Datos de Identificación de tareas

UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE AGUASCALIENTES

Centro de Ciencias Básicas

Materia: **Ecuaciones Diferenciales**

APUNTES DE LA MATERIA

Ingeniería en Computación Inteligente Semestre 5° A

Alumno: Jose Luis Sandoval Perez **ID:261731**

Profesor: **Jaime Salvador Medina González**

Fecha de entrega: 05/12/2023

Ecuaciones Diferenciales

Maestro: Jaime S. Medina Gonzalez
Allumno: José Luis Sandoval Pérez
Carrera: ICI Grupo: 5A
Aula: 54-G

Asesorias - Ed. 26 13:00 - 14:00 pm

EJERCICIOS CONOCIMIENTOS PREVIOS

O. Resolver las siguientes ecuaciones lineales

a) $2x+18=0$

$2x=-18$

$x=\frac{-18}{2}$

$x=-9$

b) $3x-81=0$

$3x=81$

$x=\frac{81}{3}$

$x=27$

c) $12x-36=20$

$12x=20+36$

$12x=56$

$x=56/12$

$x=4.666$

d) $5x-3=2x$

$5x-3-2x=0$

$3x=3$

$x=3/3$

$x=1$

e) $16x+24=4-3x$

$16x+3x=4-24$

$19x=-20$

$x=-20/19$

$x=-1.05$

f) $\frac{4}{2x-3}=6$

$4=6(2x-3)$

$4=12x-18$

$4+18=12x$

$12x=22$

$x=22/12$

$x=1.833$

g) $\frac{x}{2-x}=6$

$x=6(2-x)$

$x=12-6x$

$7x=12$

$x=\frac{12}{7}$

$x=1.71$

h) $\frac{4}{x-3}=0$

No hay solución

$x\neq3$

TERMINOLOGIA BASICA

10/08/2023

Introducción

Recordemos que en la materia de calculo diferencial se aprendió que dada una función $y = f(x)$, nosotros podemos encontrar su derivada, que es nuevamente una función $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ (derivada como función), ambas dependen de la misma variable. $\boxed{x \text{ variable independiente}}$ y $\boxed{y \text{ variable dependiente}}$

EJEMPLOS

Función	Derivada	Observación
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y' = y$ (función y' es igual)
$y = e^{x^2}$	$y' = 2xe^{x^2}$	$y' = 2xy$
$y = x^2e^x$	$y' = 2xe^x + e^x x^2$	$y' = 2xe^x + y$
$y(x) = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos(x)$	$y' = \frac{y}{\tan x}$
$y(x) = \operatorname{sen}(x)$	$y' = \cos(x)$ $y'' = -\operatorname{sen}(x)$	$y'' = -y$ $y'' + y = 0$

Ecuaciones diferenciales

Hemos visto que dada una función, por ejemplo $y(x) = x^2e^x$, hemos obtenido una ecuación que incluye derivadas de y, tal que $\boxed{y' = 2xe^x + y}$, en la cual queda oculto la función que originó dicha ecuación

Scanned with CamScanner

Joe Jordan

El objetivo de este curso es precisamente el proceso inverso. Dada una ecuación diferencial $\boxed{y' = 2xy}$, nosotros tenemos que encontrar mediante alguna técnica a $\boxed{y = e^{x^2}}$

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL

Es una ecuación que involucra las derivadas de una ecuación desconocida. (ED)

Ejemplos: lineal de primer orden

No lineal primer orden

1) $y' = 2y$
2) $y' = 0$
3) $y' = 2\sqrt{y}$
4) $y' = 2x$
5) $y' = \frac{m}{y}$
6) $y' = \operatorname{Sen}(x)$
7) $y' = y^2$
8) $y' = x e^{y}$
9) $y' = y + y''$
10) $y'' - y' + y = 0$

lineal de segundo orden

11) $y' = x^2 y$
12) $y' = \frac{x+y}{x-y}$
13) $x^2 y'' - 5xy' + 6y = \cos x$
14) $y' = y$

Christina Serna 3S-4

ANALOGIA ENTRE LAS ECUACIONES Y ECUACIONES DIFERENCIALES — 11/08/2023

Dada la ecuación $2x-4=6$

① Aplicar el método para resolverla
② Determinar si la $\underbrace{\text{respuesta obtenida}}_{\text{solución}}$ es correcta

① Despeje $2x-4=6 \Rightarrow x-4=\frac{6}{2} \Rightarrow x=3+7 \Rightarrow x=7$
$\Rightarrow 2x=10 \Rightarrow \frac{10}{2}=x \Rightarrow \boxed{x=5}$

② Comprobación por sustitución en la ecuación

$2(5)-4=6$
$\Rightarrow 10-4=6$
$\Rightarrow \boxed{6=6} \rightarrow$ Igualdad

Solución

$2(7)-4=6$
$14-4=6$ ← no hay igualdad
$10\neq 6$

No hay (es) solución

Dada la ecuación $y'=2xe^x+y$

① Aplicando un método se llega que la función $y(x)=x^2e^x$ es solución
② Comprobación; sustituir la solución en la ecuación diferencial.

$y'=2xe^x+y$
$\Rightarrow (x^2e^x)'=2xe^x+x^2e^x$
$\Rightarrow x^2e^x+e^x2x=2xe^x+x^2e^x$
$\underbrace{x^2e^x+2xe^x=2xe^x+x^2e^x}_{\text{Identidad}}$
$\therefore$ sí es solución

Comprobación

¿ $Y(x) = e^{x^2}$ es solución ?

$$y' = 2xe^{x} + y$$
$$(e^{x^2})' = 2xe^{x} + e^{x^2}$$
$$\underline{e^{x^2} \cdot 2x \neq 2xe^{x} + e^{x^2}}$$

No es identidad

* Falla cuando $x = 0$

$$e^{0^2} \cdot 2(0) = \cancel{2x e} + e^{0}$$
$$0 \neq 1$$

Falla

14/08/2023

Otro ejemplo de ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$

Método → Factorización

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$\hookrightarrow (x-3)(x-2)$$

$$x - 3 = 0 \quad\quad x - 2 = 0$$
$$\hookrightarrow x = 3 \quad\quad \hookrightarrow x = 2$$

Comprobación

$$(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$$
$$4 - 10 + 6 = 0$$
$$\underbrace{0 = 0}_{\text{igualdad}}$$

$$(3)^2 - 5(3) + 6 = 0$$
$$9 - 15 + 6$$
$$\underbrace{0 = 0}_{\text{igualdad}}$$

$\boxed{\begin{matrix} X_1 = 2 \\ X_2 = 3 \end{matrix}}$ es solución de ecuación

Resolver $y'' - 4y = 0$

Método → pendiente

$$y_1 = e^{2x} \Rightarrow y_1' = 2e^{2x}$$
$$\Rightarrow y'' = 4e^{2x}$$

$$y_1(x) = e^{2x}$$
$$y_2(x) = e^{-2x}$$

$$y_2 = e^{-2x} \Rightarrow y_2' = -2e^{-2x}$$
$$= 4e^{-2x}$$

Comprobación

$$(e^{2x})'' - 4(e^{2x}) = 0 \rightarrow \text{identidad}$$
$$4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$$
$$\underbrace{4e^{2x} = 4e^{2x}}_{\text{igualdad}}$$

$\therefore y_1(x) = e^{2x}$ es solución

$$(e^{-2x})'' - 4(e^{-2x}) = 0$$
$$4e^{-2x} - 4e^{-2x} = 0 \rightarrow \text{identidad}$$

$\therefore y_2(x) = e^{-2x}$ es solución

Derivación Implícita

Introducción

① Si $y = e^{x^2}$ encuentre $\frac{dy}{dx}$

② Si $y = e^{2x}\cos 3x$ encuentre $\frac{dy}{dx}$

① $y = e^{x^2} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{de^{x^2}}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$$

② $y = e^{2x}\cos 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^{2x}\cos 3x)}{dx}$$

$$= e^{2x}\frac{d\cos 3x}{dx} + \cos 3x \frac{de^{2x}}{dx}$$

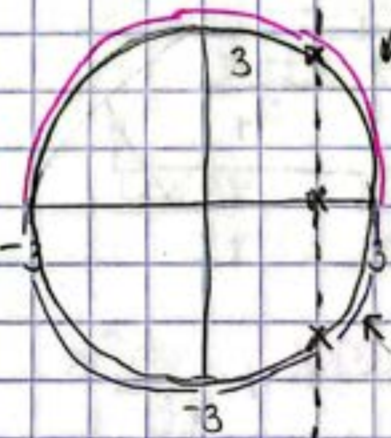
$$= e^{2x}[-3\operatorname{Sen}3x] + \cos 3x[2e^{2x}]$$

$$= 2e^{2x}\cos 3x - 3e^{2x}\operatorname{sen}3x$$

Scanned with CamScanner

③ Obtener la derivada de $x^2+y^2=9$

$y_1=\sqrt{9-x^2}$



$$\underline{x^2+y^2=9}$$ * No es Función
RELACIÓN

$x^2+y^2=9$

$y^2 = 9-x^2$

$y^2 = \sqrt{9-x^2}$

$y_2 = \sqrt{9-x^2}$ $|y| = \sqrt{9-x^2}$

$y = \pm\sqrt{9-x^2}$

*implícito = escondido

$y_1 = \sqrt{9-x^2} \rightarrow x \in [-3,3]$

$y_2 - \sqrt{9-x^2} \longrightarrow x \in [-3,3]$

- Calculando $\frac{dy_1}{dx}$ y $\frac{d_2}{dx}$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{d-\sqrt{9-x^2}}{dx} = \frac{-d\sqrt{9-x^2}}{dx}$$

$$= \frac{-d(9-x^2)^{1/2}}{dx} = -\frac{1}{2}(9-x^2)^{1/2} \cdot \frac{d(9-x^2)}{dx}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(9-x^2)^{1/2}} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{x}{-y_2}$$

=

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d(\sqrt{9-x^2})}{dx} = \frac{d(9-x)^{1/2}}{dx} = \frac{1}{2}(9-x^2)^{1/2} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{-x}{(9-x^2)^{1/2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \rightarrow \frac{-x}{y_1}$$

④ Alternativa de implícita

① $x^2+y^2 = 9$ → supongamos que y es una función de x

a) Derivada con respecto a "x" en 1

$$\frac{d\, x^2+y^2}{dx} = \frac{d\,9}{dx}$$

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{y^2}{dx} = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2y\,dy}{dx} = -2x$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\boxed{= \frac{-x}{y}}$$

resultado

Scanned with CamScanner

Soluciones

(2) $x^3y - y^2 = 10$

$$\frac{d\, x^3y - y^2}{dx} = \frac{d\,10}{dx}$$

$$\frac{dx^3y}{dx} - \frac{dy^2}{dx} = 0$$

$$x^3\frac{dy}{dx} + y(3x^2) - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x^3 - 2y)\frac{dy}{dx} + y(3x^2) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y(3x^2)}{(x^3-2y)}\,\frac{(-1)}{(-1)} = \frac{3x^2y}{2y - x^3}$$

Soluciones

Definición

domino

Se dice que una función $y = f(x)$ es solución de una ecuación diferencial de orden n en I si f admite n derivadas en I y al sustituir dicha función en la ED se obtiene una identidad en I.

Ejemplos

(1) Muestre que $y_1(x) = e^{3x}$ es solución de la ED

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (1)$$

(1) Derivamos n veces (2)

$$y = e^{3x} \rightarrow y' = 3e^{3x} \rightarrow y'' = 9e^{3x}$$

(2) Sustituimos en ED (1)

Intervalo I

$$9e^{3x} - 5(3e^{3x}) + 6(e^{3x}) = 0$$

$$\underbrace{15e^{3x} - 15e^{3x} = 0}_{\text{Identidad}} \quad \forall x \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

$\therefore$ $y_1 = e^{3x}$ es solución de $y'' - 5y' + 6y = 0$ en $(-\infty, \infty)$

(2) Muestre que $y_1(x) = \sqrt{9-x^2}$ es solución de la ED

$$y' = \frac{-x}{y} \text{ en } I$$

$y_1 = \sqrt{9-x^2}$, dominio $y = [-3, 3]$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d(\sqrt{9-x}}{dx} = \frac{d(9-x^2)^{1/2-1}}{dx}$$

$$= 1/2(9-x^2)^{-1/2} \cdot \frac{d(9-x^2)}{dx}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(9-x^2)^{1/2}}\right) \cdot -2x = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{dy_1}{dx}$$

$x \in (-3, 3)$

(1) Sustituimos en ED

$$\underbrace{\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}}_{\text{Identidad}} \quad x \in (-3, 3) = I$$

$\therefore$ $y_1(x) = \sqrt{9-x^2}$ es solución de $y' = \frac{-x}{y}$ para x en $(-3, 3)$

Scanned with CamScanner

(3) Muestre que $y_1 = x^{-2}$ es solución de

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$y_1 = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$$

$$y_1 = x^{-2} \rightarrow y_1' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3} \quad x \neq 0$$

(1) Sustituimos

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$-\infty$ $\cancel{0}$ ∞

$(-\infty, 0), (0, \infty)$

$$= x\left(\frac{-2}{x^3}\right) + 2\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$= \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0 \rightarrow x \neq 0$$

$\therefore$ $y_1(x) = \frac{1}{x^2}$ es solución de la ED
$x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ en $(0, \infty) = I$

Clasificación Soluciones

Problema

Encuentre una solución de la ED $y' = y$

Respuesta

$y(x) = e^x = y' = e^x$

¿Es la única solución?

$y(x) = 3e^x \longrightarrow y'(x) = 3e^x \longrightarrow y' = y$ (Solución particular)

$y(x) = ke^x \longrightarrow y'(x) = ke^x \longrightarrow y' = y$ (Solución general)

Nota que $y(x) = ke^x$ es una solución más general porque tiene a k

$$\left.\begin{array}{l} y(x) = e^x \\ y(x) = 3e^x \end{array}\right\} \text{SOLUCIONES PARTICULARES}$$

y son elementos de la familia de funciones $y(x) = ke^x$

EJEMPLO Encuentre una solución de la ED $y'' = 2$

RESPUESTA

$y(x) = x^2$ $\qquad$ $C \in \mathbb{R}$

$y'(x) = 2x$

$y''(x) = 2$

¿Es la única solución?

$y(x) = x^2 + 1 \longrightarrow y''(x) = 2$

$y(x) = x^2 + C \longrightarrow y''(x) = 2$

$y(x) = x^2 + C_1 x + C_2$

$\to y' = 2x + C_1$

$\to y'' = 2$

$y'' = 2$

$\int y'' dx = \int 2 dx$

$y' = 2x + C_1$

$\int y' = \int (2x^2 + C_1) dx$

$y = x^2 + C_1 + C_2$

DEFINICIÓN

Si una solución de una ED de orden n tiene n constantes arbitrarias, entonces a dicha solución se le llama solución general, ó familia n-parametrica de soluciones

Si una solución de una ED de orden n no contiene contantes arbitrarias y puede obtenerse a partir de la solución general dando valores especifico a las constantes se les llama solución particular

Si una solución de una ED de orden no contiene constantes y no es solución particular se le llama solución singular

MAS EJEMPLOS

① Determine si $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$ es solución general de la ED $y'' - 4y' + 4y = 0$ Tarea

Respuesta: note que el orden de la ED es $n=2$, además $y(x)$ contiene 2 constantes arbitrarias y cumple con el requisito por lo que debemos derivar y sustituir en la ED.

Soluciones Explícitas e Implícitas

Forma de soluciones explícitas de una ED

$y = f(x)$

Forma de soluciones implícitas de una ED

$G(x, y) = C \longrightarrow$ la y no está despejada y en ocasiones no es función

Muestre que: $x^2 + y^2 = 9$ es solución implícita de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

Respuesta: $\overset{G(x,y)}{x^2 + y^2 = 9}$ (1) no es función pero están "escondidas"

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{9 - x^2} \\ y_2 &= \sqrt{9 - x^2} \end{aligned}\right\} \text{ en la relación (1)}$$

* El método es independiente de si se puede despejar la y de la relación $G(x, y) = 0$

Respuesta: Supongamos que en la relación $x^2+y^2=9$ y es función de x.

① Derivamos con respecto a x

$$\frac{d\, x^2+y^2}{dx} = \frac{d9}{dx}$$

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = 0$$ regla cadena $\frac{(du^x)}{dx}$ =

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \quad ①$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}}$$

$x^2+y^2=9$ es solución implícita de la ED ①.

Determine si: $y = \cos(xy)$ es solución implícita de la solución implícita de la ED

$$[1 + x\,\text{sen}(xy)]\frac{dy}{dx} + \text{sen}(xy) \cdot y = 0 \quad ①$$

Respuesta...

Supongamos que en la relación $y = \cos(xy)$ y es una función de x

① Derivamos con respecto a x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos(xy)}{dx}$$

regla cadena $= \frac{d\cos(u)}{dx}$

$= -\text{sen}\,u \cdot \frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\text{sen}(xy) \cdot \frac{d(xy)}{dx}$$ → regla de producto

$$\frac{dy}{dx} = -\text{sen}(xy) \cdot \left[x\frac{dy}{dx} + y(1)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -x\,\text{sen}(xy)\frac{dy}{dx} - y\,\text{sen}(xy)$$

$$x\,\text{sen}(xy)\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + y\,\text{sen}(xy) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x\,\text{sen}(xy) + 1) + y\,\text{sen}(xy) = 0$$

$$[1 + \text{sen}(xy)]\frac{dy}{dx} + \text{sen}(xy) \cdot y = 0$$

* $y = \cos(xy)$ es solución implícita de ED 1 y no es solución general por no incluir constantes

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Un problema de valor inicial es aquel que busca determinar una solución de una ED que cumpla ciertas condiciones especificadas en la función y sus derivadas en un valor de la variable independiente.

Un problema de valor en la frontera es aquel que busca determinar una solución de una ED que cumpla ciertas condiciones especificadas en distintos valores de la variable independiente. ↳ en la función

Ejemplo: Valor inicial

x = posición de partícula

$\frac{dx}{dt}$ → velocidad de partícula

$\frac{d^2x}{dt^2}$ → aceleración

*Número de condiciones = orden de ecuación

$\frac{d^2x}{d^2t} = 4 - 2(t)$ > Ecuación diferencial

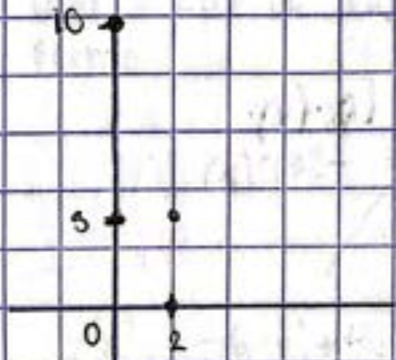
$x(0) = 10\ m$
$x'(0) = .5$
> condiciones iniciales

$x(t)$ → posición
$x'(t)$ → velocidad
especificada en un solo valor de t.

$t = 0$

Ejemplo: valor en la frontera

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4-2t \rightarrow \text{Sujeto a } \begin{matrix} x(0)=10 \\ x(2)=8 \end{matrix} \Big\}$$ condiciones de frontera



Mas Ejemplos:

① $\frac{dy}{dx} = y \rightarrow$ sujeto a $y(3) = 9$ (VI)

② $\frac{dT}{dt} = 5(T-30) \rightarrow$ sujeto a $T(0) = 3$ (VI)

③ $y' = y + y'' \rightarrow$ sujeto a $\begin{matrix} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{matrix}$

④ $y'' + y = 0 \rightarrow$ Sujeto a $y(0) = 0$
$y(0) = 0$

⑤ $y'' + y = 0 \rightarrow$ sujeto a $y(0) = 0$
$y'(0) = 1$

Resolviendo ④ y ⑤

$$y'' + y = 0 \longleftrightarrow y'' = -y$$

Sujeto a $y(0) = 0$
$y'(0) = 1$

Resp: $y(x) = \text{sen}(x) \longrightarrow y'(x) = \cos(x)$
$\longrightarrow y''(x) = -\text{sen}(x)$

Sustituimos en la ED

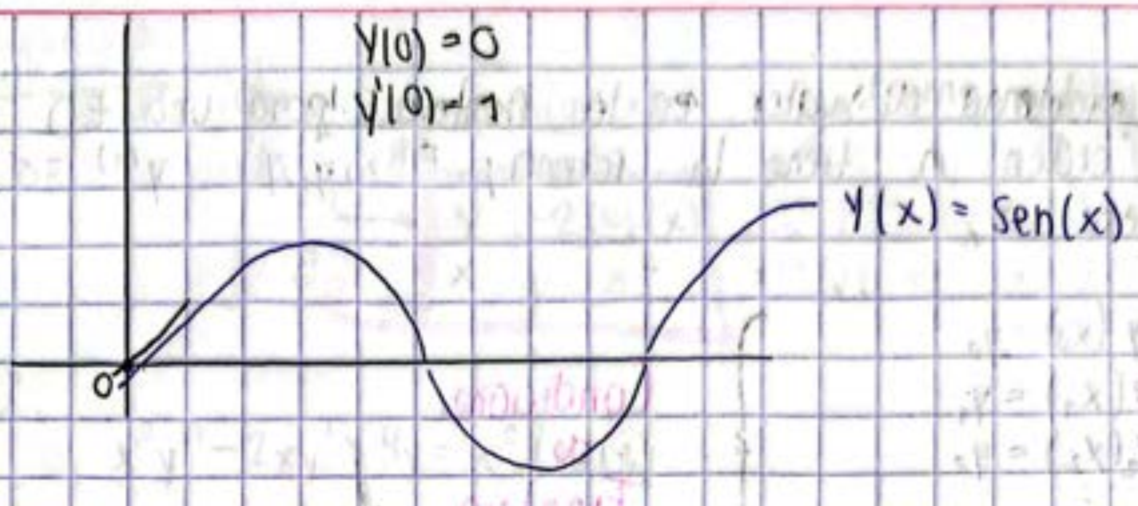
$$\underbrace{\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ -\text{sen}(x) + \text{sen}(x) &= 0 \end{aligned}}$$

Identidad $\therefore$ $y(x) = \text{sen}(x)$ es solución de ED

Además $\left.\begin{aligned} y(0) &= \text{sen}(0) = 0 \\ y'(0) &= \cos(0) = 1 \end{aligned}\right\}$ Cumple condiciones iniciales.

