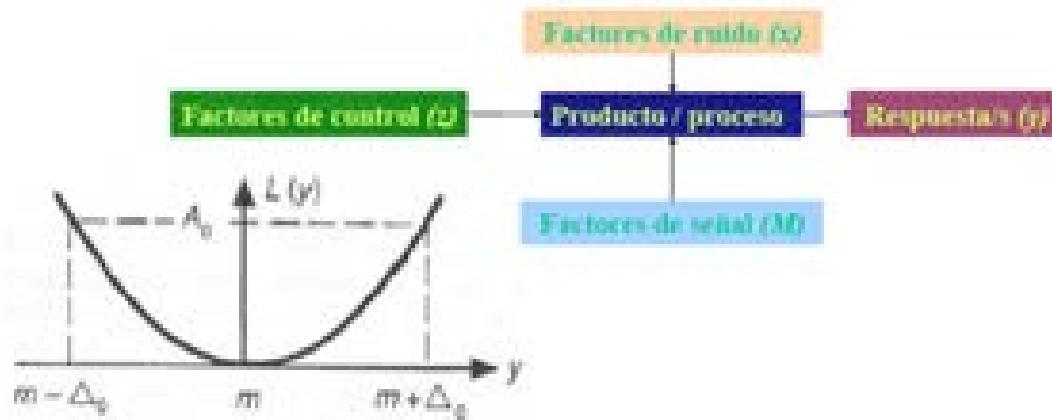




Diseño y Análisis de Experimentos en Ingeniería y Ciencias Ambientales



Dr. Christian R. Encina Zelada

cencina@lamolina.edu.pe

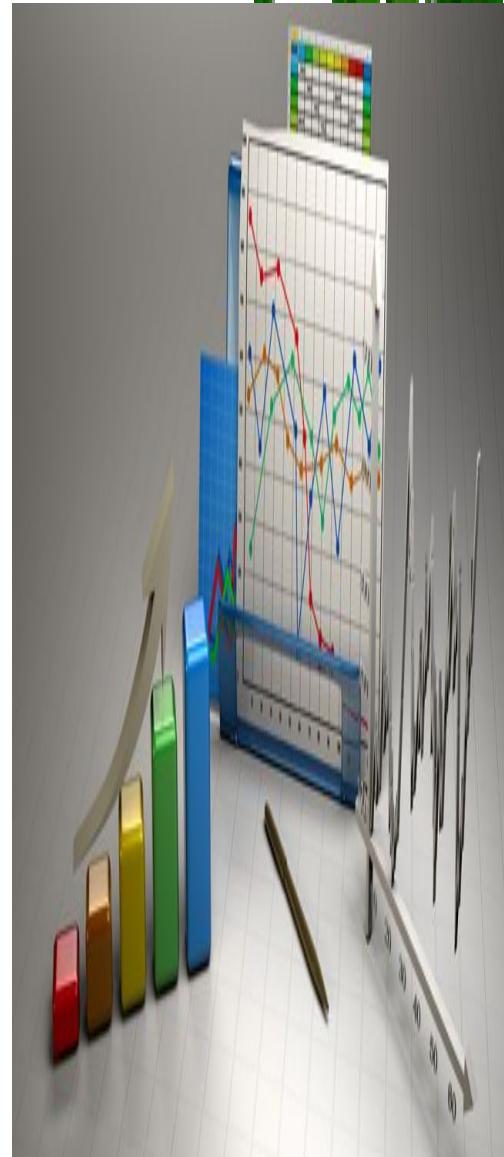
INTRODUCCIÓN

- * El diseño estadístico de experimentos es precisamente la forma más eficaz de hacer pruebas.
- * El diseño de experimentos consiste en determinar cuáles pruebas se deben realizar y de qué manera, para obtener datos que, al ser analizados estadísticamente...
- * ...proporcionen evidencias objetivas que permitan responder las interrogantes planteadas, y de esa manera clarificar los aspectos inciertos de un proceso, resolver un problema o lograr mejoras.



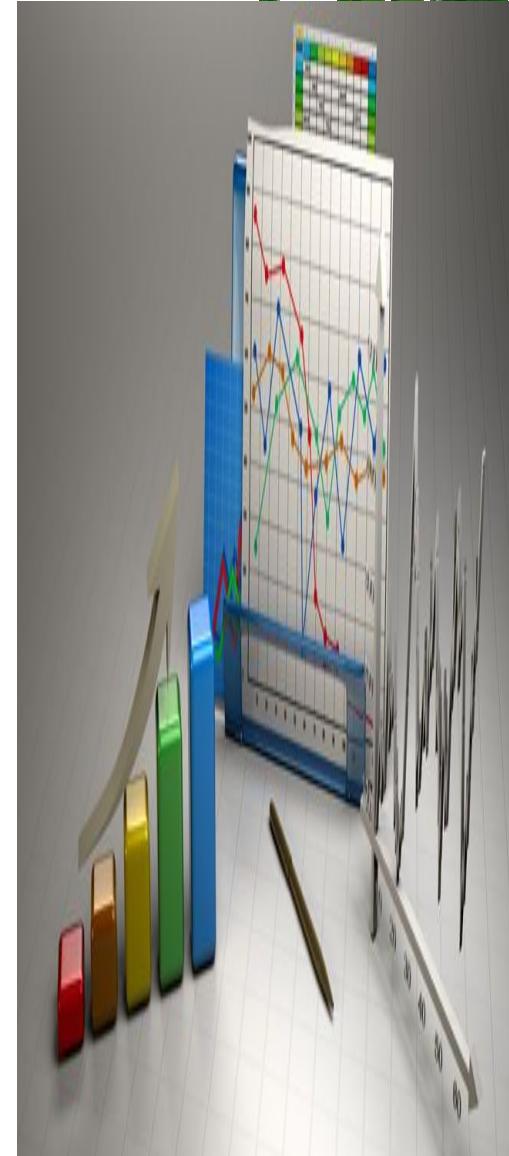
INTRODUCCIÓN

1. Comparar a dos o más materias primas con el fin de elegir al que mejor cumple los requerimientos.
2. Comparar varios instrumentos de medición para verificar si trabajan con la misma precisión y exactitud.
3. Determinar los factores (las x vitales) de un proceso que tienen impacto sobre una o más características del producto final.



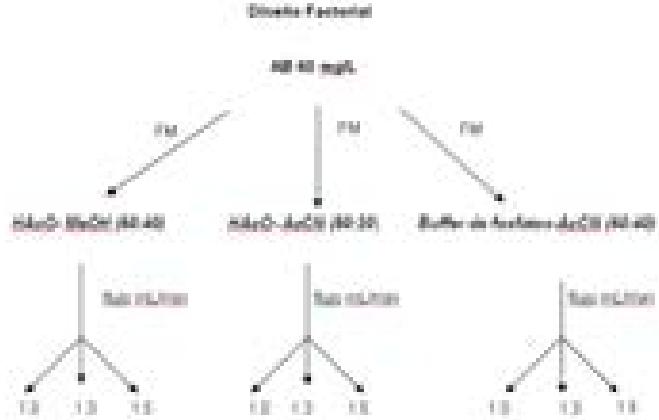
INTRODUCCIÓN

4. Encontrar las condiciones de operación (temperatura, velocidad, humedad, por ejemplo) donde se reduzcan los defectos o se logre un mejor desempeño del proceso.
5. Reducir el tiempo de ciclo del proceso.
6. Hacer el proceso insensible o robusto a oscilaciones de variables ambientales.
7. Apoyar el diseño o rediseño de nuevos productos o procesos.
8. Ayudar a conocer y caracterizar nuevos materiales.



1. Diseños para comparar dos o mas tratamientos

- DCA
- DBCA
- DCL y DCGL



2. Diseños para estudiar el efecto de varios factores sobre una o mas variables de respuesta.

- Diseños factoriales 2^k
- Diseños factoriales 3^k
- Diseños factoriales fraccionados 2^{k-p}



3. Diseños para la optimización de procesos

Diseños para el modelo de primer orden

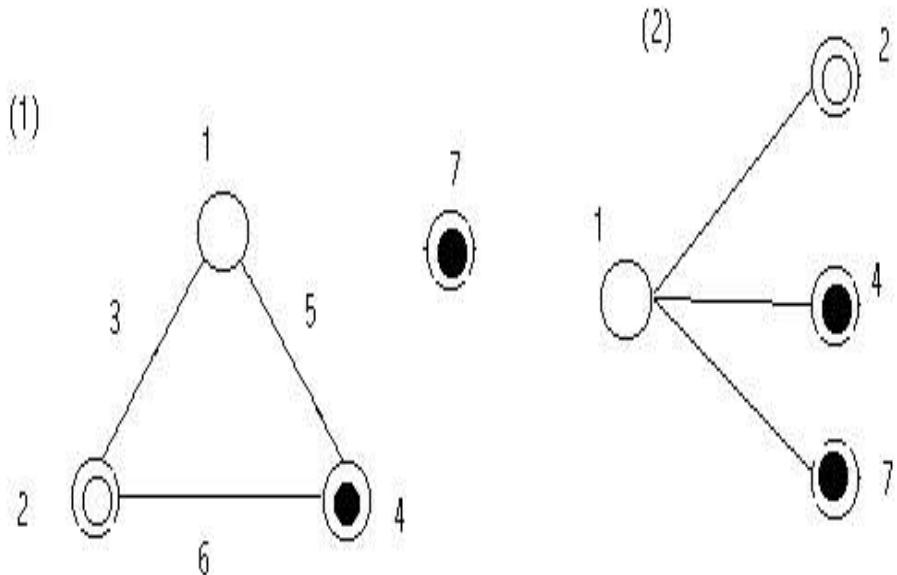
- Diseños factoriales 2^k y 2^{k-p}
- “Diseños de Plackett-Burman”
- Diseño simplex

Diseños para el modelo de segundo orden

- Diseños de composición central
- Diseños de Box-Behnken
- Diseños factoriales 3^k y 3^{k-p}

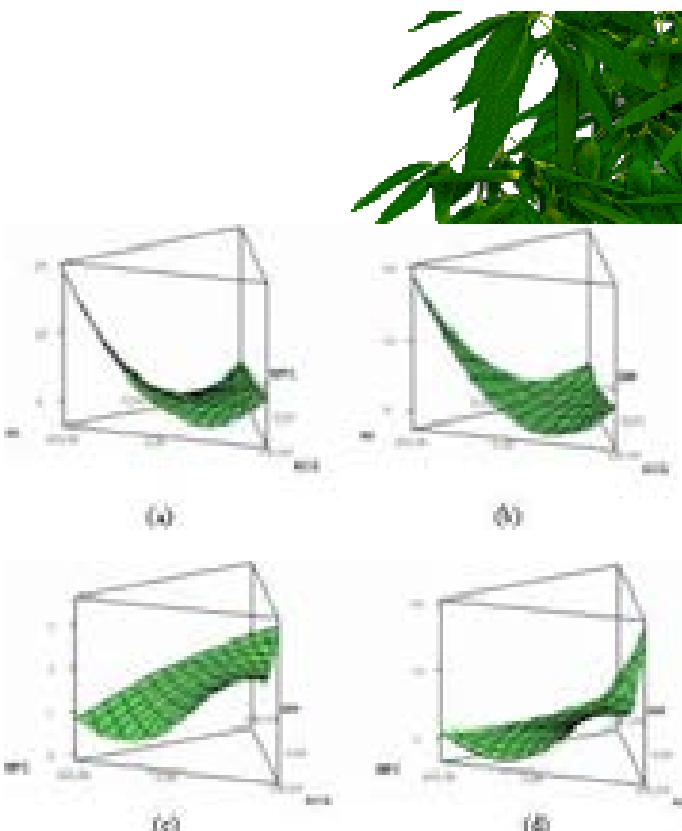
4. Diseños robustos

- Arreglos ortogonales (diseños factoriales)
- Diseño con arreglos internos y externos



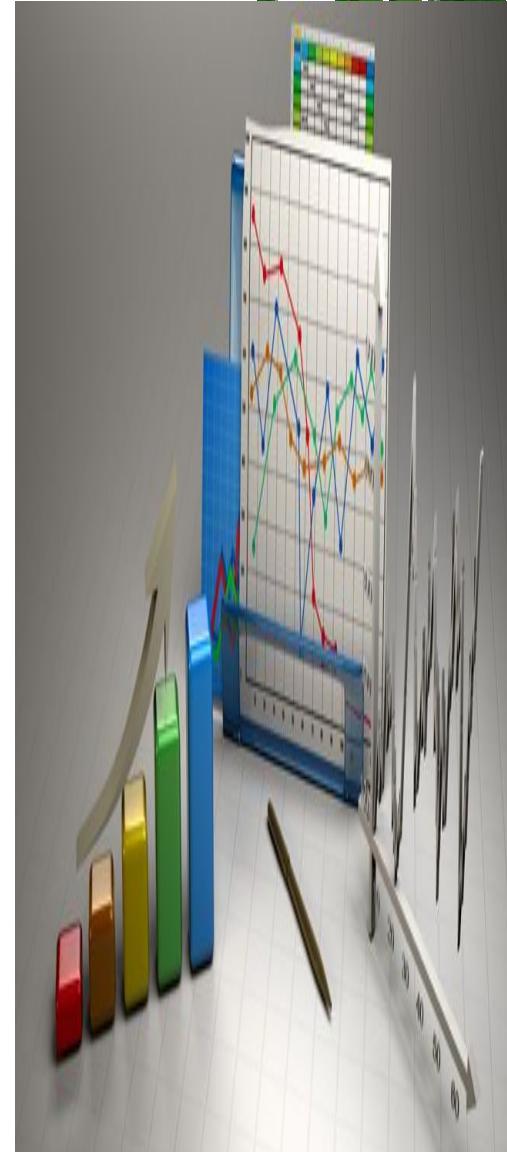
5. Diseños de mezclas

- Diseños simplex-reticular
- Diseño simplex con centroide
- Diseño con restricciones
- Diseño axial



INTRODUCCIÓN

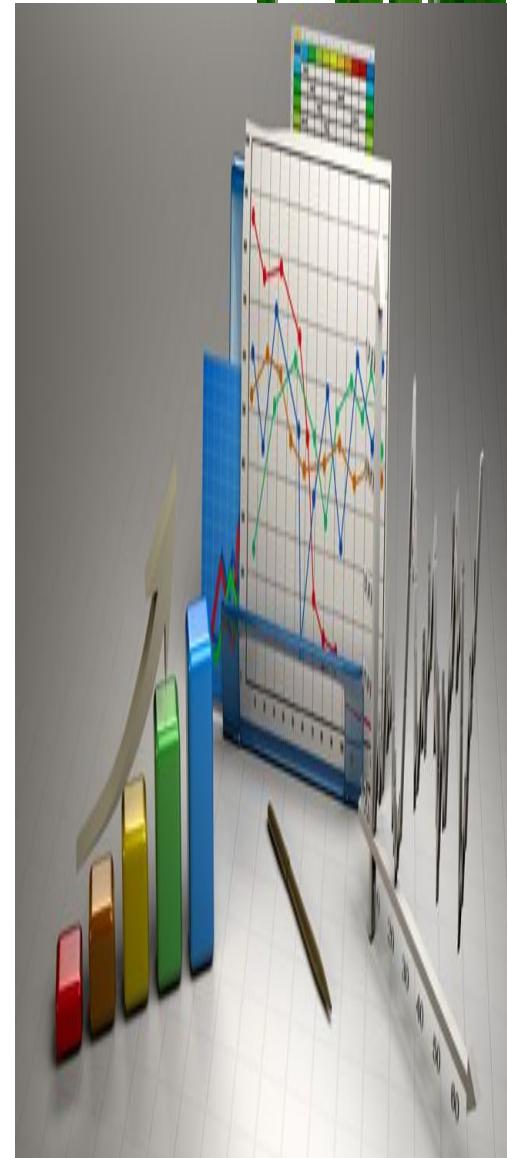
- ★ El diseño estadístico de experimentos, desde su introducción por Ronald A. Fisher en la primera mitad del siglo XX en Inglaterra, se ha utilizado para conseguir un aprendizaje acelerado.
- ★ El trabajo de Fisher a través de su libro *The Design of Experiments* (1935), influyó de manera decisiva en la investigación agrícola, ambiental, forestal, etc. ya que aportó métodos (ahora usados en todo el mundo) para evaluar los resultados de experimentos con muestras pequeñas.



