0$
$= (x + 6)(x + 6)$
$= x + 6 = 0$ y $x + 6 = 0$
$= x = -6$ y $x = -6$

d) $x^2 = 2x$
$= x^2 - 2x = 0$
$= x(x - 2) = 0$
$= x = 0$ y $x - 2 = 0$
$= x = 0$ y $x = 2$

e) $x^2 - 16x + 64 = 0$
$= (x - 8)(x - 8)$
$= x - 8 = 0$ y $x - 8 = 0$
$= x = 8$ y $x = 8$

f) $3x^2 - 9x = 0$

$= 3x(x-3)$

$= 3x = 0 \quad y \quad x - 3 = 0$

$= x = 0/3 \quad y \quad x = 3$

$= x = 0 \quad y \quad x = 3$

g) $x^2 - 10x + 24 = 0$

$= (x-6)(x-4)$

$= x - 6 = 0 \quad y \quad x - 4 = 0$

$= \underline{x = 6} \quad y \quad \underline{x = 4}$

h) $3x^2 = 9x$

$= 3x^2 - 9x = 0 \qquad = 3x = 0 \quad y \quad (x-3) = 0$

$= 3x(x-3) = 0 \qquad = x = 0/3 \quad y \quad x = 3$

$= x = 0 \quad y \quad x = 3$

4. Resolver las ecuaciones cuadráticas usando fórmula general.

a) $x^2 = 4x - 9$

$= x^2 - 4x + 9 = 0 \qquad = x \notin \mathbb{R}$

$= -(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(9)} / 2(1)$

$= 4 \pm \sqrt{16 - 36} / 2(1)$

$= 4 \pm \sqrt{-20} / 2$

b) $x^2 - 10x + 24 = 0$

$= -(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(24)} / 2(1) \qquad = x_1 = 10 + 2 / 2 = 6$

$= 10 \pm \sqrt{100 - 96} / 2 \qquad = x_2 = 10 - 2 / 2 = 4$

$= 10 \pm 2 / 2 \qquad = \underline{x_1 = 6} \quad \underline{x_2 = 4}$

c) $x^2 + 12x + 36 = 0$

$= -(12) \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(36)} / 2(1) \qquad = x_1 = -12 / 2 = -6$

$= -12 \pm \sqrt{144 - 144} / 2 \qquad = \underline{x = -6}$

$= -12 \pm \sqrt{0} / 2$

Sandoval Pérez, José Luis

d) $x^2 = 2x$

$= x^2 - 2x = 0$

$= -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(0)} / 2(1)$

$= 2 \pm \sqrt{4} / 2$

$= 2 \pm 2/2$

$= x_1 = 2+2/2 = 2$

$= x_2 = 2-2/2 = 0$

$= x_1 = 2$ y $x_2 = 0$

e) $x^2 + 81 = 0$

$= -(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(81)} / 2(1)$

$= \pm \sqrt{-324} / 2$

$= x = x \notin R$

f) $x^2 - 4x + 8 = 0$

$= -(4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(8)} / 2(1)$

$= 4 \pm \sqrt{-16} / 2$

$= x = x \notin R$

g) $2x^2 + 7x = 15$

$= 2x + 7x - 15 = 0$

$= -(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(2)(-15)} / 2(2)$

$= -7 \pm \sqrt{169} / 2$

$= -7 \pm 13 / 2(2)$

$= -7 \pm 13 / 4$

$= x_1 = -7 + 13 / 4 = 1.5$ y $x_2 = -7 - 13 / 4 = -5$

$= x_1 = 1.5$ y $x_2 = -5$

h) $3x^2 = 9x$

$= 3x^2 - 9x = 0$

$= -(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(3)(0)} / 2(3)$

$= 9 \pm \sqrt{81} / 6$

$= 9 \pm 9 / 6$

$= x_1 = 9 + 9 = 18/6 = 3$

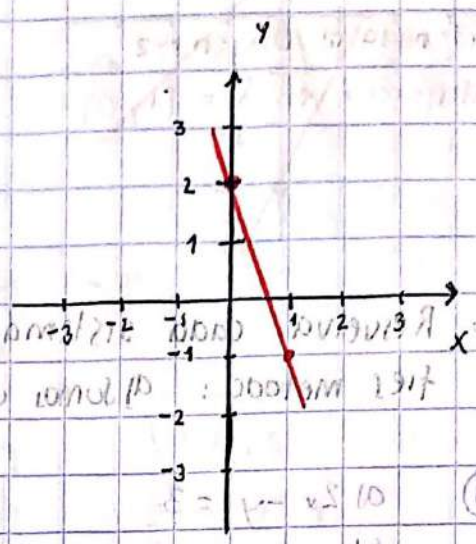
$x_2 = 9 - 9 = 0/6 = 0$

Sandoval Pérez José Luis

Sandoval Perez José Luis

5. Encuentre la gráfica de los siguientes funciones lineales. Obtenga la ordenada al origen, pendiente de la recta e intersección con el eje x.

a) $f(x) = -3x + 2$



pendiente = -3

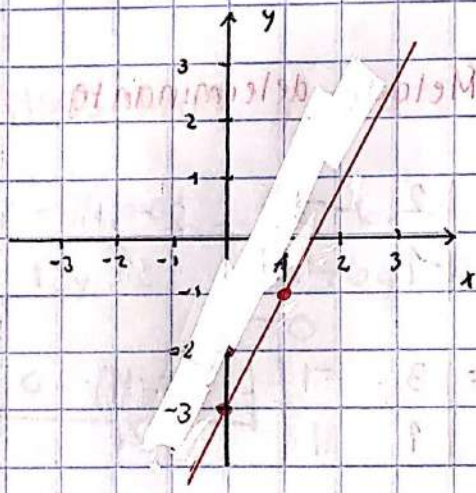
ordenada al origen = 2

intersección en x = (0.666, 0)

$-3x + 2$ → $-2/-3 = x = 0.666$

$-2 = -3x$

b) $g(x) = 2x - 3$

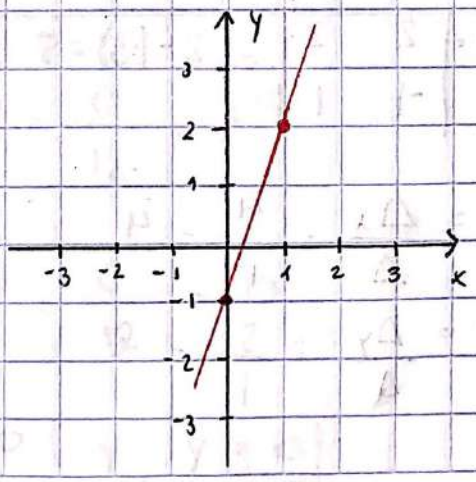


pendiente = 2

ordenada al origen = -3

intersección en x = (1.5, 0)

c) $f(x) = 3x - 1$



pendiente = 3

ordenada al origen = -1

intersección en x = (0.33, 0)

$3x - 1$ → $1/3 = x$

$1 = 3x$

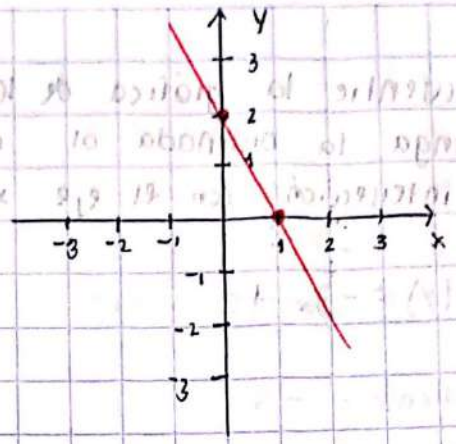
$x = 0.333$

d) $g(x) = -2x + 2$

pendiente $= -2$

Ordenada al Origen $= 2$

intersección en $x = (1, 0)$



6. Resuelva cada sistema de ecuaciones lineales por los tres metodos: a) sumas y restas, b) Método gráfico, c) Determinantes.

① a) $2x - y = 3$

b) $-x + y = 1$

Metodo determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (1) = 1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-1) = 4$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{4}{1} = 4$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = 4 \\ y = 5 \end{matrix}}$$

Metodo suma y resta

$2x - y = 3$

$2(-x + y = 1) = -2x + 2y = 2$

$y = 5$

$2x - (5) = 3$ $\quad 2x = 3 + 5 \quad x = 4$

$2x - 5 = 3$ $\quad 2x = 8$

$y = 5$ $\quad x = 4$

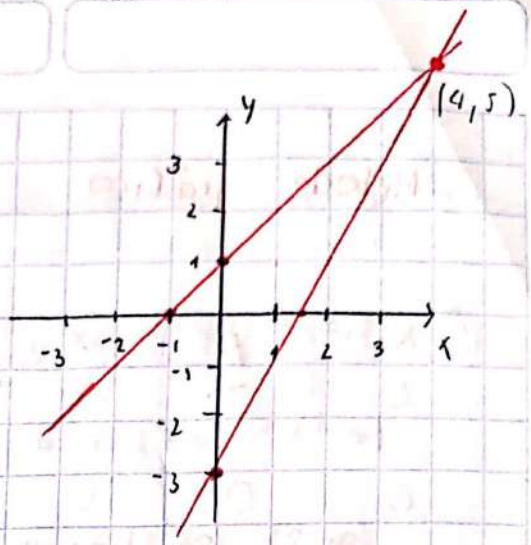
Sandoval Pérez José Luis

Sandoval Pérez José Luis

Metodo gráfico

x	y
0	-3
1.5	0

x	y
0	1
-1	0



a)

$2(0) - y = 3 = -y = 3 \quad y = 3/-1 = -3$

$2(x) - (0) = 3 = 2x = 3 \quad x = 3/2 = 1.5$

b)

$-x + y = 1 = -(0) + y = 1 \quad y = 1$

$-x + (0) = 1 = -x = 1 \quad x = -1$

$\boxed{\begin{matrix} (4, & 5) \\ x & y \end{matrix}}$

② a) $2x - 3y = 0$

b) $2x + 3y = 0$

Metodo determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-6) = 12$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0$$

$\boxed{x = 0 \quad y \quad y = 0}$

Metodo suma y resta

$2(2x - 3y = 0) = 4x - 6y = 0$

$2(2x + 3y = 0) = 4x + 6y = 0$

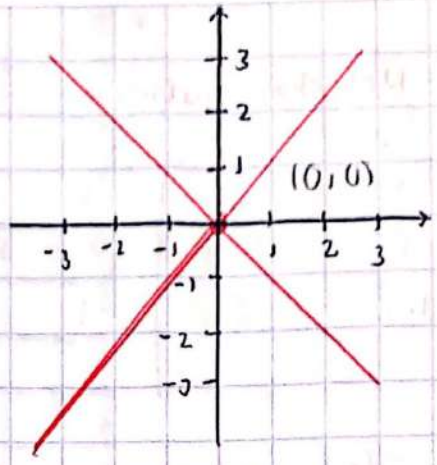
$= 0$

$\boxed{x = 0 \quad y = 0}$

Sandoval Pérez José Luis

Metodo gráfico

x	y	x	y
0	0	0	0
0	0	0	0



a)

$2(0) - 3y = 0 \quad = \quad -3y = 0 \quad y = 0/-3 \quad y = 0$

$2x - 3(x) = 0 \quad = \quad 2x = 0 \quad x = 0/2 \quad x = 0$

b)

$2(0) + 3y = 0 \quad = \quad 3y = 0 \quad y = 0/3 \quad y = 0$

$2x + 3(0) = 0 \quad = \quad 2x = 0 \quad x = 0/2 \quad x = 0$

$$\boxed{\begin{matrix} (0, & 0) \\ x & y \end{matrix}}$$

Realice las operaciones entre conjuntos

① $(2,5) \cap (3,6) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (2,5) \text{ y } x \in (3,6)\} = (3,5)$

② $(2,5) \cup (3,6) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (2,5) \text{ o } x \in (3,6)\} = (2,6)$

③ $(2,4) \cup (3,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (2,4) \text{ o } x \in (3,\infty)\} = (2,\infty)$

④ $(-\infty,4) \cup [2,6]$

⑤ $[4,7] \cap [7,9]$

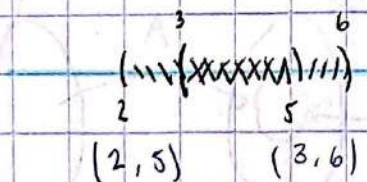
⑥ $(-\infty,3) \cap (3,\infty)$

⑦ $(-\infty,3) \cup [3,\infty)$

⑧ $(-2,6) \cap (-\infty,3]$

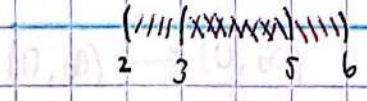
Graficamente es:

①



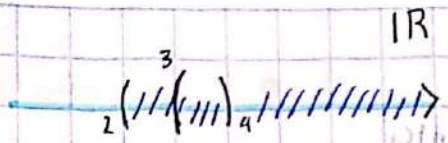
(2,5)
(3,6)
(3,5)

②



(2,5)
(3,5)
(2,6)

③



$(2,4)$

$(3,\infty)$

$(2,4) \cup (3,\infty) = (2,\infty)$

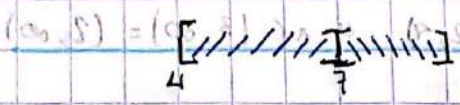
④

$(-\infty,4)$

$[2,6]$

$(-\infty,4) \cup [2,6] = (-\infty,6]$

⑤

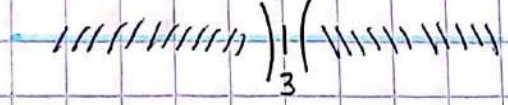


$[4,7]$

$[7,9]$

$[4,7] \cap [7,9] = \{7\}$

⑥

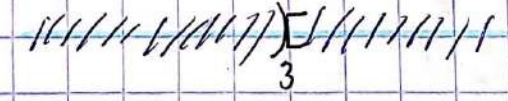


$(-\infty,3)$

$(3,\infty)$

$(-\infty,3) \cap (3,\infty) = \emptyset$

⑦



$(-\infty,3) \cup ($

$[3,\infty)$

$(-\infty,3) \cup [3,\infty) = (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$

Funciones

Decimos que una función (f) es una regla de asignación, la cual a cada elemento a de un conjunto A le asigna un único elemento b de un conjunto B.