$\therefore$ Es solución de PVI

$y(0) = 0$
$y'(0) = 1$



DEFINICIÓN FORMAL

Valor inicial y de frontera

Una ED de orden n es una expresión de la forma; $F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$

no es de la forma

Ejemplo

$x^2y'' - 6xy' + 4y = 4e^x$

$\rightarrow x^2y'' - 6xy' + 4y - 4e^x = 0$ tiene la forma

$F(x, y, y'', y')$

Un problema de valor inicial para una ED de orden n tiene la forma; $F(x, y, y', y'', y^{(n)} \ldots) = 0$ sujeto a;

$$\left.\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ y''(x_0) &= y_2 \\ &\vdots \\ y^{n-1}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned}\right\} \text{Condiciones iniciales}$$

Un problema de valor en la frontera para una ED de orden n tiene la forma; $F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$ sujeto a;

$$\left.\begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \\ y_2(x_2) = y_2 \\ \vdots \\ y(x_{n-1}) = y_{n-1} \end{array}\right\} \text{Condiciones de Frontera}$$

En ocasiones, cuando tenemos una ED de orden n ① $F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$ podemos "despejar" $y^{(n)}$ y obtener una expresión de la forma; ② $\underbrace{y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})}_{\text{Forma Normal}}$

Ejemplo

①

formalizó

$$x^2 \frac{dy}{dx} - xy = 2\cos(x)$$

$$\to x^2 \frac{dy}{dx} - xy - 2\cos(x) = 0 \to F(x, y, y') \ldots$$

en forma normal (despejar derivada más alta)

$$\to x^2 \frac{dy}{dx} = xy + 2\cos(x)$$

$$\to \frac{dy}{dx} = \frac{xy + 2\cos(x)}{x^2} \to y^{(n)} = F(x, y, y')$$

Simplificando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2} + \frac{2\cos(x)}{x^2}$$ Forma normal

$$\longrightarrow \boxed{\frac{y}{x} + \frac{2\cos(x)}{x^2}} \longrightarrow F(x, y)$$

(2)

$$x^2y'' - 2xy' + 4y = x^2\cos(x)$$

(1) Dividiendo ambos lado en x^2

$$\frac{x^2y'' - 2xy' + 4y}{x^2} = \frac{x^2\cos(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x^2y''}{x^2} - \frac{2xy'}{x^2} + \frac{4y}{x^2} = \cos(x)$$

$$= y'' - \frac{2y'}{x} + \frac{4y}{x^2} = \cos(x)$$

$$= \boxed{y'' = \cos(x) + \frac{2}{x}y' - \frac{4}{x^2}y} \longrightarrow F(x, y, y')$$

Forma normal

③ Determine si $y(x) = 2e^{x}$ es solución del PVI

① $y'' - y = 0$ sujeto a $y(0) = 2$
$y'(0) = 4$

Resp

① $y(x) = 2e^{x}$
$y'(x) = 2e^{x}$
$y''(x) = 2e^{x}$

② Sustituimos

$y'' - y = 0 \longrightarrow \underbrace{2e^{x} - 2e^{x} = 0}_{\text{Identidad}}$

$\therefore y(x) = 2e^{x}$ es solución de ED ①

③ Evaluamos condiciones

① $y(0) = 2e^{0} = 2(1) = 2$
$y'(0) = 2e^{0} = 2(1) = 2$

No cumple con la condiciones del PVI

$\therefore y(x) = 2e^{x}$ no es solución del PVI

Scanned with CamScanner

Ecuaciones Diferenciales Con Parametros

Muestre que

$$y(x) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-ax}$$

es solución de PVI

$$\frac{dy}{dx} + ay$$

Sujeto a $y(0) = 0$

- Variable dependiente e independiente en la ED ① son "y" y "x"
- Donde a y b son $a \neq 0$ constante, arbitrarias
- A las constantes a y b se les llama parámetros

NOTA: En la solución de la ED ① las constantes a y b se consideran herencia de la ED ① y no cambian como constante arbitraria de una solución

Respuesta

derivar

① $$y(x) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-ax}$$

$$(cf + dg)' = cf' + dg'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-ax}\right)}{dx}$$

$$= \frac{d\frac{b}{a}}{\cancel{dx}}^{\nearrow 0} - \frac{d\frac{b}{a}e^{-ax}}{dx}$$

$$= -\frac{b}{a}\frac{de^{-ax}}{dx}$$

$$= \frac{-b}{\cancel{a}} \cdot e^{-ax}(-\cancel{a})$$

$$= +be^{-ax}$$

Sustituir en ED

(2) $\frac{dy}{dx} + ay = b$

$= be^{-ax} + a\left(\frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-ax}\right) = b$

$= be^{-ax} + \cancel{b} - be^{-ax}b = \cancel{b}$

$= be^{-ax} = be^{-ax}$

Es una identidad
$\therefore y(x) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-ax}$ es solución de ED (1)

evaluar PVI

(3)

$y(0) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-a(0)}$ $= 1$

$y(0) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = 0$

$y'(x) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-ax}$

$\rightarrow y(0) = 0$

$\therefore$ Si es solución del PVI

• Muestre que $x^2+y^2=9$ es solución implícita del PVI $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

Sujeto a $y(0) = -3$

Respuesta

① Supongamos que y es una función de x en la relación $x^2+y^2=9$

② Derivar con respecto a x

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dx} = d9 \rightarrow 2x$$

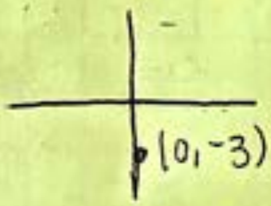
$$y' =$$

$$2x + \frac{dy^2}{dx} = 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}}$$ ∴ Es solución de ED (1

Nota; $y(0) = -3$

$x=0,\ y=-3$



③ Sustituir en la relación

$$x^2+y^2=9$$
$$(0)^2+(-3)^2=9$$
$$9=9$$

∴ Se cumple la condición inicial y $x^2+y^2=9$ es solución implícita del PVI

METODOS DE SOLUCIÓN

Veremos como resolver las ED's de primer orden

- ED simples
- ED separables
- ED Lineales

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x, y)}$$ PRIMER ORDEN

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)}$$ SIMPLES

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)h(y)}$$ SEPARABLES

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -p(x) + h(x)}$$ LINEALES

— Simples —

① $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \longrightarrow x^3 + C$

a) Integramos

$$\int \cancel{\frac{dy}{dx}} \cancel{dx} = \int 3x^2 dx$$

$$y = 3\frac{x^3}{3} + C = \underline{x^3 + C} \; \Delta$$

② $\frac{dy}{dx} = f(x)$

a) Integramos

$$\int \frac{\cancel{dy}}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = \int f(x)$$

$$\underline{y = \int f(x) + C} \; \Delta$$

Donde $\int f(x)$ representa solo una antiderivada de $f(x)$

- Separables -

• Se dice que la ED de primer orden $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ es separable si puede escribirse en la forma $\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y)$

Donde $g(x)$ es una función que solo depende de "x" y $h(y)$ es una función que depende solo de "y"

① Determine si la ED $\frac{dy}{dx} = \boxed{-\frac{x}{y}}$ es separable

$F(x,y)$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{[-x]}_{g(x)} \underbrace{\left[\frac{1}{y}\right]}_{h(y)}$$

*letras no influyen

∴ la ED ① es separable

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot \frac{1}{y}$$

*Todas las ecuaciones autónomas son separables

* No es separable cuando depende de x

Determine si las ED's de primer orden son separables

① $\frac{dy}{dx} = x^2 - x^2y = \underset{g(x)}{x^2}\underset{h(x)}{(1-y)}$ ∴ La ecuación ED ① es separable

② $\frac{dy}{dx} = x^3 - x^2y = x^2(x-y) = x^3\left(1-\frac{y}{x}\right)$ ∴ La ED no es separable

No depende solo de y

③ $\frac{dy}{dx} = 2y - y^2 = \underset{g(x)}{1}\underset{h(x)}{(2y-y^2)}$ ∴ La ED es separable

$g(x) = C$ constante ← no depende de x

④ $\frac{dy}{dx} + 2y = 4$
$= 4 - 2y$
$= \underset{g(x)}{2}\underset{h(x)}{(2-y)}$ ∴ La ED es separable

⑤ $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$ * La $\frac{dT}{dt} = f(t,T)$ es separable si $\frac{dT}{dt}$ puede expresarse en $\frac{dT}{dt} = g(t)\,h(T)$

(K y T_m constantes)

$= \overset{g(t)}{-K}\overset{h(T)}{(T - T_m)}$ ∴ La ED es separable

⑥ $\frac{dP}{dt} = ap - bp^2$
$p(a - bp)$

METODO:

Resolver la ED $\frac{dy}{dx} \overset{\text{división diferenciales}}{=} -xy$ ①

① Primer paso $\frac{dy}{dx} = \underbrace{-x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{y}}_{h(x)}$ ∴ Es ① separable

② Pasar "x" y "y" a un lado

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot \frac{1}{y} \rightarrow y\frac{dy}{dx} = -x \rightarrow ydy = -xdx$$

③ Integramos

$$\int ydy = \int -xdx$$

$$= \frac{y^2}{2} + C_1 = \frac{-x^2}{2} + C_2$$

$$= \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_2 - C_1$$ (multiplico x 2)

$$= y^2 + x^2 = 2(C_2 - C_1) \rightarrow C = 2(C_2 - C_1)$$

1CTE y orden 1

$= \boxed{x^2 + y^2 = C}$ * solución general de la ED ① (implícita)

• Resolver ① $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x$ y encontrar la solución general

① Aplicar método de separables

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 2xy$$

$$= \frac{dy}{dx} = \underbrace{2x}_{g(x)}\underbrace{(1-y)}_{h(y)}$$ ∴ la ecuación es separable

② Separamos variables

$$\rightarrow dy = 2x(1-y)\,dx$$

$$\rightarrow \frac{dy}{(1-y)} = 2x\,dx$$ → multiplicamos (-1)

$$\rightarrow -1\frac{dy}{(1-y)} = (-1)2x\,dx$$

$$\rightarrow = \frac{dy}{-1+y} = -2x\,dx$$

③ Integrando

$$\int \frac{dy}{-1+y} = \int -2x\,dx \quad = \ln|y-1| + C_1 = -\frac{2x^2}{2} + C_2$$

$u = y - 1$
$du = dy$

$|x| = 3$

$x = +3$

$x = -3$

$x = \pm 3$

$e^{\ln|u|} = u$ $\qquad e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

redefinir constante

$\longrightarrow \ln|y-1| = -x^2 + C_2 - C_1$

$\longrightarrow \underbrace{\ln|y-1| = -x^2 + C_3}$

Solución general implícita

④ Despejar y en caso posible $\qquad C_4 = e^{C_3} > 0$

$\longrightarrow e^{\ln|y-1|} = e^{-x^2+C_3}$ constante C_4

$\longrightarrow |y-1| = e^{-x^2} \cdot e^{C_3}$

$\longrightarrow |y-1| = e^{-x^2} \cdot C_4$

$\longrightarrow y-1 = \pm C_4 e^{-x^2}$ $\qquad C = \pm C_4$

$\longrightarrow y = \pm C_4 e^{-x^2} + 1$

$\longrightarrow y(x) = \underbrace{1 + Ce^{-x^2}}$

Solución general de la ED ①

⑤ Comprobar

$y(x) = 1 + Ce^{-x^2}$ es solución general de ED ①

$$m\frac{dy}{dx} = -ky - mg = \frac{dy}{dx} = \frac{-ky-mg}{m}$$

$$= \frac{-ky}{m} - \frac{mg}{m} = \frac{-ky}{m} - g =$$

Orden = 1, constantes = 1

$y(x) = 1 + ce^{-x^2}$

$y' = 0 + c\,(e^{-x^2})'$

$= c(e^{-x^2} \cdot (-x^2)')$

$= -2xce^{-x^2}$

· Sustituimos

$-2ce^{-x^2} + 2x(1 + ce^{-x^2}) = 2x$

$\rightarrow \cancel{-2xe^{-x^2}} + 2x \cancel{+2xce^{-x^2}} = 2x$

$\rightarrow 2x = 2x$

Identidad ∴ es solución general de ED ①

(1)

Encuentre la solución general de la ED de primer orden

$$① \; 12y \frac{dy}{dx} = x\,\mathrm{sen}(x^2) \cdot e^{-2y}$$

① Vemos si ED es separable

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\,\mathrm{sen}(x^2) \cdot e^{-2y}}{12y}$$

② Tratamos de factorizar

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{x\,\mathrm{sen}(x^2)}{1}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-2y}}{12y}}_{h(y)}$$

∴ ED ① es separable

③ Separar variables

$$\frac{12y\,dy}{e^{-2y}} = x\,\mathrm{sen}(x^2)\,dx$$

④ Integramos

$$\int \frac{12y}{e^{-2y}}\,dy = \int x\,\mathrm{sen}(x^2)\,dx$$

$$① \int e^{2y} \cdot 12y\,dy = \int x\,\mathrm{sen}(x^2)\,dx \quad ②$$

$\underset{y}{\overset{u}{\text{LATE}}}\ \underset{e^{2y}}{\ }\ dv$

① $\int e^{2y} \cdot 12y = 12\int y e^{2y} =$

$u = y \quad dv = e^{2y}$
$du = dy \quad v = \int e^{2y} dy = \frac{1}{2} e^{2y}$

-(-)meno,

$= y \frac{1}{2} e^{2y} - \int \frac{1}{2} e^{2y} \cdot dy$

$= \frac{ye^{2y}}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} e^{2y}\right]$

$= \frac{ye^{2y}}{2} - \frac{1}{4} e^{2y}$

$= 12\left[\frac{ye^{2y}}{2} - \frac{1}{4} e^{2y}\right]$

$= 6ye^{2y} - 3e^{2y}$

② $\int x\,\text{sen}(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\text{sen}\,x^2}_{\text{sen}\,u} \cdot \underbrace{2x \quad dx}_{du}$ $\qquad \int \text{sen}(u) = -\cos u$

$u = x^2$

$= \frac{1}{2}\left[-\cos x^2\right] + c$

⑤ Sustituimos en ②

$$\underbrace{6ye^{2y} - 3e^{2y} = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C}$$

Solución general implicita (y no está despejada)

$\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$

② Resolver el PVI $(x-1)\frac{dy}{dx} = y$ ①

sujeto a $y(0) = 2$

① Vemos si es separable

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(x-1)} \rightarrow \text{separable}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{y}{1}}_{h(y)}$$

② Separar variable

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}$$

③ Integramos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \ln|y| = \ln|x-1| + C$$

④ Despejar y si es posible

Aplicando exponencial

$\frac{|a|}{|b|} = |\frac{a}{b}|$ $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

$C_2 = e^{c_1}$

$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x-1| + c_1}$ $\pm \frac{y}{x-1} = \pm C_2$ $C = \pm C_2$

$|y| = e^{\ln|x-1|} + e^{c_1}$ $\underbrace{y(x) = C(x-1)}_{\text{Solución general}}$

$|y| = |x-1| + C_2$

$\frac{|y|}{|x-1|} = C_2$

$\left| \frac{y}{x-1} \right| = C_2$

Se busca solución particular que cumpla

$y(0) = 2$

$C(0-1) = 2$

$-C = 2$

$\boxed{C = -2}$

⑤ Sustituir en la solución general

$$\underbrace{y(x) = -2(x-1)}_{\text{Solución del PVI}}$$

$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{+a}{-b}$

Solución ED's con Parametros

05/09/2023

① Encuentre la solución del PVI

$$\frac{dy}{dx} + ay = b \quad \text{sujeto a } y(0) = 0$$

donde a, b son constantes con $\underline{a \neq 0}$
llamados parámetros de la ED   fantasma, no lo sé aún

Respuesta

① Ver si el problema es separable

$$\frac{dy}{dx} = b - ay \quad \text{separable}$$

$$= \underbrace{1}_{g(x)} \cdot \underbrace{(b-ay)}_{h(y)}$$

② Separar variables

$$dy = 1 \cdot (b - ay)\,dx$$

$$\rightarrow \frac{dy}{b-ay} = 1dx$$

③ Integramos y multiplicamos por -1

$$\frac{-dy}{b-ay} = -1dx$$

$$\rightarrow \frac{dy}{ay-b} = -1dx$$

$\int \frac{du}{u} = \ln|u|$

$\frac{1}{a}\int \frac{dy}{ay-b} = \int -1dx$

$u = ay - b$ $\quad = \frac{1}{a}\ln|ay-b| = -x + c_1$

$du = a\,dy$

④ Despejar y

$\ln|ay-b| = a(-x + c_1)$

$= -ax + ac_1$

$\rightarrow e^{\ln|ay-b|} = e^{-ax+ac_1}$

$\rightarrow |ay-b| = \pm e^{-ax} \pm e^{c_1}$

$\rightarrow ay - b = Ce^{-ax}$

$\rightarrow ay = ce^{-ax} + b$

$\rightarrow y = \frac{ce^{-ax}+b}{a}$ $\quad a \neq 0$

$\rightarrow y(x) = \frac{ce^{-ax}}{a} + \frac{b}{a}$

⑤ Resolver PVI

$y(0) = 0$

$ce^{-a(0)} + \frac{b}{a} = 0 \rightarrow c + \frac{b}{a} = 0 \rightarrow c = -\frac{b}{a}$

$y(x) = -\frac{b}{a}e^{-ax} + \frac{b}{a}$

Ecuaciónes Diferenciales Lineales

(Primer Orden)

Una ecuación es lineal de primer orden si tiene la forma;

(I) $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $g(x)$ son funciones que dependen solo de x (y no de y) $a_1(x)$ no es identicamente cero en I.

Una ecuación diferencial de primer orden que no se puede llevar a la forma (I) decimos que es una ecuación diferencial no lineal

→ Clasificación

(1) $1\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^{3x} \longrightarrow a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ lineal

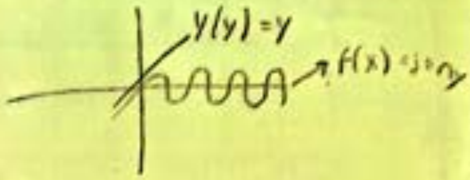
(2) $x\frac{dy}{dx} + 6y = x\cos x \longrightarrow a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ lineal

NOTA:

La ED $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} y$

es aproximada por

$\frac{dy}{dx} = y \rightarrow$ linealizando



③ $\frac{dy}{dx} = 2y \longrightarrow a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0$

$1\frac{dy}{dx} - 2y = 0 \rightarrow$ Función cero

④ $\frac{dy}{dx} = 2y - y^2 \longrightarrow a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ Función no depende de x

$\frac{dy}{dx} + 2y = -2y$

⑤ $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} y$ No lineal $\rightarrow$ y debe de estar sola

Resolver

① $e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 3e^{3x} \longrightarrow a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ Lineal

resultado de operación (derivada de un producto)

$\frac{d(e^{2x}y)}{dx} = 3e^{3x}$

el producto de la ecuación original

a) Integramos

$\int e^u = e^u + c$

$$\int \frac{d(e^{2x}y)}{dx}\,dx = \int 3e^{3x}\,dx$$

$$e^{2x}y = e^{3x} + C$$

$$y = \frac{e^{3x} + C}{e^{2x}}$$

$$\boxed{y(x) = e^{x} + Ce^{-2x}}$$

Solución general

equivalentes

① $e^{2x}\frac{dy}{dx}+2e^{2x}y=3e^{3x}$

$\rightarrow \frac{e^{2x}\frac{dy}{dx}+2e^{2x}y=3e^{3x}}{e^{2x}} = \frac{3e^{3x}}{e^{2x}}$ $\qquad e^{2x}\neq 0 \ \forall x\in R$

$\rightarrow \frac{e^{2x}\frac{dy}{dx}}{e^{2x}}+\frac{2e^{2x}y}{e^{2x}}=3e^{x}$

② $\rightarrow \underbrace{\frac{dy}{dx}+2y}_{\text{No es derivada de un producto}}=3e^{x}$ $\qquad \therefore$ La ED ② no está lista para ser resuelta

No es derivada de un producto

- Para resolver la ecuación ② debemos multiplicarla por e^{2x}

Existe una forma de "reparar" una ecuación diferencial lineal de la forma $1\frac{dy}{dx}+P(x)y=h(x)$ ①
El factor por el que debemos de multiplicar es el $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$ ②

$\rightarrow \frac{dx}{dy}+\boxed{2}y=3e^{x}$ $\qquad \therefore \mu(x)=e^{\int 2dx}=e^{2x}$

$\frac{dx}{dy}+\boxed{p(x)}y=h(x)$

A la expresión ② se le conoce como factor integrante de la ED ① FI

Resolver

$$\frac{dy}{dx} + \boxed{2x}y = 2x \quad ①$$

$$P(x) = 2x$$

Forma $\frac{dy}{dx} + \boxed{p(x)}y = h(x)$

El FI es $\mu(x) = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$

① Multiplicamos ED por FI $\mu(x) = e^{x^2}$

$$e^{x^2}\left(\frac{dy}{dx} + 2xy\right) = e^{x^2}2x$$

$$\underbrace{e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y}_{} = 2xe^{x^2} \longrightarrow$$ ecuación separada y derivada de una multiplicación

$$\frac{d\left[e^{x^2}y\right]}{dx}$$

→ completa

$$\int \frac{d(e^{x^2}\cdot y)}{dx}dx = \int 2xe^{x^2}$$

$u = x^2$

$du = 2x$

$dx = \frac{du}{2x}$

$$(e^{x^2}\cdot y) = e^{x^2} + c$$

solución general

$$y = \frac{e^{x^2}+c}{e^{x^2}} = 1 + \frac{c}{e^{x^2}} = \boxed{1 + ce^{-x^2}}$$

Examen

- Resolver

$$x\frac{dy}{dx} - y = x^2e^x \quad ①$$

sujeto a $y(1) = e^1$

$x = 1$

$(0,\infty)$

Respuesta

Para encontrar el FI es necesario escribir la ED ① en la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = h(x)$ (siempre en esta forma)