INTRODUCCIÓN

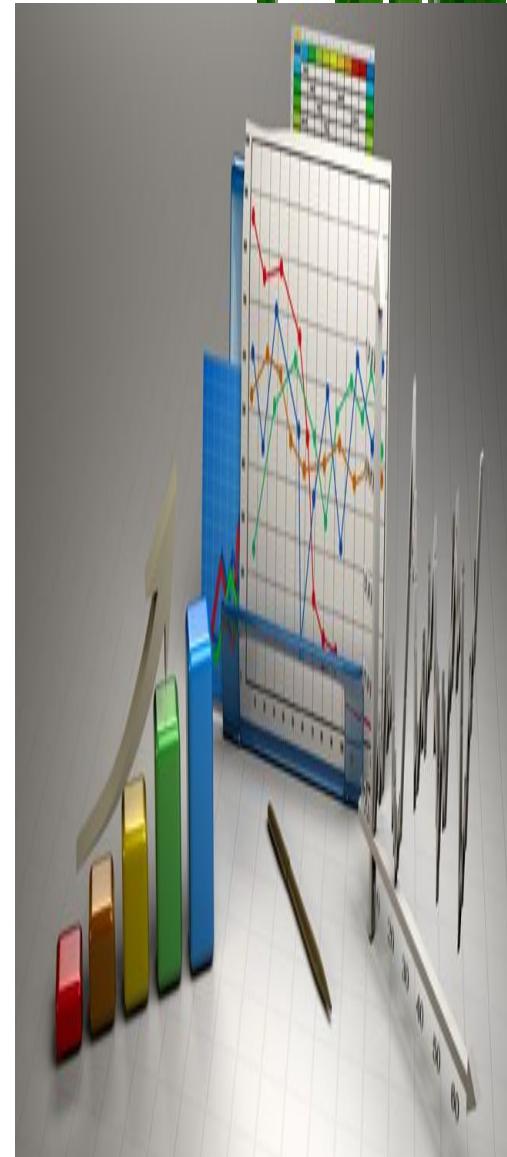


- * La clave de las aportaciones de Fisher radica en que este investigador se dio cuenta de que las fallas en la forma de realizar experimentos obstaculizaba el análisis de los resultados experimentales.
- * Fisher también proporcionó métodos para diseñar experimentos destinados a investigar la influencia simultánea de varios factores.



INTRODUCCIÓN

- * Los desarrollos posteriores en diseños de experimentos fueron encabezados por George E. P. Box, quien trabajó como estadístico durante ocho años en la industria química en Inglaterra y desarrolló la metodología de superficie de respuestas (Box y Wilson, 1951), la cual incluye nuevas familias de diseños y una estrategia para la experimentación secuencial.



INTRODUCCIÓN



- ★ Es posible afirmar que entre 1950 y 1980, el diseño de experimentos se convirtió en una herramienta de aplicación frecuente, pero sólo en las áreas de investigación y desarrollo.
- ★ Hasta la década de 1970, la aplicación a nivel planta o procesos de manufactura no estaba generalizada, debido a la falta de recursos computacionales y a que los ingenieros y especialistas en manufactura carecían de formación en el área de estadística.



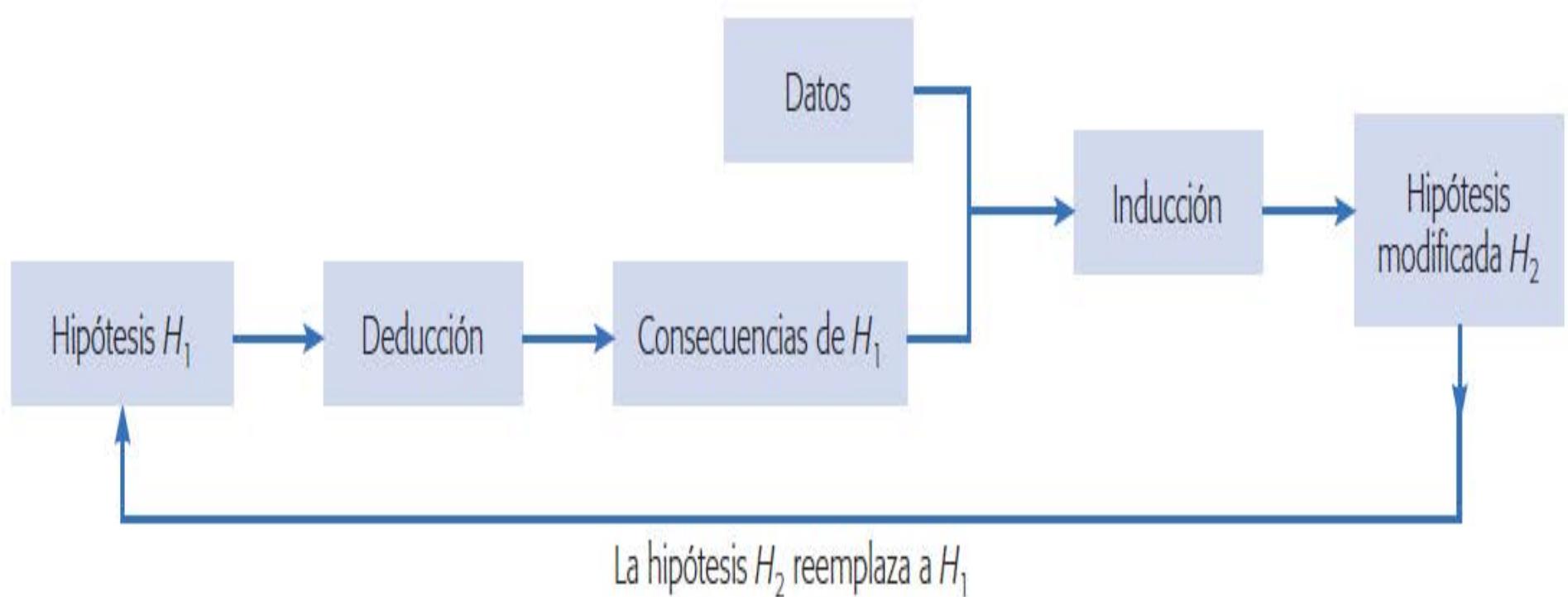


Figura 1.2 El proceso de generación de aprendizaje y conocimiento como un ciclo de retroalimentación.

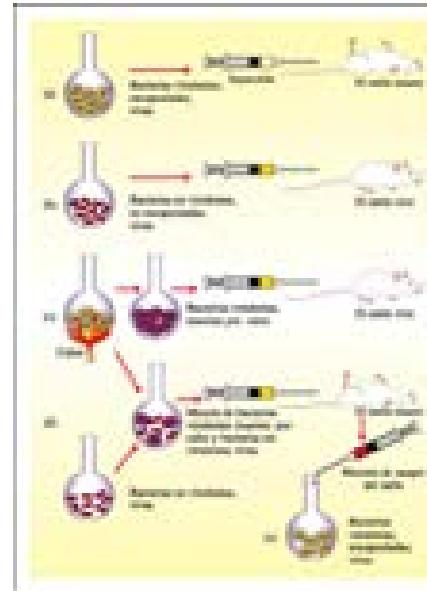
Fuente: Gutierrez Pulido (2008).



INTRODUCCIÓN

* EXPERIMENTO

- Es un cambio en las condiciones de operación de un sistema o proceso, que se hace con el objetivo de **medir el efecto del cambio en una o varias propiedades del producto o resultado.**
- Asimismo, el experimento permite aumentar el conocimiento acerca del sistema. Por ejemplo, en un proceso alimentario se pueden probar diferentes temperaturas y presiones, y medir el cambio observado en el rendimiento (yield, ppm, defectivo) del proceso. Al analizar los efectos (datos) se obtiene conocimiento acerca del proceso alimentario, lo cual permite mejorar su desempeño.

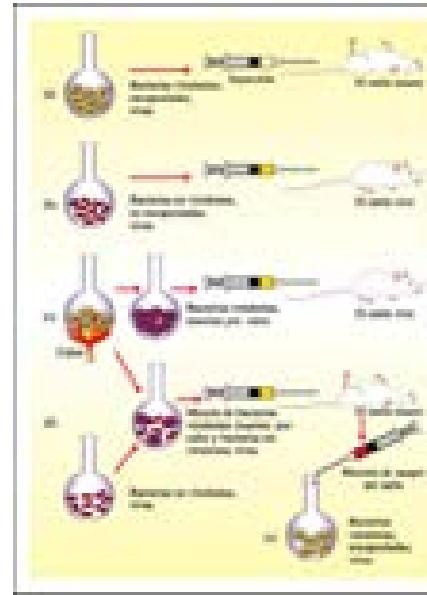


INTRODUCCIÓN

* UNIDAD EXPERIMENTAL

– Es la pieza(s) o muestra(s) que se utiliza para generar un valor que sea representativo del resultado del experimento o prueba.

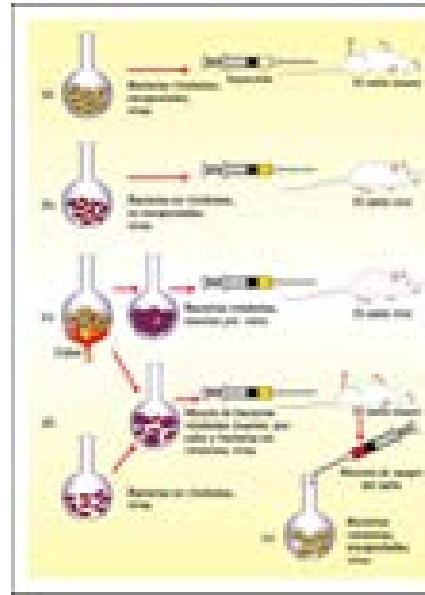
– En cada diseño de experimentos es importante definir de manera cuidadosa la unidad experimental, ya que ésta puede ser una pieza o muestra de una sustancia o un conjunto de piezas producidas, dependiendo del proceso que se estudia.



INTRODUCCIÓN

* UNIDAD EXPERIMENTAL

Por ejemplo, si se quiere investigar alternativas para reducir el porcentaje de piezas defectuosas, en un proceso que produce muchas piezas en un lapso corto de tiempo, es claro que no sería muy confiable que la unidad experimental fuera una sola pieza, en la cual se vea si en una condición experimental estaba defectuosa o no.



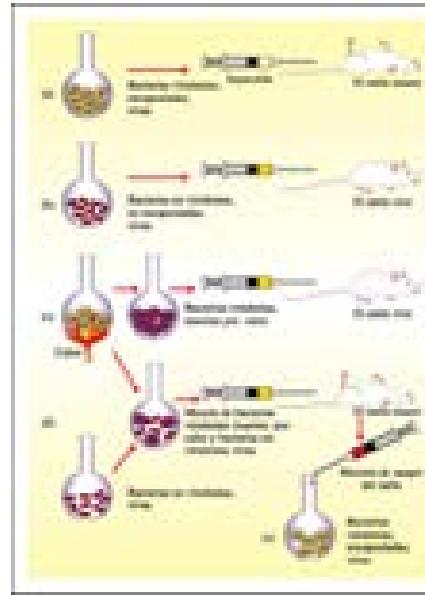
INTRODUCCIÓN

- * **VARIABLES, FACTORES Y NIVELES**

- En todo proceso intervienen distintos tipos de variables o factores
- A través de la **variable respuesta** se conoce el efecto o los resultados de cada prueba experimental.

- * **VARIABLE RESPUESTA**

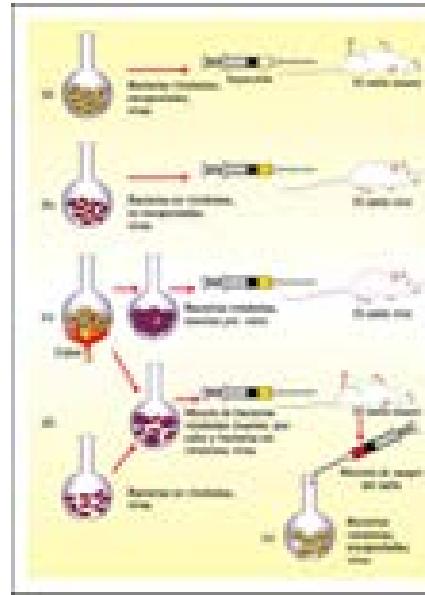
- A través de esta(s) variable(s) se conoce el efecto o los resultados de cada prueba experimental.

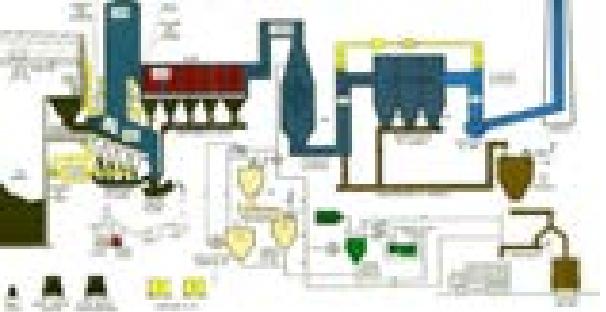


INTRODUCCIÓN

* DISEÑO DE EXPERIMENTOS

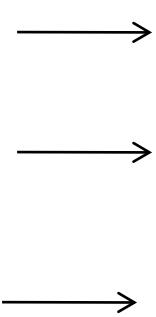
- Consiste en **planear** y **realizar** un **conjunto de pruebas** con el objetivo de generar datos que, al ser analizados estadísticamente, proporcionen evidencias objetivas que permitan responder las interrogantes planteadas por el experimentador.





Entrada

Factores controlables
Factores no controlables
Causas



Salida

Características de calidad o variable respuesta
Efectos

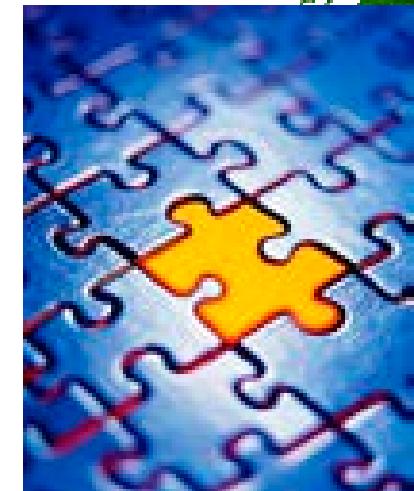
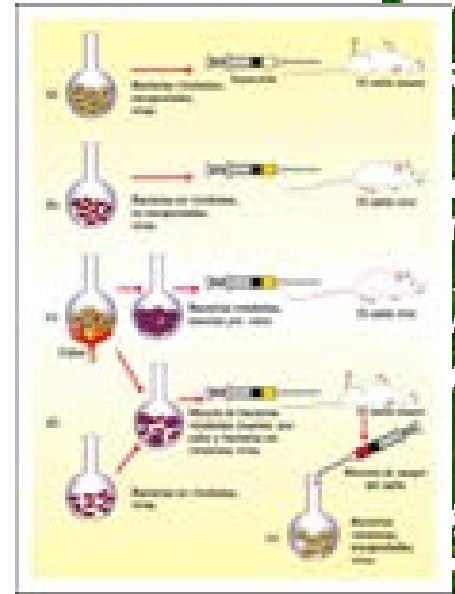


1. **¿Cuáles características de calidad se van a medir?**
2. **¿Cuáles factores controlables deben incluirse en el experimento?**
3. **¿Cuáles niveles debe utilizar cada factor?**
4. **¿Cuál diseño experimental es el adecuado?... Etc.**

INTRODUCCIÓN

* FACTORES CONTROLABLES

- Son variables de proceso o características de los materiales experimentales que se pueden fijar en un nivel dado.
- Algunos de éstos son los que usualmente se controlan durante la operación normal del proceso, y se distinguen porque, para cada uno de ellos, existe la manera o el mecanismo para cambiar o manipular su nivel de operación.
- Esto último es lo que hace posible que se pueda experimentar con ellos.



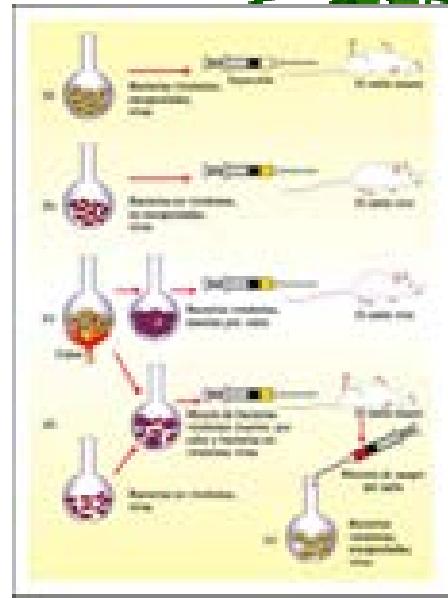
INTRODUCCIÓN

* FACTORES NO CONTROLABLES

– Son variables o características de materiales y métodos que no se pueden controlar durante el experimento o la operación normal del proceso.

– Por ejemplo, algunos factores que suelen ser no controlables son las variables ambientales (luz, humedad, temperatura, partículas, ruido, etc.), el ánimo de los operadores, la calidad del material que se recibe del proveedor (interno o externo).