Indicamos como: $\longrightarrow$ $f: A \longrightarrow B \quad a \rightarrow b$

- Al conjunto A se le llama dominio de la función
- Al conjunto B se le llama contradominio de la función.

ejemplo

Área del circulo de radio (r)

$A = \pi r^2$

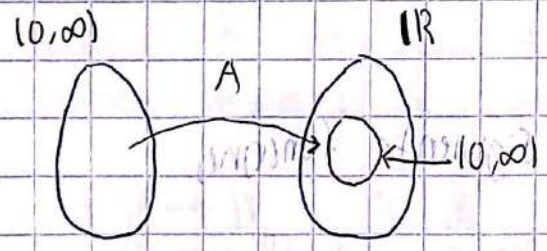
$A(r) = \pi r^2$

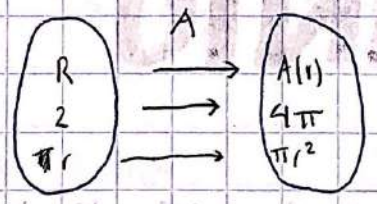
El dominio de la función Área de un circulo es $(0, \infty)$.

El contradominio de la función $A(r) = \pi r^2$ es $\mathbb{R}$.

$A: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$r \rightarrow A$



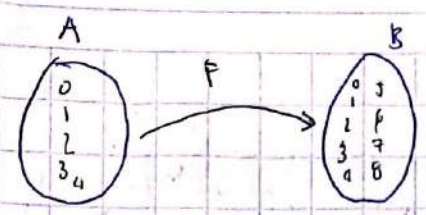


$A(2) = \pi r^2 = 4\pi$

$A: (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$

$r \longrightarrow \pi r^2$

$A(r) = \pi r^2 = \quad r \in \mathbb{R}$



$F: A \longrightarrow B$

$x \longrightarrow x+1$

A= Dominio de F

B = Contradominio de F

C= Imagen de F

$f(0) = 0+1 = 1$

$f(1) = 1+1 = 2$

$f(2) = 2+1 = 3$

$f(3) = 3+1 = 4$

$f(4) = 4+1 = 5$

$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ = Imagen de C

$f(A) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$f(A) = \{b \in B \mid b = f(a),\ a \in A\}$

Si $f: A \rightarrow B$ una función la imagen de A bajo f esta dada por $f(A) = \{b \in B \mid b = f(a),\ a \in A\}$

$A: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ | Dominio de $A = (0, \infty)$

$A(1) = \pi, 3$ | Contradominio de $A = \mathbb{R}$

Imagen $(0, \infty)$

DOMINIO DE FUNCIÓN

a) Encuentre el dominio de la siguiente función

① $f: A \longrightarrow B$ Dominio de F $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ $A = \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ $x \in \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R}$

② $f: A \longrightarrow B$ Dominio de f $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 1/x$ $A = \mathbb{R}-\{0\}$ $f(x) = 1/x \quad x \in \mathbb{R} \text{ o } x \neq 0$

$D_F = \mathbb{R}-\{0\}$

③ $f: A \longrightarrow B$ Dominio de f $F: [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x}$ $A = [0,\infty)$ $f(x) = \sqrt{x} \quad x \in [0,\infty)$

$D_F = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

④ $f: A \longrightarrow B$ Dominio de f Dominio de F

$f(x) = 1/x^2-9$ Debemos eliminar los $\mathbb{R}-\{-3,3\}$

$x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2-9=0$

$f: \mathbb{R}-\{-3,3\} \to \mathbb{R}$

$F = 1/x^2-9 \quad x \in \mathbb{R}$

$x \neq -3$

$x \neq 3$

⑤ $f: A \to B$ $f: [2,\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x-2}$ $f(x) = \sqrt{x-2} \quad x \in [2,\infty)$ $D_F = [2,\infty)$

Imagen de una función

Obtener imagen de los siguientes funciones

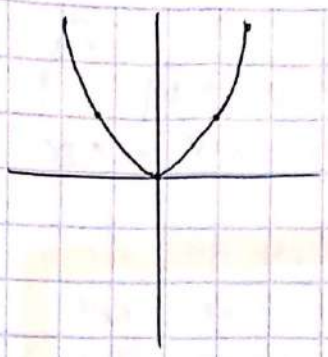
① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $D_F = \mathbb{R}$ $Img = \{f(x) \mid x \in D_F\}$

$f(x) = x^2$ $= \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = ?$

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4

$G_F = \{(x, f(x)) \mid x \in D_F$

$= \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}$



$G_F = (-2, 4)$
$G_F = (-1, 1)$
$G_F = (0, 0)$

$G_F = (1, 1)$
$G_F = (2, 4)$
$Img\ f = [0, \infty)$

TAREA

Obtener imagen y gráfica de $f(x) = 1/x$

Dominio de f

$f = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 1/x \mid x \in \mathbb{R}\ x \neq 0$

$D_F = \mathbb{R} - \{0\}$

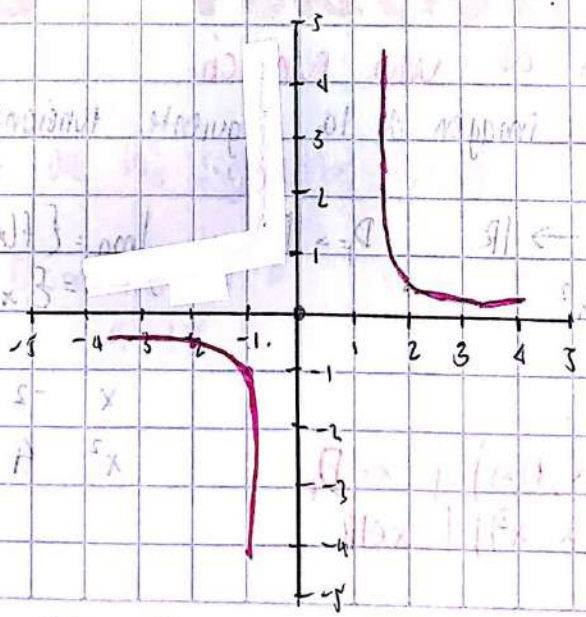
$D_F = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$D_F = x \mid x \neq 0$

$\boxed{\text{Imagen}} = \{ f(x) \mid x \in D_F \}$
$= \{ f(1/x) \mid x \in \mathbb{R} - \{0\} \}$

$\boxed{\text{Gráfica}} = \{ x, f(x) \mid x \in D_F \}$
$\{ x, 1/x \mid x \in \mathbb{R} - (0) \}$

x	f(x)
-2	.5
-1	1
2	.5
3	.3



$G_F = (-2, .5)$
$G_F = (-1, 1)$
$G_F = (2, .5)$
$G_F = (3, .3)$

Obtener el dominio y la imagen de la funcion

$f: A \to B$

$f(x) = 1/x \quad x \in A$

Dominio

$f(x) = 1/x \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Gráfica de f.

$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$

$= \{(x, 1/x) \mid x \in \mathbb{R} - \{0\}\} = ?$

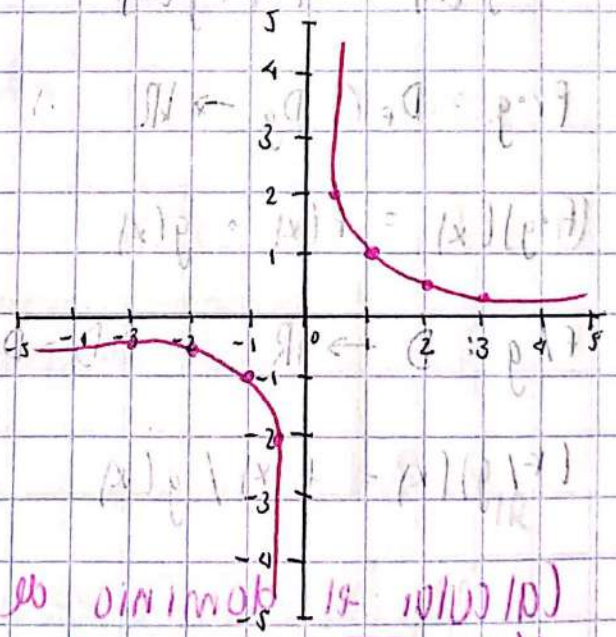
x	-3	-2	-1	-0.5	$.5$	1	2	3
$\frac{1}{x}$	-0.33	$-1/2$	-1	-2	2	1	$1/2$	$1/3$

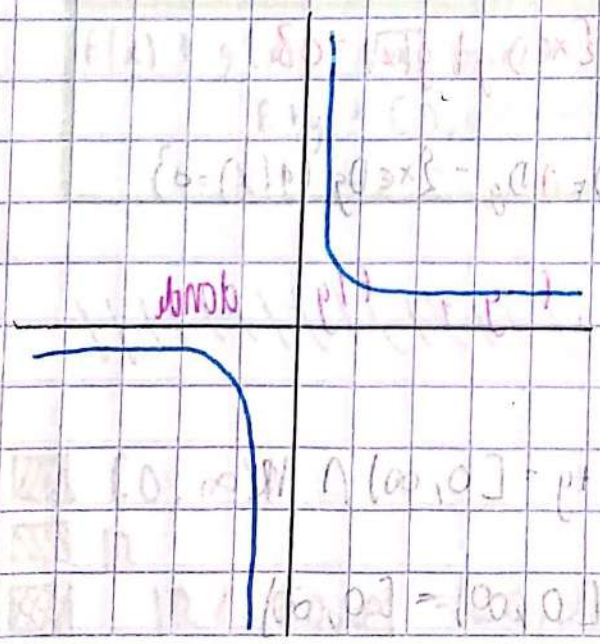
$(-3, -1/3)$ $(.5, 2)$

$(-2, -1/2)$ $(1, 1)$

$(-1, -1)$ $(2, 1/2)$

$(-.5, -2)$ $(3, 1/3)$





$\mathrm{Im} f = -(\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & x \in \mathbb{R} \\ g(x) = 1/x & x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array}}$$

$f(x) + g(x) = x^2 + 1/x$

$\mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

OPERACION ENTRE FUNCIONES

Si $f: D_f \to \mathbb{R}$ y $g: D_g \to \mathbb{R}$ son funciones

$f + g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$

$f + g(x) = f(x) + g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$

$f \cdot g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$

$f / g : D \to \mathbb{R} \qquad D = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$

$(f/g)(x) = f(x) / g(x) \qquad x \in D = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$

Calcular el dominio de $f+g$, $f \cdot g$ y f/g donde
$f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$

$D_f = [0, \infty) \qquad D_g = \mathbb{R} \qquad D_{f+g} = [0, \infty) \cap \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \cap [0, \infty) = [0, \infty)$

Si $f: D_f \to \mathbb{R}$ y $g: D_g \to \mathbb{R}$ son funciones

① $f+g: D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ $\quad x \in D_f \cap D_g$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

② $f \cdot g: D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ $\quad x \in D_f \cap D_g$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

problema

$f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad x \in [0, \infty) \to$ Dominio F

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = x^2$ $\quad x \in \mathbb{R} \to$ Dominio g