F.I $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

① Dividimos expresión ED ① entre "x"

$$\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x} = \frac{x^2e^x}{x}$$

$P(x) = -\frac{1}{x}$

$$\rightarrow \frac{x}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = xe^x$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = xe^x \quad ② \quad x \neq 0$$

$$\boxed{\begin{matrix}(-\infty,0)\\(0,\infty) *\end{matrix}}$$

En donde el FI es

$e^{\ln u} = u$ $\quad a\ln x = \ln x^a$

$e^{-\ln u} = u$ X

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx}$$
$$= e^{-\int \frac{1}{x}dx}$$
$$= e^{-\ln|x|} = e^{-\ln x} = e^{-1\ln x} = e^{\ln x^{-1}}$$
$$= x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$\boxed{x \in (0,\infty)}$

Scanned with CamScanner

② Multiplicar FI por ②

$$\ln\frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=xe^{x}\right)$$

$$\underbrace{\ln\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\left(\frac{1}{x^2}\right)y}_{\frac{d\left(\frac{1}{x}\cdot y\right)}{dx}}=e^{x},$$

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y\frac{dx^{-1}}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y(-1)x^{-2}$$

③ Integramos

$$\int\frac{d\left(\frac{1}{x}\cdot y\right)}{dx}=\int e^{x}$$

$$\rightarrow \frac{1}{x}\cdot y=e^{x}+C \qquad C\in\mathbb{R}$$

③

$$\rightarrow \underbrace{y(x)=x(e^{x}+C)}$$

Solución general

④ Resolviendo PVI

$$Y(1)=e^{1}$$

$$1(e^{1}+C)=e^{1}$$

$$C=e^{1}-e^{1}=0$$

⑤ Sustituimos en solución general

$$Y(x)=x(e^{x}+0)$$

$$\underbrace{y(x)=xe^{x}}$$

Solución del PVI

19/Sep/2023

Ecuaciones Diferenciales Lineales Con Parametros

Encuentre la solución del PVI

$$\frac{dy}{dx} + ay = 6 \quad (1), \quad y(0) = 0$$

→ Respuesta

(1) Poner en forma normal

$$\frac{dy}{dx} + ay = 6$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = h(x)$$

(2) Sacar el FI de ED (1)

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$
$$= e^{\int a\,dx}$$
$$= e^{ax}$$

(3) Multiplicar ED (1) por FI

$$e^{ax}\left(\frac{dy}{dx} + ay\right) = 6(e^{ax})$$

$$\rightarrow e^{ax}\frac{dy}{dx} + e^{ax}ay = 6e^{ax}$$

→ Derivada del Producto

$\int e^u du$

$u = ax$
$du = a$
$dx = \frac{du}{a}$

$\int e^{ax} = e^u \cdot du$

$\longrightarrow \frac{d\, e^{ax} \cdot y}{dx} = be^{ax}$ $\quad \frac{1}{a}\int e^{ax} a\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

④ Integramos

$$\int \frac{d\, e^{ax} \cdot y}{dx} = \int b e^{ax} dx$$

$\rightarrow e^{ax} \cdot y = b \int e^{ax} dx$

$\longrightarrow e^{ax} \cdot y = \frac{b}{a} \int e^{ax} a\, dx = \frac{b}{a} e^{ax} + C$

$\longrightarrow y = \frac{\frac{b}{a} e^{ax} + C}{e^{ax}} = \frac{b}{a} + \frac{C}{e^{ax}} = \underbrace{\frac{b}{a} + Ce^{-ax}}_{\text{Sol general}}$ ②

⑤ Se busca solución particular que cumpla $y(0) = 0$

$y(0) = \frac{b}{a} + Ce^{-a(0)} = 0$

$\longrightarrow -\frac{b}{a} = Ce^{-a(0)} \rightarrow C = -\frac{b}{a}$

⑥ Sustituir C en ②

$y(x) = \underbrace{\frac{b}{a} + \left(-\frac{b}{a}\right) e^{-ax}}$

* Solución del PVI

$e^{2x} \cdot e^{2+2}$

$d = e^{2_1} \cdot 2e^{2x}$

T_0

$k, T_m =$ constante

- Encuentre la solución del PVI

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \quad , \text{sujeto a} \quad T(0) = T_0$$

① $$\frac{dT}{dt} = -kT + kT_m$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_m$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = h(x)$$

② Sacar FI

$$\mu(t) = e^{\int k\,dx} = e^{kx} = e$$

③ Multiplicar EO ① por $\mu(x)$

$$e^{kx}\left(\frac{dT}{dx} + kT\right) = e^{kx}(kT_m)$$

$$\underbrace{e^{kx}\frac{dT}{dx} + e^{kx}kT}_{} = e^{kx}kT_m$$

derivada del producto

$$\frac{d(e^{kx} \cdot T)}{dx} = kT_m e^{kx}$$

$\int e^{kx}$

④ Integramos

$$\int \frac{d(e^{kx} \cdot T)}{dx} = \int KT_m e^{kx}$$

$$e^{kx} \cdot T = KT_m \int e^{kx}$$

$$e^{kx}\, T = KT_m \int e^{kx}\, dx = \frac{KT_m}{k} e^{kx} + C$$

$$T(x) = \frac{\frac{KT_m}{K} e^{kx} + c}{e^{kx}} = \frac{T_m \cancel{e^{kx}}}{\cancel{e^{kx}}} + \frac{c}{e^{kx}}$$

$$\underbrace{T(x) = T_m + Ce^{-kx}}_{\text{Sol general}}$$

⑤ Se busca solución particular que cumpla $T(0) = T_0$

$$T(0) = T_m + Ce^{-kx} = T_0$$

$$T_m - T_0 = -Ce^{-kx}$$

$$\underline{-T_m + T_0 = C}$$

$$T(0) = \underbrace{T_m + (-T_m + T_0)e^{-k(x)}}_{\text{Sol del PVI}} = T_0(1) = \underbrace{T_0}_{\text{Solución del PVI}}$$

Scanned with CamScanner

• Encuentre la solución general de la ED

$$x\frac{dy}{dx}+y=0$$

① derivada de un producto

② Integramos

$$\int \frac{d\, xy}{dx}=\int 0$$

$$xy = 0x + C$$

$$y(x)=\frac{0+C}{x}=\frac{0}{x}+\frac{C}{x}$$

$$y(x)=\frac{C}{x}=\boxed{Cx^{-1}}$$

Scanned with CamScanner

2 PARCIAL

Analisis Cualitativo ED's Autonomas

→ Definición:

Decimos que una ED de primer orden es autónoma si

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

→ Ejemplos

① $\frac{dy}{dx} = \underbrace{4y - y^2}_{f(y)}$ ② $\frac{dy}{dx} = \underbrace{\operatorname{Sen} y}_{f(y)}$

③ $\frac{dy}{dx} = \underbrace{4y^2 - y^3}_{f(y)}$

→ Puntos de Equilibrio

Decimos que $y = \bar{y}$ → Valor fijo de y es un punto de equilibrio de la ED $\frac{dy}{dx} = f(y)$ ① si se cumple $f(y) = 0$

→ Ejemplos

Encuentre los puntos de equilibrio de la ED $\frac{dy}{dx} = 4 - y^2$

• Respuesta

Igualamos $f(y) = 0$

punlos eq = num soluciones

Ahora:

$$4 - y^2 = 0$$
$$4 = y^2$$
$$\sqrt{4} = \sqrt{y^2}$$
$$2 = |y|$$
$$\boxed{\pm 2 = y}$$

Los puntos de equilibrio de la ED ① son

$$\bar{y}_1 = 2 \quad , \quad \bar{y}_2 = -2$$

Reglas

Método Alternativo

$$4 - y^2 = 0$$
$$\rightarrow (2 - y)(2 + y) = 0$$
$$\underbrace{2 - y = 0 \quad , \quad 2 + y = 0}$$
$$\left| \begin{array}{l} \bar{y} = 2 \\ \bar{y} = -2 \end{array} \right|$$

Comprobación

$$f(2) = 4 - (2)^2 = 4 - 4 = 0$$
$$f(-2) = 4 - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$$

NOTA:

Igual en $y(x) = -2$

$$\frac{dy}{dx} = 4 - y^2$$

Si $y(x) = 2 \quad x \in \mathbb{R}$ (Función CTE)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d2}{dx} = 4 - (2)^2 \end{array}\right\} \text{Identidad}$$

$0 = 0 \rightarrow \therefore y_1(x) = 2$ es solución de la ED

Revisar Max, min $d'(y)$

Dada la ED $\frac{dy}{dx} = f(y)$

① Derivar con respecto a x

$$\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d\,f(y)}{dx} \rightarrow y$$

Función que depende de x

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \underbrace{f'(y)\cdot\frac{dy}{dx}}_{\text{regla cadena}}$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = f'(y)\cdot f(y)$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = f(y) \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = f'(y)\cdot f(y)}$$

Repaso Calculo Diferencial

· Vamos a suponer que $y=f(x)$ admite hasta 2^a derivada en I (intervalo)

① → Si $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$ entonces f es estrictamente creciente en I

② → Si $f'(x) < 0$ $\forall x \in I$ entonces f es estrictamente decreciente en I

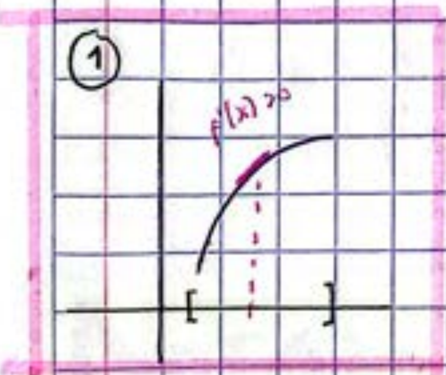
③ → Si $f''(x) > 0$ $\forall x \in I$ entonces f es convexa en I

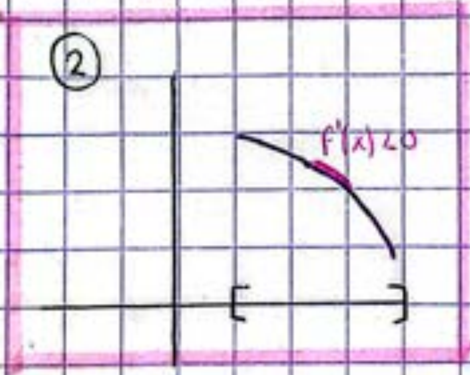
④ → Si $f''(x) < 0$ $\forall x \in I$ entonces f es cóncava en I

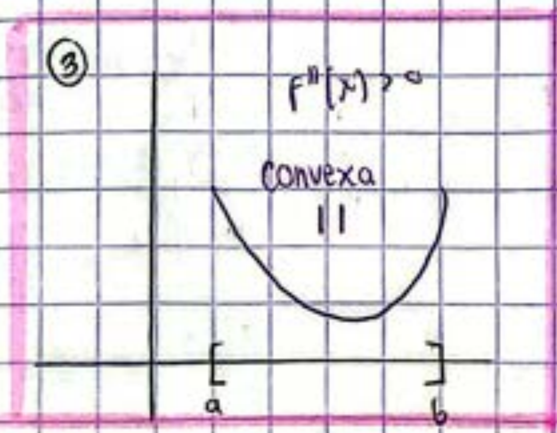
⑤ → Si $f'(x) = 0$ entonces $x = x_0$ (*) es un punto crítico de f

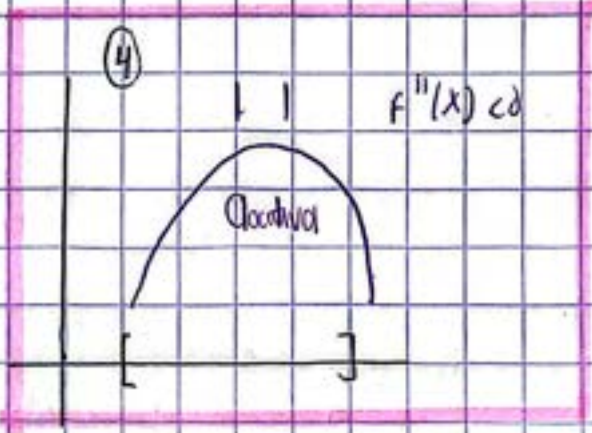
⑥ → Si $f''(x) = 0$ entonces $x = x_0$ (*) es un punto de inflexión

(*) es posiblemente



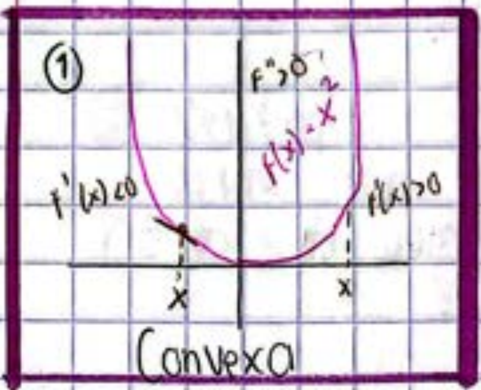


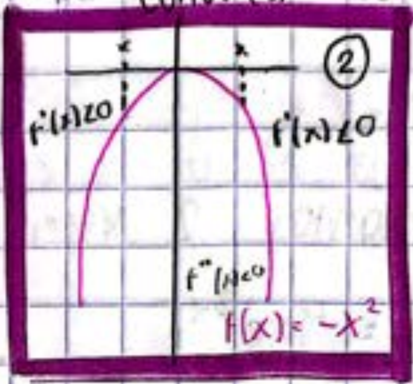


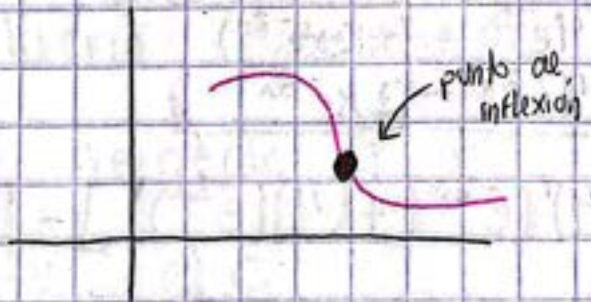


1. $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow \boxed{f''(x) = 2} \rightarrow f$ es convexa
2. $f(x) \rightarrow -x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow \boxed{f''(x) = -2} \rightarrow f$ es concava

~~Convexa~~ Concava







$\frac{dy}{dx} = f(y)$
- $f(y) > 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} > 0 \rightarrow y$ es creciente
- $f(y) < 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} < 0 \rightarrow y$ es decreciente

$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y) \cdot f'(y)$
- $f(y) \cdot f'(y) > 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \rightarrow y$ es convexa
- $f(y) \cdot f''(y) < 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \rightarrow y$ es concava

① Verifique que la función $y(x) = 14xe^{-3x}$ es solución particular de la ED

$$y'' + 2y' - 3y = -16e^{-3x} \quad ①$$

Resp.

① Derivamos 2 veces y sustituimos en la ED

$y(x) = 4xe^{-3x}$

$$\begin{aligned} y'(x) &= 4x'(e^{-3x}) + 4x(e^{-3x})' \\ &= 4e^{-3x} + (-12xe^{-3x}) \\ &= \underline{4e^{-3x} - 12xe^{-3x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= [(4)'(e^{-3x}) + (4)(e^{-3x})'] - [(12x)'(e^{-3x}) + (12x)(e^{-3x})'] \\ &= -12e^{-3x} - [12e^{-3x} - 36xe^{-3x}] \\ &= \underline{-24e^{-3x} + 36xe^{-3}} \end{aligned}$$

② Sustituimos en ED ①

$$(-24e^{-3x} + 36xe^{-3}) + 2(4e^{-3x} + 12xe^{-3x}) - 3(4xe^{-3x}) = -16e^{-3x}$$

$$\rightarrow -24e^{-3x} + 36xe^{-3} + 8e^{-3x} + 24xe^{-3x} - 12xe^{-3x} = -16e^{-3x}$$

$$-16e^{-3x} - 0 = -16e^{-3x}$$

$$\underline{-16e^{-3x} = -16e^{-3x}}, \quad \text{Identidad}$$

Scanned with CamScanner

$\therefore$ $y = 4xe^{-3x}$ es solución de la ED ① la familia y no tiene constantes arbitrarias $\therefore$ sí es solución particular

② Verifique que la relación $y^2 - x^2y = c$ define una solución implícita de la ED

$$y' = \frac{2xy}{2y - x^2}$$

① Supongamos que y es una función de x en la relación $y^2 - x^2y = C$

② Derivamos respecto a x

$$\frac{d\, y^2 - x^2 y}{dx} = \frac{dc}{dx}$$

$$2y\frac{dy}{dx} - \left(x^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + y\,\frac{dx^2}{dx}\right) = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} - y2x = 0$$

③ Despejamos $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}\left(2y - x^2\right) = +2xy_x$$

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2y-x^2}}$$ igual a ED ①

$\therefore$ $y^2 - xy = C$ es solución implícita de $y' = \frac{2xy}{2y-x^2}$

Usar fracciones parciales

③ Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = 4y - y^2 \quad \text{sujeto a } y(0) = 2$$

① Ver si ED ① es separable

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{1}_{g(x)}(\underbrace{4y - y^2}_{h(y)})$$ $\therefore$ ED ① es separable

② Separar variables

$$dy = 1(4y - y^2)\,dx$$

$$\rightarrow \frac{dy}{4y - y^2} = 1dx$$

Scanned with CamScanner

③ Integramos

$$\int \frac{dy}{4y-y^2} = \int dx$$

①

$$\int \frac{dy}{4y-y^2} = \frac{1}{y(4-y^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{4-y} : 1 = A(4-y) + B(y)$$

Si $y = 4$, $1 = A(4-4) + B(4)$

$= 1 = 4B \rightarrow B = \frac{1}{4}$

Si $y = 0$, $1 = A(4-0) + B(0)$

$= 1 = 4A$; $A = \frac{1}{4}$

$$\int \frac{\frac{1}{4}}{y} dy + \int \frac{\frac{1}{4}}{4-y} dy = x + C \quad \begin{matrix} u = 4-y \\ du = -dy \end{matrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\ln|y| - \frac{1}{4}\ln|4-y| = x + C}_{\text{Sol implicita de ED ①}}$$

④ Aplicamos e

$$\frac{1}{4}\ln|y| - \frac{1}{4}\ln|4-y| = x + C$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}(\ln|y| - \ln|4-y|) = x + C$$

$$\rightarrow \ln\left|\frac{y}{4-y}\right| = (x+C)(4)$$

Scanned with CamScanner

$$e^{a+b} = e^{a} \cdot e^{b}$$

$$e^{\ln\left|\frac{y}{4-y}\right|} = e^{4x+4c}$$

$$\rightarrow \left|\frac{y}{4-y}\right| = e^{4x} \cdot e^{4c}$$

$$\rightarrow \frac{y}{4-y} = \pm e^{4x} \cdot e^{4c},$$

$$\rightarrow y = \pm ce^{4x}(4-y)$$

$$\rightarrow y = 4ce^{4x} - ce^{4x}y$$

$$\rightarrow y + ce^{4x}y = 4ce^{4x}$$

$$\rightarrow y(1 + ce^{4x}) = 4ce^{4x}$$

$$\rightarrow \boxed{y = \frac{4ce^{4x}}{1+ce^{4x}}}$$ ∴ Sol general de k en ①

⑤ Buscamos solución particular que cumpla $y(0) = 2$

$$y(0) = \frac{4ce^{4(0)}}{1+ce^{4(0)}} = 2$$

$$y = \frac{4e^{4x}}{1+e^{4x}}$$ ∴ sol del pvi

$$\frac{4c}{1+c} = 2 \rightarrow 4c = 2(1+c)$$

$$4c = 2 + 2c$$

$$4c - 2c = 2$$

$$C = 1$$

④ Resuelva el siguiente problema de vala inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 2x - 1 \rightarrow$$

① La ecuación Diferencial es lineal ya que

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 2x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} - p(x)y = h(x)$$

② Sacamos FI de ED

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln(x)} = e^{\ln|x^{-1}|} = x^{-1}$$

③ Multiplicamos FI por ED

$$x^{-1}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y\right) = (2x-1)x^{-1}$$

$$\underbrace{x^{-1}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y}_{\text{derivada producto}} = 2 - \frac{1}{x}$$

$$\frac{d(x^{-1}\cdot y)}{dx} = 2 - \frac{1}{x}$$

④ Integramos para despejar y

$$\cancel{\int} \frac{d(x^{-1}y)}{dx} = \int 2 - \frac{1}{x}\, dx = 2\left[\int dx - \int \frac{1}{x}\, dx\right]$$

$$\rightarrow x^{-1}y = 2x - \ln|x| + C$$

$$\rightarrow y(x) = \frac{2x}{\frac{1}{x}} - \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} + C$$

$$\rightarrow y(x) = \underbrace{2x^2 - x\ln|x| + Cx}_{\text{Sol general EDO}}$$

⑤ Se busca sol particular que cumpla $y(1) = 4$

$$y(1) = 2(1)^2 - 1(\ln|1|) + C(1)$$
$$= 2 - 1(0) + C$$
$$4 = 2 + C$$
$$4 - 2 = C$$
$$\underbrace{2 = C}$$

⑥ Sustituir C en ED ①

$$\underbrace{y(x) = 2x^2 - x\ln|x| + 2x}_{\text{Sol del PVI}}$$

⑤ a) Encuentre una solución ED lineal de primer orden con parametig

$\frac{dy}{dx} + ay = bx$

① La ED es lineal ya que cumple $\frac{dy}{dx} + p(x)y = h(x)$

$$\frac{dy}{dx} + ay = bx$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = h(x)$$

$\therefore$ es lineal

② Obtener FI

$\mu(x) = e^{\int a\,dx} = e^{a\int dx} = \underline{e^{ax}}$

③ Multiplicamos por FI

$e^{ax}\left(\frac{dy}{dx} + ay\right) = e^{ax}(bx)$

$$\underbrace{e^{ax}\frac{dy}{dx} + e^{ax}ay}_{\frac{d(e^{ax}\cdot y)}{dx}} = e^{ax}bx$$

④ Integramos

$$\int \frac{d(e^{ax}\cdot y)}{dx} = \int e^{ax} bx \; dx \rightarrow uv - \int v\,du$$