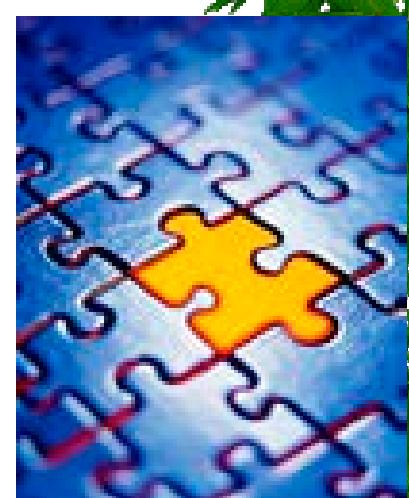
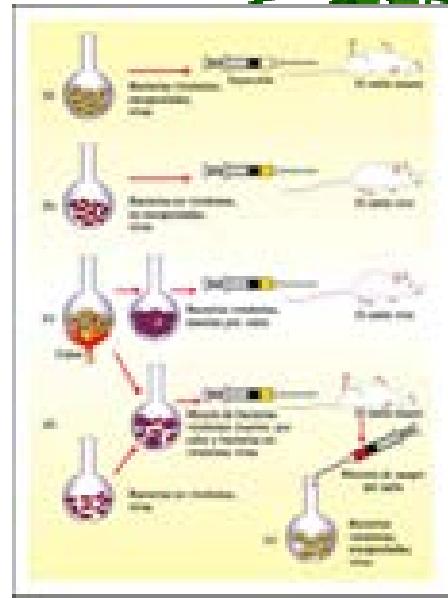
– Un factor que ahora es no controlable puede convertirse en controlable cuando se cuenta con el mecanismo o la tecnología para ello.



INTRODUCCIÓN

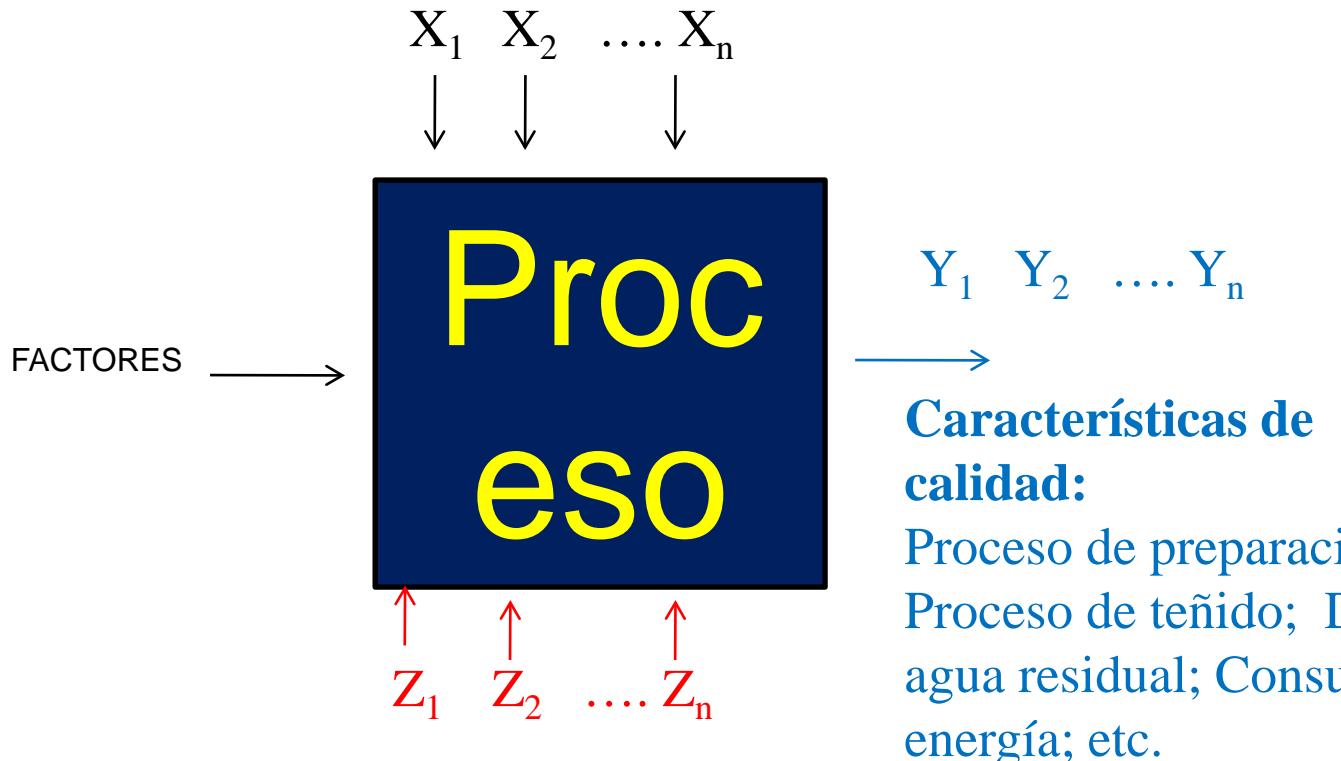
* NIVELES Y TRATAMIENTOS

- Los diferentes valores que se asignan a cada factor estudiado en un diseño experimental se llaman niveles.
- Una combinación de niveles de todos los factores estudiados se llama tratamiento o punto de diseño.
- Por ejemplo, si en un experimento se estudia la influencia de la velocidad y la temperatura, y se decide probar cada una en dos niveles, entonces cada combinación de niveles (velocidad, temperatura) es un tratamiento.



Factores de diseño (“fáciles” de controlar):

Agente de blanqueo; Controlador de la reacción; Jabonador;
Tiempo del blanqueo; etc.)



Factores de Ruido (“Difíciles” de controlar)

- Parámetros de calidad del proveedor
- Química de la materia prima
- Otras variables del proceso
- Variables ambientales

- Los cinco aspectos que más influyen en la selección de un diseño experimental, en el sentido de que cuando cambian por lo general nos llevan a cambiar de diseño, son:
 1. El **objetivo** del experimento.
 2. El **número de factores** a estudiar.
 3. El **número de niveles** que se prueban en cada factor.
 4. Los efectos que interesa investigar (**relación factores-respuesta**).
 5. El **costo** del experimento, **tiempo** y precisión deseada.



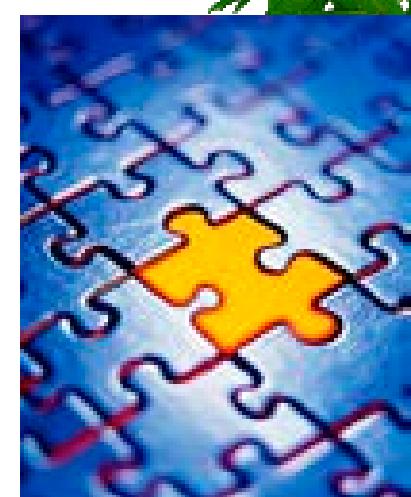
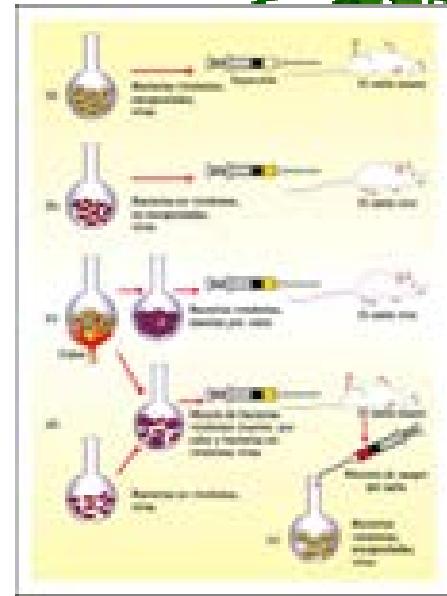
- El *objetivo del experimento* se utiliza como un criterio general de clasificación de los diseños experimentales, mientras que los otros cuatro puntos son útiles para sub-clasificarlos.
- En este sentido, de acuerdo con su objetivo y sin pretender ser exhaustivos, los diseños se pueden clasificar como:
 1. Diseños para comparar dos o más tratamientos.
 2. Diseños para estudiar el efecto de varios factores sobre la(s) respuesta(s).
 3. Diseños para determinar el punto óptimo de operación del proceso.
 4. Diseños para la optimización de una mezcla.
 5. Diseños para hacer el producto o proceso insensible a factores no controlables.



INTRODUCCIÓN

* ERROR ALEATORIO Y ERROR EXPERIMENTAL

- Siempre que se realiza un estudio experimental, parte de la variabilidad observada en la respuesta no se podrá explicar por los factores estudiados.
- Esto es, siempre habrá un remanente de variabilidad que se debe a causas comunes o aleatorias, que generan la variabilidad natural del proceso.
- Esta variabilidad constituye el llamado **error aleatorio**. Por ejemplo, será parte de este error aleatorio el pequeño efecto que tienen los factores que no se estudiaron, siempre y cuando se mantenga pequeño o despreciable, ...



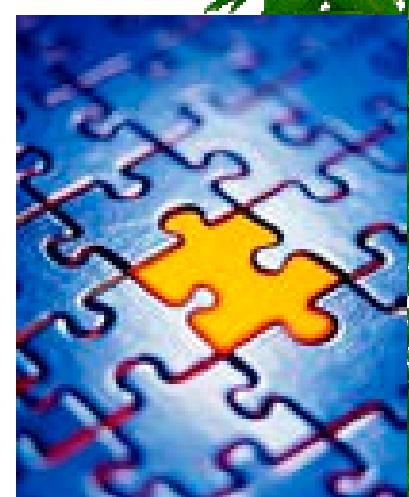
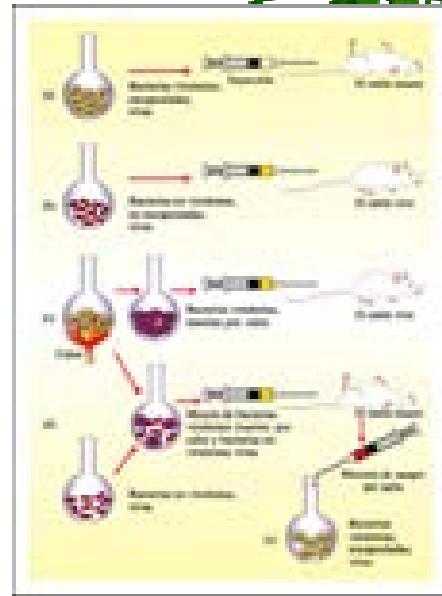
INTRODUCCIÓN

* ERROR ALEATORIO Y ERROR EXPERIMENTAL

– ... así como la variabilidad de las mediciones hechas bajo las mismas condiciones.

– Sin embargo, el **error aleatorio** también absorberá todos los errores que el experimentador comete durante los experimentos, y si éstos son graves, más que error aleatorio hablaremos de **error experimental**.

– De predominar éste, la detección de cuáles de los factores estudiados tienen un efecto real sobre la respuesta será difícil, si no es que imposible.

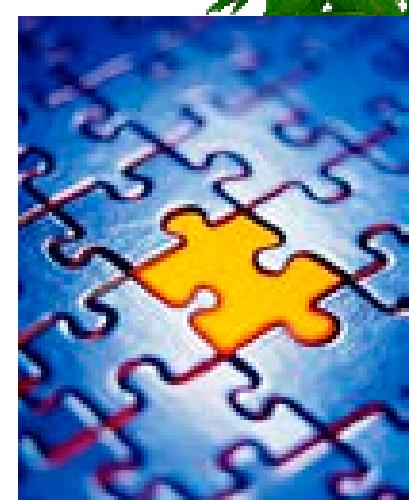
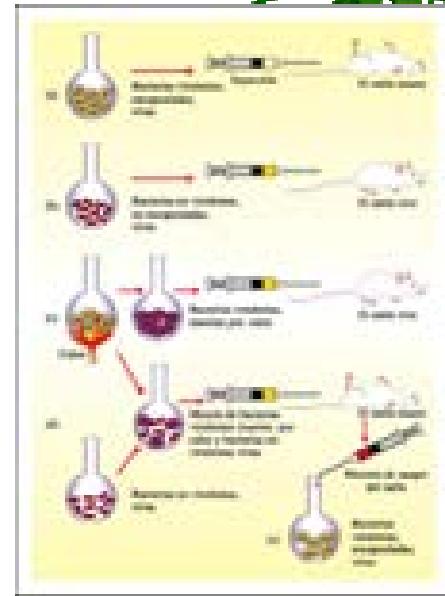


INTRODUCCIÓN

* ERROR ALEATORIO Y ERROR EXPERIMENTAL

– Cuando se corre un diseño experimental es importante que la variabilidad observada de la respuesta se deba **principalmente a los factores estudiados** y en menor medida al error aleatorio, y además que este error sea efectivamente aleatorio.

– Cuando la mayor parte de la variabilidad observada se debe a factores no estudiados o a un error no aleatorio, **no se podrá distinguir cuál es el verdadero efecto** que tienen los factores estudiados, con lo que el experimento no alcanzaría su objetivo principal.



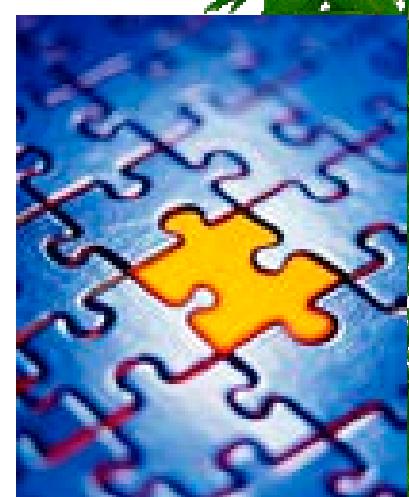
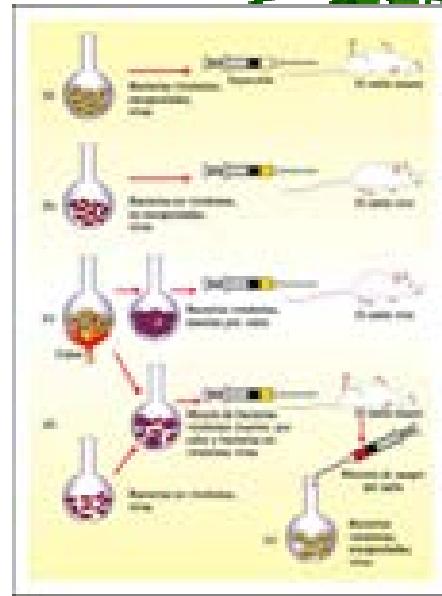
INTRODUCCIÓN

- * **ERROR ALEATORIO Y ERROR EXPERIMENTAL**

– De aquí la importancia de no dejar variar libremente a ningún factor que pueda influir de manera significativa sobre el comportamiento de la respuesta (principio de bloqueo).

- * **Error aleatorio:** Es la variabilidad observada que no se puede explicar por los factores estudiados; resulta del pequeño efecto de los factores no estudiados y del error experimental.

- * **Error experimental:** Componente del error aleatorio que refleja los errores del experimentador en la planeación y ejecución del experimento.



Análisis de datos en la ruta cuantitativa

Se realiza como base una matriz de datos construida en un programa computacional como: SPSS, Minitab, Stats, Excel, etc.