$f+g: D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) + g(x) = \sqrt{x} + x^2, \ x \in [0, \infty) \cap \mathbb{R} = [0, \infty) \\ f+g = [0, \infty) \to \mathbb{R} \end{array}}$$

$[0, \infty)$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \cap [0, \infty) = [0, \infty)$

$f \cdot g = x^2 \sqrt{x}$

Si $f: D_F \to \mathbb{R}$ y $g: D_g \to \mathbb{R}$

$\frac{f}{g}: D \to \mathbb{R}$

$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $x \in D$

$$\boxed{D = D_F \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}}$$

problema

$f: [0,\infty] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x}$ $x \in [0,\infty]$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = x^2 - 4$ $x \in \mathbb{R}$

encuentre el dominio de f/g

$D = D_F \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$

$D_F \cap D_g = [0,\infty] \cap \mathbb{R} = [0,\infty]$

$\{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0 = \{2, -2\}$

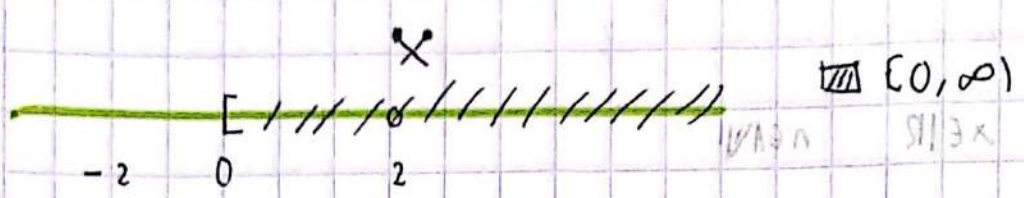
$x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$x - 2 = 0$ $x + 2 = 0$

$\boxed{x = 2}$ $\boxed{x = -2}$

$$D = \underbrace{D_F \cap D_g}_{=[0,\infty)} - \underbrace{\{x \in D_g \mid g(x) = 0\}}_{\{2,-2\}} = [0,\infty) - \{2\}$$

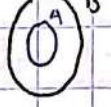


$$\frac{f}{g} : [0,\infty) - \{+2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x^2-4)} \quad : \quad x \in [0,\infty) - \{2\}}$$

FORMULA DE CONJUNTOS

Si $A \subset B$ entonces, $A \cap B = A$



$[2,\infty) \subset \mathbb{R}$ $\qquad$ $[2,\infty) \cap \mathbb{R} = \boxed{[2,\infty)}$

27 · Ago · 2021

Dominio para funciones

$f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x} \quad x \in [0, \infty)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^n \quad x \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = C \quad x \in \mathbb{R}$

a) Obtener el dominio de las siguientes funciones $f: A \to \mathbb{R}$

① $f(x) = \sqrt{x-3}$

$D_F = [3, \infty)$

$f(x) = \sqrt{x-3}$

$x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

$[3, \infty) \quad D_F = [3, \infty) \quad f: [3, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x-3} \quad x \in [3, \infty)$

② $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ $\quad D_F = \mathbb{R} - \{3\}$

$x - 3 = 0 \quad x \in \mathbb{R} - \{3\}$

$x = 3$

③ $f(x) = \sqrt{2-x} \quad D_F = (-\infty, 2]$

$f(x) = \sqrt{2-x}$

$2 - x \geq 0$

$2 \geq x$

$x \leq 2$

$f: (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{2-x} \quad x \in (-\infty, 2]$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ $\qquad D_F : (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

(5) $f(x) = \overset{(h)}{\sqrt{4-x}} + \overset{(g)}{\sqrt{x-2}}$ $\qquad D_F = [2, 4]$

$D_h = (-\infty, 4]$ $\qquad f(h) + g(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-2}$ $\qquad x \in (-\infty, 4] \cap [2, \infty)$

$D_g = [2, \infty)$

$h + g = D_F \cap D_g$

$[2, \infty)$ $\qquad [2, \infty) \cap (-\infty, 4) = [2, 4]$

$[-\infty, 4]$

(6) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 7x + 12}$

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad 6 - x \geq 0 = 6 \geq x$ o $6 \leq x$

$f(x) = \sqrt{6} - x$ $\qquad (-\infty, 6)$ $\qquad D_F = (-\infty, 6]$

$g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad D_g = \mathbb{R}$, todos tienen dominio $\mathbb{R}$

$g(x) = x^2 - 3x + 2$

$D = D_F \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$

$D = (-\infty, 6] \cap \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ $\qquad (x - 1) = 0$ $\qquad D = (-\infty, 6] \cap \mathbb{R} - \{1, 2\}$

$\boxed{x_1 = 1}$ $\qquad D = (-\infty, 6] - \{1, 2\}$

$(x - 1)(x - 2)$ $\qquad x - 2 = 0$

$\boxed{x_2 = 2}$

⑦ $\dfrac{x^2}{3x^2+5x+2} = f(x)$

$h: \mathbb{R} - \mathbb{R}$

$f(h) = x^2$

$g: \mathbb{R} - \mathbb{R}$

$f(g) = 3x^2+5x+2 \quad x \in \mathbb{R}$

$3x^2+5x+2$

$(3x+2)(x+1)$

$3x+2=0 \qquad x+1=0$

$3x=-2 \qquad x=-1$

$x = -\dfrac{2}{3}$

$D = D_h \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0$

$D_h \cap D_g = \mathbb{R} \cap x \in \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$D = \mathbb{R} - \{-2/3, -1\}$

$D = \mathbb{R} - \{-2/3, -1)$

$D = x \in \mathbb{R} - \{-2/3, -1\}$

/

31/Ago/2021

COMPOSICION FUNCIONES

Recordemos que

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

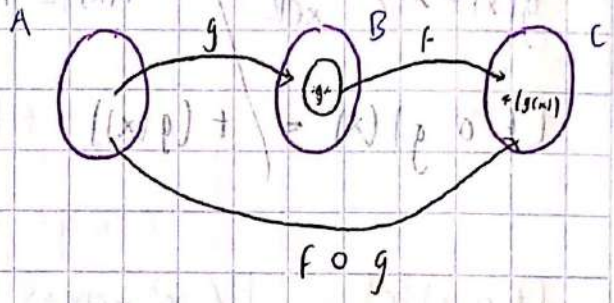
$f(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $g(x) = x-3 \quad x \in \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow g \longrightarrow x-3 \longrightarrow f \longrightarrow (x-3)^2 = f \circ g$$

$$x \longrightarrow f \longrightarrow x^2 \longrightarrow g \longrightarrow x^2-3 = g \circ f$$

Si $g: A \to B$ $\qquad$ $g: C \to D$

$x \to f(x)$ $\qquad$ $x \to g(x)$



Definición

$f \circ g : A \longrightarrow D$

$x \longrightarrow f(g(x))$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

① Ejemplo

Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = x-3 \quad x \in \mathbb{R}$

Obtener $f \circ g$ y $g \circ f$

Respuesta

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2$

$$\boxed{f \circ g = (x-3)^2}$$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ $\quad$ $g(x) = x-3 \quad x \in \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$
$$= g(x^2)$$
$$= g(x^2-3)$$

$$\boxed{g \circ f(x) = x^2-3}$$

Ejercicio

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = x-2 \quad x \in \mathbb{R}$ $\quad$ $f(x) = 1/x^2+1 \in \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-2) = \frac{1}{(x-2)^2+1} = \boxed{\frac{1}{x^2-4x+5}}$$

$(f \circ g)(x) = 1/x^2-4x+5 \quad | \quad (f \circ g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad | \quad x^2-4x+5 \neq 0$

f y g son funciones inversas

$x = (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

$f(x) = x^2 \quad x \in [0, \infty)$

$g(x) = \sqrt{x} \quad x \in [0, \infty)$

probar $(f \circ g)(x) = x \qquad (g \circ f)(x) = x \qquad x \in [0, \infty)$

$(f \circ g) = f(g(x)) = x$

$= f(\sqrt{x})$

$= (\sqrt{x})^2$

$(g \circ f) = g(f(x)) = |x|$

$= g(x^2)$

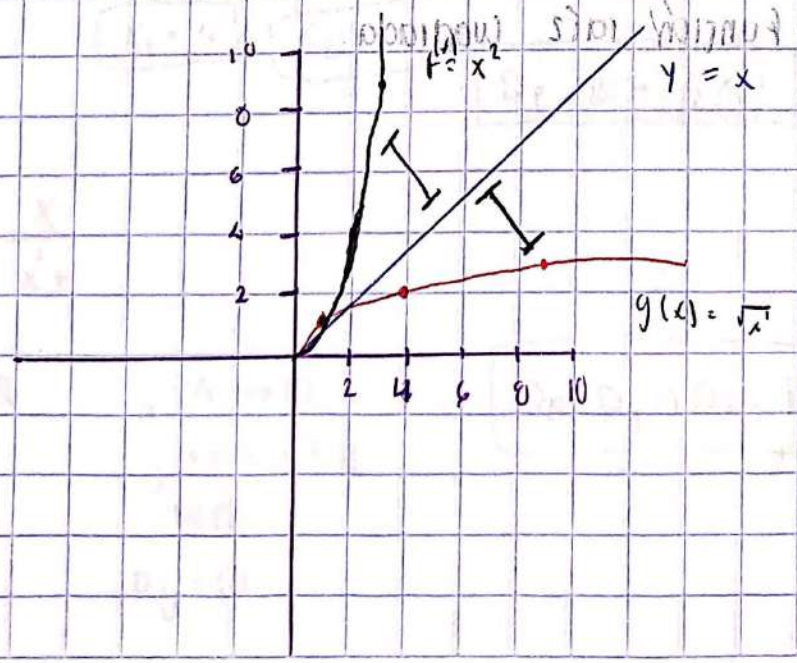
$= \sqrt{(x)^2}$

$|x| = \begin{cases} x & \text{si } \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Gráfica de funciones inversas

X	0	1	2	3
x^2	0	1	4	9

X	0	1	4	9
$\sqrt{x}$	0	1	2	3



Graficar

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= 2x - 3 \\ g(x) &= \frac{x+3}{2} \end{aligned}}$$

Funciones especiales.

$f(x) = c$ $\quad c \in \mathbb{R}$ Función constante

$f(x) = x$ Función identidad

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$ Polinomio grado n

$f(x) = |x|$ Función valor absoluto

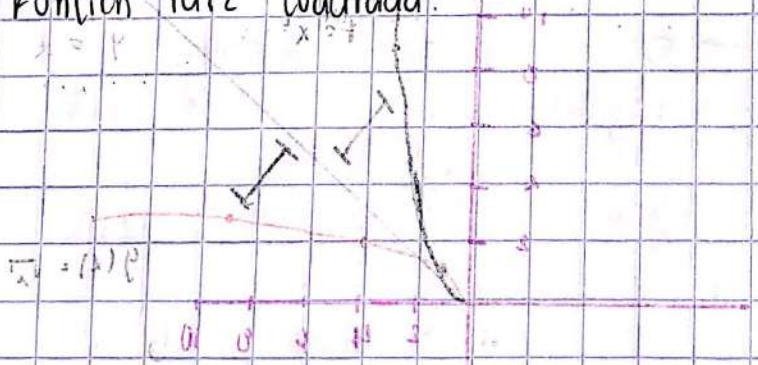
$f(x) = \operatorname{Sen} x$

$f(x) = \operatorname{Cos} x$

$f(x) = \tan x$

El dominio de todas estas funciones es $\mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x}$ Función raíz cuadrada.



LIMITES DE FUNCIONES

Noción intuitiva | Consideramos la función $f(x) = x^2$ $x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

$x \in D_F = \mathbb{R}$ $\quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$a \in D_F = \mathbb{R}$

$L \in \mathbb{R} \rightarrow$ Contradominio

Se lee:
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a "a" es L.

① $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

② $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$

③ $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

④ $\lim_{x \to 2} 1/x = 1/2$

⑤ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 3} = \frac{0}{1}$

⑥ $\lim_{x \to 6} 1/x = 1/6$

⑦ $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

⑧ $\lim_{x \to 0} 1/x = ? \rightarrow$ no existe

$x \to 0^- = -\infty$

$x \to 0^+ = +\infty$

⑨ $\lim_{x \to 3} 2 = 2$

$f(x) = 2$

$a = 3$

$$\boxed{\lim_{x \to a} C = C}$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} x^2 = a^2}$$

FORMULAS Y PROPIEDADES

1) $\lim_{x \to a} C = C$

2) $\lim_{x \to a} x = a$

3) $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$

4) $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

5) $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to} g(x) = L_2$

entonces,

① $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim f(x) + \lim g(x) = L_1 + L_2$

② $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L_1 * L_2$

③ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{f(g)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ solo cuando $L_2 \neq 0$

④ $\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = \lim_{x \to a} c \cdot \lim_{x \to a} f(x) =$

$\boxed{1} = \frac{1}{1} = C \cdot \lim_{x \to a} f(x)$

Ejemplo ↓
Utilice las propiedades de los límites para calcular.