$u = ax \quad du = a\,dx \quad dx = \frac{du}{a}$

$$e^{ax} y = \int e^{ax} bx \; dx$$

$u = bx \qquad dv = e^{ax}$

$du = b\,dx \qquad v = \int e^{ax}$

$v = \frac{1}{a} e^{ax}$

$$e^{ax} y = (bx)\frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax}\, b\, dx$$

$$e^{ax} y = \frac{bx}{a} e^{ax} - \frac{b}{a} e^{ax} + c$$

⑤ Despejamos y

$$y(x) = \frac{\frac{bx}{a}\cancel{e^{ax}}}{\cancel{e^{ax}}} - \frac{\frac{b}{a}\cancel{e^{ax}}}{\cancel{e^{ax}}} + \frac{c}{e^{ax}}$$

$$\underbrace{y(x) = \frac{bx}{a} - \frac{b}{a} + \frac{c}{e^{ax}}}_{\text{Sol. general de EO ①}}$$

b) Encuentre la solución que cumple la condición inicial $y(0) = 0$

⑥ Se busca solución que cumpla $y(0) = 0$

$$0 = \frac{b(0)}{a} - \frac{b}{a} + ce^{a(0)}$$

$$0 = \frac{b(0)}{a} - \frac{b}{a} + Ce^{-a(0)}$$

$$0 = -\frac{b}{a} + Ce^{0}$$

$$-Ce^{0} = -\frac{b}{a} \quad \therefore \quad C = \frac{b}{a}$$

⑦ Sustituimos C en EO

$$\underbrace{y(x) = \frac{bx}{a} - \frac{b}{a} + \frac{b}{a}e^{-ax}}_{\text{Sol del PVI}}$$

Punto De Equilibrio

Punto Posible De Inflexión

$f(y) = 0$
$\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

$f'(y) = 0$
$\left(\frac{d^2y}{dx^2} = 0\right)$

→ Realiza el análisis cualitativo de la siguiente ED autónoma

$$\frac{dy}{dx} = 4y - y^2 \quad (1)$$

Nota:
$$y(x) = \frac{4Ce^{4x}}{1 + Ce^{4x}}$$

Vamos a obtener el comportamiento de las gráficas de $y(x)$

Respuesta:

(1) Identificar $f(y)$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{4y - y^2}_{f(y)}$$

$f'(y) = 4 - 2y$

$y^2+4y-4y-16$ $\qquad \frac{dy}{dx}=f(y)$ $\qquad f(y)=4y-y^2$

② Puntos de Equilibrio e inflexión

Puntos de equilibrio

$f(y)=0$

$4y-y^2=0$

$y(4-y)=0$

$y_1=0 \quad 4-y=0$

$y_2=4$

es 0

Posibles Puntos de inflexión

$f'(y)=0$ y

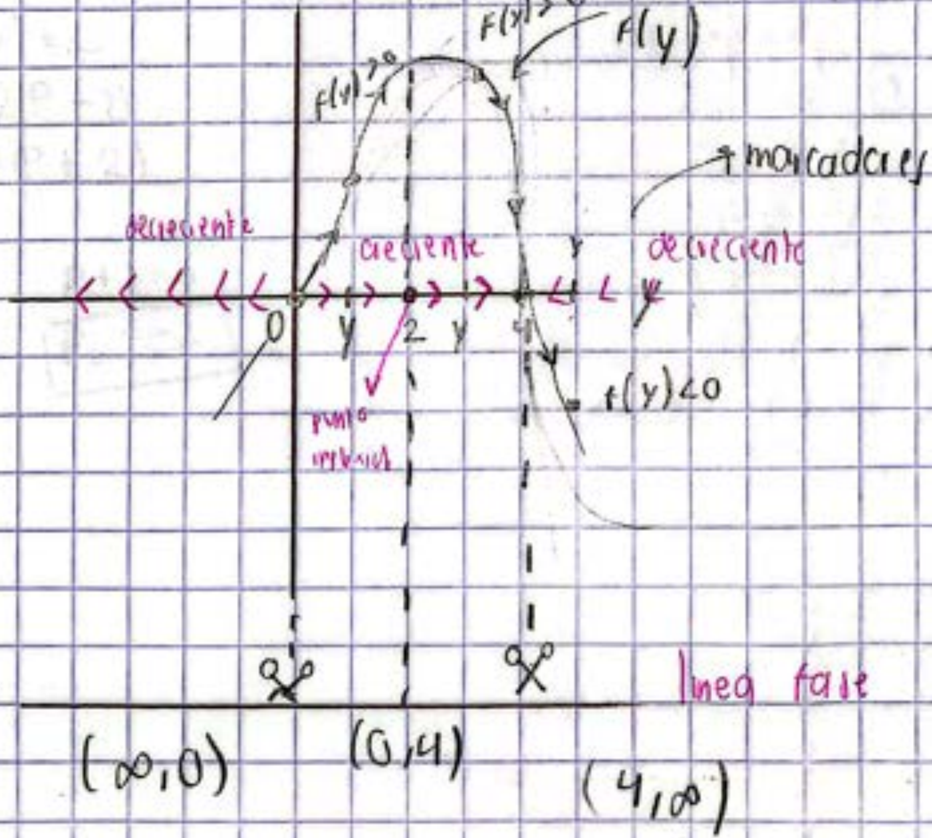
$4-2y=0$

$4=2y$

$\frac{4}{2}=y$

$y=2$

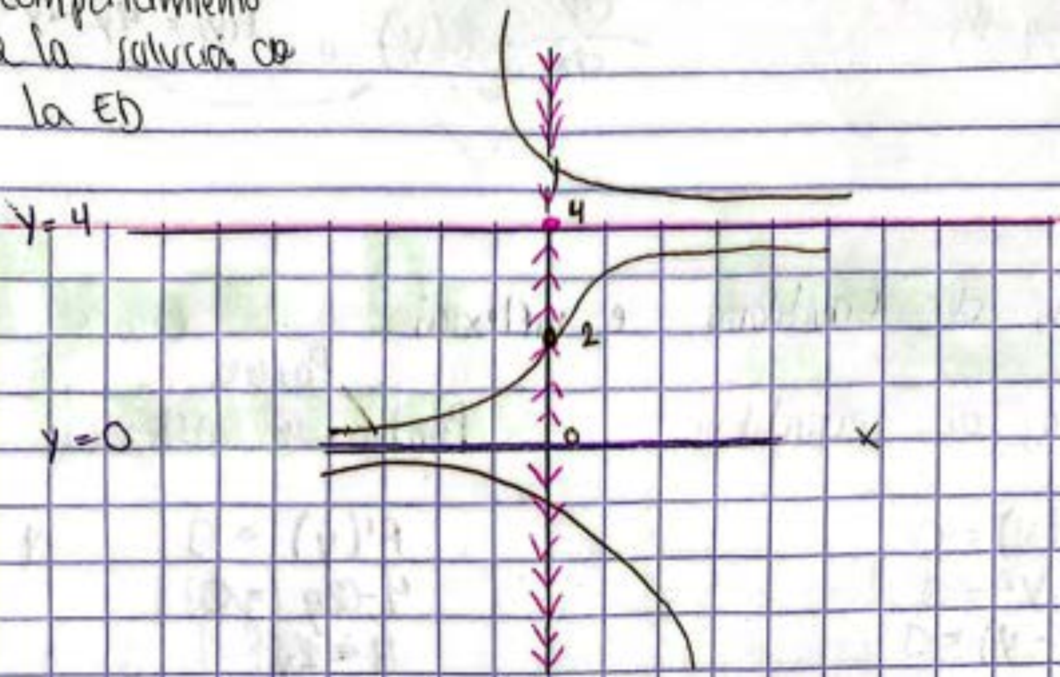
③ Graficar $f(y)=4y-y^2$ $\qquad$ maximo $x=2$



Puntos

Comportamiento de la solución de la ED

Sol constante



→ Realice el análisis cualitativo de la ED:

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{P^2 - 2P - 8}_{f(P)} \quad (1)$$

Respuesta

(1) Identificar $f(P)$

$f(P) = P^2 - 2P - 8$

→ $f'(P) = 2P - 2$

(2) Puntos de equilibrio

$f(P) = 0$

$P^2 - 2P - 8$

$(P - 4)(P + 2)$

$P - 4 = 0$ $\quad$ $P + 2 = 0$

$\boxed{P_1 = 4}$ $\quad$ $\boxed{P_2 = -2}$

Posibles puntos inflexión

$f'(P) = 0$

$2P - 2 = 0$

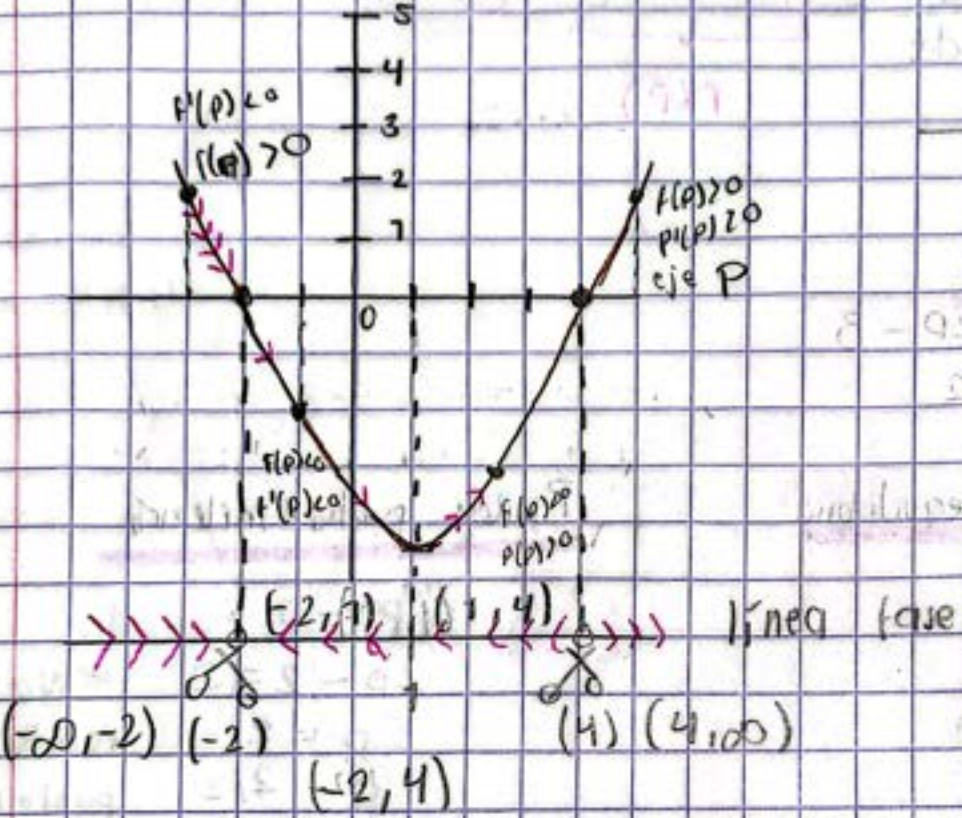
$2P = 2$

$P = 2/2$

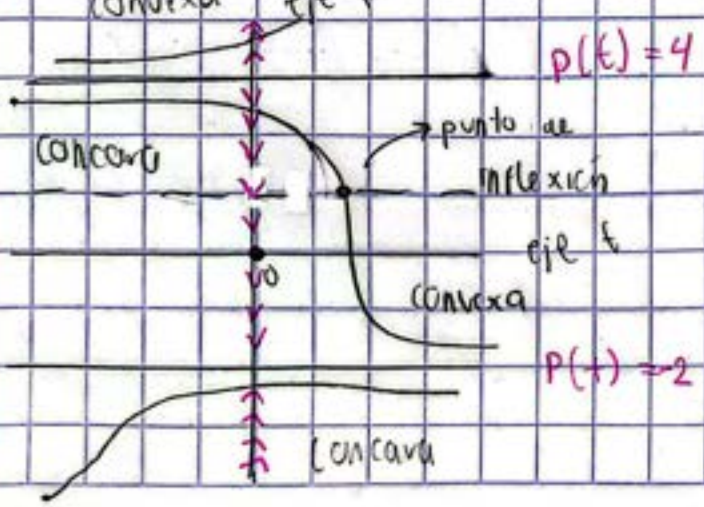
$\boxed{P = 1}$

*No se repite el punto inflex

③ Gráfica $f(P)$



Comportamiento de la soluciones de la ED $\frac{dP}{dt} = P^2 - 2P - 8$



ANALISIS CUALITATIVOS DE ED'S CON PARAMETROS

03. Oct. 2023

① Realice el análisis cualitativo de la ED

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{ay^2 - 6y}_{f(y)} \quad , \quad a \text{ y } 6 \text{ constantes positivas}$$

Respuesta

1. $f(y) = ay^2 - 6y$ → Se abre hacia arriba ya que coeficiente "a" es positivo

$f'(y) = 2ay - 6$

2. Punto de equilibrio

$f(y) = 0$

$ay^2 - 6y = 0$

$y(ay - 6) = 0$

$y = 0 \quad , \quad ay - 6 = 0$

$\boxed{y_1 = 0} \quad , \quad ay = 6$

$\boxed{y_2 = \frac{6}{a}}$

Posibles puntos de inflexión

$f'(y) = 0$

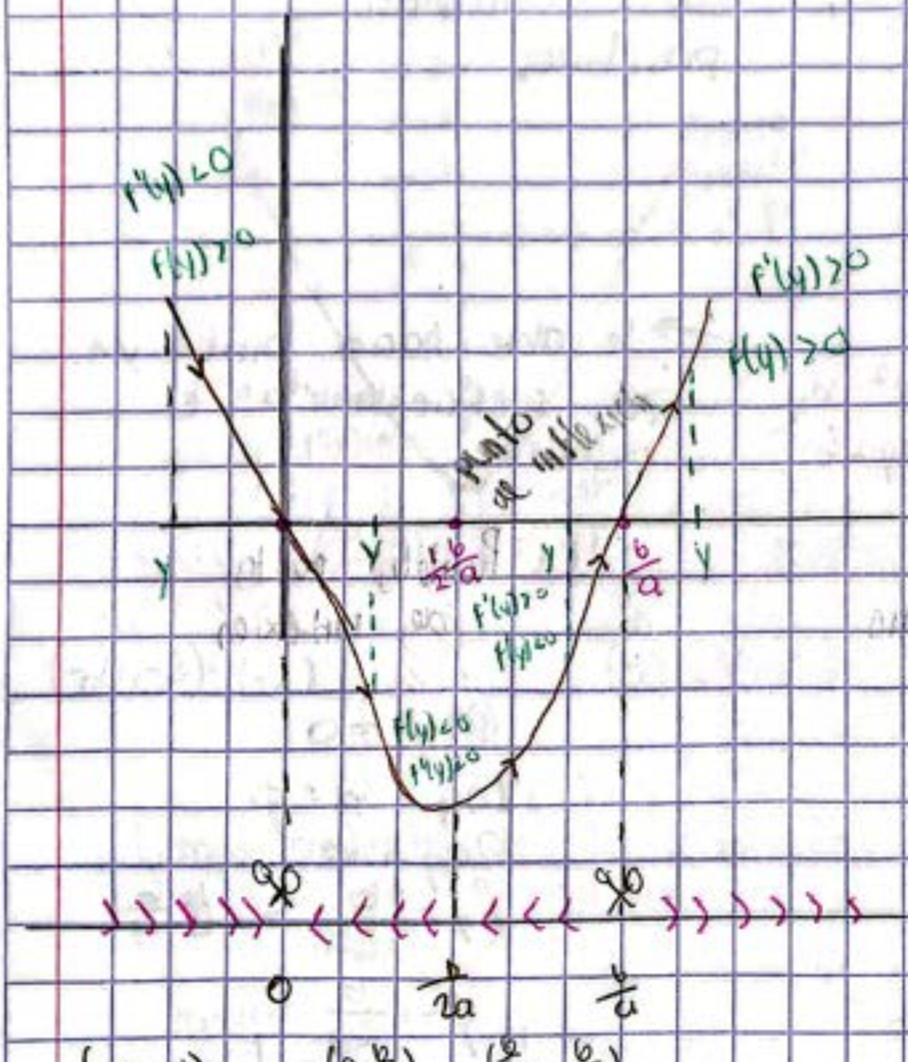
$2ay - 6 = 0$

$2ay = 6$

$y = \frac{6}{2a} = \frac{1}{2}\frac{6}{a}$

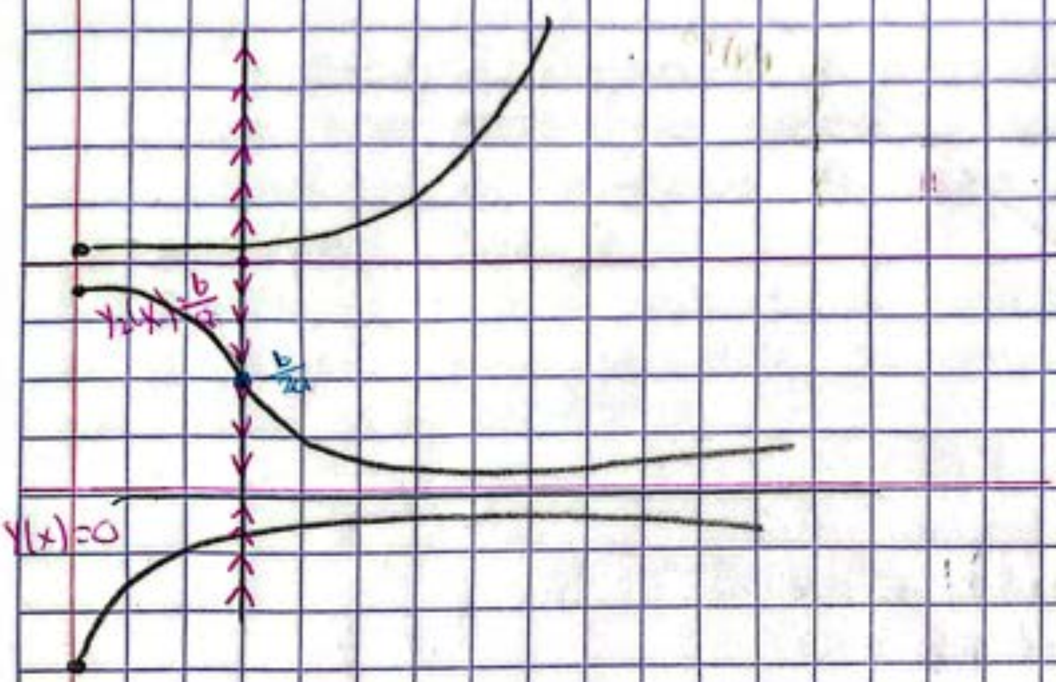
$\boxed{y^* = \frac{6}{2a}}$

③ Graficar $f(y) = ay^2 - by$



$(-\infty, 0)$ $(0, \frac{b}{2a})$ $(\frac{b}{2a}, \frac{b}{a})$

④ Características de las soluciones de $\frac{dy}{dx} = ay^2 - by$



② Análisis cualitativo de $\frac{dy}{dx} = y - 4$

① $f(y) = y - 4$

$f'(y) = 1$

② Punto equilibrio

$f(y) = 0$

$y - 4 = 0$

$\boxed{y_1 = 4}$

Posible Punto de inflexión

$f'(y) = 0$

$1 = 0$

¡Imposible!

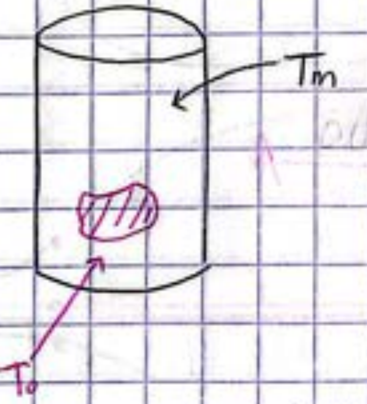
¡No habrá punto de inflexión

Ley De Enfriamiento De Newton

→ Planteamiento

Se cambia un objeto a un medio ambiente que tiene temperatura constante y se desea determinar la temperatura del objeto conforme el tiempo transcurre.

Supongamos que el cuerpo es lo suficientemente pequeño como para alterar la temperatura del medio ambiente.



La ley de enfriamiento de Newton define que la rapidez con la que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y del ambiente.

→ Modelación

Variables

- Tiempo → t
- Temperatura objeto → T
- Temperatura del ambiente → T_m
- Temperatura inicial → T_0

→ Forma matemática

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \qquad T(0) = T_m}$$

$\frac{dT}{dt}$ = rapidez de cambio temperatura del objeto respecto al tiempo.