El análisis se efectúa considerando los niveles de medición de las variables y mediante la estadística, puede ser:

Util para:

- Estimar parámetros (generalizar a la población)
- Probar hipótesis

De los resultados se debe interpretar el valor y su significancia estadística



Técnicas de análisis estadístico según el número de variables

Univariado

Incluyen todas las técnicas que hace referencia a la descripción de una sola variable

Distribución de frecuencias

Medidas de tendencia central

- Media
- Mediana
- Moda

Medidas de variabilidad

- Mínimo
- Máximo
- Rango intercuartílico
- Varianza

- Desviación estandar
- Coeficiente de variación

Medidas de distribución

- Asimétrica
- Curtosis

Gráficos

- Polígono
- Diagrama de barras
- Circulares
- Histograma
- Tallo y hojas
- Diagrama de caja

Bivariado

Estudia aquellos sucesos en los que intervienen dos variables simultáneamente

Variables cualitativa

- Análisis de correspondencia simple

Medidas de asociación

- Chi-cuadrado de Pearson
- Corrección de Yate
- Coeficiente Phi
- Riesgo relativo
- Coeficiente de contingencia y la V de Cramer

● Coeficiente Kappa

- Gamma
- Tau-b de kendall
- Tau-c de Kendal
- D de Somers

Variables cuantitativas

- Correlación de Pearson
- Correlación de Spearman
- Asociación lineal de Mantel-Haenszel

Regresión bivariada



Atracción Textual
Asesores

Multivariado

Estudia aquellos sucesos en los que intervienen más de dos variables

Métodos de dependencia

- Métrica
- Regresión múltiple
- Análisis de supervivencia
- MANOVA
- Correlación canónica
- Análisis conjunto

No métrica

- Análisis discriminante
- Regresión logística
- Análisis canónico
- Análisis conjunto

Métodos de independencia

- Métrica
- Análisis de componentes principales

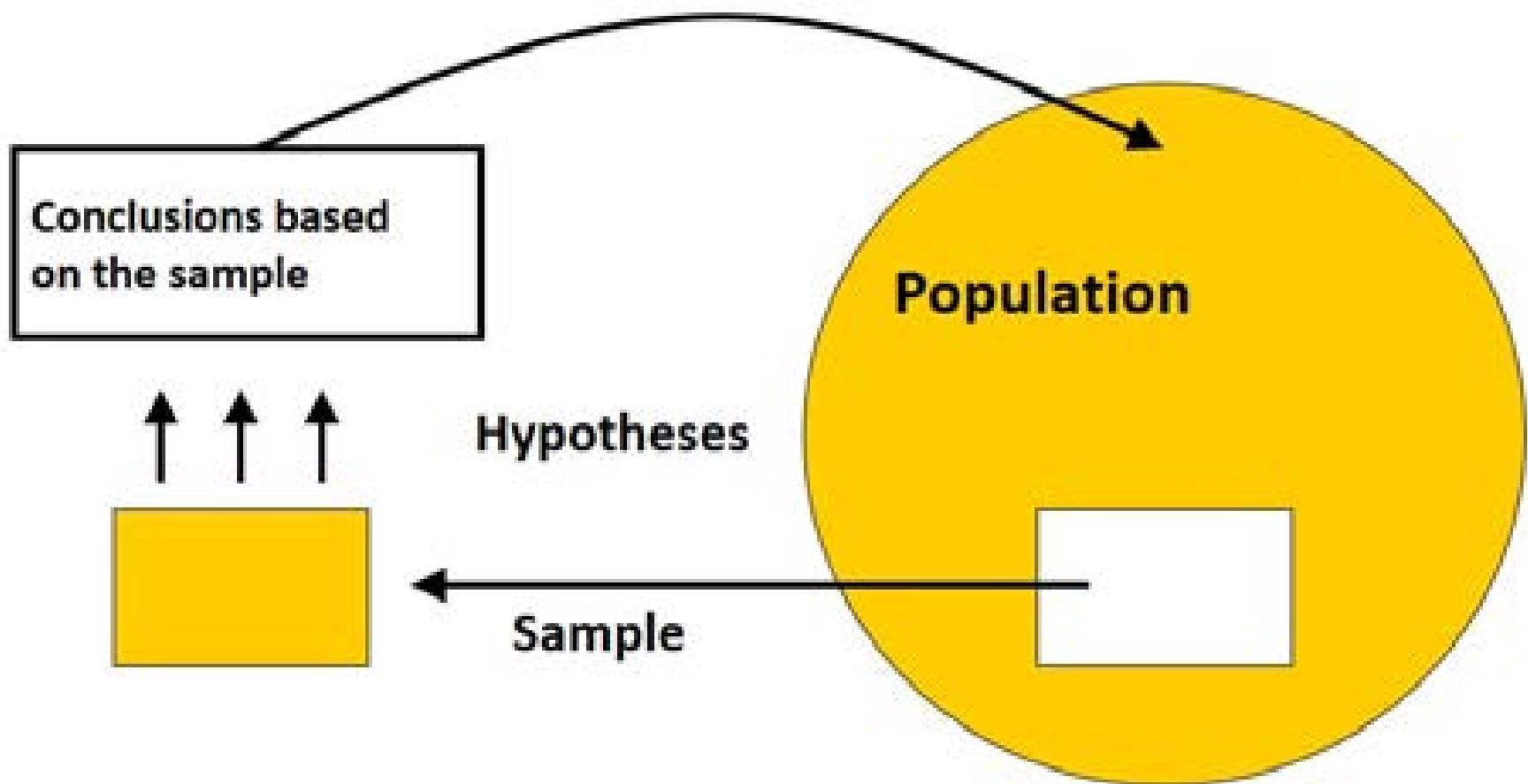
- Análisis factorial
- Escala multidimensional
- Análisis Cluster
- No métrica
- Análisis de correspondencia múltiple

- Modelos los-lineales
- Escala multidimensional
- Análisis cluster

Modelos estructurales

The idea of statistical inference

Generalisation to the population

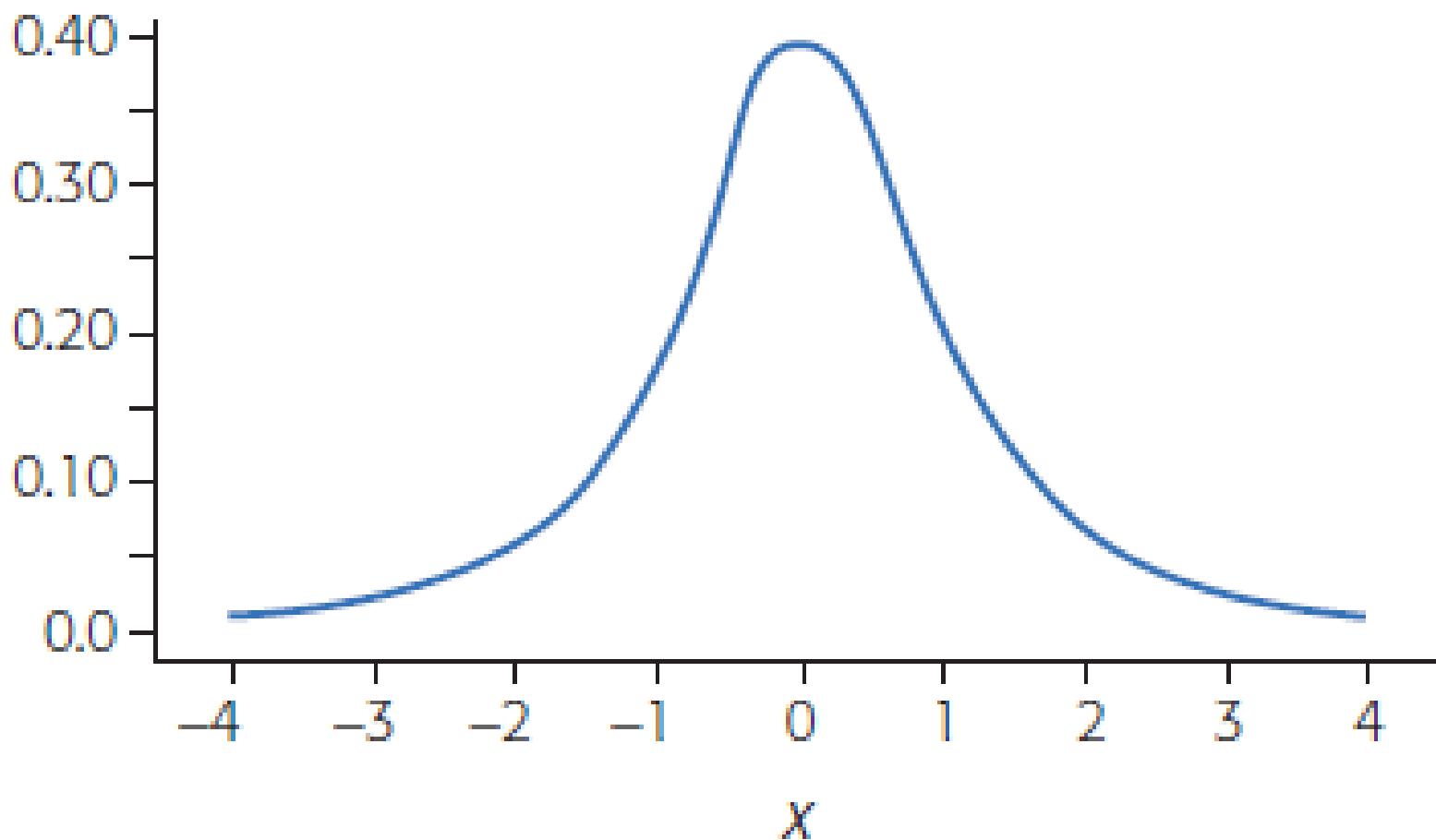


Distribuciones de probabilidad e inferencia

- La *distribución de probabilidad* o *distribución de una variable aleatoria X* relaciona el conjunto de valores posibles de X (rango de X), con la probabilidad asociada a cada uno de estos valores y los representa a través de una tabla o por medio de una función planteada como una fórmula.
- Las distribuciones de probabilidad que más se usan en intervalos de confianza y pruebas de hipótesis son las distribuciones: normal, T de *Student*, ji-cuadrada y F.
- La distribución normal está completamente definida por sus parámetros, que son la media, μ , y la desviación estándar, σ .
- Por ejemplo: la distribución normal con $\mu=0$ y $\sigma=1$, que se simboliza con $N(0, 1)$ y se conoce como la distribución normal estándar.



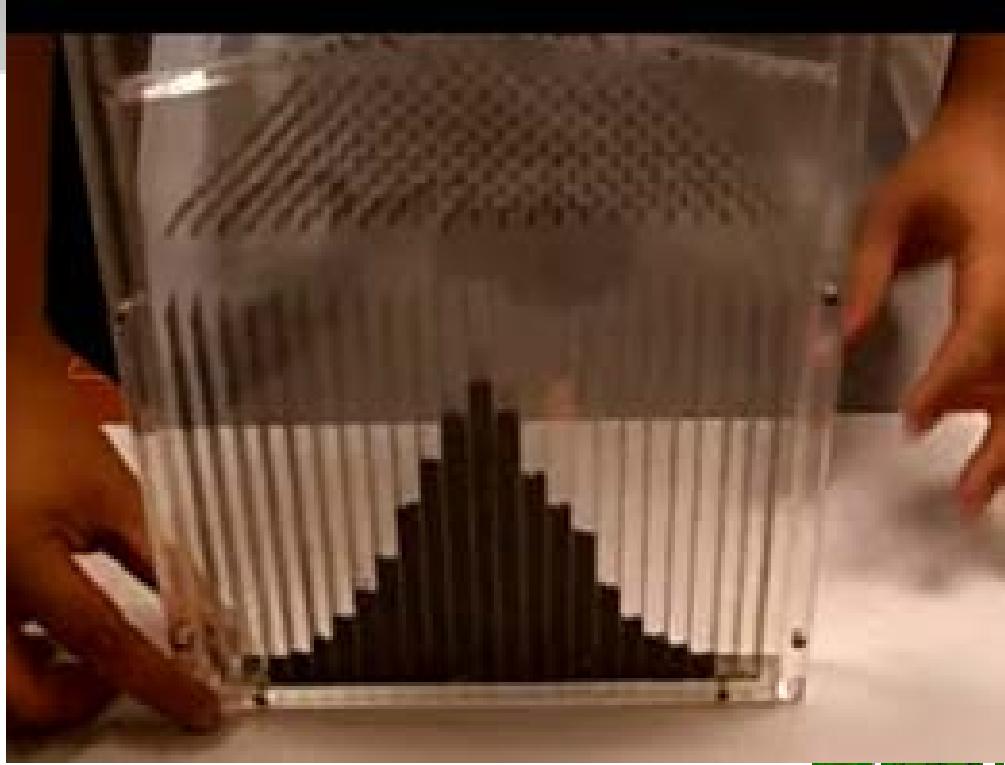
Normal estándar





GALTON BOARD

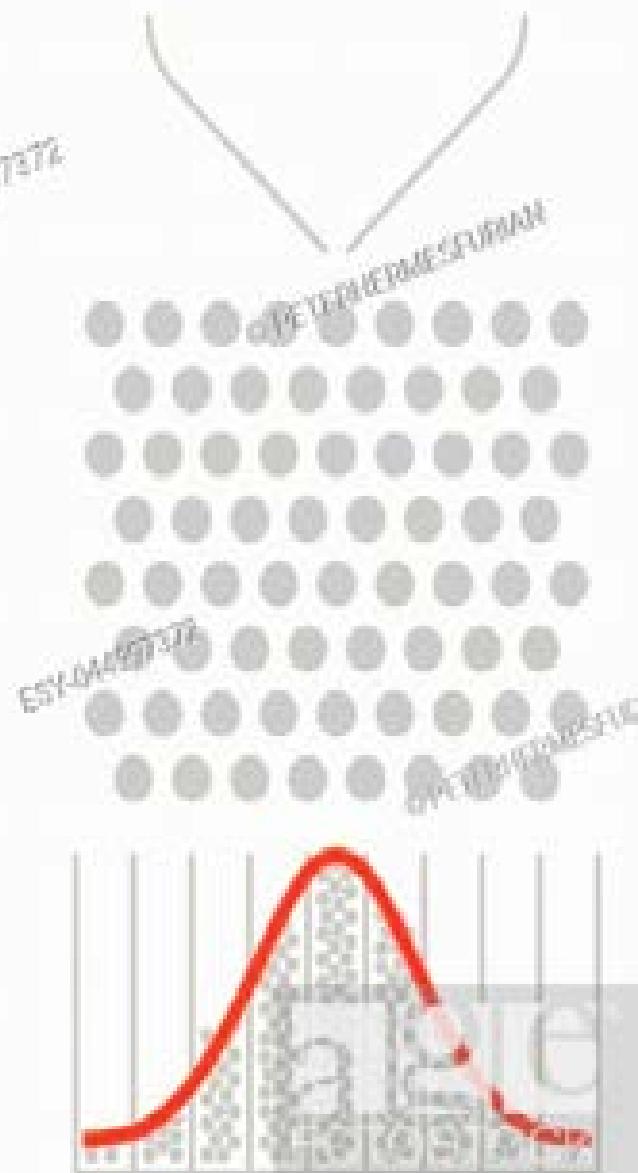
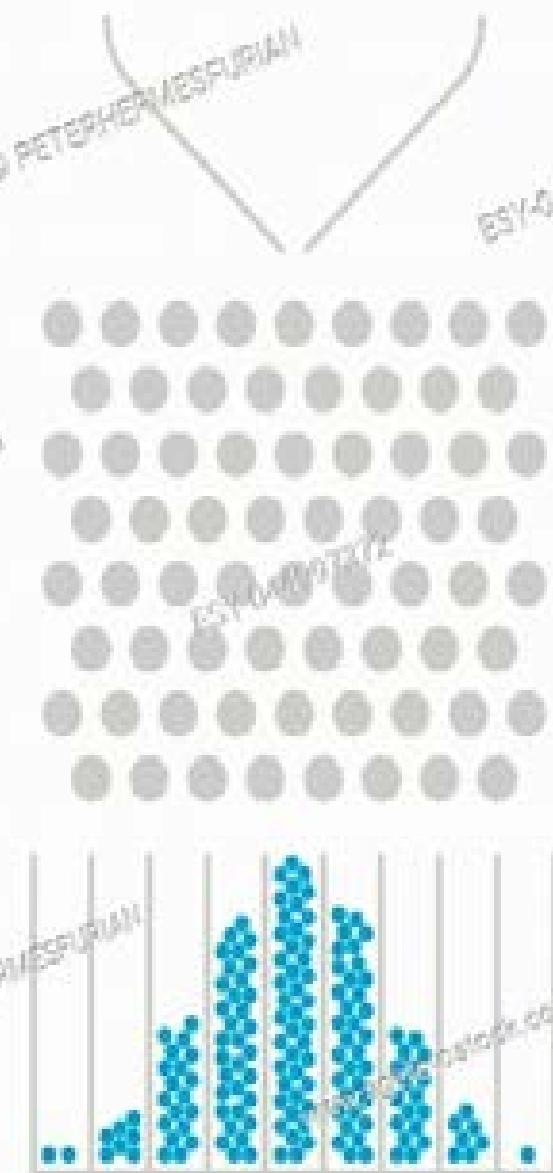
SCIENCE TOYS



https://www.youtube.com/watch?v=xDIyAOBa_yU



Máquina de Galton



Exploring Relationships in Body Dimensions

Grete Heinz

Loren J. Peterson
San José State University

Roger W. Johnson
South Dakota School of Mines and Technology

Carter J. Kirk
South Dakota School of Mines and Technology

Journal of Statistics Education Volume 11, Number 2 (2003), jse.amstat.org/v11n2/datasets.heinz.html

Copyright © 2003 by Grete Heinz, Loren J. Peterson, Roger W. Johnson, and Carter J. Kirk; all rights reserved. This text may be freely shared among individuals, but it may not be republished in any medium without express written consent from the author and advance notification of the editor.