1) $\lim_{x \to 3} x^2 - 5x = 0 = \lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} 5x = 3^2 - \lim_{x \to 3} 5 \cdot \lim_{x \to 3} x$

$= 9 - 5 \cdot 3 = 9 - 15 = -6$

$$\boxed{\lim_{x \to 3} x^2 - 5x = -6}$$

2) $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4} = \frac{\lim_{x \to 9} \sqrt{x}}{\lim_{x \to 9} x^2 - 4} = \frac{\sqrt{9}}{\lim_{x \to 9} x^2 - \lim_{x \to 9} 4}$

$= \frac{3}{9^2 - 4} = \frac{3}{81 - 4} = \frac{3}{77}$

3) $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{\lim_{x \to 2} x - 2}{\lim_{x \to 2} x^2 - 5x + 6} = \frac{\lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 2}{\lim_{x \to 2} x^2 - 5 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 6}$

$= \frac{2 - 2}{2^2 - 5(2) + 6} = \frac{0}{0}$ * Indeterminado

$= \lim_{x \to 2} \frac{1(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x - 3)}$

$= \lim_{x \to 2} 1 \Big/ \lim_{x \to 2} x - 3 = \frac{1}{-1} = \boxed{-1}$

Utilice las propiedades de los limites para calcular

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-7x+12} = \frac{\lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 3}{\lim_{x\to 3} x^2 - 7\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 12} = \frac{3-3}{3^2-7(3)+12} =$

$= \frac{0}{9-21+12} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-7x+12} = \frac{x-3}{(x-3)(x-4)} = \frac{1}{x-4}$

$= \lim_{x\to 3} 1 \Big/ \lim_{x\to 3} x-4 = \frac{1}{-1} = \boxed{-1}$

b) $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\lim_{x\to 9}\sqrt{x} - \lim_{x\to 9} 3}{\lim_{x\to 9} x - \lim_{x\to 9} 9} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9}$

$= \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$= \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{\lim_{x\to 9} 1}{\lim_{x\to 9}\sqrt{x} + \lim_{x\to 9} 3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \cdot 1 =$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)} = \frac{(\sqrt{x})^2 - (3)^2}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x - 9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{\lim_{x \to 9} 1}{\lim_{x \to 9} \sqrt{x} + \lim_{x \to 9} 3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x - 3}{x^2 - 7x + 12} = \frac{\lim_{x \to 5} x - \lim_{x \to 5} 3}{\lim_{x \to 2} x^2 - 7 \lim_{x \to x} x + \lim_{x \to 5} 12}$$

$$= \frac{5 - 3}{5^2 - 7(5) + 12} = \frac{2}{25 + 12 - 35} = \frac{2}{2} = 1$$

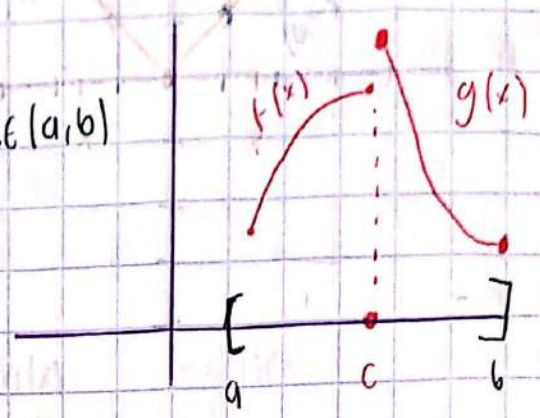
FUNCIONES DEFINIDAS POR INTERVALOS Y TRAMOS

para estas funciones

$[a,b]$

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$a<b$ y $c \in (a,b)$



$$h(x) \begin{cases} f(x) & x \in [a,c] \\ g(x) & x \in (c,b] \end{cases}$$

Generalmente estamos interesados en encontrar el límite

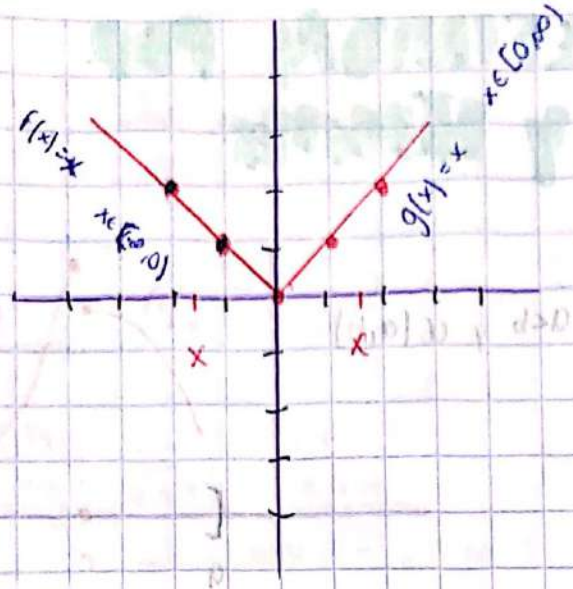
$$\lim_{x \to c} h(x)$$

ejemplo

Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |x|$ $x \in \mathbb{R}$, calcular el límite $\lim_{x \to 0} h(x)$

respuesta

$$h(x) = |x| \begin{cases} x & \text{si es } x \in [0, \infty) \\ -x & \text{si } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$



x	-2	-1	0	1	2
|x|	2	1	0	1	2

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = -\lim_{x \to 0^-} x = -0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^+} h(x) = 0$$ ∴ el limite $h(x)$ si existe y es $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$

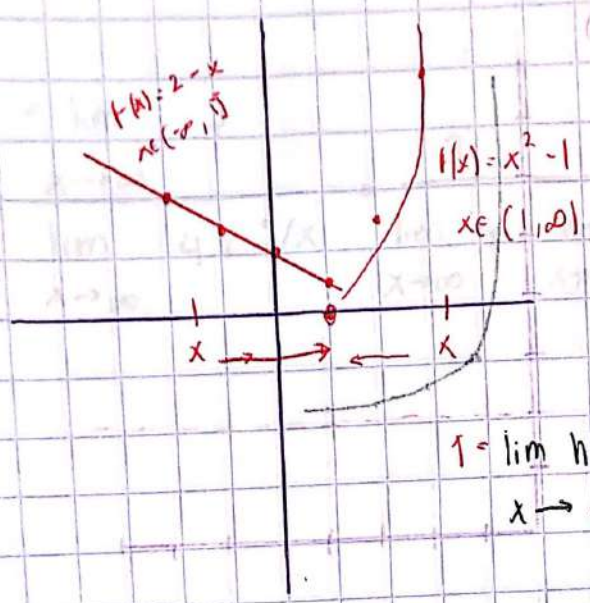
ejemplo

Sea $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) \begin{cases} 2-x & x \in (-\infty, 1] \\ x^2-1 & x \in (1, \infty) \end{cases}$

determine si existe el $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$

respuesta

Veamos si $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$ $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$ existen



x	-2	-1	0	1
$2-x$	4	3	2	1

x	1	2	3
x^2-1	0	3	8

$1 = \lim\limits_{x \to 1^-} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = 0$ NO existe

$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2-x = \lim\limits_{x \to 1^-} 2 - \lim\limits_{x \to 1^-} x = 2-1 = 1$

$0 = 0$ mil $\infty \leftarrow x$ $\quad 0 = \frac{1}{n^x}$ mil $\leftarrow x$ $\quad \infty = {}^{n}x$ mil $\infty \leftarrow x$

$\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - 1 = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - \lim\limits_{x \to 1^+} 1 = 1 - 1 = 0$

LIMITES AL ∞

geometricamente

① Calcular $\lim_{x \to \infty} x^2$

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$$

② $\lim_{x \to \infty} 2 + \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to \infty} 2 + 1/x = 2$$

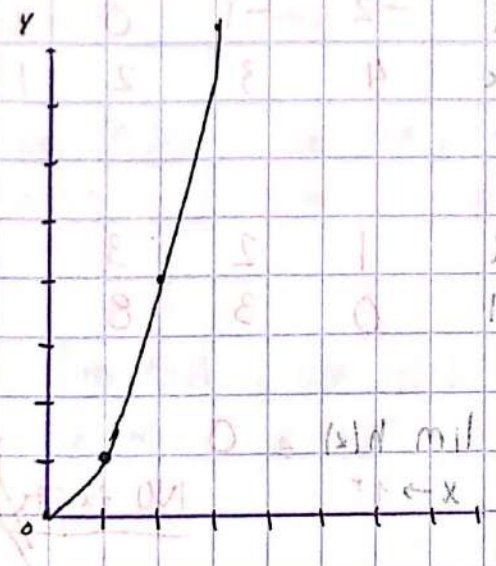
①

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25

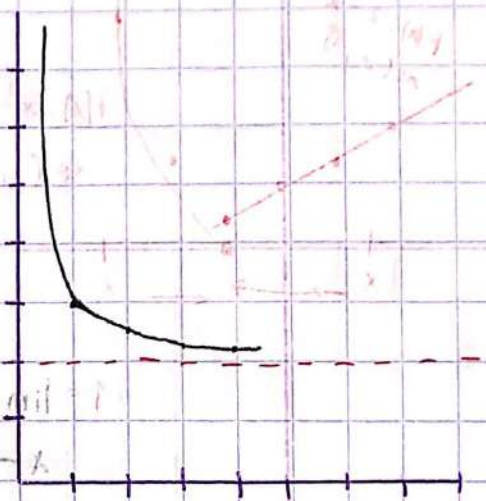
②

x	1	2	3	4	5
$2 + 1/x$	3	2.5	2.33	2.25	2.2

①



②



FORMULAS

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} c = c$$

$n \in \mathbb{N}$

Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{4x^2+5x} = \frac{\lim_{x\to\infty} 3x^2}{\lim_{x\to\infty} 4x^2+5x} = \frac{3\lim_{x\to\infty} x^2}{4\lim_{x\to\infty} x^2 + 5\lim_{x\to\infty} x}$

$= \frac{3\cdot\infty}{4\cdot\infty+5\infty} = \frac{\infty}{\infty+\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ = Indeterminado

Se elimina la indeterminación

$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{4x^2+5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}}{\frac{4x^2+5x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} = \frac{3}{4+\frac{5}{x}}$

$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3}{\lim_{x\to\infty} 4+5/x} = \frac{3}{\lim_{x\to\infty} 4 + \cancel{\lim_{x\to\infty} 5\lim} 1/x} = \boxed{\frac{3}{4}}$

LIMITES — QUE INVOLUCRAN COMPOSICION DE FUNCIONES

Ejemplos de composiciones

$f(x) = (2x+3)^2$	$F(x) = [g(x)]^2$
$f(x) = \sqrt{x-4}$	$F(x) = \sqrt{g(x)}$
$f(x) = 1/(5x-2)^2$	$F(x) = (g(x))^{-2}$
$f(x) = \sqrt{5-x^2}$	$F(x) = \sqrt{g(x)}$
$f(x) = \log x^2$	$F(x) = \log[g(x)]$

FORMULAS

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)} \rightarrow \text{solo si } \lim_{x \to a} f(x) \in [0, \infty)$$

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{1/2} = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{1/2}$$

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen}(f(x)) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$$

$$\lim_{x \to a} \log(f(x)) = \log\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 0} (9-x^2)} = \sqrt{9-0} = \sqrt{9} = 3$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \sqrt{9-x^2} = 3$$

$$\lim_{x\to 2} (9-x^2)^3 = \left(\lim_{x\to 2} 9 - \lim_{x\to 2} x^2\right)^3 = (9-4)^3 = (5)^3 = 125$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} (9-x^2)^3 = 125$$

$$\lim_{x\to 1} \cos(x^2-1) = \cos\left(\lim_{x\to 1} x^2-1\right) = \cos(1^2-1) = \cos(0)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} \cos(x^2-1) = 1$$

$$\lim_{x\to \pi/2} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x^2 = \lim \operatorname{sen}^2 x + \lim \operatorname{sen} x^2$$

$$= \lim_{x\to \pi/2} [\operatorname{sen} x]^2 + \lim_{x\to \pi/2} \operatorname{sen} x^2 = \left[\lim_{x\to \pi/2} \operatorname{sen} x\right]^2 + \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to \pi/2} x^2\right)$$

$$= \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)^2 + \operatorname{sen}\left(\pi/2\right)^2 = 1^2 + \operatorname{sen} \pi^2/4 = 1 + \operatorname{sen}(2.47)$$

$$= 1 + 0{,}62 = 1.62$$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 0^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{0^2 - 9} = \sqrt{-9}$$

aplicando propiedades

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{\lim_{x \to 0} x^2 - 9} = \sqrt{-9} = -9 \in D_{\sqrt{x}}$$