Calibración de ED

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m) \qquad \frac{dT}{dt} = -K(T - T_m)$$

Deseamos que $K > 0$

Pensemos en taza de café

$T > T_m$

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$$

$(-) = (+)(+) \rightarrow$ Falso

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} = -K(T - T_m)$$

$(-) = -(+)(+) \rightarrow$ Verdadera

Modelo final

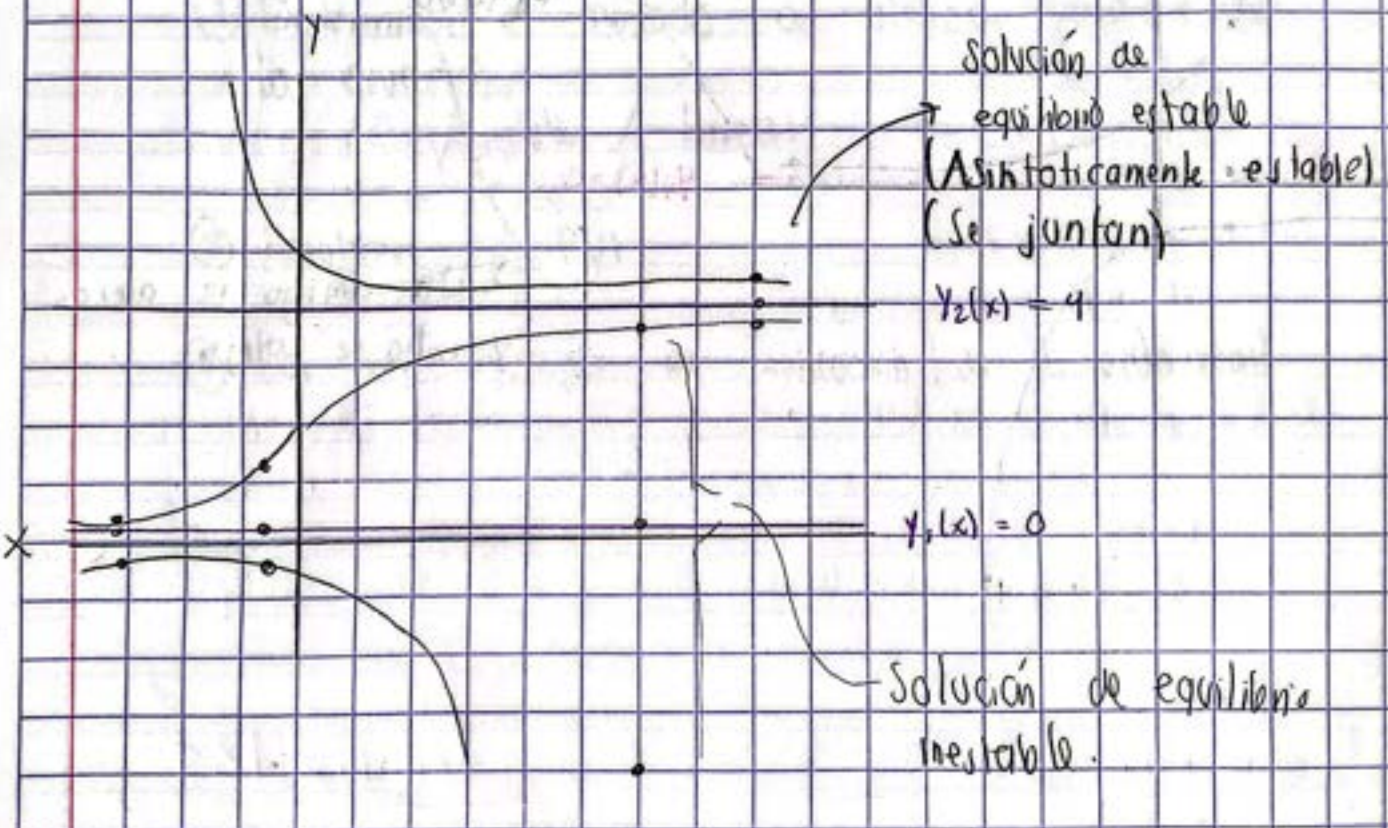
$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_m)$$, sujeto a $T(0) = T_0$ / donde

T_m = temperatura del medio
T_0 = temperatura inicial del cuerpo
K = coeficiente de transferencia de calor

más rápido
K grande

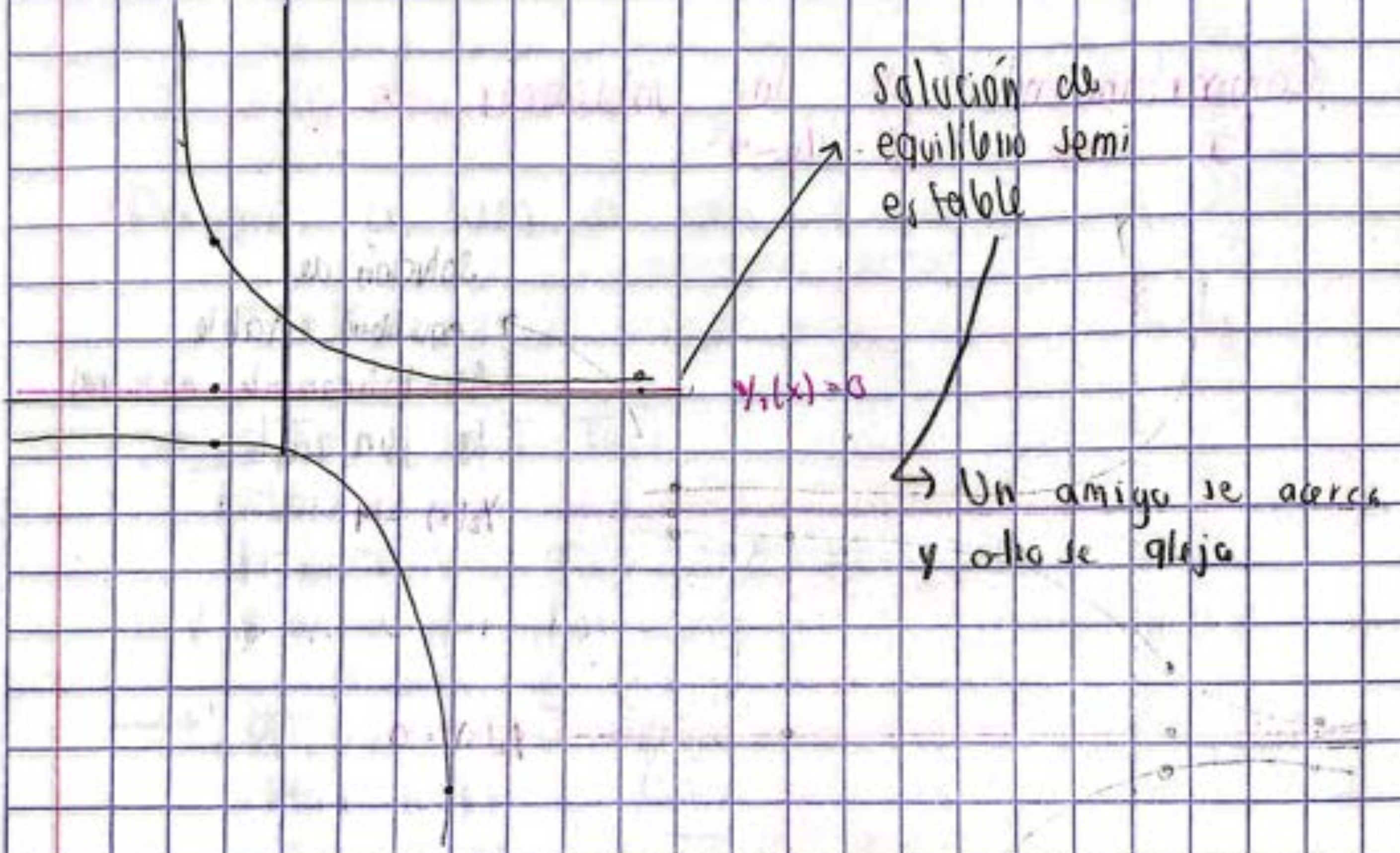
Clasificación Soluciones Equilibrio

Comportamiento de las soluciones de la ED $\frac{dy}{dx} = 4y - y^2$



Solución en función
constante

Comportamiento de las soluciones de la
ED $\frac{dy}{dx} = -y^2$



rapidez cambio temp resp tiempo

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m), \text{ sujeto a } T(0) = T_0$$

→ Ruta a seguir

*Si es autónomo realizar análisis cualitativo

1. Determinar el método a utilizar para resolver la ecuación.
   Separable / lineal

2. Resolver el PVI

3. Dar un ejemplo de aplicación (de la vida real)

$T_m > 0$, $T_m < 0$

Análisis Cualitativo de la ED

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_m)$$

donde $K > 0$
$T_m > 0$

① Identificar $f(T)$

$$\underbrace{f(T) = -K(T - T_m)}_{f(T)}$$

$$f'(T) = (-K(T - T_m))'$$
$$= -K(T - T_m)'$$
$$= -K(1)$$
$$= -K$$

$$f'(T) = -KT + KT_m$$
$$= -K$$

② Punto de equilibrio y posible punto de inflexión

$f(T) = 0$
$-K(T - T_m) = 0$

$$T - T_m = \frac{0}{K} \to 0$$

$$\underline{T = T_m}$$

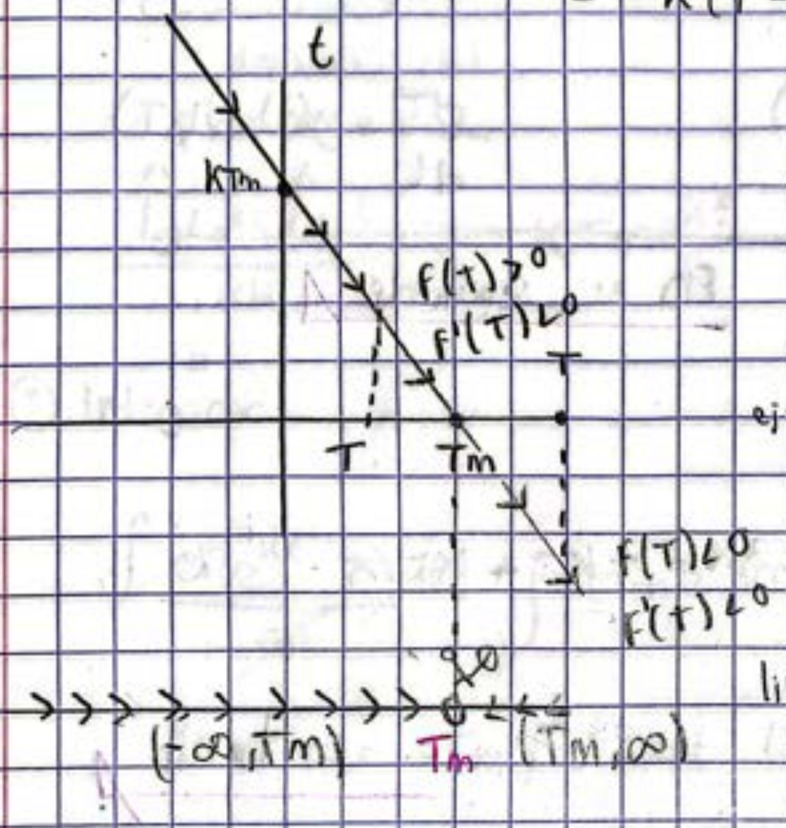
$f'(T) = 0$
$-K = 0$

$$\underbrace{K = 0 \text{ ¡pero } K > 0}_{}$$

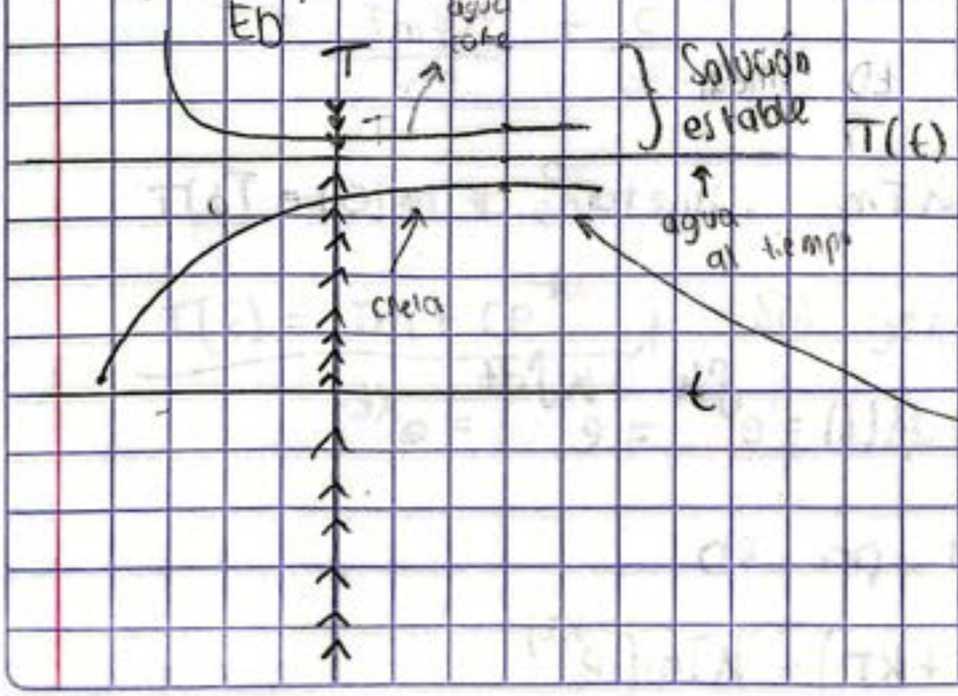
Imposible

No hay puntos de inflexión

③ Gráfica de $f(T) = -KT + KT_m = -K(T - T_m)$ $\quad f(0) = KT_m =$



④ Comportamiento de las soluciones de la ED



$$\frac{d^2T}{dt^2} = f(T)f'(T)$$
(+)(+)
+ (concava)

$$\frac{d^2T}{dt^2} = f(T)f'(T)$$
(+) (-)
- (Concava)

• ¿Qué tipo de ED es $\frac{dT}{dt} = -k(T-T_m)$?

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-T_m) \qquad \frac{dT}{dt} = g(t)\, h(T)$$

ED es separable

→ Por otro lado:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-T_m) = -kT + kT_m$$

$$\frac{dT}{dt} + p(t)T = h(t) \qquad \text{∴ es lineal}$$

$$\frac{dT}{dt} + \underbrace{kT}_{p(t)} = \underbrace{kT_m}_{h(t)}$$

→ Resolviendo por ED lineal

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_m \quad , \text{sujeto a } T(0) = T_0$$

① Encontrar FI

$$\mu(t) = e^{\int k} = e^{k\int dt} = e^{kt}$$

② Multiplicar FI por ED

$$e^{kt}\left(\frac{dT}{dt} + kT\right) = kT_m\left(e^{kt}\right)$$

$$= \underbrace{e^{kt}\frac{dT}{dt} + Ke^{kt}T}_{\text{derivada del producto}} = kTme^{kt}$$

$$\frac{d(e^{kt}\cdot T)}{dt} = kTme^{kt}$$

③ Integrar

$$\int \frac{d(e^{kt}\cdot T)}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = \int kTme^{kt}\,dt$$

$$e^{kt}\cdot T = kTm\int e^{kt}k\,dt \quad \rightarrow u = kt,\ du = k\,dt \ \Big\}\ \text{completa}$$

$$e^{kt}\cdot T = kTme^{kt} + c$$

$$T = \frac{kTm\cancel{e^{kt}}}{\cancel{e^{kt}}} + \frac{c}{e^{kt}}$$

$$T(t) = Tm + \frac{c}{e^{kt}}$$

$$\underline{T(t) = Tm + ce^{-kt}} \quad \text{Sol. general}$$

④ Resolver PVI → Se busca solución que satisfaga $T(0)=T_0$

$T(0) = T_0$

$T(0) = T_m + ce^{-0(k)} = T_0$

$= T_m + c = T_0$

$= \underline{c = T_0 - T_m}$

Sustituyendo

$$\underbrace{T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}}_{\text{solución del PVI}}$$

Scanned with CamScanner

11/10/2023

→ Determinación de la hora de fallecimiento de un individuo.

Suponga que se descubre un cuerpo el cual presenta una temperatura de 29.44°C. Además de que al registrar la temperatura de dicho cuerpo dos horas después, tenía 23.33°C.

Tomando en cuenta la temperatura del medio ambiente permaneció constante, 20°C, determine la hora en la que falleció el individuo.

* Respuesta

① Modelo $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$, sujeto a $T(0) = T_0$

② Datos $T_m = 20°C$
$T_0 = 29.44°C$
$k = ?$
Usando $T(2) = 23.33°C$ encontramos

③ Sustituir en el modelo

obtener c

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20), \text{ sujeto a } T(0) = 29.44°, \; T(2) = 23.33$$

(4) Resolver por lineales

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20)$$

$$\frac{dT}{dt} = -KT + 20K$$

$$\frac{dT}{dt} + KT = 20K$$

→ 4.1 (sacando FI)

$$\mu(t) = e^{\int p(x)} = e^{\int K dt} = e^{K\int dt} = e^{Kt}$$

→ 4.2 (Multiplicar FI por ED)

$$e^{Kt}\left(\frac{dT}{dt} + KT\right) = 20k(e^{Kt})$$

$$\underbrace{e^{Kt}\frac{dT}{dt} + e^{Kt}KT}_{\text{derivada de un producto}} = e^{Kt}\cdot 20k$$

$$\frac{d(e^{Kt}\cdot T)}{dt} = 20Ke^{Kt}$$

$\rightarrow$ 4.3 (Integrar)   por cada constante hay condiciones iniciales

$$\int \frac{d(e^{kt} \cdot T)}{dt} dt = \int 20ke^{kt} \, dt$$

$$e^{kt} \cdot T = 20 \int e^{kt} k \, dt \qquad \left.\begin{matrix} u = kt \\ du = k\,dt \end{matrix}\right\} \text{completa}$$

$$e^{kt} \cdot T = 20e^{kt} + c$$

$$T(t) = \frac{20e^{kt}}{e^{kt}} + \frac{c}{e^{kt}}$$

(3) $$T(t) = 20 + \frac{c}{e^{kt}} = \underbrace{20 + ce^{-kt}}_{\text{Sol. general}} \quad k \text{ (heredada)}$$

$\rightarrow$ 4.4 (Se busca solución particular que cumpla $T(0) = 29.44$)

$$T(0) = 20 + ce^{-k(0)} = 29.44$$
$$= c = 29.44 - 20$$
$$c = 9.44°$$

Sustituir en sol general

$$T(t) = \underbrace{20 + 9.44e^{-kt}}_{\text{solución del PVI}} \quad (4)$$

36.1

37 grafica

36.5°

→ 4.5 (Se busca solución que cumpla $C(2) = 23.33$)

$$T(2) = 20 + 9.44e^{-k(2)} = 23.33$$
$$= 9.44e^{-k(2)} = 23.33 - 20$$
$$= 9.44e^{-2k} = 3.33$$
$$e^{-2k} = \frac{3.33}{9.44}$$
$$\ln e^{-2k} = \ln\left(\frac{3.33}{9.44}\right)$$
$$-2k = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3.33}{9.44}\right|$$

$*$ Si $k < 0$ mal

$$k = 0.5209$$

Sustituyendo en 4

$$\underbrace{T(t) = 20 + 9.44e^{-0.5209t}}$$

Función Temperatura del Cuerpo

$$36.5 = 20 + 9.44e^{-0.5209t}$$

$$36.5 - 20 = 9.44e^{-0.5209t}$$
$$16.5 = 9.44e^{-0.5209t}$$
$$\frac{16.5}{9.44} = e^{-0.5209t}$$

$$\ln\left|\frac{16.5}{9.44}\right| = \ln e^{-0.5209t}$$
$$0.5584 = -0.5209t$$

$$t = \frac{0.5584}{-0.5209}$$

$$t = -1.0719$$

— POBLACIONES —

<u>Modelos</u>

autonomas no depende de t del lado derecho

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{aP}_{f(P)}$$ Ley de Malthus

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{aP - bP^2}_{f(P)}$$ lógistico

* ambas son autónomas

donde a, y b son constantes

* ambas son separables

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \longrightarrow \frac{dP}{dt} = g(t) \cdot h(P)$$

① $$\frac{dP}{dt} = \underbrace{a}_{g(t)} \cdot \underbrace{P}_{h(P)}$$

→ es lineal

$$\frac{dP}{dt} - aP = 0$$

$$\frac{dP}{dt} + f(t)P = h(t)$$

② → No es lineal

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{1}_{g(t)} \cdot \underbrace{(aP - bP^2)}_{h(P)}$$

Resolver el PVI

$$\frac{dP}{dt} = aP \quad , \text{ sujeto a : } P(t_0) = P_0$$

① Separamos variables

$$\frac{dp}{dt} = ap \rightarrow dp = ap\,dt \rightarrow \frac{dp}{p} = a\,dt$$

② Integrar

$$\int \frac{dp}{p} = \int a\,dt \rightarrow \ln|p| = at + c_1$$

③ despejar p

$$e^{\ln|p|} = e^{at+c_1}$$

$$\rightarrow |P| = e^{at} \cdot e^{c_1}$$

$$\rightarrow p = \pm\, e^{at} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{\rightarrow c}$$

$$\rightarrow \underbrace{p = c e^{at}}_{\text{Solución general}} \quad \text{donde } c = \pm e^{c_1}$$

Scanned with CamScanner

④ Se busca solución que cumpla $p(t_0) = P_0$

$$P(t_0) = P_0$$

$$\rightarrow Ce^{at_0} = P_0$$

$$\rightarrow C = \frac{P_0}{e^{at_0}}$$

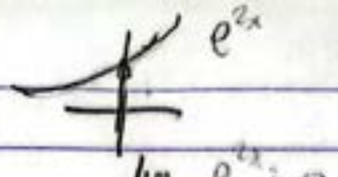
$$\rightarrow C = P_0 e^{-at_0}$$

⑤ Sustituir c en sol general

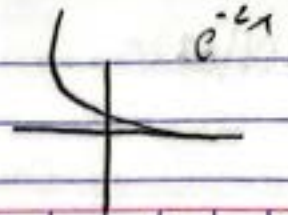
$$p(t) = P_0 e^{-at_0} e^{at}$$

$$p(t) = P_0 e^{at - at_0}$$

$$P(t) = P_0 e^{a(t - t_0)}$$



$\lim_{x \to \infty} e^{2x} = \infty$



$\frac{dP}{dt} = aP$, $P(t_0) = P_0$ (1)

→ Sol del PVI

$$P(t) = P_0 e^{a(t-t_0)}$$

→ Cuando $t_0 = 0$

$$\frac{dP}{dt} = aP \quad , \quad P(0) = P_0$$

→ la solución del PVI quedaría

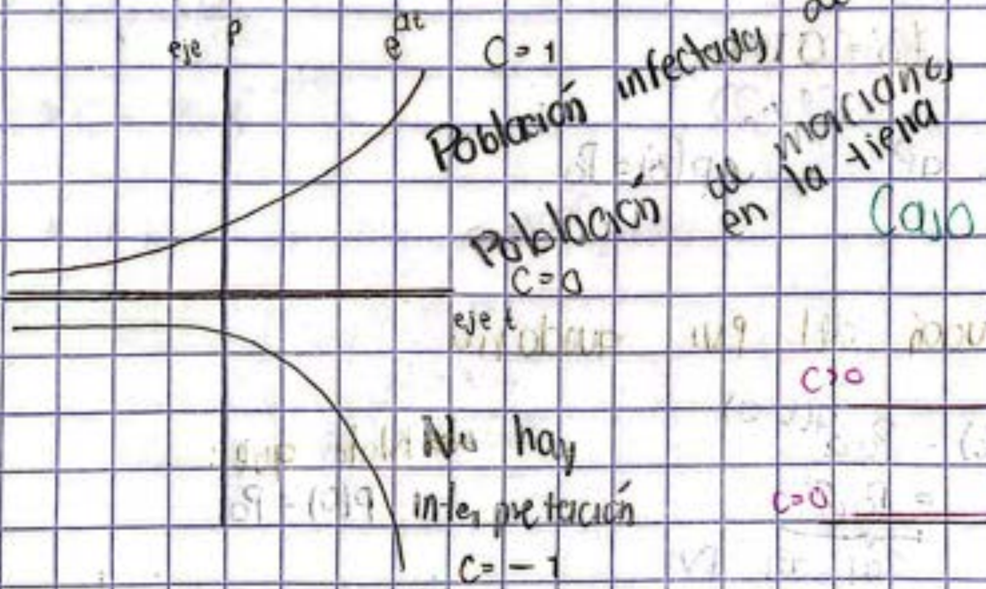
$$P(t) = P_0 e^{a(t-0)}$$
$$= \underbrace{P_0 e^{at}}_{\text{Sol del PVI}}$$