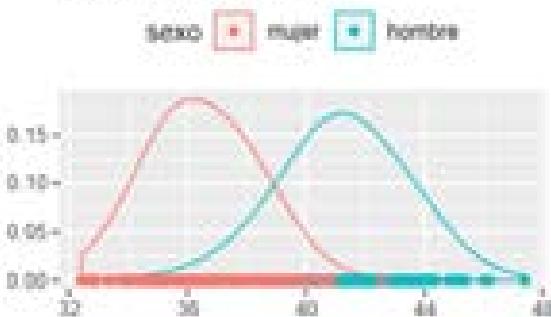
Key Words: Anthropometry; Discriminant analysis; Ergonomics; Forensic science; Multiple regression.

Abstract

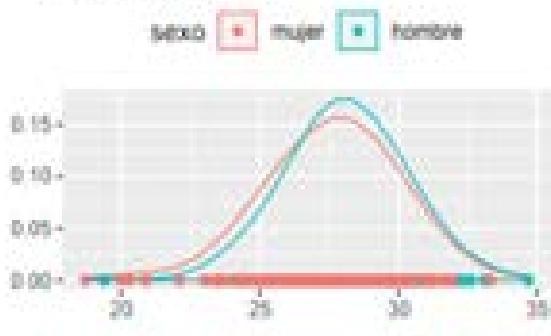
Body girth measurements and skeletal diameter measurements, as well as age, weight, height and gender, are given for 207 physically active individuals - 247 men and 260 women. These data can be used to provide statistics students practice in the art of data analysis. Such analyses range from simple descriptive displays to more complicated multi-variate analyses such as multiple regression and discriminant analysis.



Diametro Biacromial



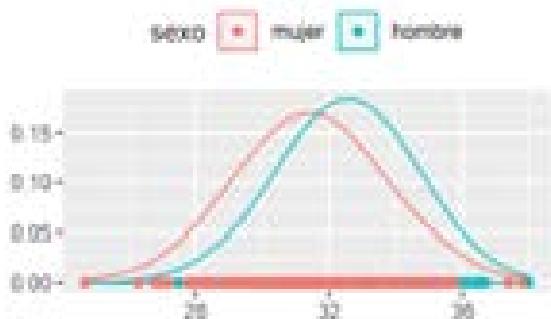
Anchura pelvis



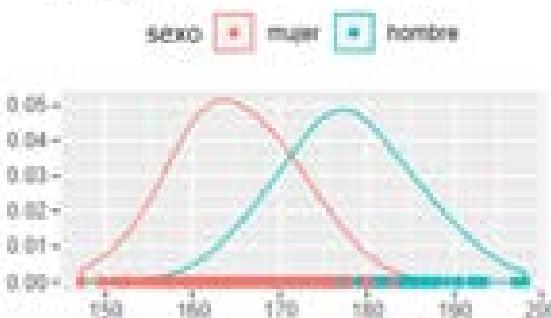
Perímetro torácico



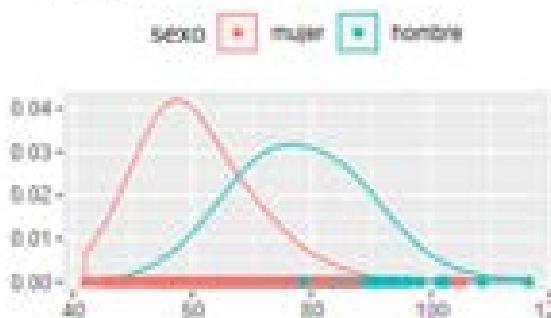
Profundidad del pecho



Altura



Peso



Circunferencia del hombro

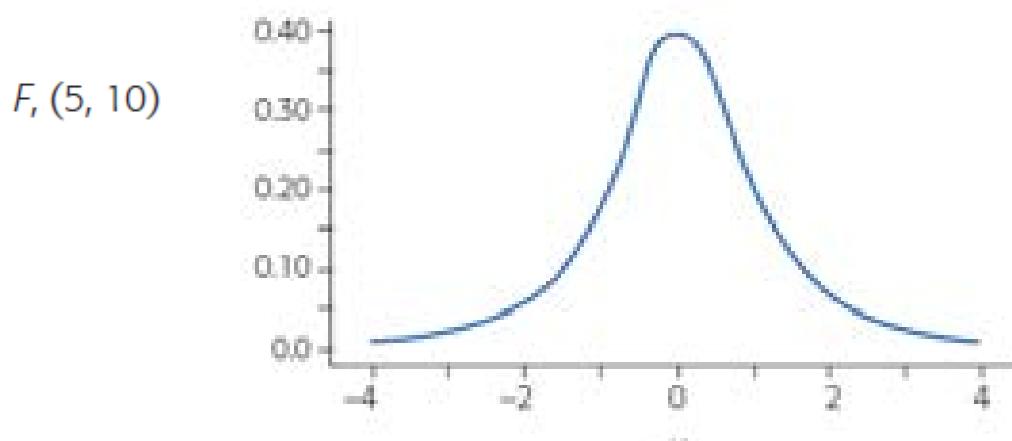
SEXO Mujer Hombre

Circunferencia del tobillo

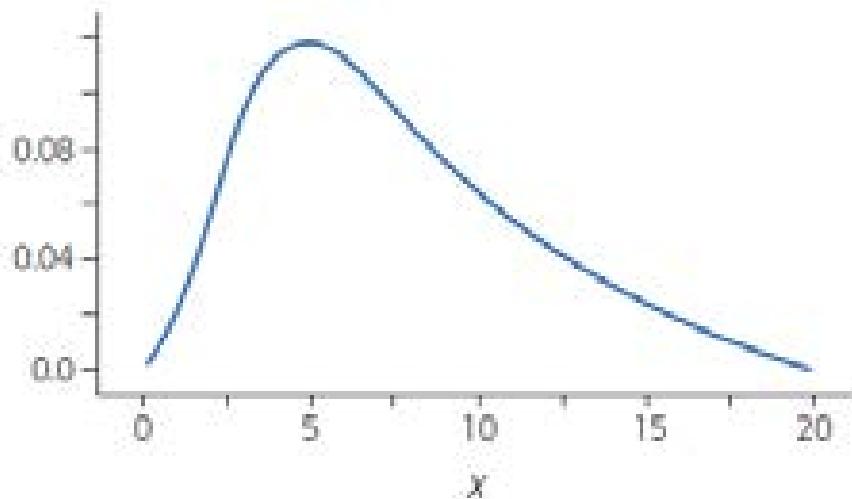
SEXO Mujer Hombre



T de Student, 5 g.l.



Ji-cuadrada, 10 g.l.



$F_t(5, 10)$

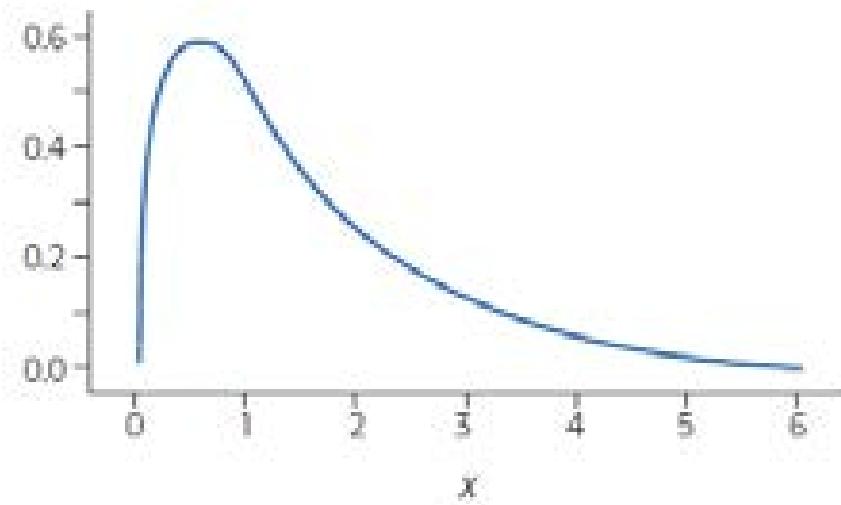


Figura 2.2 Muestra de las distribuciones de probabilidad de mayor uso en inferencia.

Estimación puntual y por intervalo



Estimación puntual

Un *estimador puntual* de un parámetro desconocido es un estadístico que genera un valor numérico simple, que se utiliza para hacer una estimación del valor del parámetro desconocido; por ejemplo, tres parámetros sobre los que con frecuencia se desea hacer inferencia son:

- La media μ del proceso (población).
- La varianza σ^2 o la desviación estándar σ del proceso.
- La proporción p de artículos defectuosos.

Los estimadores puntuales (estadísticos) más recomendados para estimar estos parámetros son, respectivamente:

- La media muestral $\hat{\mu} = \bar{X}$
- La varianza muestral $\hat{\sigma}^2 = S^2$.
- La proporción de defectuosos en la muestra, $\hat{p} = x/n$, donde x es el número de artículos defectuosos en una muestra de tamaño n .



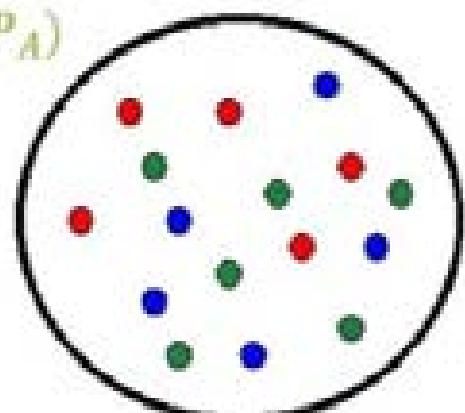
Estimar un parámetro poblacional mediante un estadístico que predice el valor de dicho parámetro.

$$\mu = \frac{\sum_{i \in N} x_i}{\sum_{i \in N} 1}$$

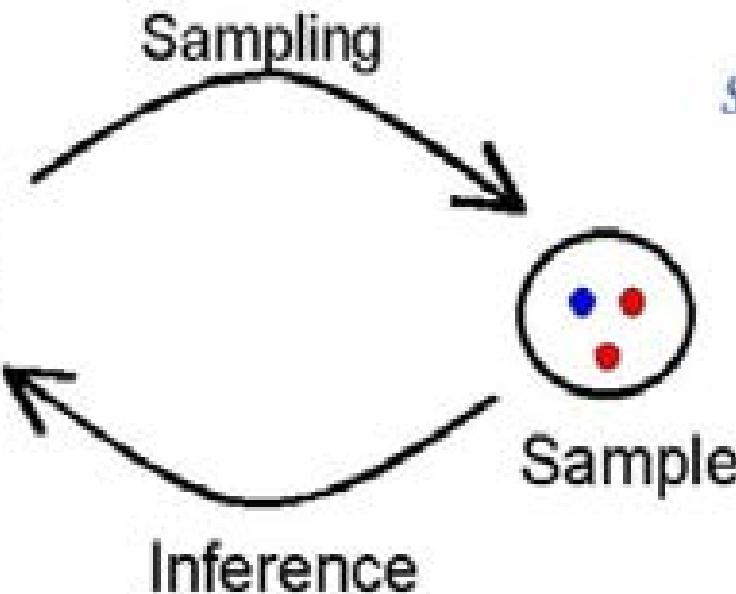
$$p_A = \frac{\text{casos de categoría A en } N}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i \in N} (x_i - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = P_A(1 - P_A)$$



Population (or Experiment)



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i \in n} x_i}{\sum_{i \in n} 1}$$

$$p_A = \frac{\text{casos de categoría A en } n}{n}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i \in n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$s^2 = \frac{n \hat{p}_A (1 - \hat{p}_A)}{n - 1}$$

Estimación por intervalo

- La estimación puntual de un parámetro se genera a través de un estadístico, y como el valor de éste es aleatorio porque depende de los elementos que fueron seleccionados en la muestra, entonces la estimación que se hace sobre el parámetro dependerá y variará de una muestra a otra.
- De esta forma, cuando se quiere tener mayor certidumbre sobre el verdadero valor del parámetro poblacional, será necesario obtener la información sobre qué tan precisa es la estimación puntual.



Estimación por intervalo

- Así, la estimación puntual dirá poco sobre el parámetro cuando la variación entre una estimación y otra es muy grande.
- Una forma de saber qué tan variable es el estimador, consiste en calcular la desviación estándar o error estándar del estadístico, visto como una variable aleatoria.
- La longitud del intervalo de confianza es una medida de la precisión de la estimación.
- **De aquí que es deseable que la longitud de los intervalos sea pequeña y con alto nivel de confianza.**
- El ancho de los intervalos es mayor a medida que sea mayor la varianza de la población y el nivel de confianza exigido. El ancho del intervalo es menor si se incrementa el tamaño de la muestra.



Intervalo de confianza para una media

Por definición de *intervalo de confianza* se trata de encontrar dos números L y U , tales que el parámetro μ se encuentre entre ellos con una probabilidad de $1 - \alpha$.

El cual sigue una distribución T de *Student* con $n - 1$ grados de libertad. Por lo tanto, en la tabla de esta distribución o en su gráfica se pueden ubicar dos valores críticos $t_{\alpha/2}$ y $-t_{\alpha/2}$, tales que:

$$P\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

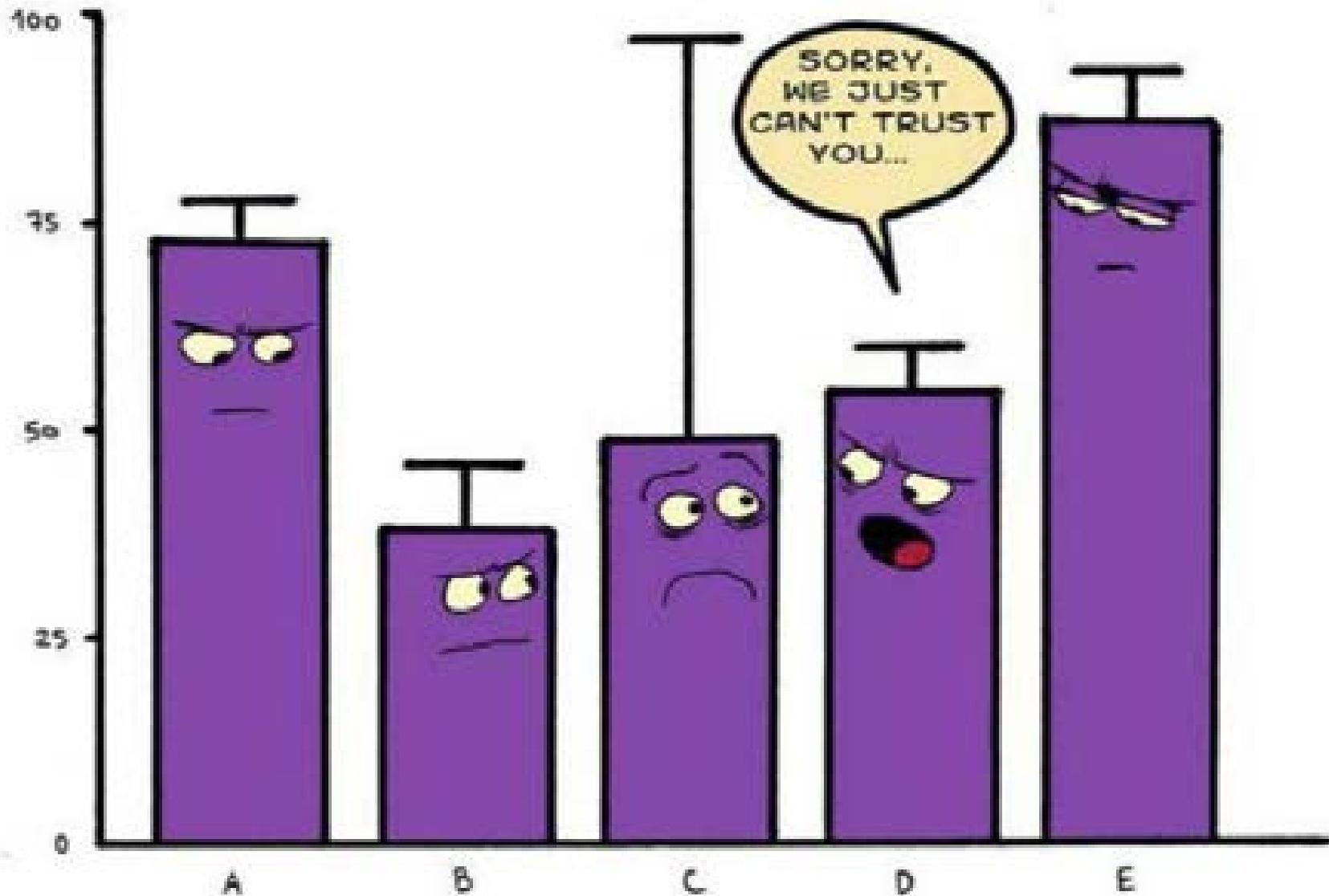
$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Intervalo para la varianza

En particular, para construir un intervalo de confianza para la varianza σ^2 , la distribución de referencia es una ji-cuadrada con $n - 1$ grados de libertad, ya que bajo el supuesto de que la variable de interés tiene una distribución normal con media y varianza desconocidas, el estadístico $(n - 1)S^2/\sigma^2$ sigue la distribución ji-cuadrada con $n - 1$ grados de libertad.