EJEMPLO

① $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{\lim_{x \to \infty} (x-3)^2} = \frac{1}{\left(\lim_{x \to \infty} x-3\right)^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

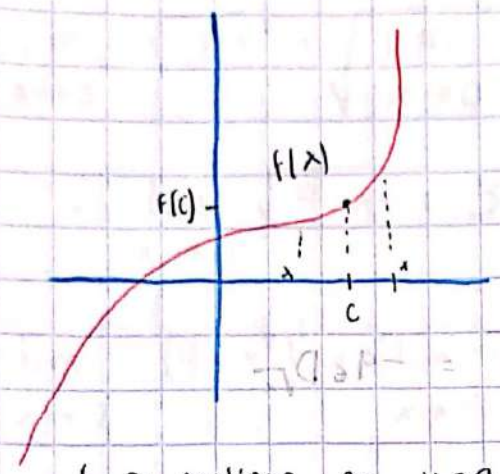
② $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} = \frac{(-\infty)^3 - 1}{(-\infty)^3 + 1} = \frac{-\infty - 1}{-\infty + 1} = \frac{-\infty}{-\infty} = \text{Indeterm.}$$

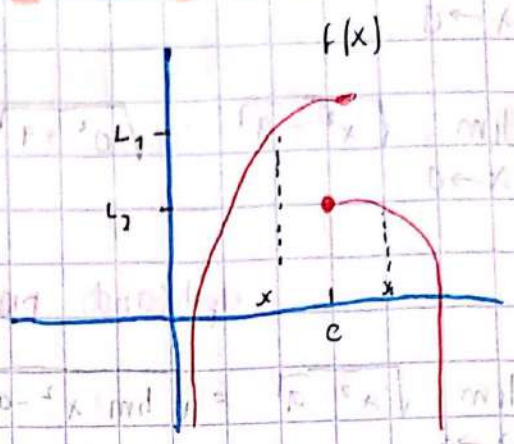
eliminando indeterminación

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} = \frac{\frac{x^3 - 1}{x^3}}{\frac{x^3 + 1}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - 1/x^3}{1 + 1/x^3} = \frac{\lim_{x \to -\infty} 1 - \lim_{x \to -\infty} 1/x^3}{\lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to -\infty} 1/x^3}$$

$$= \frac{1 - 0}{1 + 0} = \frac{1}{1} = 1$$

FUNCIONES CONTINUAS





f es continua en $x=a$

$\lim_{x\to a} f(x) = f(c) = L$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1 \neq \lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$

f no es continua en $x=a$

Def: Decimos que una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua en $x=a\in D_f$, si se cumplen las siguientes condiciones

① f está definida en $x=a$ ($a\in D_f$ y puede evaluar a $(f(a))$)

② $\lim_{x\to a} f(x)$ existe

③ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Función Continua en un Intervalo

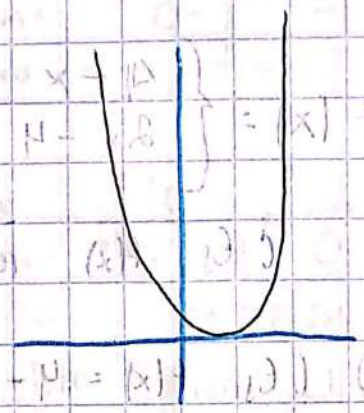
Decimos que una función es continua en un intervalo I, si es continua en todos los puntos que pertenecen al intervalo I.

Si $f: I \to \mathbb{R}$
si f es continua en todos los puntos de $a \in I$

Ejemplo:

¿Es $f(x) = x^2$ $x \in \mathbb{R}$ una función continua en $x = 2$?

En este caso $a = 2$
Debemos demostrar que:



① f está definida en $x = 2$ ya que
$2 \in D_f = \mathbb{R}$
$f(2) = 2^2 = 4$

② $\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$ → Sí existe

③ $\lim_{x \to 2} x^2 = f(2)$

$4 = 2^2$
$4 = 4$

④ Conclusión

$f(x) = x^2$ $x \in \mathbb{R}$ es continua en $x = 2$

TIPOS DISCONTINUIDAD

Falla ①

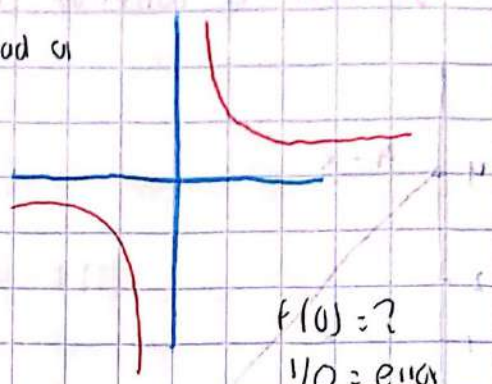
es discontinua en $x=0$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 1/x \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Discontinuidad al infinito

$\lim_{x \to 0^+} 1/x = \infty$



$f(0) = ?$

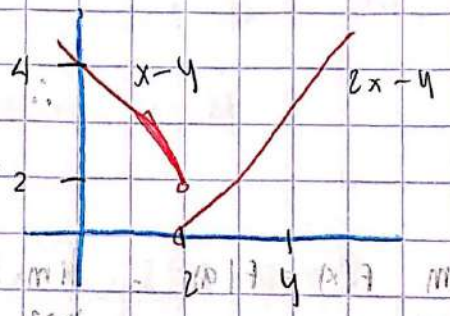
$1/0 =$ error

Falla ②

es discontinua en $x=2$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{si } x \leq 2 \\ 2x-4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



"Discontinuidad (e)"
"Salto"

$2 = \lim_{x \to 2^-} 4-x \neq \lim_{x \to 2^+} 2x-4 = 0$

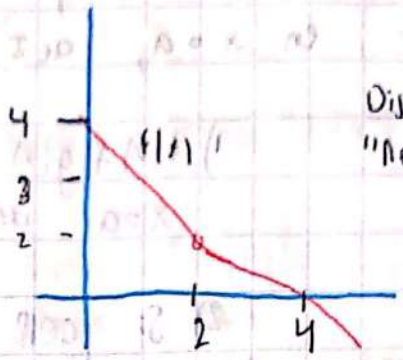
NO EXISTE

es discontinua en $x=2$

Falla (3)

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



Discontinuidad "Removible"

$$2 = \lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$$

EJEMPLO FUNCIONES CONTINUAS

$f: I \to \mathbb{R}$ y $a \in I$ intervalo

F es continua en $x=a$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(1) $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ $\quad f(x) = x^n \to f(a) = a^n$

(2) $\lim_{x \to a} c = c$ $\quad f(x) = c \to f(a) = c$

(3) $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$

(4) $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$

TEOREMA: Si $f: I \to \mathbb{R}$ y $g: I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en $x = a$, $a \in I$ entonces

1) $f(x) + g(x)$ es una función continua en $x = a$ $a \in I$

2) Si $c \in \mathbb{R}$ $c f(x)$ es una función continua en $x = a$ $a \in I$

3) $f(x) \cdot g(x)$ es una función continua en $x = a$ $a \in I$.

4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una función continua en $x = a$ $a \in I$ siempre que $g(a) \neq 0$

EJEMPLO

Si $f(x) = x^2$ $x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ $x \in \mathbb{R}$

Son funciones continuas en $x = a$ $a \in \mathbb{R}$

ahora $h(x) = f(x)\, g(x)$

$h(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ es continua en $x = a$ $a \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ f es continua en $x = a$

$\lim_{x \to a} h(x) = h(a) = \lim_{x \to a} x^2 \operatorname{sen} x = a^2 \operatorname{sen} a$

$$\lim_{x \to \pi} x^2 \operatorname{sen} x = \pi^2 \operatorname{sen} \pi = \pi^2 (0)$$

EJEMPLO Determine si la función $h(x) = (1-x^2) \operatorname{sen} x$ es continua en $x=a$ $a \in \mathbb{R}$

Respuesta $f(x) = 1 - x^2$ $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \operatorname{sen}$ $x \in \mathbb{R}$ continua en $x=a$

por lo tanto $f_1 - f_2 = f(x) - f_2(x) = 1 - x^2$ es continua en $x = a$

$\therefore$ $h(x) = f(x) \cdot g(x) = (1-x^2) \operatorname{sen} x$ es continua en $x=a$

$$\lim_{x \to a} (1-x^2) \operatorname{sen} x = (1-a^2) \operatorname{sen} x \quad a \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO Determine si la función $h(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ $x \in \mathbb{R}$ es continua en $x \to a$

$f(x) = x$

$g(x)$ $1-x^2$

$h(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ es continua en $x \to a$ si

$g(a) = 0 \leftrightarrow 1 - a^2 = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} 1 - a = 1 \\ 1 + a = -1 \end{array}}$

$\therefore$ $h(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ es continua en $x \to a$ $a \in \mathbb{R}$

$a \neq 1$ y $a \neq -1$

REPASO

(1)

Si $f(x) \begin{cases} x & x \leq 0 \quad (-\infty, 0] \\ x^2 & 0 < x < 2 \quad (0,2) \\ 6-x & x \geq 2 \quad [2,\infty) \end{cases}$

Determine si existen los límites

¿Es continua en 0? sí

1) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0$

$0 \in D_F = \mathbb{R}$ (1)

$f(0) = 0$

2) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (2)

3) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 4$

$4 \in D_F = \mathbb{R}$

$f(4) = 4$

$\lim f(x) = 4$

4) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} 6 - x = 6 - 2 = 4$

5) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

6) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

$f(x) = x$ $\quad$ $f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = 6 - x$

$\mathbb{R}$

$x \leq 0$ $\quad$ $0 < x < 2$ $\quad$ $x \geq 2$

$(-\infty, 0]$ $\quad$ 0 $\quad$ $(0,2)$ $\quad$ 2 $\quad$ $[2, \infty)$

Funciones Continuas Que Involucra Composiciones

Recordemos que:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Teorema Si g es continua en $x=a$ y f es continua en $g(a)$, entonces $(f \circ g)(x)$ tambien es continua en $x=a$

Con Limites

Es

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

$$\lim_{x \to g(a)} f(x) = f(g(a))$$

ENTONCES

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)}$$

Ejemplos

$$\lim_{x \to a} [g(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} g(x)\right]^n = [g(a)]^n$$

Siempre que $\lim_{x \to a} g(x) \geq 0$

$$\lim_{x \to a} \sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Siempre que $g(a) \geq 0$

EJERCICIO

Determine si $h(x) = (x^2+1)^3$ es continua en $x=4$

$$\lim_{x\to 4} h(x) = \lim_{x\to 4} (x^2+1)^3$$

$$\lim_{x\to 4} h(x) = h(4)$$

$$= \left(\lim_{x\to 4} x^2+1\right)^3 = (4^2+1)^3 = h(4$$

(2) Determine si $h(x) = 1-\sqrt{1-x}$ es continua en $x=0$

$$\left(\lim_{x\to 0} h(x) = h(0)\right)$$

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \left[1-\sqrt{1-x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 - \lim_{x\to 0} \sqrt{1-x}$$

$$= 1 - \sqrt{1-x}_{x\to 0}$$

$$= 1-\sqrt{1-0}$$

$$= h(0) = \lim_{x\to 0} h(x) = h(0) = \text{Continua en } x=0$$

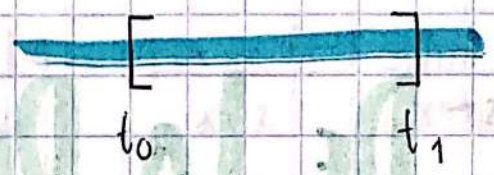
*Es continua si y solo si $a \leq 1$ $[-\infty, 1]$

DERIVADA

INTRODUCCIÓN

Variables

$t \rightarrow$ Tiempo
$x \rightarrow$ Posición de P
$x(t) \rightarrow$ Posición de P en el instante de tiempo
$x(t_0) \rightarrow$ Posición de P al inicio (t_0)
$x(t_1) \rightarrow$ Posición de P al final (en t_1)



t_0 inicio en $[t_0, t_1)$
t_1 final en $[t_0, t_1]$

Velocidad promedio $V = d/t = \dfrac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$ (tiempo intervalo)

en $t_0 = 12$ hrs $\quad x(t_0) = x(12) = 0$ km
$t_1 = 20$ hrs $\quad x(t_1) = x(20) = 40$ km

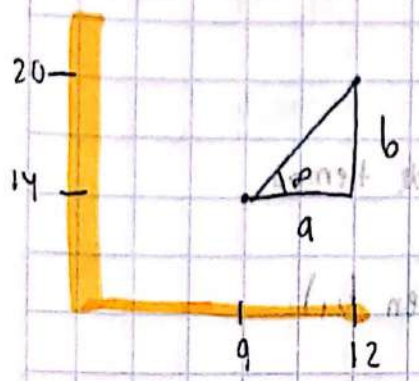
Calcular velocidad promedio

$$V_p = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{40 - 0}{20 - 12} = \frac{40}{8} = 5 \text{ km/h}$$

Encuentra la temperatura promedio en [9, 12]

$t_0 = 9$ $\quad T(9) = 14°C$

$t_1 = 12$ $\quad T(12) = 20°C$



$b = 20 - 14$

$a = 12 - 9$

$$T(\infty) = \frac{20-14}{12-9} = \frac{6}{3} = 2\frac{°C}{h}$$

Enfoques De La Derivada

a) La derivada de una función f en un valor del dominio de f.

b) La derivada como función (dada f(x), se obtiene f(x))

$$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$$

Derivada en un punto

Dada $f: I \to \mathbb{R}$ y supongamos que $a \in I$.

