

Algebra Lineal

Universidad Autónoma

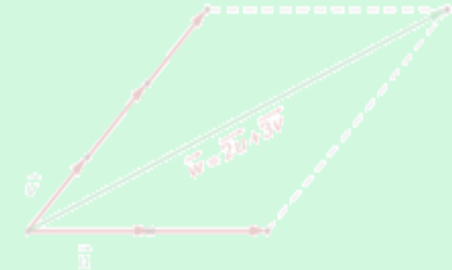
De Aguascalientes

Depto. de Matemáticas y Física

Ejemplos de espacios vectoriales \mathbb{R}^n .



2.1. Espacios vectoriales.



Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ arbitrarios dados.

A_1

$$x + y = [x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, y_2, \dots, y_n] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]$$

Como $x_i + y_i = y_i + x_i$, para toda $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$x + y = [y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n] = [y_1, y_2, \dots, y_n] + [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$\therefore x + y = y + x$$

Comprobamos la primera propiedad: $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

$$T(f+g) = Tf + Tg$$

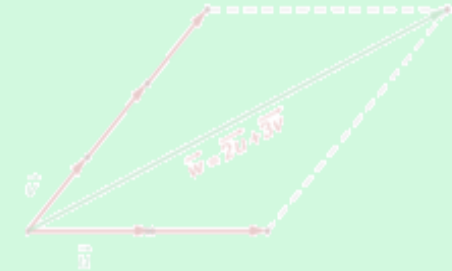
$$\int_0^1 (f(x) + g(x))g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 g(x)g(x) dx$$

$$\int_0^1 (f(x)g(x) + f(x)g(x)) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= [(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)] - [a_{12}a_{21}] \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

2.1. Espacios vectoriales.



$$\begin{aligned} x + (y + z) &= [x_1, x_2, \dots, x_n] + ([y_1, y_2, \dots, y_n] + [z_1, z_2, \dots, z_n]) \\ &= [x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n] \\ &= [x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)] \end{aligned}$$

Y como $x_i + (y_i + z_i) = (x_i + y_i) + z_i$, para toda $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$x + (y + z) = [x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)]$$

$$\begin{aligned} &= [(x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n] \\ &= [y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n] + [z_1, z_2, \dots, z_n] \end{aligned}$$

$$= ([x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, y_2, \dots, y_n]) + [z_1, z_2, \dots, z_n] = (x + y) + z$$

$$\therefore x + (y + z) = (x + y) + z$$

2.1. Espacios vectoriales.

Proponemos $u \in \mathbb{R}^n$ (por determinarse) tal que $x + u = x$ (1)

Nótese que $x + u = x \Rightarrow [x_1, x_2, \dots, x_n] + [u_1, u_2, \dots, u_n] = [x_1, x_2, \dots, x_n]$
 $\Rightarrow [x_1 + u_1, x_2 + u_2, \dots, x_n + u_n] = [x_1, x_2, \dots, x_n]$

Por igualdad de vectores se tiene:

$$x_1 + u_1 = x_1, x_2 + u_2 = x_2, \dots, x_n + u_n = x_n$$

Que al resolver para u_1, u_2, \dots, u_n , se tiene: $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$, y en consecuencia $u = [0, 0, \dots, 0]$

Para la unicidad procedemos como sigue:



2.1. Espacios vectoriales.

Suponemos que el neutro aditivo no es único.

es decir, existe $u^* \in \mathbb{R}^n$ con $u \neq u^*$, tal que $x + u^* = x$ (2)

En particular, al sustituir $x = u^*$ en (1) se tiene, $u^* + u = u^*$, y al sustituir $x = u$ en (2) se tiene $u^* + u = u$, al comparar estas dos ultimas expresiones vemos se tiene que $u = u^*$, lo cual viola la hipótesis de que $u \neq u^*$, esto nos implica que es falsa la suposición que se hizo al principio, de que el neutro aditivo no es único.

Y como consecuencia se tiene que **el neutro aditivo es único**.

Al ser único, lo podemos representar con un “símbolo”, así



2.1. Espacios vectoriales.

Proponemos $v \in \mathbb{R}^n$ (por determinarse) tal que $x + v = 0$ (a)

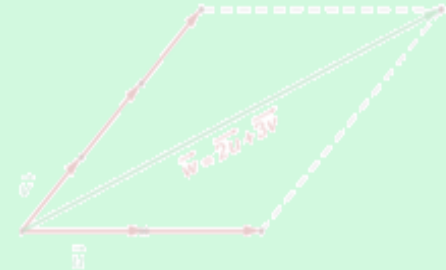
Nótese que $x + v = 0 \Rightarrow [x_1, x_2, \dots, x_n] + [v_1, v_2, \dots, v_n] = [0, 0, \dots, 0]$
 $\Rightarrow [x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n] = [0, 0, \dots, 0]$

Por igualdad de vectores se tiene:

$$x_1 + v_1 = 0, x_2 + v_2 = 0, \dots, x_n + v_n = 0$$

Que al resolver para v_1, v_2, \dots, v_n , se tiene: $v_1 = -x_1, v_2 = -x_2, \dots, v_n = -x_n$, y en consecuencia $v = [-x_1, -x_2, \dots, -x_n]$

Para la unicidad procedemos como sigue:



2.1. Espacios vectoriales.

Suponemos que el inverso aditivo no es único.

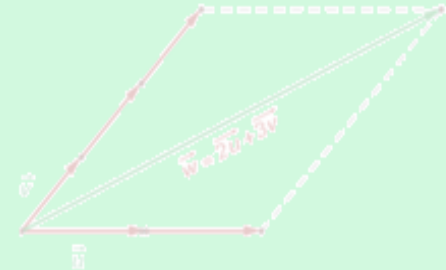
es decir, existe $v^* \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq v^*$, tal que $x + v^* = x$ (b)

En particular, al sustituir $x = v^*$ en (a) se tiene, $v^* + v = v^*$, y al sustituir $x = v$ en (b) se tiene $v^* + v = v$, al comparar estas dos ultimas expresiones vemos se tiene que $v = v^*$, lo cual viola la hipótesis de que $v \neq v^*$, esto nos implica que es falsa la suposición que se hizo al principio, de que el inverso aditivo no es único.

Y como consecuencia se tiene que **el inverso aditivo es único.**

Al ser único, lo podemos representar con un “símbolo”, así

$$-x = [-x_1, -x_2, \dots, -x_n]$$



2.1. Espacios vectoriales.

Referencias:

1. Álgebra Lineal. Stanley I. Grossman, sexta edición, Mc Graw Hill, México.
2. Álgebra Lineal con Aplicaciones y Matlab. Bernard Kolman, Octava Edición, Prentice Hall.
3. Introducción al Álgebra lineal. Howard Antón, Tercera Edición, Noriega Editores, México.
4. Álgebra Lineal. Claudio Pita Ruiz, Mc Graw Hill, México.
5. Álgebra Lineal con Aplicaciones. Nakos George, Joyner David, Internacional Thomson Editores.