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}$$

Precisión



Conceptos básicos de prueba de hipótesis



Un estudio experimental o una investigación, por lo general tiene como último objetivo, responder en forma segura ciertas preguntas y/o tomar decisiones. En este contexto, el experimentador tiene *a priori* ciertas creencias o hipótesis que desea comprobar. Por ejemplo:

- El porcentaje de un ingrediente “x” afecta el resultado de la mezcla.
- Una fruta cultivada en diferentes pisos ecológicos tiene diferente contenido de un metabolito secundario.
- Si aumentamos la cantidad de reactivo “y” se mejora la extracción de un compuesto bioactivo.



Planteamiento de una hipótesis estadística



- Una *hipótesis estadística* es una afirmación sobre los valores de los parámetros de una población o proceso, que es susceptible de probarse a partir de la información contenida en una muestra representativa que es obtenida de la población.
- Por ejemplo, la afirmación “este proceso produce menos de 8% de defectuosos” se puede plantear estadísticamente, en términos de la proporción p desconocida de artículos defectuosos que genera el proceso, como se hace a continuación.

$H_0 : p = 0.08$ (la proporción de defectuosos es 0.08)

$H_A : p < 0.08$ (la proporción es menor a 0.08)

- En general, la estrategia a seguir para **probar una hipótesis es suponer que la hipótesis nula es verdadera**, y que en caso de ser rechazada por la evidencia que aportan los datos, se estará aceptando la hipótesis alternativa.
- Así, en el caso de las proporciones, la afirmación que se desea probar se aceptará como cierta, sólo en caso de rechazar la hipótesis nula.

$H_0 : p = 0.08$ (la proporción de defectuosos es 0.08)

$H_A : p \neq 0.08$ (la proporción es diferente a 0.08)

Estadístico de prueba



- Probar una hipótesis consiste en investigar si lo afirmado por la hipótesis nula es verdad o no.
- La estrategia de prueba parte del supuesto de que H_0 es verdadera, y si los resultados de la investigación contradicen en forma suficiente dicho supuesto, entonces se rechaza H_0 y se acepta la hipótesis alternativa.
- En caso de que los resultados de la investigación no demuestren claramente la falsedad de H_0 , ésta no se rechaza.
- Es decir, *la hipótesis nula es verdadera mientras no se demuestre lo contrario.*



Criterio de rechazo

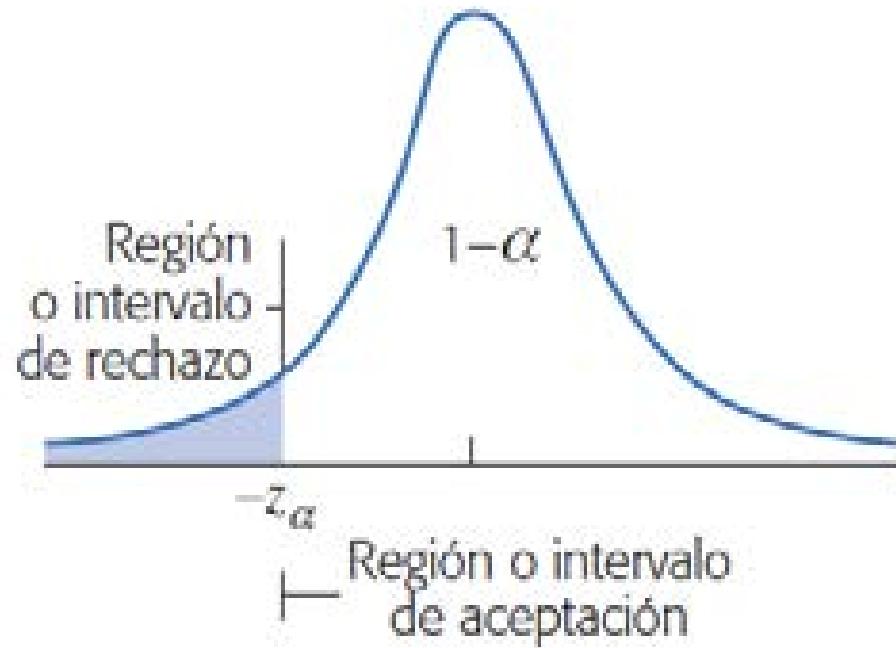


- El estadístico de prueba, construido bajo el supuesto de que H_0 es verdad, es una variable aleatoria con distribución conocida.
- Si efectivamente H_0 es verdad, el valor del estadístico de prueba debería caer dentro del rango de valores más probables de su distribución asociada, el cual se conoce como *región de aceptación*.
- Si cae en una de las colas de su distribución asociada, fuera del rango de valores más probables (en la región de rechazo), es evidencia en contra de que este valor pertenece a dicha distribución.
- **De aquí se deduce que debe estar mal el supuesto bajo el cual se construyó, es decir, H_0 debe ser falsa.**





$$H_0 : p = 0.08$$
$$H_A : p < 0.08$$



$$H_0 : p = 0.08$$
$$H_A : p \neq 0.08$$

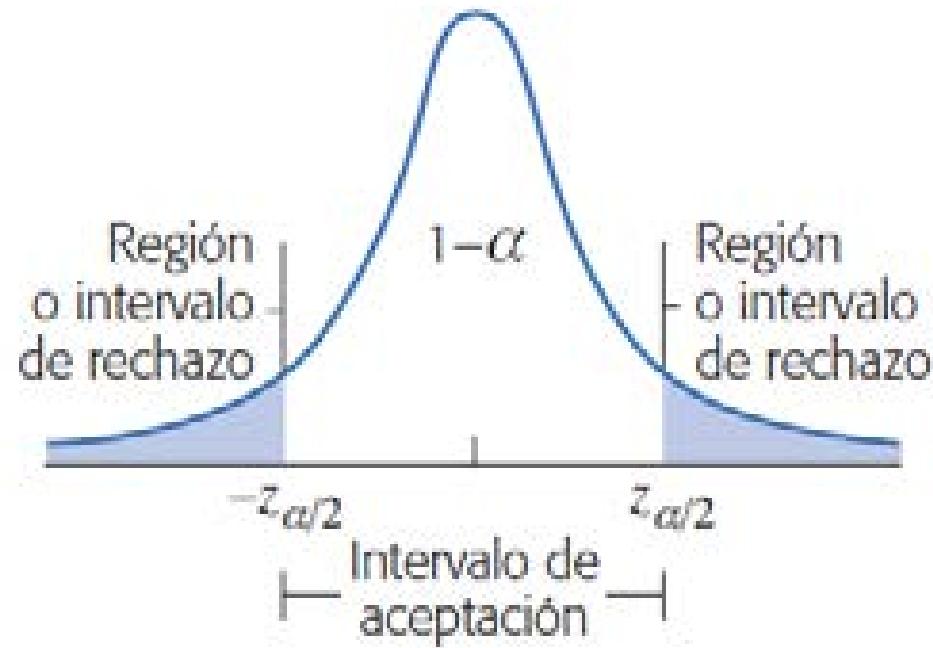


Figura 2.3 Hipótesis unilateral y bilateral, regiones de aceptación y rechazo.



El riesgo de una decisión equivocada: errores tipo I y tipo II

$\alpha = P\{\text{error tipo I}\}$ = probabilidad de rechazar H_0 siendo verdadera
 $\beta = P\{\text{error tipo II}\}$ = probabilidad de aceptar H_0 siendo falsa

A “ α ” también se le conoce como la *significancia dada de la prueba* y es la probabilidad de la región o intervalo de rechazo; su valor se especifica por parte del investigador desde que planea el estudio.

Por lo general se utilizan los valores “ α ” = 0.05 o 0.01, dependiendo del riesgo que se quiera admitir en la conclusión.

- Mientras más pequeño es el valor de “ α ” se requiere más evidencia en los datos para rechazar H_0 .
- Por ejemplo, si la acción a tomar después de rechazar H_0 implica una inversión fuerte de recursos, se recomienda utilizar $\alpha = 0.01$ para tener mayor confianza de que la decisión será la adecuada.
- Utilizar $\alpha = 0.05$ significa que por cada 100 veces independientes que se aplica el procedimiento y se rechaza H_0 , se espera que en un promedio de 95 veces, tal decisión sea la correcta.



- La probabilidad de *error tipo II* se controla de manera indirecta con el tamaño de la muestra, ya que a más datos β será menor.
- En otras palabras, con una muestra grande es mayor la *potencia de la prueba*, es decir, se incrementa la probabilidad de rechazar H_0 si ésta es falsa.



Error tipo I

Es cuando se rechaza una H_0 que es verdadera.



Error tipo II

Es cuando se acepta una H_0 que es falsa.



Potencia de la prueba

Es la probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa.

Types of errors

		Truth	
		No diff	Diff
Decision based on the <i>p</i> value	H ₀ not rejected	H ₀ to be not rejected	H ₀ to be rejected (H ₁)
	No diff	Right decision 1- α	β Type II error
	H ₀ rejected (H ₁)	α Type I error	Right decision 1- β
	Diff		

- H₀ is “true” but rejected: Type I or α error
- H₀ is “false” but not rejected: Type II or β error

- **Por lo tanto, el error Tipo I (falso positivo) es peor que un error Tipo II (falso negativo).**
- La razón se reduce a la idea que si se mantiene el *status quo* o asunción por defecto, al menos no se estará haciendo las cosas peor.



**¿Qué es “peor”: un inocente
preso o un culpable libre?**





The Person is

		Innocent	Guilty
The Judge Says	Innocent	No Error	Type 2 error
	Guilty	Type 1 error	No Error



Fórmula de Blackstone

- En el derecho penal la **fórmula de Blackstone** (también conocida como **ratio de Blackstone**) es un principio que establece que: “*es mejor que diez personas culpables escapen a que un inocente sufra*”.



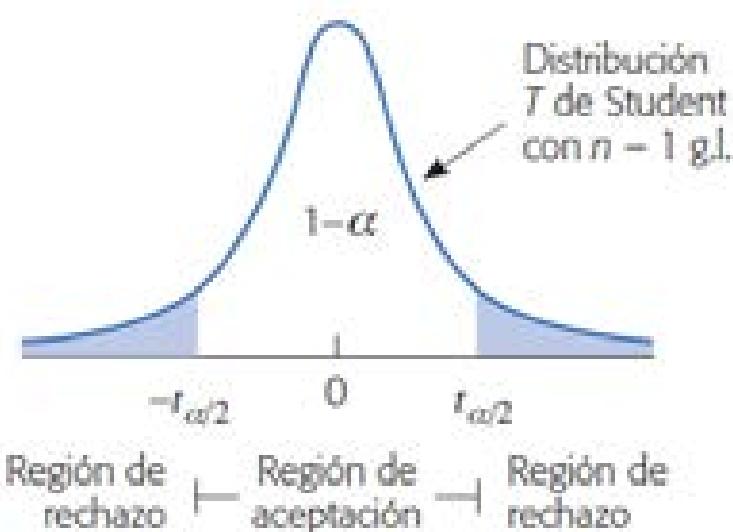


Nula	Error tipo I: H_0 verdadero, pero rechazado	Error tipo II: H_0 falso, pero no rechazado
Medicina A no alivia la Condición B.	Medicina A no alivia la Condición B, pero no se elimina como opción de tratamiento.	Medicina A alivia la Condición B, pero es eliminada como opción de tratamiento.
Consecuencias	Los pacientes con Condición B, que reciben la medicina A no se alivian. Pueden experimentar empeoramiento y/o efectos secundarios hasta incluso morir. Posible litigio.	Un tratamiento viable permanece inaccesible a pacientes con Condición B. Se pierden los costes del desarrollo. Provecho potencial eliminado.

- La *significancia predefinida* que se denota con “ α ”, es el riesgo máximo que el experimentador está dispuesto a correr por rechazar H_0 indebidamente (error tipo I).
- Mientras que la *significancia observada* o *calculada*, también conocida como *p-value* o valor- p , es el área bajo la distribución de referencia más allá del valor del estadístico de prueba.



$$\text{valor-}p = P(T < -t_0) + P(T > +t_0)$$



- En la práctica **suele ser más delicado cometer el error tipo I que el error tipo II**, debido a que en la mayoría de las hipótesis el rechazar H_0 implica objetar algo que se acepta de manera convencional.
- **No rechazar H_0 implica, en muchos casos, seguir como “hasta ahora”.**
- Por lo anterior, es común que se controle sólo el error tipo I, mientras que el error tipo II se deja libre como si su magnitud no importara.
- Lo cierto es que **el error tipo II también importa y la magnitud de su probabilidad debe ser pequeña** (se recomienda $\beta = 0.10$).
- El problema es que controlar a β tiene varios problemas; por ejemplo, muchas veces se requieren **grandes tamaños muestrales o se deben realizar muchas repeticiones en el experimento**.



**Significancia observada
frente a significancia
predefinida**



- La *significancia predefinida* que se denota con “ α ”, es el riesgo máximo que el experimentador está dispuesto a correr por rechazar H_0 indebidamente (error tipo I).
- Mientras que la *significancia observada* o *calculada*, también conocida como *p-value* o **valor-p**, es el área bajo la distribución de referencia más allá del valor del estadístico de prueba.
- De lo anterior se desprende que H_0 se rechaza **si la significancia observada es menor que la significancia dada**, o sea, si $\text{valor-}p < \alpha$.





- Con este criterio se puede ver como la probabilidad o evidencia a favor de H_0 , **por lo tanto, representa una medida de la contundencia con la que se rechaza o no la hipótesis nula.**
- Por ejemplo, si la significancia observada o valor-p es igual a 0.0001, entonces sólo hay una probabilidad a favor de H_0 de 0.0001, por lo que se rechazaría la hipótesis nula con un riesgo tipo I de 0.0001, **que es menor del que se está dispuesto a admitir, típicamente $\alpha = 0.05$.**

P-VALUE	INTERPRETATION
0.001	HIGHLY SIGNIFICANT
0.01	HIGHLY SIGNIFICANT
0.02	HIGHLY SIGNIFICANT
0.03	HIGHLY SIGNIFICANT
0.04	SIGNIFICANT
0.049	SIGNIFICANT
0.050	OH CRAP. REDO CALCULATIONS.
0.051	ON THE EDGE OF SIGNIFICANCE
0.06	ON THE EDGE OF SIGNIFICANCE
0.07	HIGHLY SUGGESTIVE, SIGNIFICANT AT THE $p < 0.10$ LEVEL
0.08	HIGHLY SUGGESTIVE, SIGNIFICANT AT THE $p < 0.10$ LEVEL
0.09	HIGHLY SUGGESTIVE, SIGNIFICANT AT THE $p < 0.10$ LEVEL
0.099	HEY, LOOK AT THIS INTERESTING SUBGROUP ANALYSIS!
≥ 0.1	THIS INTERESTING SUBGROUP ANALYSIS!