→ Note que:
$P(0) = P_0$

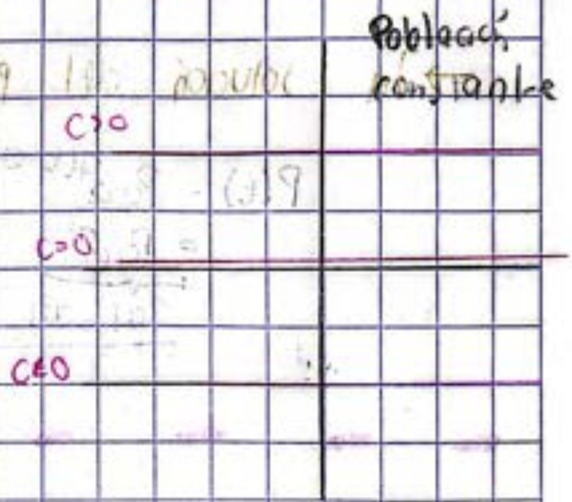
Solución general de la ED

$$\frac{dP}{dt} = aP \longrightarrow P(t) = Ce^{at}$$

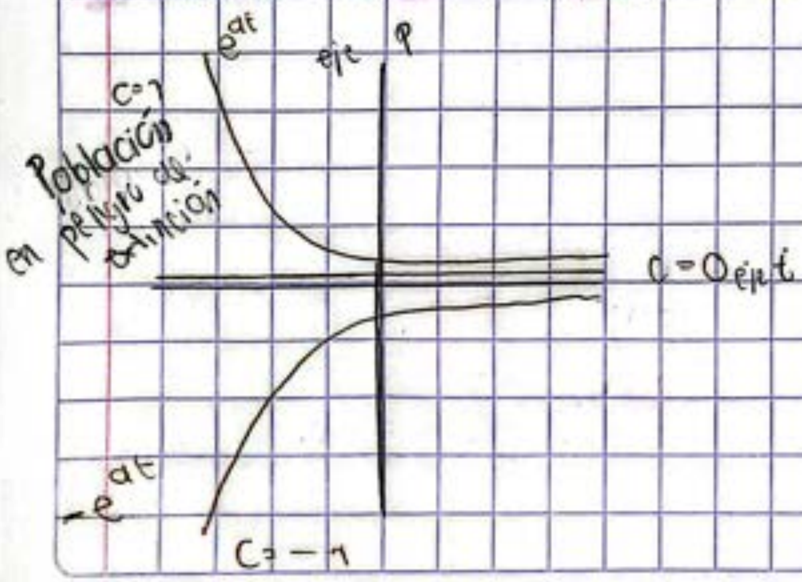
Caso 1 $\rightarrow a > 0$



Caso 3 $\rightarrow a = 0$



Caso 2 $\rightarrow a < 0$



18/10/2023

Censos de Población en el periodo 1950 - 2020

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020
Habitantes	25.8	34.9	48.2	66.8	81.2	97.5	112.3	126.09

tasa de crecimiento

Resolver: $\frac{dP}{dt} = aP$ sujeto a $P(1960) = 34.9$
$P(1970) = 48.2$

→ ¿Qué población habrá en 2020?

Resolviendo

① Separamos variables

$\frac{dp}{dt} = ap$

$\rightarrow dp = ap\,dt$

$\rightarrow \frac{dp}{p} = a\,dt$

② Integrar

$\int \frac{dp}{p} = \int a\,dt$

$\ln|p| = at + c_1$

$e^{\ln|p|} = e^{at} \cdot e^{c_1}$

$p = \pm e^{at} e^{c_1} \rightarrow C = \pm e^{c_1}$

② $\underbrace{P(t) = Ce^{at}}$

Solución general

③ Se busca solución que cumpla $P(1960) = 34.9$

$$Ce^{a(1960)} = 34.9$$

$$C = \frac{34.9}{e^{a(1960)}} = 34.9e^{-a(1960)}$$

④ Sustituir en solución general

$$P(t) = 34.9e^{-a(1960)}e^{at}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} &= 34.9e^{at-a(1960)} \\ &= 34.9e^{a(t-1960)} \end{aligned}}_{\text{Solución del PVI}} \quad ③$$

⑤ Se busca solución que cumpla $P(1970) = 48.2$

$$48.2 = 34.9e^{a(t-1960)}$$

$$\ln\left|\frac{48.2}{34.9}\right| = \cancel{\ln} e^{a(t-1960)}$$

$$\ln|1.3811| = a(t-1960)$$

$$\frac{\ln|1.3810|}{1970-1960} = a$$

$$a = 0.3228/10$$

$$a = 0.03228$$

⑥ Sustituir en 3

$P(t) = 34.9e^{0.03228(t-1960)}$ ④

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Función de población}}$

Función de
población

⑦ ¿Pasa por todos los puntos?

$P(1950) = 25.27$
$P(1960) = 34.9$
$P(1970) = 48.19$
$P(2020) = 242.08$

Modelo funcional
en datos cercanos

$P(1980) = 66.55$

⑧ ¿En qué momento la población en Mx fué
de 50,000,000 ≈ 50 ?

$P(t^*) = 50 \qquad t^* = ?$

$\rightarrow 34.9e^{.03228(t-1960)} = 50$

$\rightarrow e^{.03228(t^*-1960)} = \frac{50}{34.9}$

$\rightarrow \ln e^{0.03228(t^*-1960)} = \ln\left|\frac{50}{34.9}\right|$

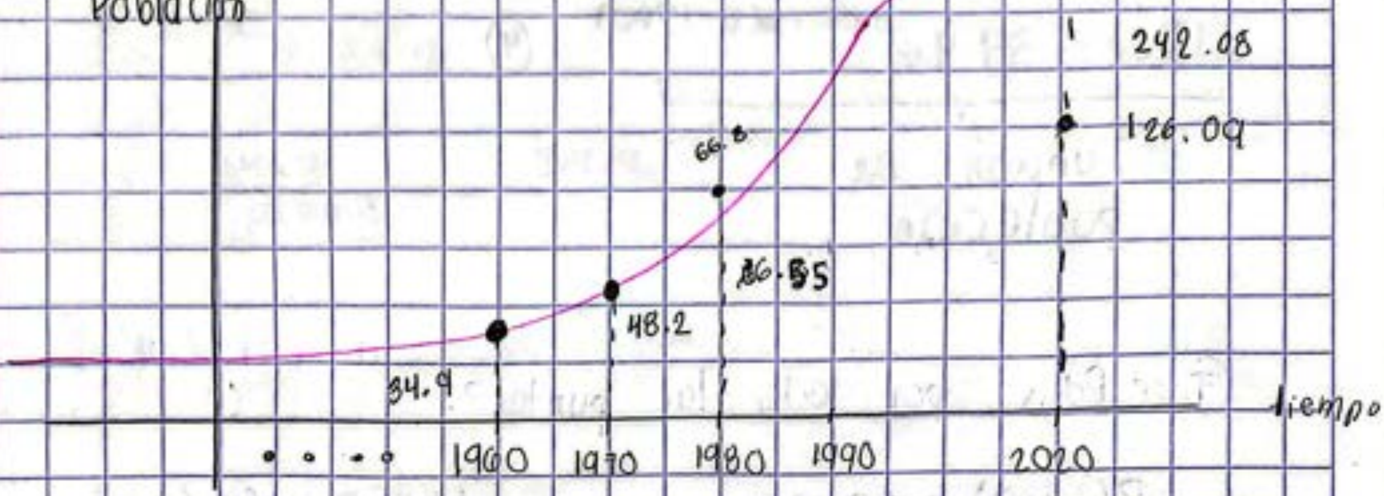
$\rightarrow .03228(t^*-1960) = \ln\left|\frac{50}{34.9}\right|$

$\rightarrow t^* = 11.1389 + 1960$

$= 1971.138$ años $-$ 1971 años 47.45 días

Feb 16 10.8 hrs 98 min

⑨ Gráfico



• Datos del censo

MODELO LOGISTICO

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{aP - bP^2}_{f(P)}$$

Es una ED Autónoma

$a, b > 0$

[Realizando análisis cualitativo]

tasa de crecimiento de P

coeficiente de competencia de [illegible]

$f(P) = aP - bP^2 \longrightarrow f'(P) = a - 2bP$

Punto de equilibrio

$f(P) = 0$

$aP - bP^2 = 0$

$P(a - bP) = 0$

$P_1 = 0 \qquad a - bP = 0$

$-bP = -a \quad (-\infty, 0)$

$P_2 = \frac{a}{b}$

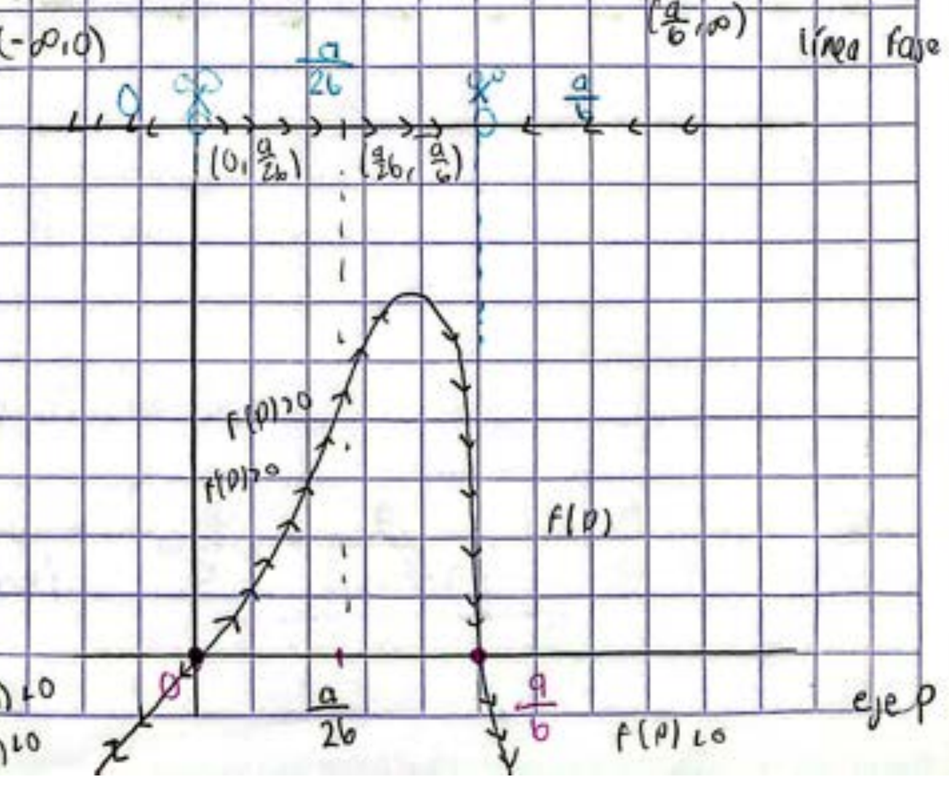
Posible punto de inflexión

$f'(P) = 0$

$a - 2bP = 0$

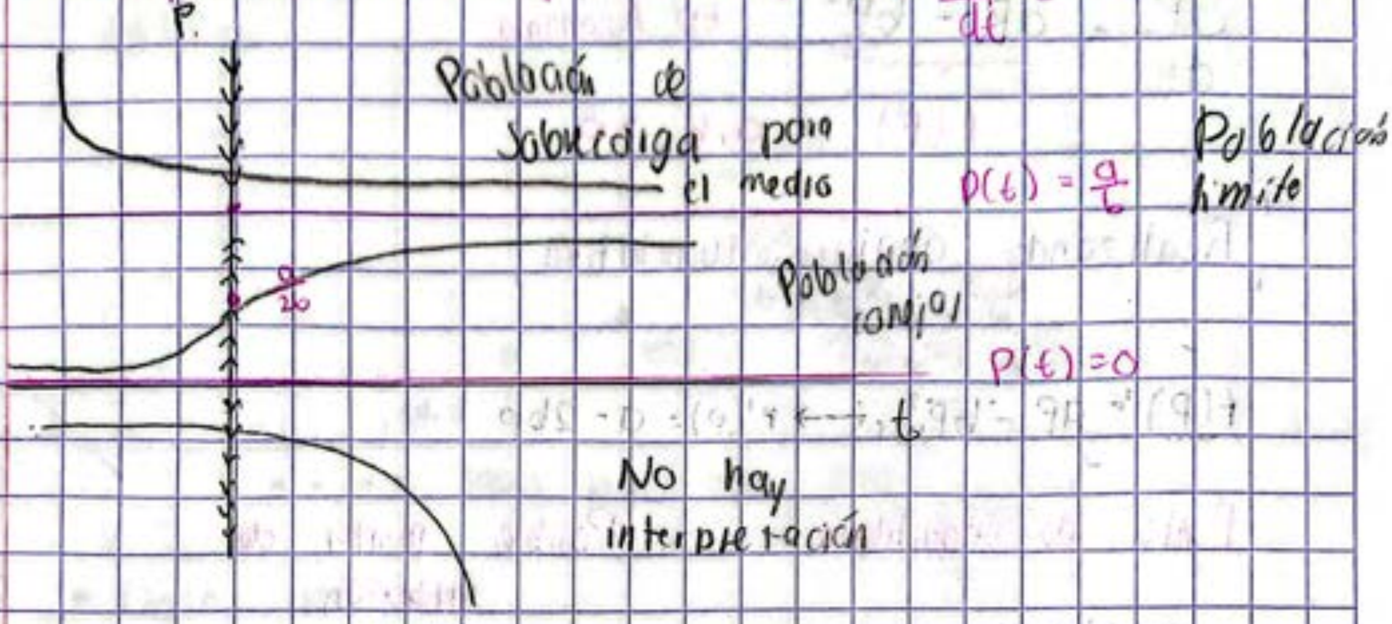
$a = 2bP$

$\frac{a}{2b} = P$



Gráfica

Comportamiento de la solución, de $\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$



$\frac{a}{b}$ Población límite ó capacidad del medio para sustentar la población maxima.

Resolver el PVI $\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$ (1) sujeto

a $P(0) = P_0$

→ La ED (1) es separable

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{1}_{g(t)}\underbrace{(aP - bP^2)}_{h(P)}$$

→ Separar variables

$$\frac{dP}{aP - bP^2} = 1\,dt$$

→ Integramos

$$\int \frac{dP}{aP - bP^2} = \int 1\,dt \quad (2)$$

$\int \frac{dP}{aP - bP^2}$ por fracciones parciales

* Se busca A y B tal que

$$\frac{1}{aP - bP^2} = \frac{1}{P(a - bP)} = \boxed{\frac{A}{P} + \frac{B}{(a - bP)}} \quad (3)$$

A = ?
B = ?

Scanned with CamScanner

$$\frac{1}{P(a-bP)} = \frac{A(a-bP)+BP}{P(a-bP)}$$

$$1 = \frac{A(a-bP)+BP}{P(a-\cancel{bP})} P(a-\cancel{bP})$$

$$1 = A(a-bP)+BP$$

① Si $P=0 \longrightarrow 1 = A(a-b(0))+B(0) = 1 = Aa = \boxed{\frac{1}{a} = A}$

② Si $P=\frac{a}{b} \longrightarrow 1 = A(a-b(\frac{a}{b}))+B(\frac{a}{b}) = \boxed{B = \frac{b}{a}}$

Sustituyendo en ③

$$\frac{1}{P(a-bP)} = \frac{\frac{1}{a}}{P} + \frac{\frac{b}{a}}{(a-bP)}$$

Integramos

$$\int \frac{1}{P(a-bP)} dP = \frac{1}{a}\int \frac{1}{P} + \frac{b}{a-bP} \, dP$$

$$= \frac{1}{a}\left[\int \frac{1}{P} dP + \int \frac{b}{a-bP} dP\right.$$

$$= \frac{1}{a}\left[\ln|P| + \int \frac{b}{a-bP} dP\right.$$

$$= \frac{1}{a}\left[\ln|P| - \ln|a-bP|\right]$$

$u = a-bP = -b$

$du = -b \, dP$

$dP = \frac{du}{-b}$

$$= \frac{1}{a} \ln \frac{|P|}{|a-bP|}$$

$-a1 = t \qquad \frac{t}{-a} \qquad \frac{\frac{t}{1}}{-\frac{1}{a}} \qquad \frac{\frac{t}{1}}{\frac{1}{a}} \cdot at$

Sustituir en ②

$$\int \frac{dP}{P(a-bP)} = \int 1dt$$

$$\rightarrow \frac{1}{a}\left[\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right|\right] = t + C_1$$

Despejar P

$$\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = ta + C_1a$$

$$e^{\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right|} = e^{ta+C_1a}$$

$$\left|\frac{P}{a-bP}\right| = e^{ta} \cdot e^{C_1a}$$

$$\frac{P}{a-bP} = \pm e^{aC_1} e^{at} \qquad C = e^{aC_1}$$

$$\frac{P}{a-bP} = Ce^{at}$$

$$P = Ce^{at}(a-bP)$$

$$P = Ce^{at}a - Ce^{at}bP$$

$$P + Ce^{at}bP = Ce^{at}a$$

$$P(1 + Cbe^{at}) = aCe^{at}$$

$$\rightarrow P = \frac{aCe^{at}}{1+bCe^{at}}$$

$$P = \frac{aCe^{at}}{1} + \frac{aCe^{at}}{bCe^{at}}$$

$$P = aCe^{at} + \frac{a}{b}$$

Otro método

$$P = \frac{ace^{at}}{1+bce^{at}} \cdot \frac{e^{-at}}{e^{-at}}$$

$$P(t) = \frac{ac}{e^{-at}+bc}$$

(4)

$$\underline{P(t) = \frac{ac}{bc+e^{-at}}}$$ Sol. general de la ED

* Se busca solución particular que cumpla

$P(0) = P_0$

$$\frac{ac}{bc+e^{-at}} = P_0$$

$$\frac{ac}{bc+1} = P_0$$

$$ac = P_0(bc+1)$$
$$ac = P_0bc + P_0$$
$$ac - P_0bc = P_0$$
$$c(a-bP_0) = P_0$$

$$\boxed{c = \frac{P_0}{a-bP_0}}$$

* Sustituimos en 4

$$P(t) = \frac{a\left(\frac{P_0}{a-P_0 b}\right)}{b\left(\frac{P_0}{a-P_0 b}\right) + e^{-at}} \cdot \frac{\frac{a-bP_0}{1}}{\frac{a-bP_0}{1}}$$

$$P(t) = \underbrace{\frac{aP_0}{bP_0 + (a-bP_0)e^{-at}}}$$

Solución del PVI ; Función de población

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2 \quad , \quad P(t_0) = P_0$$

→ Formula ←

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a-bP_0)e^{-a(t-t_0)}}$$

Encontrando a y b

→ Se busca solución que cumpla $P(t_1)=P_1$ y $P(t_2) = P_2$; donde $\underbrace{t_1 - t_0 = t_2 - t_1}_{\text{equivalentes}}$ $t_0 < t_1 < t_2$

(1) $$\frac{aP_0}{bP_0+(a-bP_0)e^{-a(t-t_1)}} = P_1$$

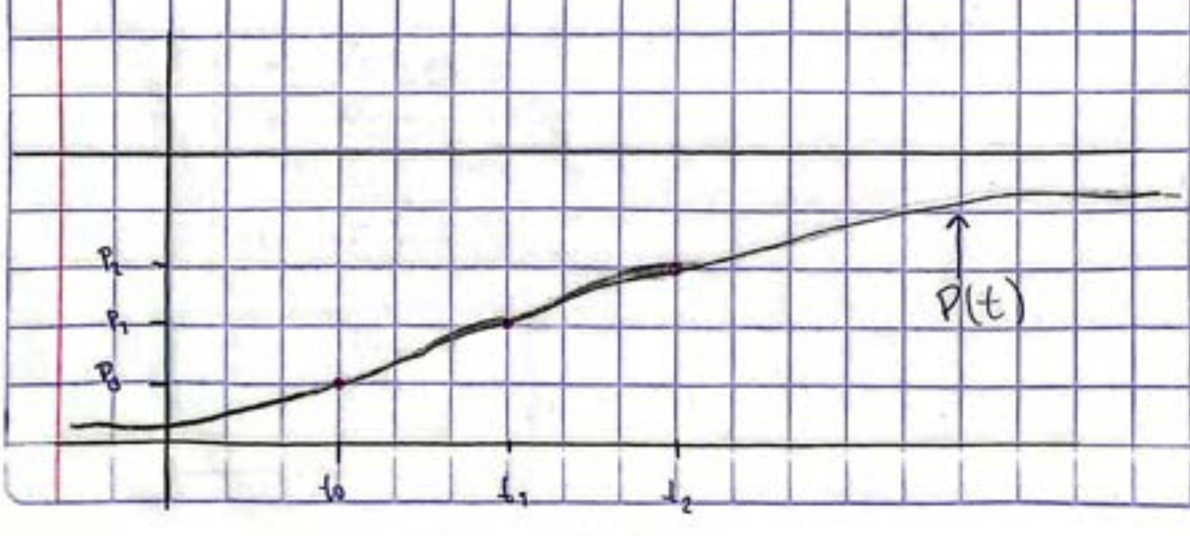
a y b son incognitas

(2) $$\frac{aP_0}{bP_0+(a-bP_0)e^{-a(t-t_2)}} = P_2$$

La respuesta de este sistema es

$$a = \frac{1}{T_1 - t_0} \ln\left|\frac{P_2(P_1-P_0)}{P_0(P_2-P_1)}\right|$$

$$b = \frac{a}{P_1}\left[\frac{P_1^2 - P_0P_2}{P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2}\right]$$



Problema de aplicación

Encuentre un modelo logístico para la población de Mx

		P_0			P_1			P_2
Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020
Población en millones	25.2	34.9	48.2	66.8	81.2	97.5	112.3	126.04