" La derivada de f en $x = a$ se define por:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

* Tiene que existir el límite.

Cuando exista denotaremos la derivada de f en $x=a$ por $f'(x)$

F es derivada en $x=a$ $\longrightarrow$ Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

$F: I \to \mathbb{R}$

EJEMPLO

Determine si $f: [-\infty, \infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es derivable en $x=2$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 2+2 = 4$$

EXISTE

Determine si $f(x) = x^3$ es derivada $x=3$ con el mismo intervalo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = x^3-27 / x-3 = \frac{0}{0}$$

$a=3$

$f(x) = x^3$

$f(a) = f(3) = 3^3 = 27$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-3^3}{x-3} = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3} (x^2+3x+9) = 9+9+9 = 27$$

$$\boxed{f'(3) = 27}$$

Determine si $f(x) = \sqrt{x}$ es derivable en $x = 4$

Formula

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$a = 4$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(a) = \sqrt{a} \leftrightarrow f(4) = \sqrt{4}$

$f(4) = 2$

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (\sqrt{x} - 2) \Big/ \lim_{x \to 4} (x - 4)$$

$$= \frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \frac{0}{0} \quad \text{IND.}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \to} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

$f'(4) = 1/4$

Determine si $f(x) = 1/x$ es derivable en $x = 0$

$a = 0$

$f(x) = 1/x$

$f(a) = 1/a$

$f(0) = 1/0$ error

$$\lim_{x \to 0} \frac{1/x - 1/0}{x - 0}$$ imposible de derivar

$f(x) = 1/x$ no es derivable en 0.

Determine si $f(x) = |x|$ es derivable en $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{|0|}{0} = \frac{0}{0}$$ INDETERMINADA

El limite $\frac{|x|}{x} \lim_{x \to 0}$ se obtiene mediante

$\lim_{x \to 0^-}$ y $\lim_{x \to 0^+}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$-1 = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

No existe y no es derivable

Determine si $f(x) = x^2$ es derivable en $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x$$

$$\lim_{x \to 0} x = 0$$

Derivada Como Función

Introducción

Si $f(x) = x^3 \quad x \in \mathbb{R}$

entonces $f'(x) = 3x^2 \quad x \in \mathbb{R}$

Veamos de donde sale esta formula

Si $f: I \to \mathbb{R} \quad I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x^3 \quad x \in \mathbb{R}$

Encuentra la derivada de f en $x = x_0$, donde x_0 es cualquier punto en $I = \mathbb{R}$

Solución

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(a)}{x - x_0} = f'(a)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \frac{x_0^3 - x_0^3}{x_0 - x_0} = \frac{0}{0}$$

Eliminar indeterminación

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} x^2 + x x_0 + x_0^2 = x_0^2 + x_0 x_0 + x_0^2 = \boxed{3x_0^2} \text{ Existe !!}$$

$f(x) = x^2$, Determine si existe la derivada en $x = x_0$ donde $x_0 \in \mathbb{R}$

Solución

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(a)}{x - x_0} = f'(x)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x_0 - x_0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 = x_0 + x_0 = \boxed{2x_0}$$

$\sqrt{x}$ determine si la derivada existe en $x = x_0$ donde $x_0 = [0, \infty)$

Solución

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(a)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0}}{x_0 - x_0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

FORMULAS

Si $f(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$
$f'(x) = nx^{n-1}$

Si $f(x) = C$ $(x \in \mathbb{R})$
$f'(x) = 0$

Si f y g son funciones derivables en un intervalo I, entonces $f+g$, $f-g$, y $f \cdot g$ son derivables en I.

① $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
② $(f-g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
③ $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
④ $\left(\frac{f}{g}\right)$ es derivable $I - \{x \in I \mid g(x) = 0\}$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(Cf)'(x) = C \cdot f'(x) + (C) f(x)$$

$$(Cf)'(x) = Cf'(x)$$

Obten la derivada de $f(x) = x^6 + 4x + 2$

$$f(x)' = (x^6 + 4x + 2)'$$
$$= (x^6)' + (4x)' + (2)'$$
$$= 6x^5 + 4(x)' + 0$$
$$= 6x^5 + 4$$

Obten la derivada de $f(x) = x^2(x^2 + x)$

$$f'(x) = [x^3(x^2 + x)]$$
$$= (x^3)(x^2 + x)' + (x^3)'(x^2 + x)$$
$$= x^3[2x + 1] + 3x^2(x^2 + x)$$
$$= 2x^4 + x^3 + 3x^4 + 3x^3$$
$$= 5x^4 + 4x^3$$

Obten la derivada $h(x) = x^3 / x^2 - 1$

$$h'(x) = (x^2 - 1)(x^3)' - x^3(x^3 - 1)' / (x^2 - 1)^2$$
$$h'(x) = (x^2 - 1)(3x^2) - x^3(2x - 0) / (x^2 - 1)^2$$
$$= 3x^4 - 3x^2 - 2x^4 / (x^2 - 1)^2$$
$$= x^4 - 3x^2 / (x^2 - 1)^2$$

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$f(x) = x^{-2}$ $\quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad f'(x) = -2x^{-2-1}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$f(x) \quad x^{-2}$ $\quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad f'(x) = -2x^{-3}$

$f(x) = 1/x^2$ $\quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad f'(x) = -2/x^3$

2) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad x \in [0, \infty)$

$f(x) = (x)^{1/2}$ $\quad x \in [0, \infty)$ $\quad f'(x) = 1/2\,(x)^{1/2 - 1}$

$f'(x) = 1/2\, x^{-1/2}$

$f'(x) = 1/2 \frac{1}{x^{1/2}} = 1/2\sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad x \in (0, \infty)$

FORMULAS

$F(x) = \text{Sen } x$ $\quad f'(x) = \text{Cos } x$

$F(x) = \text{Cos } x$ $\quad f'(x) = -\text{Sen } x$

Ejemplo → Derive las siguientes funciones

$h(x) = \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\text{Sen } x}_{g(x)}$

$h'(x) = \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{(\text{Sen } x)}_{g'} + \underbrace{(x^2)'}_{f'} \underbrace{\text{Sen } x}_{g} = x^2 \cos x + 2x \text{ Sen } x$

Calcula la derivada

$$g(x) = \frac{3x-7}{x^2+5x-4}$$

$$g'(x) = \left(\frac{3x-7}{x^2+5x-4}\right)' = \frac{(x^2+5x-4)(3x-7)' - (3x-7)(x^2+5x-4)'}{[x^2+5x-4]^2}$$

$$= \frac{(x^2+5x-4)(3) - (3x-7)(2x+5)}{(x^2+5x-4)^2} = \frac{3x^2+15x-12-[6x^2+15x-14x-35]}{(x^2+5x-4)^2}$$

$$= \frac{3x^2+15x-12-6x^2-x+35}{(x^2+5x-4)^2} = \frac{-3x^2+14x+23}{(x^2+5x-4)^2}$$

¿Para que valores de x existe $g'(x)$?

$$x^2+5x-4=0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+16}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$x \neq \frac{-5+\sqrt{41}}{2} = .7015$$

$$x \neq \frac{-5-\sqrt{41}}{2} = -5.701$$

REGLA DE LA CADENA

Se utiliza para derivar composición de funciones

Formula

$$f(x) = [u(x)]^n \rightarrow f'(x) = n[u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$$

Ejemplo

$$f(x) = (x^2+3)^{10} \rightarrow f'(x) = 10[x^2+3]^9 \cdot (x^2+3)$$
$$= 10(x^2+3)^9 \cdot 2x$$
$$= 20x(x^2+3)^9$$

$$f(x) = \operatorname{sen}^3 x \rightarrow f'(x) = 3[\operatorname{sen} x]^2 \cdot (\operatorname{sen} x)'$$
$$= 3\operatorname{sen}^2 x \cdot (\cos x)$$

$D_F\ [-3, 3]$

$$f(x) = \sqrt{9-x^2} \rightarrow f'(x) = (9-x^2)^{1/2}$$

$9 - x^2 \geq 0$

$9 \geq x^2$

$x^2 \leq 9$

$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{9}$

$|x| \leq 3$

$-3 \leq x \leq 3$

$$f'(x) = 1/2\,(9-x^2)^{1/2-1} \cdot (9-x^2)'$$
$$= \frac{1}{2}(9-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x)$$
$$= \frac{-x}{(9-x^2)^{1/2}} = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \rightarrow D_F\ (-3, 3)$$

Determine los valores de x para los cuales $y'(x)$ existe (dominio de g')

① $g(x) = 3x^2 - 4x + 4 + 3\sqrt{x}$

$g' = 6x - 4 + 3(x)^{1/2}$

$g' = 6x - 4 + 3(1/2(x)^{1/2-1})$

$g' = 6x - 4 + 3(1/2\, x^{-1/2})$

$g' = 6x - 4 + 3(1/2\sqrt{x})$

$g' = 6x - 4 + \frac{3}{2\sqrt{x}} = \boxed{6x + \frac{3}{\sqrt{2x}} - 4}$

② $y(x) = 6x \operatorname{Sen} x$

$y'(x) = 6x \cdot \operatorname{Sen} x' + 6x' \cdot \operatorname{Sen} x$

$y'(x) = 6x \cdot \cos x + 6 \cdot \operatorname{Sen} x$

$y'(x) =$

③ $y'(x) = 3x \operatorname{Sen} x + 4x \cos x$

$y'(x) = 3x \cdot \operatorname{Sen} x' + 3x' \operatorname{Sen} x$

$y'(x) = 3x(\cos x) + (+3)\cos(x)(0) = y'(x) \leftarrow y = 2\operatorname{Sen} x$

$y'(x) = 3x(\cos x) + 3(\cos x)x = y'(x)$ $\quad y'(x) = 3x(\cos x)$

$y'(x) = 3x(\cos x) + [(3x) \cdot 2\operatorname{Sen} x] = y''(x)$ $\quad y'(x) = [3x(\cos x)] = (y'(x))$

$y''(x) = 3x(\cos x) - 4\operatorname{Sen} x$

Derivada Orden Superior

Jueves 04 - Nov - 2021

Dada $y = f(x)$ podemos calcular su derivada $y' = f(x)'$ la cual es una función la cual podría ser derivable.

$$y'' = (f'(x))' = \underbrace{f''(x)}_{\text{Función}}$$

Ejemplos

① $y_1 = x^3 - 3x^2$

Encuentre la 2ª derivada ó derivada de orden 2.

$$y_1(x) = x^3 - 3x^2$$
$$y_1'(x) = (x^3 - 3x^2)'$$
$$= 3x^2 - 6x$$
$$(y_1'(x))' = (3x^2 - 6x)'$$
$$y_1'' = 6x - 6$$

② $y_2(x) = \operatorname{Sen} x^2$

$$y_2 = \operatorname{Sen} x^2 \longrightarrow y_2(x)' = \cos(x^2) \cdot (x^2) = 2x\cos x^2$$

$$y_2'(x) = 2x\cos x^2$$

$$(y_2(x)')' = (2x\cos x^2)'$$

$$y_2'(x) = 2x(\cos x^2)' + \cos x^2 (2x)'$$

$$y_2''(x) = 2x[-\operatorname{Sen} x^2 \cdot (x^2)'] + 2\cos x^2$$
$$y_2''(x) = -4x^2 \operatorname{Sen} x^2 + 2\cos x^2$$

Derivadas Funciones Parametros

Encuentre la derivada de:

① $f(x) = x^n \operatorname{sen} bx$ $\quad n \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}$

② $f(x) = x^n \cos bx$ $\quad n \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}$

③ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $\quad r \in \mathbb{R}$

④ $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ $\quad A B C \in \mathbb{R}$