- En el mundo ideal, podríamos definir una muestra "perfectamente" aleatoria, la prueba más adecuada y una conclusión definitiva. Simplemente esa situación no podemos lograrla.
- Lo que podemos hacer es intentar optimizar todas las etapas de nuestra investigación para minimizar las fuentes de incertidumbre.
- Al presentar los valores de P, a algunos grupos les resulta útil utilizar el sistema de clasificación de asteriscos además de citar el valor de P:

P < 0.05 *

P < 0.001 ***

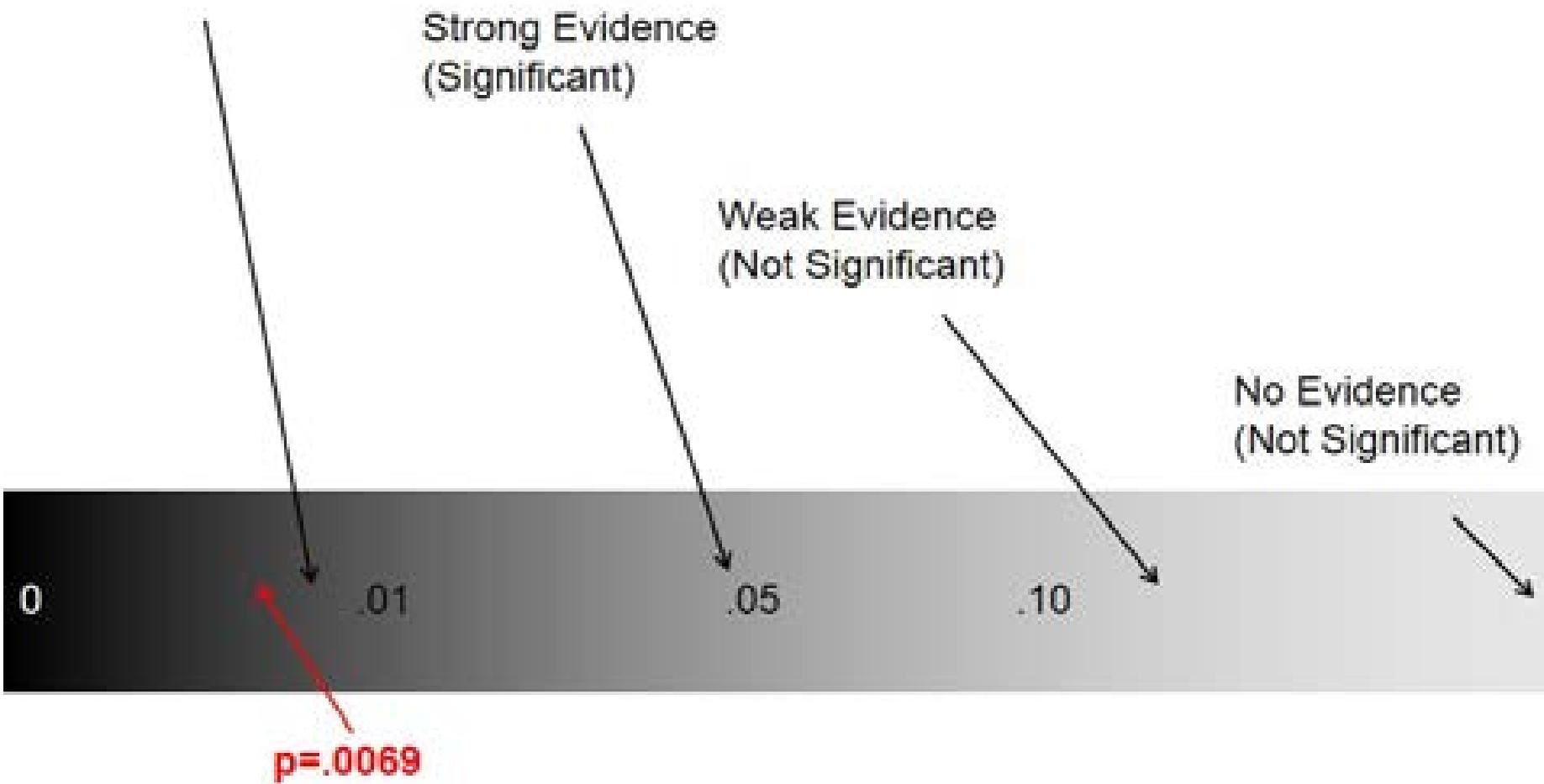
P < 0.01 **

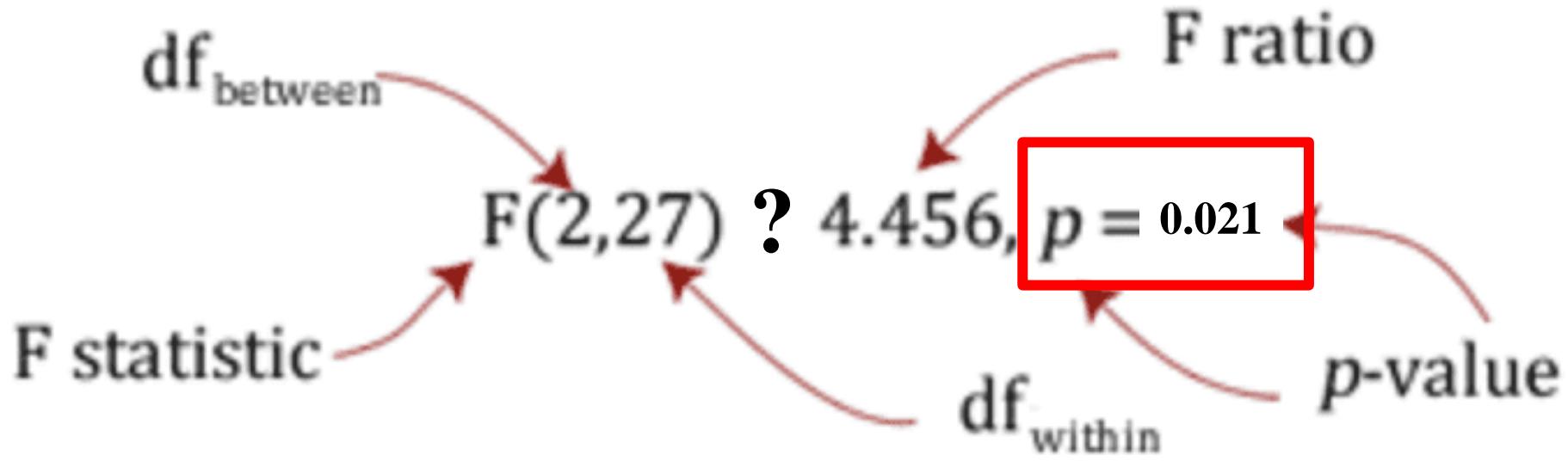
P > 0.05 n.s.



Interpreting the p-value...

Overwhelming Evidence
(Highly Significant)





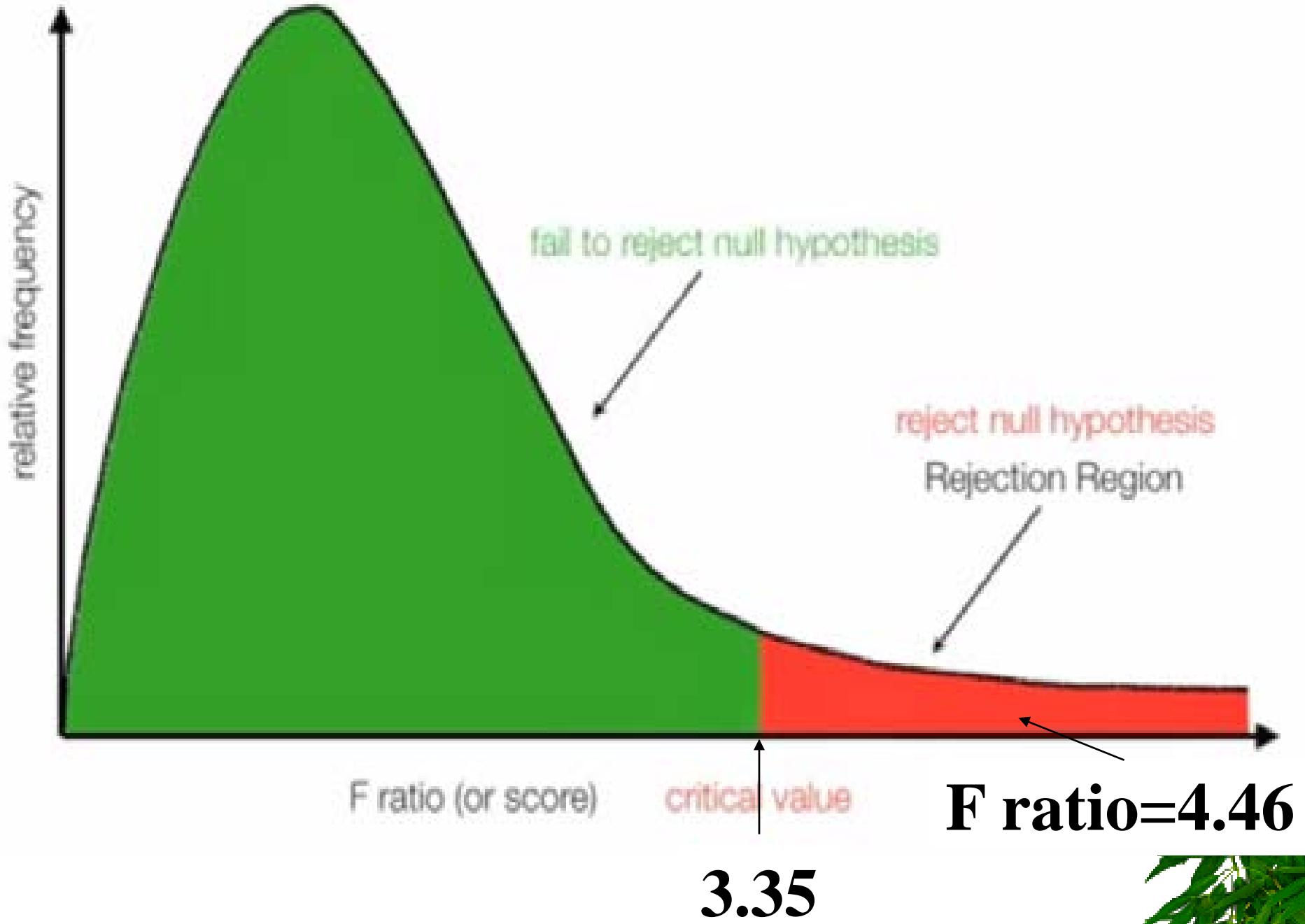
- “Detectamos una diferencia estadísticamente significativa entre los grupos mediante el ANOVA de una vía ($F (2,27) = 4,467, p = 0,021$)”
- “dF-between” son los grados de libertad del “factor”.
- “dF-within” son los grados de libertad del “error”.

$F_{0.05, v_1, v_2}$

v_1	Grados de libertad del numerador (v_1)																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
v_2	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65

$F_{0.05, v_1, v_2}$

v_1	Grados de libertad del numerador (v_1)																		
v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94													
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16													
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95													
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28													
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87													
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58													
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37													
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22													
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09													
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00													
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92													
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85													
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79													
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74													
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70													
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66													
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.40	2.42	2.40	2.31	2.23	2.10	2.11	2.07	2.03	1.90	1.83	1.00
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65





QuickCalcs

[1. Select category](#)[2. Choose calculator](#)[3. Enter data](#)[4. View results](#)

P Value Results

F=4.456 DFn=2 DFd=27

The P value equals 0.0213

By conventional criteria, this difference is considered to be statistically significant.

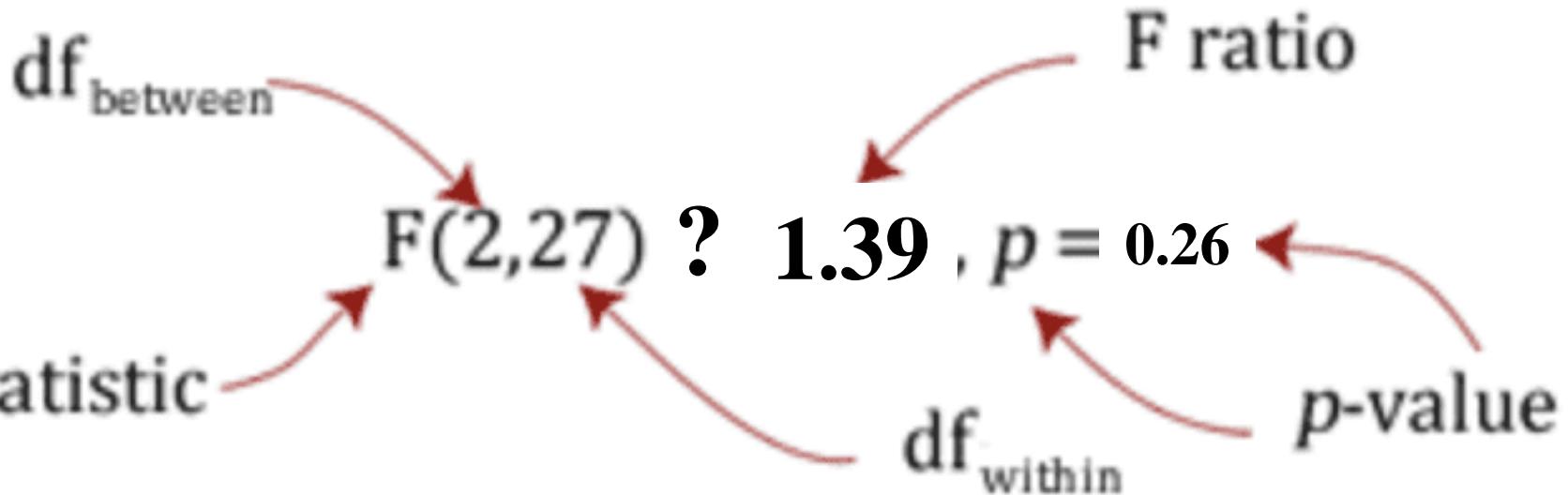
Be sure you didn't accidentally mix up the two degrees of freedom. If you did so, the P value is not correct.

Adapted from Javascript written by John C. Pezzullo, PhD, Associate Professor, Pharmacology and Biostatistics Georgetown University Medical Center, and used with permission. The algorithms came from [Handbook of Math Functions](#) by Abramowitz.



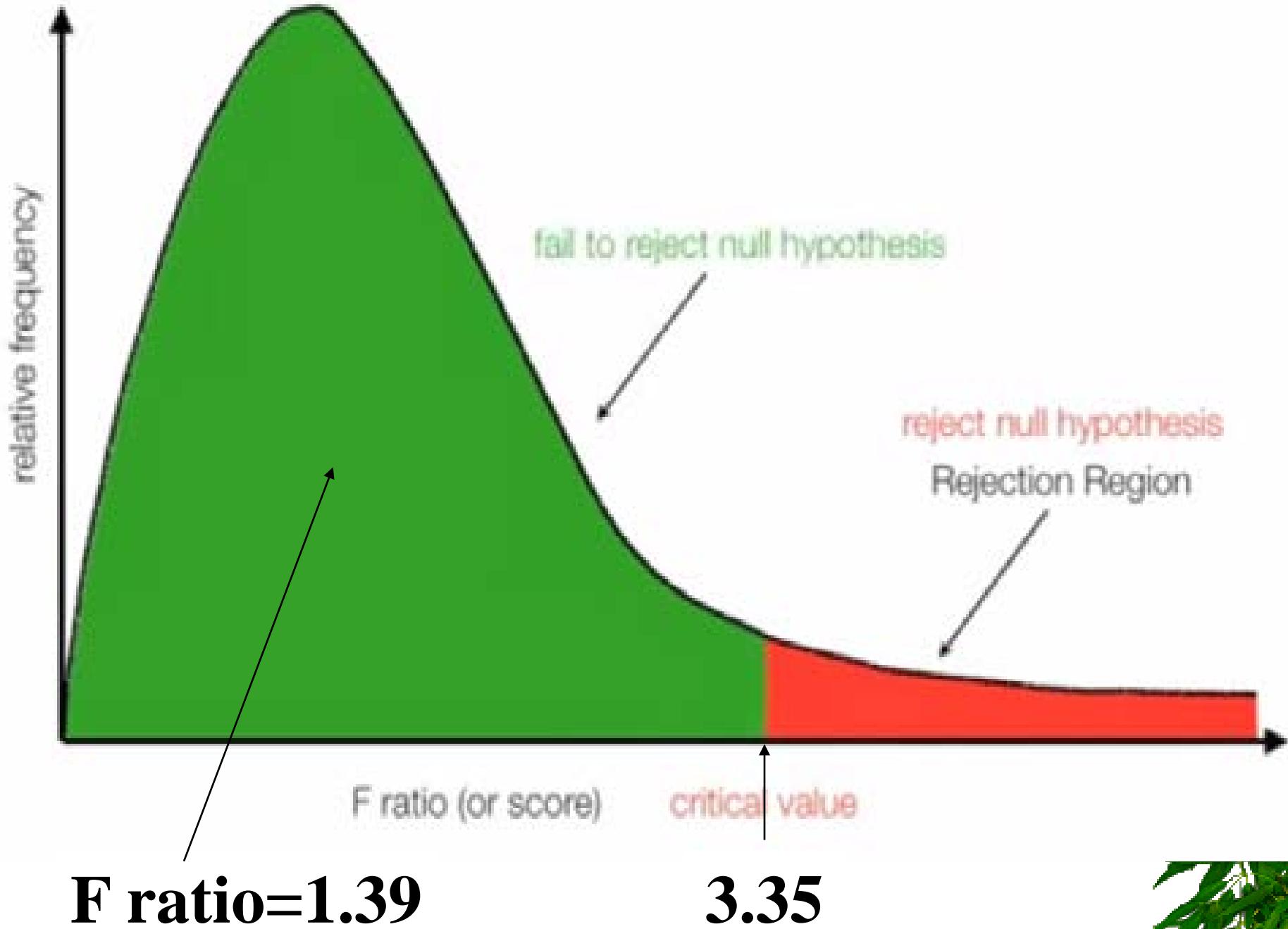
FUENTE:

<https://www.graphpad.com/quickcalcs/pValue2/>



“No detectamos diferencias estadísticamente significativas entre las medias de los grupos como se determinó por ANOVA de una vía ($F (2,27) = 1,397, p = 0,2646$ ”

- “dF-between” son los grados de libertad del “factor”.
- “dF-within” son los grados de libertad del “error”.