Con la función de población obtenida obtenemos un pronóstico de población para el 2030

$P(t^*) = 100 \quad , \quad t^* = ?$

Modelo Logístico

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2 \quad \text{, sujeto a} \quad \begin{array}{l} P(t_0) = P_0 \\ P(t_1) = P_1 \\ P(t_2) = P_2 \end{array}$$

donde $t_2 - t_1 = t_1 - t_0$

Sabemos que:

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-a(t-t_0)}}$$

donde :

$$a = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln \left| \frac{P_2(P_1 - P_0)}{P_0(P_2 - P_1)} \right| \qquad b = \frac{a}{P_1} \left(\frac{P_1^2 - P_0P_2}{P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2} \right)$$

① Utilizaremos $t_0 = 1960$, $t_1 = 1990$, $t_2 = 2020$
$P_0 = 34.9$, $P_1 = 81.2$, $P_2 = 126.09$

$$a = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{126.09(81.2 - 34.9)}{34.9(126.09 - 81.2)} \right|$$

$$= \frac{1}{30} \ln \left| \frac{5837.967}{1566.661} \right|$$

$$= \underline{0.043847}$$

$$b = \frac{0.043847}{81.2} \left[\frac{(81.2)^2 - (34.9)(126.09)}{(34.9)(81.2) - 2(34.9)(126.09) + (81.2)(126.09)} \right]$$

$$= 5.39998 \times 10^{-4} \left[\frac{6593.44 - 4400.541}{2833.88 - 8801.082 + 10238.508} \right]$$

$$= \underline{0.0002772}$$

$$a - bP_0 = 0.043847 - 0.0002772(34.9)$$
$$= \underline{0.03417}$$

tiempo de nacimiento individuo 100 millones

p(·x⁾)1cu

② Sustituimos en P(t)

$$P(t) = \underbrace{\frac{0.043847(34.9)}{0.0002772(34.9) + (0.03417)\,e^{-0.043847(t-1960)}}}_{\text{FUNCIÓN POBLACIÓN REPUBLICA}}$$

$$P(2030) = \frac{0.043847(34.9)}{(0.00027321)(34.9) + .03417\,e^{-0.043847(2030-1960)}}$$

$$= 135.86 \text{ millones}$$

Analisis cualitativo
Examen

① Analisis cualitativo

a) $\frac{dy}{dx} = b - ay$, $a>0$, $b>0$

① $f(y) = b - ay$
$f'(y) = -a$

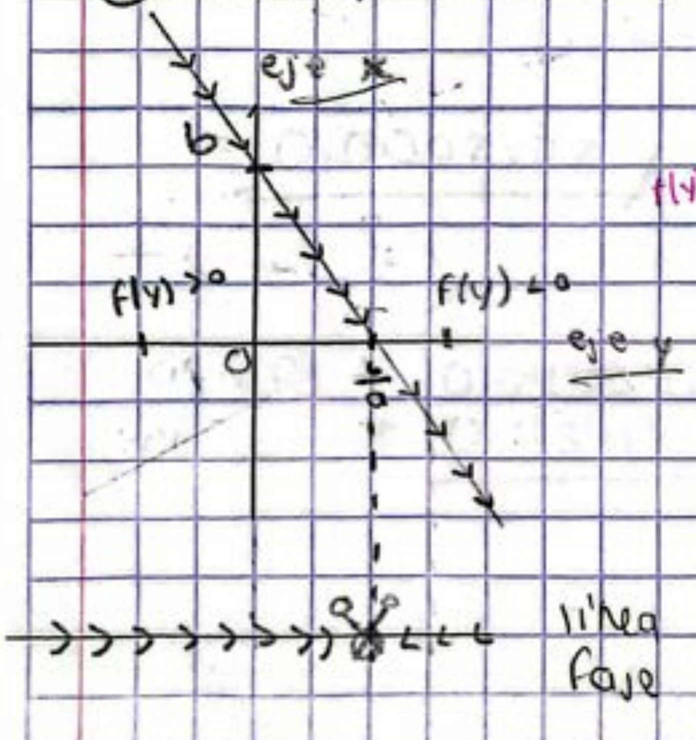
② Puntos de equilibrio

$f(y) = 0$
$b - ay = 0$
$-ay = -b$
$y = \frac{b}{a}$

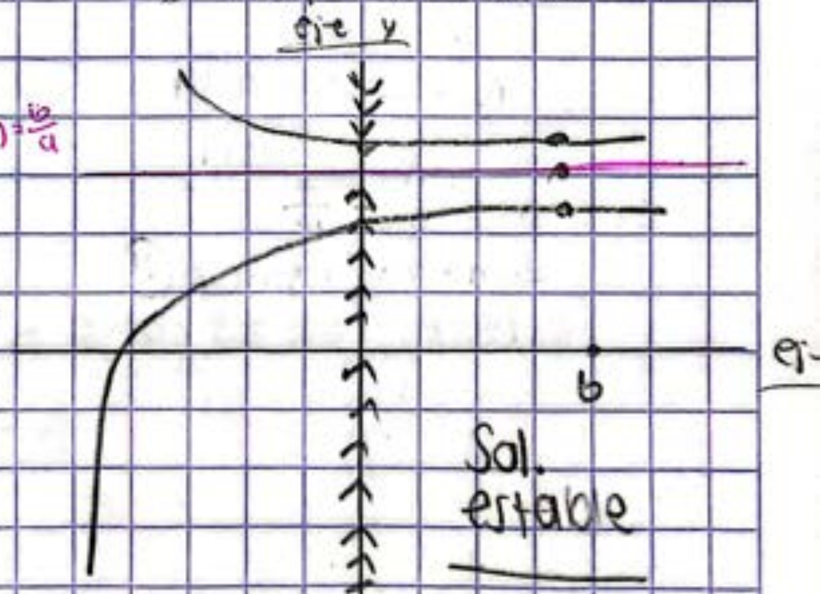
Posibles puntos inflexión

$f'(y) = 0$
$-a = 0$
No es posible
No hay puntos de inflexión

③ Grafica



④ Comportamiento



b) $\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y$

① $f(y) = y^2 - 3y$

$f'(y) = 2y - 3$

② Punto de equilibrio

$f(y) = 0$

$y^2 - 3y = 0$

$y(y-3) = 0$

$\underbrace{y = 0}_{y_1}$, $\underbrace{y = 3}_{y_2}$

Posibles Puntos inflexión

$f''(y) = 2$

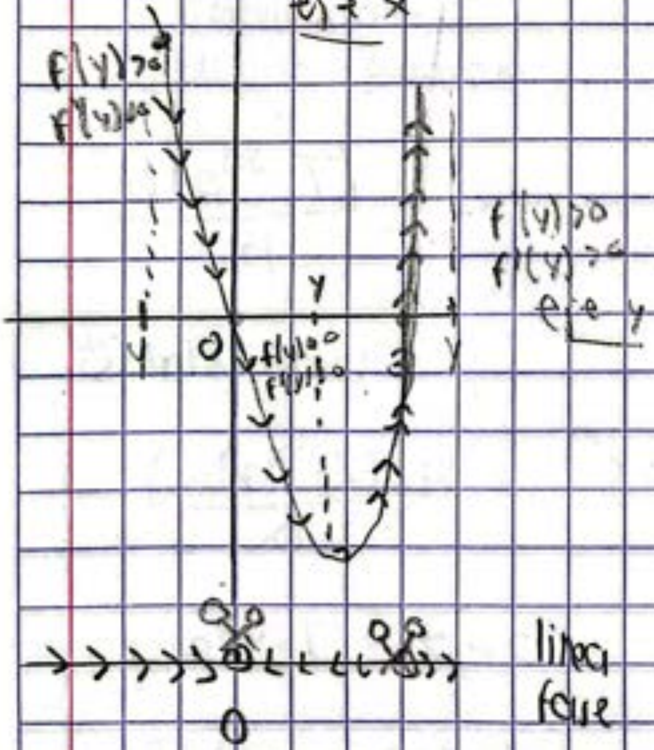
$f'(y) = 0$

$2y - 3 = 0$

$2y = 3$

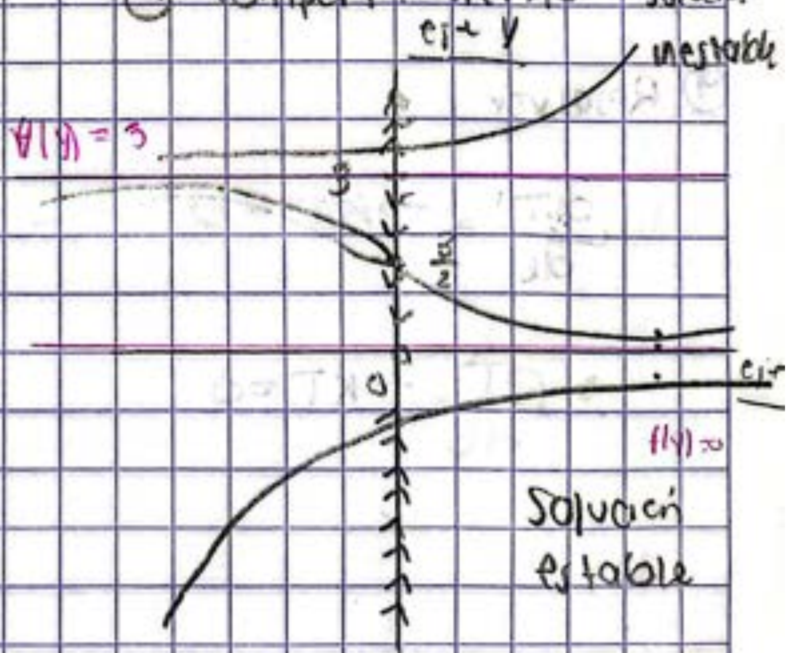
$\underbrace{y = \frac{3}{2}}_{y}$

③ Grafica



linea fase

④ Comportamiento



solución inestable

Solución estable

② Enfriamiento de Newton

① Modelo

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm) \text{, sujeto a } To(0)$$

② Datos

$To = 35°C$

$Tm = 0°$

$k = ?$

$T(60) = 6.5°C$

③ Sustitución

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 0) \text{, } T(0) = 35 \text{, } T(120) = 2)$$

④ Resolver

$$\frac{dT}{dt} = -kT - 0$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} + kT = 0$$

Por lineal

Forma

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y = h(x)$$

① Sacamos FI

$$\mu(t) = e^{\int p(x)} = e^{\int k\,dt} = e^{kt}$$

② Multiplicamos por ED el FI

$$e^{kt}\left(\frac{dT}{dt} + kT\right) = 0\left(e^{kt}\right)$$

$$\underbrace{e^{kt}\frac{dT}{dt} + e^{kt}kT}_{\text{derivada de un producto}} = 0$$

$$\frac{d(e^{kt}\cdot T)}{dt} = 0$$

③ Integramos

$$\int \frac{d(e^{kt}\cdot T)}{\cancel{dt}}\,\cancel{dt} = \int 0\,dt$$

$$e^{kt}\cdot T = t + c$$

$$\underbrace{T(t) = ce^{-kt}}_{\text{Sol. general}}$$

④ Se busca solución que cumpla $T(0) = 35$

$T(0) = ce^{-k(0)} = 35$

$35 = ce^{0}$

$35 = c$

⑤ Sustituir en sol. general

$T(t) = 35e^{-kt}$ ②

⑥ Se busca solución que cumpla $T(120) = 2$

$T(120) = 35e^{-k(120)} = 2$

$\frac{2}{35} = e^{-120k}$

$\ln\left|\frac{2}{35}\right| = \ln e^{-120k}$

$\frac{-2.86220}{-120} = k$

$\underline{k = 0.023851}$

7) Sustituir K en 2

$\underline{T(t) = 35e^{-0.023851t}}$ Función enfriamiento de la Barra

b) Temperatura barra en T(30)

$T(30) = 35e^{-0.023851(30)}$
$= \underline{17.11265°C}$

c) t^* en que $T = 5°C$

$T(t^*) = 35e^{-0.023851(t)} = 5°$

$\frac{5°}{35} = e^{-0.023851t}$

$\ln(\frac{5}{35}) = \ln e^{-0.023851t}$

$\frac{-1.94591}{-0.023851} = t$

$t = 81.58610$ segundos

d)

$T(0) = 35e^{-0.023851(0)} = 35°C$

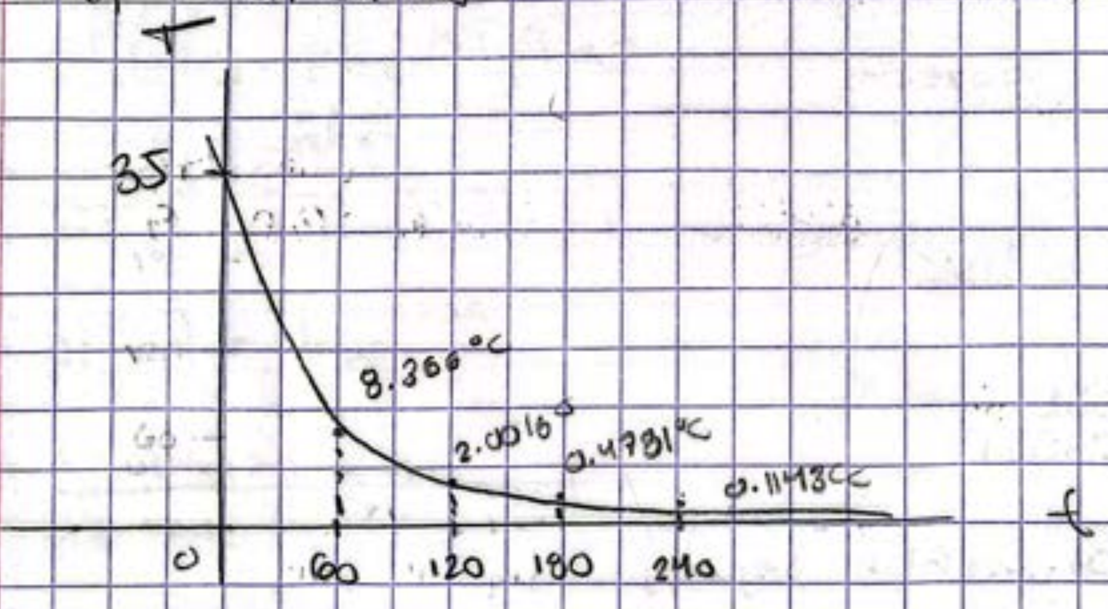
$T(60) = 35e^{-0.02385(60)} = 8.366930°C$

$T(120) = 35e^{-0.023851(120)} = 2.00016°C$

$T(180) = 35e^{-0.023851(180)} = 0.4781°C$

$T(240) = 35e^{-0.023851(240)} = 0.1143°C$

e) Graficamos



③ Población

Modelo logístico

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2, \quad \text{sujeto a} \quad \begin{matrix} P(t_0) = P_0 \\ P(t_1) = P_1 \\ P(t_2) = P_2 \end{matrix}$$

donde $t_2 - t_1 = t_1 - t_0$

Sabemos que

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)\, e^{-a(t-t_0)}}$$

donde:

$$a = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln \left| \frac{P_2(P_1 - P_0)}{P_0(P_2 - P_1)} \right| \qquad b = \frac{a}{P_1} \left| \frac{P_1^2 - P_0P_2}{P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2} \right|$$

① Utilizaremos

$t_0 = 2000$ $\quad t_1 = 2010$ $\quad t_2 = 2020$

$P_0 = 97.483$ $\quad P_1 = 112.336$ $\quad P_2 = 127.09$

$$a = \frac{1}{2010 - 2000} \ln \left| \frac{127.09(112.336 - 97.483)}{97.483(127.09 - 112.336)} \right| = 0.027190$$

$$b = \frac{0.027190}{112.336} \left(\frac{(112.336)^2 - (97.483)(127.09)}{(97.483)(112.336) - 2(97.483)(127.09) + (112.336)(127.09)} \right.$$

$$= 0.00012401$$

$a - bP_0 = 0.0271905\,(0.00012401)(97.483)$

$= 0.0151008$

② Sustituimos en $P(t)$

$$P(t) = \underbrace{\frac{(0.027190)(97.483)}{(0.00021401) + (0.0151008)\,e^{-(0.027190)(t-2000)}}}_{\text{Función de Población}}$$

a)

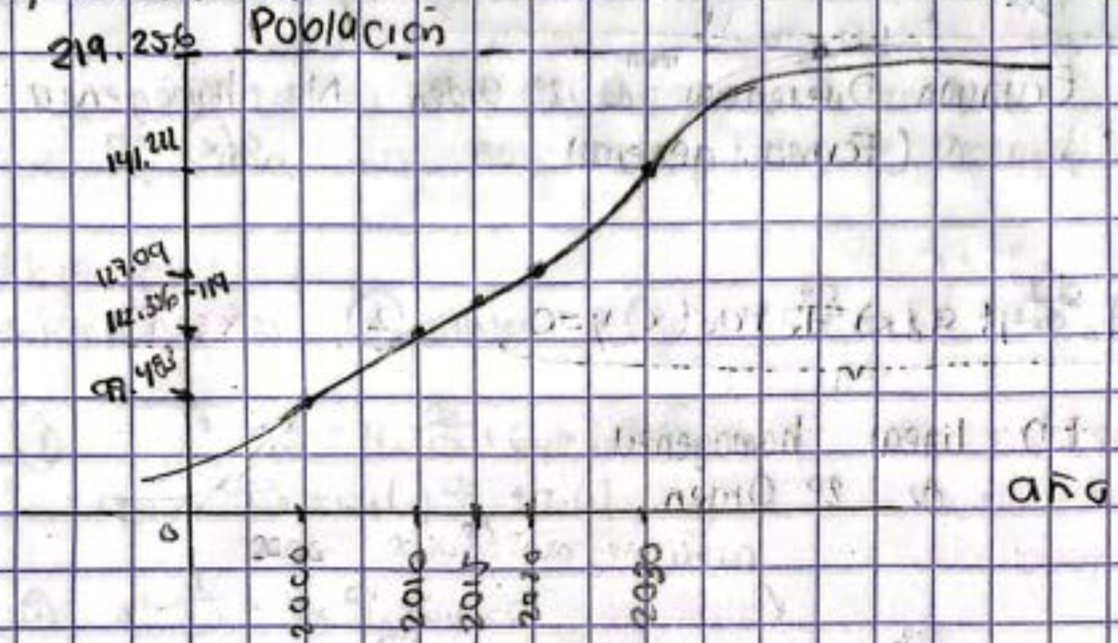
$P(2015) = 119.7592$ millones

$P(2030) = 141.22209$ millones

b) Población límite

$\frac{a}{b} = 219.256512$ millones

c) Gráfica


Población
219.256
141.221
127.09
119
112.356
99.483
0
año
2000
2010
2015
2020
2030

UNIDAD III

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE 2° ORDEN

$$\underbrace{a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)}, \quad ① \qquad x \in I$$

Ecuación Diferencial lineal de 2° Orden No homogenea
(Forma general) $g(x) \neq 0$

$$\underbrace{a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0}, \quad ② \qquad x \in I$$

ED lineal homogenea
de 2° Orden.

funciones

$$\underbrace{1\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = h(x)} \quad ③ \qquad x \in I$$

ED lineal de 2° orden
(Forma Normal)

$$\underbrace{1\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0} \quad ④ \qquad x \in I$$

ED lineal homogenea
de 2° orden
(Forma Normal)

$x \in I$

$$\underbrace{a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = h(x)} \quad ⑤$$

a, b, c constantes en $\mathbb{R}$

ED lineal de 2° orden con coeficientes constantes

Si $h(x) \overset{en\ \mathbb{R}}{=} 0 \rightarrow$ homogenea

Si $h(x) \overset{en\ \mathbb{R}}{\neq}$ no homogenea

Si una ED de 2º orden no tiene la forma

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$ decimos

que es una ED no lineal de 2º orden.