⑤ $f(x) = (Ax + B) \operatorname{sen} bx$ $\quad A B, b \in \mathbb{R}$

④ $f(x) = Ax^2 + Bx + C$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (Ax + Bx + C)' \\
&= (Ax)' + (Bx)' + (C)' \\
&= A(x)' + B(x)' + 0 \\
&= A(x^2)' + B(x)' + 0 \\
&= A(2x) + B(1) \\
&= \underline{2Ax + B}
\end{aligned}
$$

① $f(x) = x^n \operatorname{sen} bx$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^n \operatorname{sen} bx)' \\
&= x^n (\operatorname{sen} bx)' + (\operatorname{sen} bx)(x^n)' \\
&= x^n [\cos bx (bx)'] + \operatorname{sen} bx (nx^{n-1}) \\
&= x^n [b \cos bx] + \operatorname{sen} bx \; nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

Scribe

Repaso Derivadas

$y = \sqrt{x^3+1}$

$y(x) = (x^3+1)^{1/2}$

$y'(x) = 1/2(x^3+1)^{1/2-1}$

$= 1/2(x^3+1)^{-1/2}\ (3x^2)$

$= 3/2\ x^2\ \ 1/(x^3+1)^{1/2}$

$$\boxed{y'(x) = \frac{3\ x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}$$

ENFOQUE 1

$y(x) = \sqrt{x^3+1}$

$y(x) = (x^3+1)^{1/2}$

$y'(x) = \left((x^3+1)^{1/2}\right)'$

$= 1/2\,(x^3+1)^{1/2-1} \cdot (x^3+1)'$

$= 1/2\,(x^3+1)^{-1/2} \cdot (3x^2)$

$= \frac{3}{2} x^2 \frac{1}{(x^3+1)^{1/2}}$

$$\boxed{y(x)' = \frac{3}{2} x^3 \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}}$$

ENFOQUE 2

$Y(x) = \sqrt{x^3+1}$

$y(x) = (x^3+1)^{1/2}$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{d(x^3+1)^{1/2}}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^3+1)^{1/2-1} \cdot \frac{d(x^3+1)}{dx}$$

$$= \frac{1}{2}(x^3+1)^{-1/2}\left(\frac{3x^2}{1}\right) = \frac{3x^2}{2}\frac{1}{(x^3+1)^{1/2}} = \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}$$

Usando notación $\frac{d}{dx}$ obtener la derivada de

$Y(x) = x^3 \operatorname{Sen} x$

Respuesta

$$\frac{d(y(x))}{dx} = \frac{d(x^3 \operatorname{Sen} x)}{dx} = x^3 \frac{d \operatorname{Sen} 3x}{dx} + \operatorname{Sen} 3x \frac{dx^3}{dx}$$

Nota

$$\frac{d \operatorname{Sen} 3x}{dx} = \cos 3x \cdot \frac{d\, 3x}{dx} = 3 \cos 3x$$

$$\frac{d\, x^3}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 [3 \cos 3x] + \operatorname{Sen} 3x (3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^3 \cos 3x + 3x^2 \operatorname{Sen} x$$

Usando notación $\frac{d}{dx}$ obtener derivada de $y(x) = \frac{3x^2}{x^3+1}$

Solución

$$\frac{d[y(x)]}{dx} = \frac{d\left(\frac{3x^2}{x^3+1}\right)}{dx} = \frac{(x^3+1)\frac{d\,3x^2}{dx} - 3x^2\frac{d\,x^3+1}{dx}}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{(x^3+1)(6x) - 3x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2} = \frac{6x^4+6x-9x^4}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{6x-3x^4}{(x^3+1)^2}}$$

Derivar → $\operatorname{sen}^3(x) + \operatorname{sen} x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x^3)}{d(x)} = \underbrace{\frac{d\operatorname{sen}^3 x}{dx}} + \underbrace{\frac{d\operatorname{sen} x^3}{dx}}$$

$$\frac{d[\operatorname{sen} x]^3}{dx} = 3[\operatorname{sen} x]^2 \cdot \frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$$

$$\frac{d[\operatorname{sen} x^3]}{dx} = \cos x^3 \cdot \frac{dx^3}{dx} = \cos x^3(3x^2) = 3x^2\cos x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x + 3x^2\cos x^3$$

Función Exponencial

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R}$

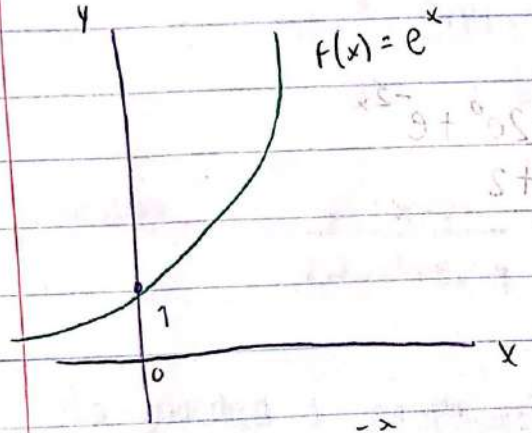
Dominio $\mathbb{R}$

Imagen $(0, \infty) = \mathbb{R}^+$

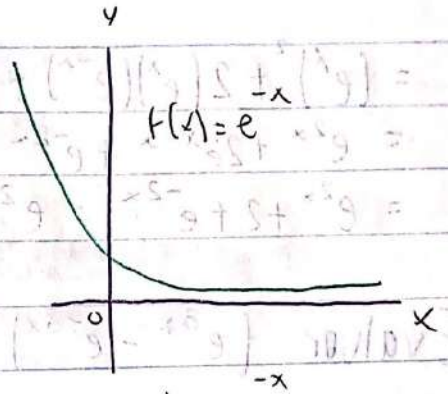
$f(x)$ es continua en $I = \mathbb{R}$

$f(x)$ es derivable en $I = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$



$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$



$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$

$f(x)$ continua en $x = a \longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$f(x) = e^x$ es continua en $x = a \qquad \lim_{x \to a} e^x = e^a$

$f(x) = e^x$ es derivable $\qquad f'(x) = (e^x) \quad \frac{de^x}{dx} = e^x$

Propiedades exponencial

$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$, $e^{a+b} =$ [illegible]

$e^0 = 1$

$(e^a)^2 = e^a \cdot e^a = e^{a+a} = e^{2a}$

$(e^a)^r = e^{ra}$

Evaluar

$$(e^x + e^{-x})^2$$

$= (e^x)^2 + 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2$

$= e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x} = e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x}$

$= e^{2x} + 2 + e^{-2x} = e^{2x} + e^{-2x} + 2$

Evaluar $(e^{3x} - e^{-3x})^2$

$= (e^{3x})^2 - 2(e^{3x})(e^{-3x}) + (e^{-3x})^2$

$= e^{6x} - 2e^{3x-3x} + (e^{-6x})$

$= e^{6x} + e^{-6x} - 2$

②

Resolver

$$(e^{2x}+3)(e^{2x}+4) = (e^{2x})^2 + \overset{(3\cdot 4)}{7}e^{2x} + 12$$

$$(e^{2x}+e^{3x})(e^{2x}-e^{3x}) = (e^{2x})^2 - (e^{3x})^2 = e^{4x} - e^{6x}$$

$$(e^{2x}+e^{3x})(e^{2x}+e^{3x}) = (e^{2x})^2 + 2(e^{2x})(e^{3x}) + (e^{3x})^2$$
$$= e^{2x} + 2e^{2x+3x} + e^{2\cdot 3x}$$
$$= e^{4x} + 2e^{5x} + e^{6x}$$

$$\frac{e^{8x}}{(e^{3x})^2} = \frac{e^{8x}}{e^{6x}} = e^{8x}\cdot e^{-6x} = e^{8x-6x} = e^{2x}$$

$$\frac{(e^{2x}+e^{-2x})^2}{4} + \frac{(e^{2x}-e^{-2x})^2}{4} = \frac{(e^{2x}-e^{-2x})^2 + (e^{2x}-e^{-2x})^2}{4}$$

$$= \frac{(e^{2x})^2 + 2(e^{2x})(e^{-2x}) + (e^{-2x})^2 + (e^{2x})^2 - 2(e^{2x})(e^{-2x}) + (e^{-2x})^2}{4}$$

$$= \frac{e^{4x} + 2e^{0} + e^{-4x} + e^{4x} - 2e^{0} + e^{-4x}}{4}$$

$$= \frac{2e^{4x} + 2e^{-4x}}{4} = \frac{2(e^{4x}+e^{-4x})}{4} = \frac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}$$

$$\frac{(e^{2x}+e^{-2x})^2 + (e^{2x}-e^{-2x})^2}{4}$$

$$= e^{4x} + 2e^{0} + e^{-4x} - e^{4x} + 2e^{0} - e^{-4x} = \frac{4}{4} = 1$$

Simplificar

$$\frac{(e^{3x})^2 \cdot e^{-4x}}{e^x} = \frac{e^{6x} \cdot e^{-4x}}{e^x} = \frac{e^{6x-4x}}{e^x} = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$$

Derivadas Con Función Exponencial

$f(x) = e^x$ $\quad (f(x))' = f'(x)$ $\quad \frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x)$

$f'(x) = e^x$ $\quad (x^2) = 2x$ $\quad \frac{de^x}{dx} = e^x$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad (e^x) = e^x$ $\quad \frac{dx^2}{dx} = 2x$

COMPOSICION DE FUNCIONES

$f(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{R}$

$g(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R}$

$f \circ g$ y $g \circ f$

$f \circ g(x) = f(g(x))$

$= f(e^x)$

$= (e^x)^2$

$f \circ g(x) = e^{2x}$

$g \circ f = g(f(x))$

$= g(x^2)$

$= e^{x^2}$

$h(x) = e^{f(x)}$

$h(x) = e^{\sqrt{x}}$

$h(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

$h(x) = e^{x^3+1}$

$h(x) = e^{f(x)} = h'(x) = e^{f(x)} \cdot f(x)'$

$= e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$$\frac{d e^{f(x)}}{dx} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Encuentre $h'(x) = e^{x^2}$

$(e^{x^2}) = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$

$$\frac{d e^{x^2}}{dx} = e^{x^2} \cdot \frac{d x^2}{dx} =$$

Derivar $x^2 e^{3x}$

$h'(x) = x^2 (e^{3x})' + e^{3x} (x^2)'$

$= x^2 e^{3x} \cdot (3x)' + e^{3x} (2x)$

$h'(x) = 3x^2 e^{3x} + 2xe^{3x}$

Derivar $h(x) = e^{2x} \operatorname{sen} 3x$

$$h'(x) = (e^{2x} \operatorname{sen} 3x)'$$
$$= e^{2x} \cdot (\operatorname{sen} 3x)' + \operatorname{sen} 3x \, (e^{2x})'$$
$$= e^{2x} \, 3 \cos 3x + \operatorname{sen} 3x \, (e^{2x} \cdot 2)$$
$$= 3e^{2x} \cos 3x + 2e^{2x} \operatorname{sen} 3x$$

Derivar $h(x) = e^{2x} \cos 3x$

Derivar e^{x^3-1}

$$h'(x) = [e^{x^3-1}]'$$
$$= e^{x^3-1} \cdot (x^3-1)'$$
$$= e^{x^3-1} \cdot 3x^2$$
$$= 3x^2 e^{x^3-1}$$

$e^{\operatorname{sen} x}$

$$h'(x) = [e^{\operatorname{sen} x}]'$$
$$= e^{\operatorname{sen} x} \cdot (\operatorname{sen} x)'$$
$$= e^{\operatorname{sen} x} \cos x$$
$$= \cos x \, e^{\operatorname{sen} x}$$

$x^3 e^{-2x}$

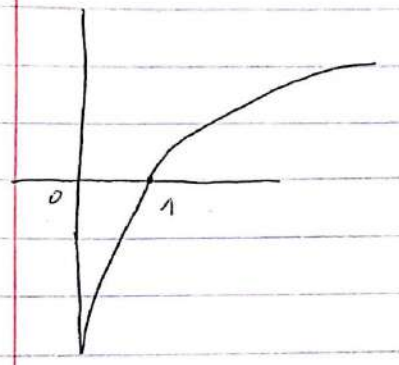
$$h'(x) = [x^3 e^{-2x}]' = x^3 [e^{-2x}]' + e^{-2x} (x^3)'$$
$$= x^3 (e^{-2x} (-2x)') + e^{-2x} (3x^2)$$
$$= -2x^3 e^{-2x} + 3x^2 e^{-2x}$$

Obtener la segunda derivada $y(x) = Ax^2e^x$

$$y'(x) = (Ax^2 \cdot e^x)$$
$$= Ax^2 \cdot (e^x)^2 + e^x \cdot (Ax^2)'$$
$$= Ax^2e^x + e^x(2Ax)$$
$$= (Ax^2 + 2Ax)e^x$$