→ Ejemplos

Clasifique las siguientes ED's

① $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+6y=\ln|x|$

$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$

ED lineal de segundo orden (No homogenea)

② $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+6y=0$ ED lineal homogenea de 2º orden

③ $x\frac{d^2y}{dx^2}-4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+6xy=x^4$ Ecuación diferencial de 2º orden No lineal

④ $\frac{d^2y}{dx^2}=\operatorname{sen} y$ ED de 2º orden no lineal

$\frac{d^2y}{dx^2}-\operatorname{sen} y=0$

Scanned with CamScanner

Solución General Para Una ED lineal de 2° Orden

Introducción: Encuentre la solución general de la ED's

ED 2° Orden	Homogenea / No homogenea	Forma de la Sol. general
(a) $y''=0$	Homogenea	$y(x)=C_1x+C_2(1)$
(b) $y''=6x$	No homogeneo	$y(x)=x^3+C_1x+C_2(1)$

→ Respuesta

(a) $y''=0$

$\int y''dx=\int 0dx$

$y'dx=0+C_1$

$\int y'dx=\int C_1dx$

$y=C_1x+C_2$

$\underbrace{y(x)=C_1x+C_2(1)}_{\text{Solución general}}$ (1)

(2 constantes) y ED (a) es de segundo orden

(b)

$y''=6x$

$\int y''=\int 6x\,dx$

$y'=6\frac{x^2}{2}+C_1$

$\int y'=6\int\frac{x^2}{2}+\int C_1 dx$

$y=3\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$

$\underbrace{y(x)=x^3+C_1x+C_2(1)}_{\text{Sol. General}}$

ED Lineal	Homogenea / No homogenea	Forma de la Sol general
① $y''=0$	Homogenea	$y(x) = C_1 x + C_2 (1)$
② $y''=6x$	No homogenea	$y(x) = x^3 + C_1 x + C_2 (1)$
$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$	Homogenea	$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$
$y''+P(x)y'+Q(x)y=h(x)$	No homogenea	$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x)$

donde $y_1(x) = x$ es solución de la ED $y''=0$
$y_2(x) = 1$ " " " " " $y''=0$
$y_p(x) = x^3$ es una solución de la ED $y''=6x$
$y_1(x)$ es una sol de $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$
$y_2(x)$ " " " " $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$
$y_p(x)$ es una solución de la ED $y''+P(x)y'+Q(x)y=h(x)$

y $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de 1

Ejemplo:

LD es múltiplo del otro

→ Resolver: $y''+y = 6e^x$ ①

① Resolver la ED $y''+y=0$
② Obtener una sol $y_p(x)$ para ED ①

Solución de $y''+y=0$

① $y''+y=0 \longleftrightarrow y''=-y$ | $y(x) = C_1 \operatorname{Sen} x + C_2 \operatorname{Cos} x$

$y_1(x) = \operatorname{sen}(x)$
$y_2(x) = \cos(x)$ } soluciones de $y''+y=0$

$y_1(x) = \operatorname{sen}(x) = y'(x) = \cos(x)$, $y'' = -\operatorname{sen} x$
$y_2(x) = \cos(x) = y_2'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, $y'' = -\cos(x)$

$y_p(x) = 3e^x$ es una solución de $y'' + y = 6e^x$

$\therefore$ $\underbrace{y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + 3e^x}_{\text{Solución general de ED } y'' + y = 6e^x}$

Scanned with CamScanner

Dependencia o Independencia de Soluciones para una ED Lineal

Dada la ED lineal de 2° orden $y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$ (1)
decimos que dos soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ de la ED (1)
son linealmente independientes (dependientes) si y solo si

$P \leftrightarrow Q \equiv NP \leftrightarrow NQ$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ en } I$$

$= 0$

A $W(y_1, y_2)$ se le conoce como determinante de Wronski

Ejemplo: a) Muestre que $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{3x}$ son soluciones LI de la ED $\rightarrow y'' - 5y' + 6y = 0$ (1)

b) Determine la solución general de la ED

Respuesta:

(a) $y_1(x) = e^{2x} \rightarrow y'(x) = 2e^{2x} \rightarrow y''(x) = 4e^{x}$

Sustituimos en 1

$$4e^{2x} - 5(2e^{2x}) + 6(e^{2x}) = 0$$
$$4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0$$
$$\underbrace{0 = 0}_{\text{Identidad}} \quad \text{en } I = \mathbb{R}$$

$y_2(x) = e^{3x} \rightarrow y_2'(x) = 3e^{3x} \rightarrow y_2''(x) = 9e^{3x}$

Sustituimos en ①

$9e^{3x} - 5(3e^{3x}) + 6(e^{3x}) = 0$ en $I = \mathbb{R}$

$9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} = 0$

$\underbrace{0 = 0}_{\text{Identidad}}$

$\therefore$ $y_1(x) = e^{2x}$ y $y_2(x) = e^{3x}$ son soluciones a la ED

Veamos si son LI

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x}, \neq 0 \text{ en } \mathbb{R}$$

$\therefore$ son soluciones LI de la ED 1

(b) Solución general de la ED

$$\underbrace{y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}_{\text{Solución general de la ED}}$$

Ejemplo: Muestre que $y_1(x) = e^{2x}$ y $y_2(x) = 0$ son soluciones de la ED 1

Respuesta:

$y_1(x) = e^{2x} \rightarrow {}' 2e^{2x} \rightarrow {}'' 4e^{2x}$

$y_2(x) = 0 \rightarrow {}' 0 \rightarrow {}'' 0$

Sustituyendo

$4e^{2x} - 5(2e^{2x}) + 6(e^{2x})$

$\underbrace{0 = 0}_{\text{identidad}}$

$0 - 5(0) + 6(0)$

$\underbrace{0 = 0}_{\text{identidad}}$

$\therefore y_1(x) = e^{2x}$ y $y_2(x) = 0$ son soluciones de la ED

La solución general es:

$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2(0)$

$y(x) = C_1 e^{2x}$

$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore y(x) = e^{2x}$ $y_2(x) = 0$ son soluciones LD de 1

y NO se puede formar la solución general

Muestre que: $y_1(x) = \text{sen}(x)$ y $y_2(x) = 2\text{sen}x$
son soluciones de la ED

$$y'' + y = 0$$

$$y_1(x) = \text{sen}(x) \rightarrow {}' \cos(x) \rightarrow {}'' -\text{sen}(x)$$
$$y_2(x) = 2\text{sen}(x) \rightarrow 2\cos(x) \rightarrow -2\text{sen}(x)$$

sustituimos

$$-\text{sen}(x) + \text{sen}(x) = 0$$
$$\underbrace{0 = 0}_{\text{identidad}}$$

$\therefore$ $y_1 = \text{sen}(x)$ y
$y_2(x) = 2\text{sen}(x)$
son soluciones
de 1

$$-2\text{sen}(x) + 2\text{sen}(x) = 0$$
$$\underbrace{0 = 0}_{\text{identidad}}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \text{sen}\,x & 2\text{sen}\,x \\ \cos(x) & -2\cos x \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ y_1 y y_2 son soluciones LD. No se puede formar la sol. general

Metodo De Reducción De Orden

Planteamiento: Se tiene solamente una solución $y_1(x)$ para la ED lineal homogenea

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ① y se desea encontrar otra solución $y_2(x)$ para la misma ED ① de tal forma que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ sean soluciones LI.

De hecho

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx$$

Reducción de Orden

Ejemplo: a) Muestre que $y_1(x) = e^{2x}$ es una solución de la ED $y'' - 4y' + 4y = 0$.

b) Encuentre una segunda solución ∋ $y_1(x)$ y $y_2(x)$ sean LI

c) Encuentre la solución general de ①

→ Respuesta

a)

$$y_1 = e^{2x} \longrightarrow y_1' = 2e^{2x} \longrightarrow y_1'' = 4e^{2x}$$

① Sustituimos en ED

$$4e^{2x} - 4(2e^{2x}) + 4(e^{2x}) = 0$$

$$4e^{2x} - 8e^{2x} + 4e^{2x} = 0$$

$$\underbrace{0 = 0}_{\text{Identidad}}$$

∴ $y_1(x) = e^{2x}$ es una solución de la ED ① b)

Por la formula tenemos

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}\,dx$$

$$= e^{2x}\int \frac{e^{-\int -4\,dx}}{[e^{2x}]^2}\,dx$$

$$= e^{2x}\int \frac{e^{\int 4dx}}{e^{4x}}\,dx$$

$$= e^{2x}\int \frac{\cancel{e^{4x}}}{\cancel{e^{4x}}}^{1}\,dx$$

$$= e^{2x}\int 1\,dx$$

$$= xe^{2x}$$

f	x	e^{2x}	g
f'	1	$2e^{2x}$	g'
f''	0	$4e^{2x}$	g''

$(f\cdot g)'' = fg'' + 2f'g' + f''g$

* Comprobamos que es solución

$$y_2(x) = xe^{2x} \longrightarrow y_2' = x(e^{2x})' + (x)'(e^{2x})$$
$$= x2e^{2x} + e^{2x}$$

$$y_2'' = (2xe^{2x})' + (e^{2x})'$$
$$= 2(xe^{2x})' + 2e^{2x}$$
$$= 2[2xe^{2x} + e^{2x}] + 2e^{2x}$$
$$= \underline{4xe^{2x} + 4e^{2x}}$$

$$(4xe^{2x}+4e^{2x})-4(2xe^{2x}+e^{2x})+4xe^{2x})=0$$

$$4xe^{2x}+4e^{2x}-8xe^{2x}-4e^{2x}+4xe^{2x}=0$$

$$\underbrace{0=0}_{\text{Identidad}}$$

$\therefore$ $y_2(x)$ es solución de la ED $\forall x \in \mathbb{R}$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x}+e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{2x}(2xe^{2x}+e^{2x}) - 2e^{2x}(xe^{2x})$$

$$= 2xe^{4x} + e^{4x} - 2xe^{4x}$$

$$= e^{4x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son LI

c)

$$\underbrace{y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}}_{\text{Solución general}}$$

a) Muestre que $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ son soluciones de la ED $x^2y'' - xy' = 0$ (1)

b) Determine si y_1 y y_2 son soluciones LI

C) En caso afirmativo encuentre la solución general

Respuesta:

$y_1(x) = x^2 \rightarrow y_1' = 2x \rightarrow y_1'' = 2$

(1) Sustituimos en ED

$$x^2(2) - x(2x) = 0$$
$$\underbrace{0 = 0}_{\text{Identidad en } I = \mathbb{R}}$$

$y_2(x) = x^3 \rightarrow y_2' = 3x^2 \rightarrow y_2'' = 6x$

(1) Sustituimos en ED

$$x^2(6x) - x(3x^2) = 0$$
$$\underbrace{6x^3 - 3x^3 = 0}_{\text{No es identidad}}$$

∴ No son soluciones de la ED, no pueden ser soluciones LI y no se puede obtener solución general

→ Se busca ED de la forma $ax^2y''+bxy'+cy=0$ para la cual $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=x^3$ son soluciones.
Por lo mismo:

i) $ax^2y_1''+bxy_1'+cy=0$ Identidad

ii) $ax^2y_2''+bxy_2'+cy=0$ Identidad

i) $ax^2(2)+bx(2x)+c(x^2)=0$

ii) $ax^2(6x)+bx(3x^2)+c(x^3)=0$

Factorizando x^2 en i)

i) $x^2(2a+2b+c)=0$

Factorizando x^3 en ii)

ii) $x^3(6a+3b+c)=0$

i) $2a+2b+c=0$

ii) $6a+3b+c=0$

Tomando $a=1$

$(-1)\ 2b+c=-2$
$3b+c=-6$

$\Rightarrow$

1) $-2b-\cancel{c}=2$
$3b+\cancel{c}=-6$

$b=-4$

$c=-2-2b$
$=6$

10/11/2025

Sustituyendo a, b, c en ED

$(1)x^2y'' + (-4)xy' + (6)y = 0$

→ Muestre que $y_1(x) = x^2$ y $y_2(x) = x^3$ son soluciones de la ED $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ ①

→ Muestre que y_1 y y_2 son soluciones LI

→ Encuentre solución general

→ Con $y_1(x) = x^2$

$y_1(x) = x^2 \rightarrow y_1' = 2x \rightarrow y_1'' = 2$

① Sustituimos en ED

$x^2(2) - 4x(2x) + 6(x^2) = 0$

$2x^2 - 4x^2 + 6x^2 = 0$

$\underbrace{0 = 0}$

identidad → $\therefore$ $y_1(x) = x^2$ es solución de la ED en $\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

→ Con $y_2(x) = x^3$

$$y_2(x) = x^3 \longrightarrow y_2' = 3x^2 \longrightarrow y_2'' = 6x$$

① Sustituimos en ED

$$x^2(6x) - 4x(3x^2) + 6(x^3) = 0$$

$$6x^3 - 12x^3 + 6x^3 = 0$$

$$\underbrace{0 = 0}$$

Identidad $\longrightarrow \therefore y_2(x) = x^3$ es solución de la ED con $x \in \mathbb{R}$

→ Vemos si son LI

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4 \neq 0$$

en $x \in (0, \infty)$

$\therefore$ son soluciones LI en $(0, \infty)$

→ Solución general

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3$$

$x \in (0, \infty)$

$\cancel{x}$ 0

$(-\infty, 0)$ 0 $(0, \infty)$

Se dice que V_1 y V_2 son LI en V si

$C_1V_1 + C_2V_2 = 0$, $C_1 = C_2 = 0$

$C_1x^2 + C_2x^3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Si $x = 1$ ① $C_1(1)^2 + C_2(1)^3 = 0$
Si $x = 2$ ② $C_1(2)^2 + C_2(2)^2 = 0$

$C_1 + C_2 = 0 \quad (-4)$
$4C_1 + 8C_2 = 0$
$4C_2 = 0$

$\boxed{C_2 = 0}$

$C_1 + 0 = 0$
$\boxed{C_1 = 0}$

Scanned with CamScanner

ED LINEALES

HOMOGENEAS 2° ORDEN COEFICIENTES CONSTANTES

Objeto: $ay'' + by' + cy = 0$ con $a \neq 0$, a, b y c constantes

Método:

$y'' - 5y' + 6y = 0$ ①

Supongamos que la ED tiene soluciones de la forma $y(x) = e^{mx}$

① $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2e^{mx}$

② Sustituimos en la ED ① y obtenemos la identidad

$$m^2e^{mx} - 5(me^{mx}) + 6(e^{mx}) = 0$$

$$e^{mx}(m^2 - 5m + 6) = 0$$

$$m^2 - 5m + 6 = \frac{0}{e^{mx}} \longrightarrow \text{Ecuación auxiliar}$$

$$(m-2)(m-3) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m_1 = 2 \\ m_2 = 3 \end{array}}$$

③ Sustituimos en e^{mx}

$$\underbrace{\begin{array}{l} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{3x} \end{array}}_{\text{Soluciones de la ED}}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{5x} \neq 0$$

$\therefore$ $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$ son soluciones LI de la ED ①

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

→ Resolver: $y'' - 6y' + 9y = 0$

① Supongamos que la ED tiene soluciones tipo $y(x) = e^{mx}$,

② $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2 e^{mx}$

③ Sustituimos en ED y obtenemos identidad

$$m^2 e^{mx} - 6(me^{mx}) + 9(e^{mx}) = 0$$

$$e^{mx}(m^2 - 6m + 9) = 0$$

$$m^2 - 6m + 9 = \frac{0}{e^{mx}}$$

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

$$(m - 3)(m + 3) = 0$$

$\underbrace{m_1 = 3}$, $\underbrace{m_2 = +3}$

Scanned with CamScanner

④ Sustituimos en e^{mx}

$$y_1(x) = e^{3x}$$
$$y_2(x) = e^{3x}$$

⑤ $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{3x} \\ 3e^{3x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{6x} - 3e^{6x} = 0$

$0 = 0$ ∴ las soluciones son LD

∴ No hay forma de crear solución general

⑥ Se busca una segunda solución $y_2(x)$ ∃ y_1 y y_2 sean LI

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{(y_1)^2}\,dx$$

$$y_2(x) = e^{3x} \int \frac{e^{-\int -6\,dx}}{(e^{3x})^2}\,dx$$

$$y_2(x) = e^{3x} \int \frac{\cancel{e^{6x}}}{\cancel{e^{6x}}}\,dx$$

$$y_2(x) = xe^{3x}$$

⑦ $w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x}+3xe^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} + 3xe^{6x} - 3xe^{6x}$

$= e^{6x} \neq 0$

∴ Son soluciones LI

∴ la solución general es

$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

→ Resolver $y'' - 6y' + 13y = 0$

* Supongamos que la ED tiene soluciones de la forma $y(x) = e^{mx}$ $m = ?$

① $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2 e^{mx}$

② Sustituimos en ED y obtenemos una identidad

$m^2 e^{mx} - 6(me^{mx}) + 13(e^{mx}) = 0$

$e^{mx}(m^2 - 6m + 13) = 0$

$m^2 - 6m + 13 = 0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar

$m = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$m = \frac{6 \pm 4i}{2}$ $\quad m_1 = \frac{6+4i}{2}$, $\quad m_2 = \frac{6-4i}{2}$

$m_1 = 3+2i$, $m_2 = 3-2i$

Scanned with CamScanner

③ Sustituimos en e^{mx}

$$\left.\begin{aligned} y_1^* &= e^{(3+2i)x} \\ y_2^* &= e^{(3-2i)x} \end{aligned}\right\} \text{Soluciones complejas}$$

④ Cambio de "base"

Formula de Euler

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

$$\begin{aligned} y_1^* &= e^{(3+2i)x} \\ &= e^{3x} \cdot e^{2xi} \\ &= e^{3x} \cdot [\cos(2x) + i \operatorname{sen}(2x)] \\ &= \underbrace{e^{3x}\cos(2x)}_{y_1(x)} + \underbrace{i e^{3x}\operatorname{sen}(2x)}_{y_2(x)} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= e^{3x}\cos 2x \\ y_2(x) &= e^{3x}\operatorname{sen} 2x \end{aligned}\right\} \text{Soluciones "reales" de la ED}$$

⑤ ¿Son LI?

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{3x}\cos(2x) & e^{3x}\operatorname{sen}(2x) \\ 3e^{3x}\cos(2x) + -2e^{3x}\operatorname{sen}(2x) & 3e^{3x}\operatorname{sen}(2x) + 2\cos(2x) e^{3x} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) = {} & 3e^{6x}\operatorname{sen}(2x)\cos(2x) + 2e^{6x}\cos^2(2x) - 3e^{6x}\cos(2x)\operatorname{sen}(2x) \\ & - 2e^{6x}\operatorname{sen}^2(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2e^{6x}\cos^2(2x) + 2e^{6x}\operatorname{sen}^2(2x) \\ &= 2e^{6x}\,[\cos^2(2x) \cancel{+ \operatorname{sen}^2(2x)}] \\ &= 2e^{6x} \end{aligned}$$

∴ y_1 y y_2 son soluciones LI

⑥ Solución general

$$y(x) = C_1 e^{3x} \cos(2x) + C_2 e^{3x} \operatorname{sen}(2x)$$

ED	Ec. Auxiliar	Raíces	Sol. general
$y'' - 5y + 6y = 0$	$m^2 - 5m + 6 = 0$	$m = 2$, $m = 3$	$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$
$y'' - 6y + 9y = 0$	$m^2 - 6m + 9 = 0$	$m_1 = 3$, $m_2 = 3$	$y_1(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$
$y'' - 6y + 13y = 0$	$m^2 - 6m + 13 = 0$	$m_1 = 3 + 2i$, $m_2 = 3 - 2i$	$y(x) = C_1 e^{3x} \cos(2x) + C_2 e^{3x} \operatorname{sen}(2x)$

→ Cómo responder en la tarea y examen

① Resolver $y'' + 3y - 28y = 0$ ①

* Supongamos que la ED ① tiene soluciones de la forma $y(x) = e^{mx}$ $m = ?$

① $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2e^{mx}$

② Sustituimos en la ED ① y obtenemos la identidad

$y'' + 3y' - 28y = 0$

$\rightarrow m^2e^{mx} + 3me^{mx} - 28e^{mx} = 0$

$e^{mx}(m^2 + 3m - 28) = 0$

$m^2 - 3m - 28 = 0$ ⟶ Ecuación auxiliar

$(m - 7)(m + 4)$

$m_1 = 7$

$m_2 = -4$

③ Sustituimos en $y(x) = e^{mx}$

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-7x} \\ y_2(x) &= e^{4x} \end{aligned}\right\}$$ Soluciones L.I. de la ED ①

④ Solución general de 1

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = C_1 e^{-7x} + C_2 e^{4x}$$

② Resolver $y'' + 10y' + 25y = 0$

① Supongamos que la ED ① tiene soluciones de la forma $y(x) = e^{mx}$ $m = ?$

② $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2 e^{mx}$

③ Sustituimos en ED y obtenemos identidad

$$m^2 e^{mx} + 10me^{mx} + 25e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 + 10m + 25) = 0$$

$m^2 + 10m + 25 = 0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar

$(m+5)(m+5)$

$m_1 = -5$

$m_2 = -5$

④ Sustituimos en e^{mx}

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = e^{-5x} \\ y_2(x) = e^{-5x} \end{array}\right\} \text{Soluciones LD}$$

⑤ Por reducción de orden $y_2(x) = xe^{-5x}$ también es solución

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = e^{-5x} \\ y_2(x) = xe^{-5x} \end{array}\right\} \text{Soluciones LI}$$

⑥ Solución general

$$y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 xe^{-5x}$$

③ Resolver $y'' + 2y' + 5y = 0$

① Supongamos que la ED 1 tiene soluciones de la forma $y(x) = e^{mx}$ $m = ?$

② $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2 e^{mx}$

③ Sustituimos en ED y obtenemos identidad

$$m^2 e^{mx} + 2me^{mx} + 5e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 + 2m + 5) = 0$$

$$m^2 + 2m + 5 = 0 \longrightarrow \text{Ecuación auxiliar}$$

$$b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(5) = -16 < 0$$

④ Formula general

$$m = \frac{-(b) \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2(a)} = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}, \quad m = \frac{-2}{2} \pm \sqrt{-16}$$

$m_1 = -1 + 2i$

$m_2 = -1 - 2i$

⑤ Sustituimos en $y(x) = e^{mx}$

$$\left.\begin{aligned} y_1^*(x) &= e^{(-1+2i)x} \\ y_2^*(x) &= e^{(-1-2i)x} \end{aligned}\right\} \text{Soluciones complejas}$$

$y_1(x) = e^{-x}\cos(2x)$
$y_2(x) = e^{-x}\operatorname{Sen}(2x)$ } Soluciones reales LI

⑥ Solución general

$$y(x) = C_1 e^{-x}\cos(2x) + C_2 e^{-x}\operatorname{Sen}(2x)$$

PROBLEMAS VALOR INICIAL

(1) Resolver (1) $y'' - y' + 6y = 0$ sujeto $y(0) = 3$
$y'(0) = 12$

(1) Supongamos que la ED (1) tiene soluciones de la forma $y(x) = e^{mx}$ $m = ?$

(2) $y = e^{mx} \longrightarrow y' = me^{mx} \longrightarrow y'' = m^2 e^{mx}$

(3) Sustituir en ED y obtenemos la identidad

$$\underbrace{m^2 e^{mx}}_{y''} - \underbrace{me^{mx}}_{y'} + \underbrace{6e^{mx}}_{y} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 - m \cancel{+} 6) = 0$$

$m^2 - m \cancel{+} 6 = 0 \longrightarrow$ Ecuación auxiliar (2)

$(m + 2)(m - 3) = 0$

$m_1 = -2$
$m_2 = 3$

(4) Soluciones al sustituir en $y = e^{mx}$

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-2x} \\ y(x) &= e^{3x} \end{aligned}\right\} \text{ Soluciones LI}$$

(5) $\therefore y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$

Solución general

Note que
$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^{3x}$

⑥ Se busca solución particular que cumpla
$Y(0) = 3$ y $Y'(0) = 12$

$Y(0) = 3 \longleftrightarrow$ i) $C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{3(0)} = 3$
$Y'(0) = 12 \longleftrightarrow$ ii) $-2 e^{-2(0)} + 3 e^{(3)(0)} = 12$

Sistema de ecuaciones

i) $C_1 + C_2 = 3$ $\longrightarrow$ $2\cancel{C_1} + 2C_2 = 6$

ii) $-2C_1 + 3C_2 = 12$ $\quad$ $-2\cancel{C_1} + 3C_2 = 12$

$= 5C_2 = 18$

$C_1 = -3/5$

$C_2 = \frac{18}{5}$

⑦ Sustituimos en 2

$Y(x) = -\frac{3}{5} e^{-2x} + 18/5 e^{3x}$

Solución del PVI