Propiedades de la función logaritmo natural

$f(x) = \ln x$



$f(1) = \ln 1 = 0$

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$

$D_f = (0, \infty)$

$Im_f (-\infty, \infty)$

$f(x) = \ln x \quad x \in (0, \infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x} \quad x \in (0, \infty)$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

Propiedades

① $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

② $\ln a^r = r \ln a$

③ $\ln(1) = 0$

④ $\ln(a/b) = \ln(a \cdot b^{-1})$

$= \ln a + \ln b^{-1}$

$= \ln a + (-1)\ln b$

$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

$\ln a + \ln b = \ln a \cdot b$

$r \ln a = \ln a^r$

$\ln a - \ln b = \ln(a/b)$

Ejemplos → Expresar en un solo logaritmo.

$$\underbrace{\ln(x^2-4)}_{a} - \underbrace{\ln(x-2)}_{b} = \ln\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right)$$

$$= \ln\left[1 + (x+2)\right] = \underbrace{\ln(x+2)}$$

$$\ln(x-2)^2 - 4\ln(x+2) + \ln(x^2-4) = \left[\ln(x-2)^2 + \ln(x^2-4)\right] - 4\ln(x+2)$$

$$= \ln\left[(x-2)^2 \cdot (x^2-4)\right] - \ln(x+2)^4 = \ln\left[\frac{(x-2)^2(x^2-4)}{(x+2)^4}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{(x-2)^2(x-2)(x+2)}{(x+2)^4}\right. = \ln\frac{[(x-2)^3}{(x+2)^3}$$

Expresar en un solo logaritmo y simplificar

$2\ln(x+2) - 3\ln(x^2-4) + \ln(x-2)$

$= 2\ln(x+2) - 3\ln[(x-2)(x+2)] + \ln(x-2)$

$= 2\ln(x+2) - 3[\ln(x-2) + \ln(x+2)] + \ln(x-2)$

$= 2\ln(x+2) - 3\ln(x-2) - 3\ln(x+2) + \ln(x-2)$

$= -1\ln(x+2) - 2\ln(x-2)$

$= -[\ln(x+2) + 2\ln(x-2)]$

$= -[\ln(x+2) + \ln(x-2)^2]$

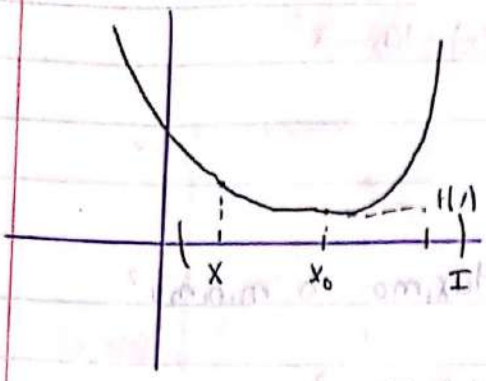
$= -1\ln(x+2)(x-2)^2$

$= \ln[(x+2)(x-2)^2]^{-1}$

$= \ln(x+2)^{-1}(x-2)^{-2}$

$= \ln\left(\frac{1}{(x+2)(x-2)^2}\right)$

Maximos y Minimos



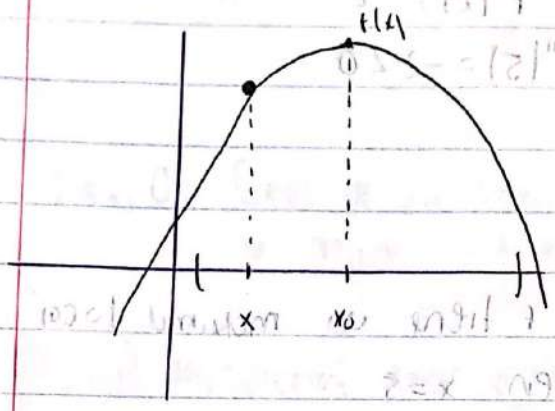
$f(x) \leq f(x) \ \forall x \in I$

$f(x) \geq f(x_0) \ \forall x \in I$

VALOR MINIMO LOCAL EN $x = x_0$

$f(x_0)$ valor minimo

Grafica de $f(x)$



$f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in I$

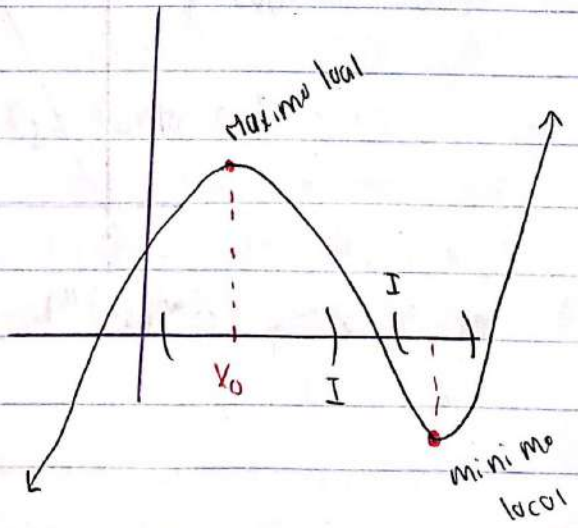
$f(x) \leq f(x_0) \ \forall x \in I$

VALOR MAXIMO LOCAL EN $x = x_0$

$f(x_0)$ valor máximo

Grafica de $f(x)$

Cuando $I = \mathbb{R}$ se cambia local por global.



Encuentre el maximo local de $f(x) = 10x - x^2$

$f(x) = 10x - x^2$
$f'(x) = 10 - 2x$

¿ Maximo o minimo?

puntos criticos

$f'(x) = 0 \longleftrightarrow 10 - 2x = 0$
$10 = 2x$
$\frac{10}{2} = x$
$\underbrace{x = 5}$

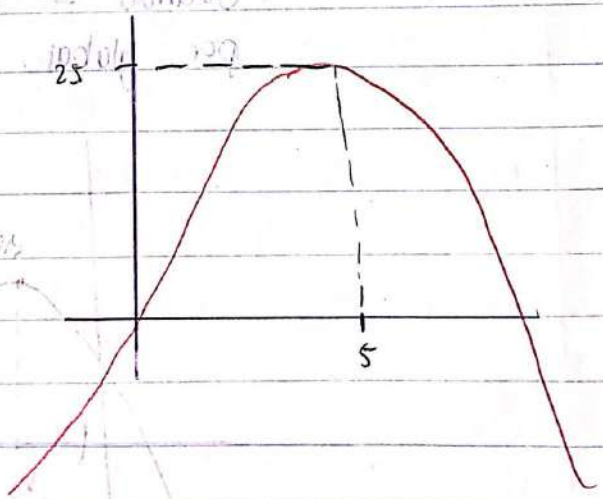
$f(x) = 10x - x^2$
$f'(x) = 10 - 2x$
$f''(x) = -2$
$f''(5) = -2 < 0$

$f''(x_0) < 0$ f = maximo local
$f''(x_0) > 0$ f = minimo local

$\therefore$ f tiene un maximo local en $x = 5$

¿A cuánto asciende?

$f(5) = 10(5) - (5)^2$
$= 50 - 25$
$\underbrace{= 25}$



Obtener máximos y mínimos locales de la siguiente función

$f(x) = x^3 - 12x$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

Puntos críticos

$f'(x) = 0$ $\quad 3x^2 - 12 = 0$

$3(x^2 - 4) = 0$

$3(x-2)(x+2) = 0$

$x+2 = 0$, $x_1 = -2$

$x - 2 = 0$, $x_2 = 2$

Maximo o minimo

Caso $\boxed{x_1 = -2}$

$f(x) = x^3 - 12x$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f''(x) = 6x$

$f''(-2) = 6(-2) = -12 < 0$

$f(x) = x^3 - 12x$ tiene un máximo local en $x = -2$.

Valor maximo local $f(-2) = 16$

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2)$

$= -8 + 24 = 16$

Caso $\boxed{x_2 = 2}$

$f(x) = x^3 - 12x$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f''(x) = 6x$

$f''(2) = 6(2) = 12 > 0$

$f(x) = x^3 - 12x$ tiene un minimo local en $x = 2$

Valor minimo local

$f(2) = 2^3 - 12(2) = -10$

$= 8 - 24$

Maximos y minimos locales de la siguiente función

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

Puntos criticos

$f'(x) = 0 \quad 3x^2 - 6x = 0$

$3(x^2 - 2x) = 0$

$3(x)(x-2) = 0$

$x = 0$

$x = 2$

Maximo o minimo

Caso $x_1 = 0$

$f(x) \; x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = 6(0) = 6 = -6 < 0$

$f(x) \; x^3 - 3x^2$ tiene un máximo local en $x = 0$

Vala máximo local $f(0) = 0$

$f(0) = 0^3 - 3(0) = 0$

Caso $x = 2$

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(2) = 6(2) - 6 = 6 > 0$

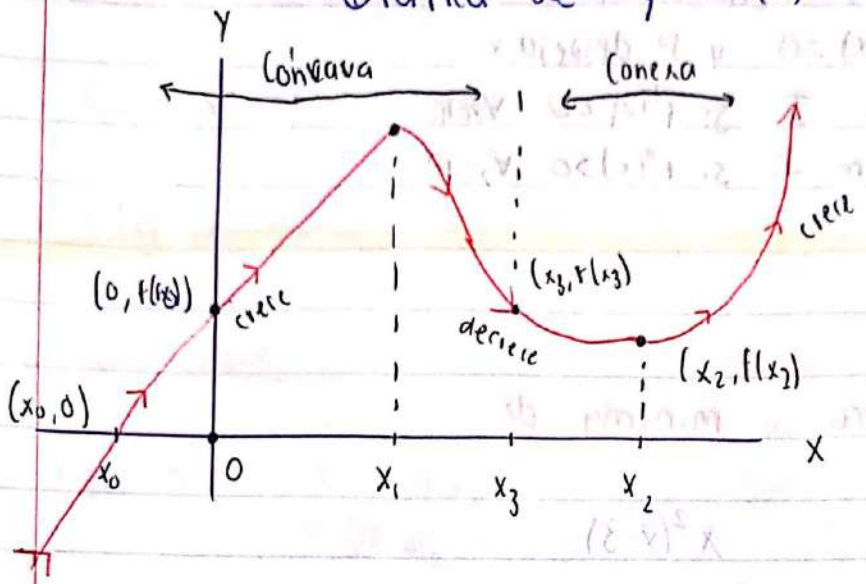
$f(x) \; x^3 - 3x^2$ tiene un minimo local

Vala minimo local $f(2) = -4$

$f(2) = -4$

$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 = 8 - 12 = -4$

Gráfica de $y = f(x)$



$(x_0, 0)$ Cero de la función

Se resuelve $f(x) = 0$ $x = ?$

$(0, f(0))$ intersección con eje y

Se evalua $f(0) =$

$(x_1, f(x_1))$ x_1 = Punto crítico de f

$f(x_1)$ valor maximo local de f

Se iguala $f'(x) = 0$ se despeja x

Signo de $f''(x_1) < 0$ y evaluar $f(x_1)$

$(x_2, f(x_2))$ x_2 = Punto crítico

$f(x_2)$ = valor minimo local

Se iguala $f'(x) = 0$ se despeja x

$f''(x_2) > 0$ y se evalua $f(x_2)$

$(x_3, f(x_3))$ punto de inflexión

Se iguala $f''(x) = 0$ y se despeja x

* f concava en I si $f''(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
* f es convexa en I si $f''(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Obtener maximos y minimos de

$f(x) = x^3 - 3x^2$ $\qquad x^2(x-3)$

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ $\qquad$ Intervalos: $(\infty, 0)(0,1)(1,2)(2,\infty)$

Punto critico

$f(x) = 0 \longleftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$ $\qquad f''(x) = 6x - 6$

$3x(x-2) = 0$

$x = 0$ $\qquad x_1 = 0$

$x - 2 = 0$ $\qquad x_2 = 2$

	Intervalos $x \in I$	Signo de $f'(x) = 3x(x-2)$	Signo de $f''(x) = 6(x-1)$	Caracteristicas de $f(x) = x^3 - 3x^2$
$x = -1$	$(-\infty, 0)$	$(+) = +(-)(-)$	$- = +(-1)$	Creciente y concava
$x = .5$	$(0, 1)$	$(-) = +(+)(-)$	$- = +(-1)$	Decreciente y concava
$x = 1.5$	$(1, 2)$	$(-) = +(+)(-)$	$+ = (+)+$	Decreciente y convexa
$x = 3$	$(2, \infty)$	$(+) = +(+)(+)$	$+ = (+)+$	Creciente convexa