Regla de decisión

Elegimos el nivel alfa de significación que vamos a utilizar, usualmente alfa=5% o 0,05.

- **Cuando el p-valor del estadístico de la prueba ANOVA es inferior al nivel alfa de significación que hemos elegido, entonces rechazamos la hipótesis nula y nos quedamos con la alternativa.**
- Es decir, hay al menos dos medias grupales que son diferentes entre sí.



- **En caso contrario, no podemos rechazar la hipótesis nula** y concluimos que no existen diferencias significativas entre los grupos evaluados.
- Es importante recordar que la prueba ANOVA no nos dice nada acerca de qué grupos específicos son diferentes.
- Para ello debemos realizar pruebas de comparación múltiple *post hoc*, que veremos más adelante.



Se quiere medir el tamaño de partícula de dos sedimentos, para medir esta característica se utilizan dos centrifugadoras, y se sospecha que éstas reportan mediciones **distintas** para los mismos sedimentos analizados. Se decide hacer un estudio que permita comparar las medias y las varianzas reportadas por los dos equipos; para lo cual, se tomaron 13 lecturas de 13 sedimentos analizados de forma ordenada, con cada centrifugadora. Los resultados son los siguientes:

Centrifugadora x	4 714	4 601	4 696	4 896	4 905	4 870	4 987
	5 144	3 910	4 066	4 561	4 626	4 924	
	$\bar{X}_A =$	4 683.54		$S_A^2 =$	124 190.77		
Centrifugadora y	4 295	4 271	4 326	4 530	4 618	4 779	4 752
	4 744	3 764	3 797	4 401	4 339	4 700	
	$\bar{X}_B =$	4 408.92		$S_B^2 =$	112 020.00		



$$H_0: \mu_x = \mu_y$$

$$H_A: \mu_x \neq \mu_y$$

la cual se desea probar con un nivel de significancia de 5% ($\alpha = 0.05$). Suponiendo igualdad de varianzas para el tamaño de la partícula, el estadístico de prueba calculado con las fórmulas (2.14) está dado por

$$t_0 = \frac{4684.00 - 4408.92}{344.06\sqrt{(1/13)+(1/13)}} = 2.04$$



II. Puntos porcentuales de la distribución t^*

$\nu \searrow$	$\alpha \swarrow$.40	.25	.10	.05	.025	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62	
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.598	
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924	
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610	
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869	
6	.265	.727	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959	
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.019	4.785	5.408	
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041	
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781	
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587	
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437	
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318	
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221	
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140	
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073	
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015	
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965	
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922	
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883	
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850	
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819	
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792	
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767	
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745	
25	.256	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725	
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707	
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690	



De la tabla de distribución T de Student con $13 + 13 - 2 = 24$ grados de libertad, se obtiene el punto crítico $t_{(0.025, 24)} = 2.064$. Como $|t_0| = 2.04 < 2.064 = t_{\alpha/2}$, no se rechaza H_0 , por lo que se concluye que las centrifugadoras A y B reportan en promedio el mismo tamaño de partícula. Es decir, las centrifugadoras son estadísticamente iguales en cuanto a sus medias. Sin embargo, conviene observar que el rechazo es por un margen muy escaso, puesto que el estadístico de prueba y el punto crítico son muy similares. Al comparar la significancia predefinida $\alpha = 0.05$ con el valor- $p = 0.053$ se concluye lo mismo (no se rechaza H_0), pero se aprecia que si tal significancia predefinida por el experimentador fuera $\alpha = 0.055$, la decisión sobre la hipótesis sería rechazada.



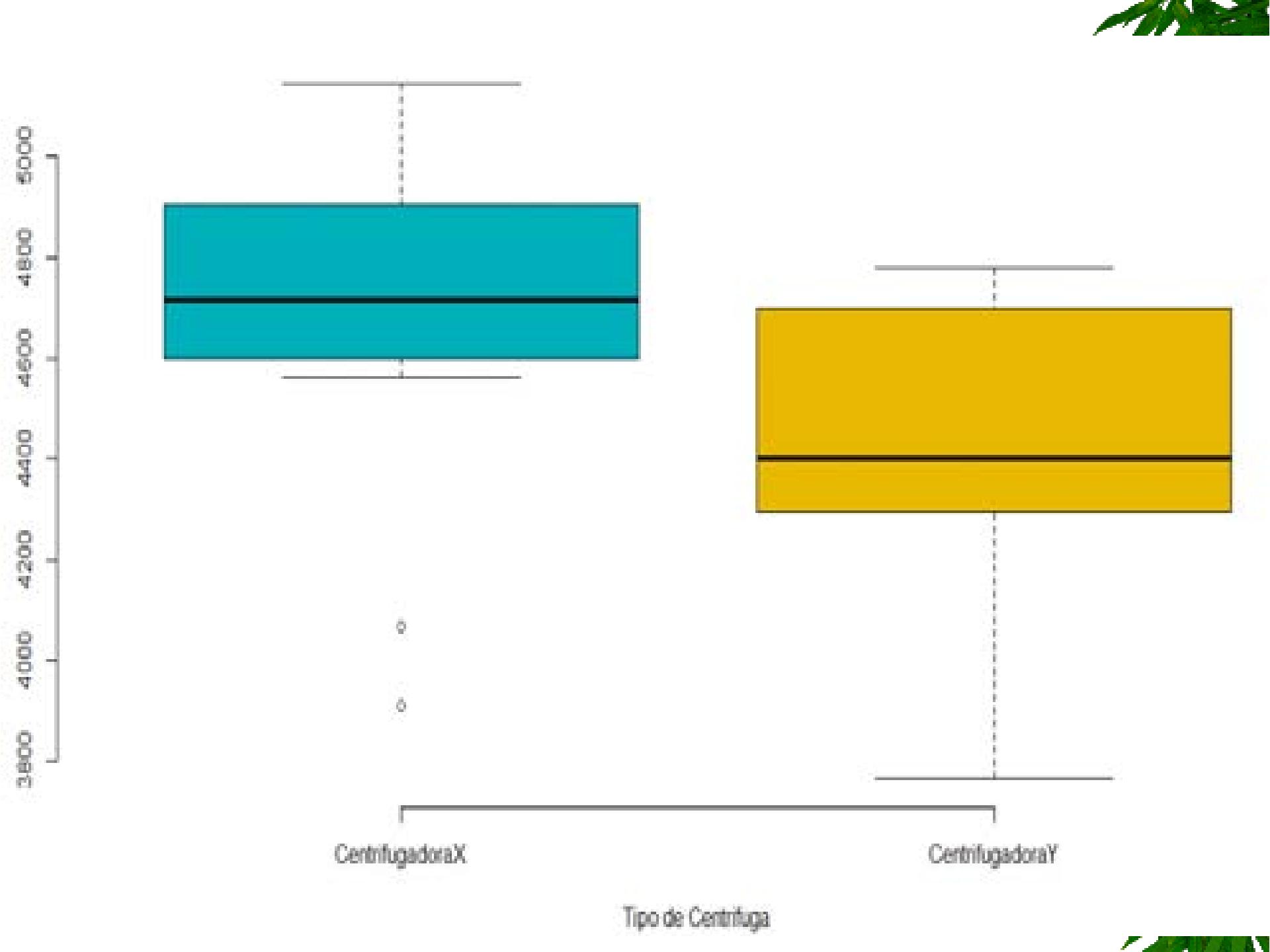
ANOVA Simple - valor por centrifugado

Tabla ANOVA para valor por centrifugado

Fuente	Suma de Cuadrados	Graus de Liberdade (Gl)	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Entre grupos	494041.	1	494041.	4.17	0.0522
Intra grupos	2.84105E6	24	118377.		
Total (Corr.)	3.33509E6	25			

El StatAdvisor

La tabla ANOVA descompone la varianza de valor en dos componentes: un componente entre-grupos y un componente dentro-de-grupos. La razón-F, que en este caso es igual a 4.17345, es el cociente entre el estimado entre-grupos y el estimado dentro-de-grupos. Puesto que el valor-P de la razón-F es mayor o igual que 0.05, no existe una diferencia estadísticamente significativa entre la media de valor entre un nivel de centrifugado y otro, con un nivel del 95.0% de confianza.



```
9 OneWayANOVA >
 31 # Compute the analysis of variance
 32 res.aov <- aov(VALOR ~ CENTRIFUGA, data = my_data)
 33 # Summary of the analysis
 34 summary(res.aov)
 35 
 36 
 37 # Compute the analysis of variance
 38 res.aov <- aov(VALOR ~ CENTRIFUGA, data = my_data)
 39 # Summary of the analysis
 40 summary(res.aov)
 41 
 42 
 43 
 44 #VERIFICACION DE SUPUESTOS EN FORMA GRAFICA
 45 par(mfrow=c(2,2))
 46 plot(res.aov)
 47 par(mfrow=c(1,1))
 48 
 49 
 50 
 51 
 52 
 53 
 54 
 55 
 56 
 57 
 58 
 59 
 60 
 61 
 62 
 63 
 64 
 65 
 66 
 67 
 68 
 69 
 70 
 71 
 72 
 73 
 74 
 75 
 76 
 77 
 78 
 79 
 80 
 81 
 82 
 83 
 84 
 85 
 86 
 87 
 88 
 89 
 90 
 91 
 92 
 93 
 94 
 95 
 96 
 97 
 98 
 99 
 100 
 101 
 102 
 103 
 104 
 105 
 106 
 107 
 108 
 109 
 110 
 111 
 112 
 113 
 114 
 115 
 116 
 117 
 118 
 119 
 120 
 121 
 122 
 123 
 124 
 125 
 126 
 127 
 128 
 129 
 130 
 131 
 132 
 133 
 134 
 135 
 136 
 137 
 138 
 139 
 140 
 141 
 142 
 143 
 144 
 145 
 146 
 147 
 148 
 149 
 150 
 151 
 152 
 153 
 154 
 155 
 156 
 157 
 158 
 159 
 160 
 161 
 162 
 163 
 164 
 165 
 166 
 167 
 168 
 169 
 170 
 171 
 172 
 173 
 174 
 175 
 176 
 177 
 178 
 179 
 180 
 181 
 182 
 183 
 184 
 185 
 186 
 187 
 188 
 189 
 190 
 191 
 192 
 193 
 194 
 195 
 196 
 197 
 198 
 199 
 200 
 201 
 202 
 203 
 204 
 205 
 206 
 207 
 208 
 209 
 210 
 211 
 212 
 213 
 214 
 215 
 216 
 217 
 218 
 219 
 220 
 221 
 222 
 223 
 224 
 225 
 226 
 227 
 228 
 229 
 230 
 231 
 232 
 233 
 234 
 235 
 236 
 237 
 238 
 239 
 240 
 241 
 242 
 243 
 244 
 245 
 246 
 247 
 248 
 249 
 250 
 251 
 252 
 253 
 254 
 255 
 256 
 257 
 258 
 259 
 260 
 261 
 262 
 263 
 264 
 265 
 266 
 267 
 268 
 269 
 270 
 271 
 272 
 273 
 274 
 275 
 276 
 277 
 278 
 279 
 280 
 281 
 282 
 283 
 284 
 285 
 286 
 287 
 288 
 289 
 290 
 291 
 292 
 293 
 294 
 295 
 296 
 297 
 298 
 299 
 300 
 301 
 302 
 303 
 304 
 305 
 306 
 307 
 308 
 309 
 310 
 311 
 312 
 313 
 314 
 315 
 316 
 317 
 318 
 319 
 320 
 321 
 322 
 323 
 324 
 325 
 326 
 327 
 328 
 329 
 330 
 331 
 332 
 333 
 334 
 335 
 336 
 337 
 338 
 339 
 340 
 341 
 342 
 343 
 344 
 345 
 346 
 347 
 348 
 349 
 350 
 351 
 352 
 353 
 354 
 355 
 356 
 357 
 358 
 359 
 360 
 361 
 362 
 363 
 364 
 365 
 366 
 367 
 368 
 369 
 370 
 371 
 372 
 373 
 374 
 375 
 376 
 377 
 378 
 379 
 380 
 381 
 382 
 383 
 384 
 385 
 386 
 387 
 388 
 389 
 390 
 391 
 392 
 393 
 394 
 395 
 396 
 397 
 398 
 399 
 400 
 401 
 402 
 403 
 404 
 405 
 406 
 407 
 408 
 409 
 410 
 411 
 412 
 413 
 414 
 415 
 416 
 417 
 418 
 419 
 420 
 421 
 422 
 423 
 424 
 425 
 426 
 427 
 428 
 429 
 430 
 431 
 432 
 433 
 434 
 435 
 436 
 437 
 438 
 439 
 440 
 441 
 442 
 443 
 444 
 445 
 446 
 447 
 448 
 449 
 450 
 451 
 452 
 453 
 454 
 455 
 456 
 457 
 458 
 459 
 460 
 461 
 462 
 463 
 464 
 465 
 466 
 467 
 468 
 469 
 470 
 471 
 472 
 473 
 474 
 475 
 476 
 477 
 478 
 479 
 480 
 481 
 482 
 483 
 484 
 485 
 486 
 487 
 488 
 489 
 490 
 491 
 492 
 493 
 494 
 495 
 496 
 497 
 498 
 499 
 500 
 501 
 502 
 503 
 504 
 505 
 506 
 507 
 508 
 509 
 510 
 511 
 512 
 513 
 514 
 515 
 516 
 517 
 518 
 519 
 520 
 521 
 522 
 523 
 524 
 525 
 526 
 527 
 528 
 529 
 530 
 531 
 532 
 533 
 534 
 535 
 536 
 537 
 538 
 539 
 540 
 541 
 542 
 543 
 544 
 545 
 546 
 547 
 548 
 549 
 550 
 551 
 552 
 553 
 554 
 555 
 556 
 557 
 558 
 559 
 559 
 560 
 561 
 562 
 563 
 564 
 565 
 566 
 567 
 568 
 569 
 570 
 571 
 572 
 573 
 574 
 575 
 576 
 577 
 578 
 579 
 579 
 580 
 581 
 582 
 583 
 584 
 585 
 586 
 587 
 588 
 589 
 589 
 590 
 591 
 592 
 593 
 594 
 595 
 596 
 597 
 598 
 599 
 599 
 600 
 601 
 602 
 603 
 604 
 605 
 606 
 607 
 608 
 609 
 609 
 610 
 611 
 612 
 613 
 614 
 615 
 616 
 617 
 618 
 619 
 619 
 620 
 621 
 622 
 623 
 624 
 625 
 626 
 627 
 628 
 629 
 629 
 630 
 631 
 632 
 633 
 634 
 635 
 636 
 637 
 638 
 639 
 639 
 640 
 641 
 642 
 643 
 644 
 645 
 646 
 647 
 648 
 649 
 649 
 650 
 651 
 652 
 653 
 654 
 655 
 656 
 657 
 658 
 659 
 659 
 660 
 661 
 662 
 663 
 664 
 665 
 666 
 667 
 668 
 669 
 669 
 670 
 671 
 672 
 673 
 674 
 675 
 676 
 677 
 678 
 679 
 679 
 680 
 681 
 682 
 683 
 684 
 685 
 686 
 687 
 688 
 689 
 689 
 690 
 691 
 692 
 693 
 694 
 695 
 696 
 697 
 698 
 699 
 699 
 700 
 701 
 702 
 703 
 704 
 705 
 706 
 707 
 708 
 709 
 709 
 710 
 711 
 712 
 713 
 714 
 715 
 716 
 717 
 718 
 719 
 719 
 720 
 721 
 722 
 723 
 724 
 725 
 726 
 727 
 728 
 729 
 729 
 730 
 731 
 732 
 733 
 734 
 735 
 736 
 737 
 738 
 739 
 739 
 740 
 741 
 742 
 743 
 744 
 745 
 746 
 747 
 748 
 749 
 749 
 750 
 751 
 752 
 753 
 754 
 755 
 756 
 757 
 758 
 759 
 759 
 760 
 761 
 762 
 763 
 764 
 765 
 766 
 767 
 768 
 769 
 769 
 770 
 771 
 772 
 773 
 774 
 775 
 776 
 777 
 778 
 779 
 779 
 780 
 781 
 782 
 783 
 784 
 785 
 786 
 787 
 788 
 789 
 789 
 790 
 791 
 792 
 793 
 794 
 795 
 796 
 797 
 798 
 799 
 799 
 800 
 801 
 802 
 803 
 804 
 805 
 806 
 807 
 808 
 809 
 809 
 810 
 811 
 812 
 813 
 814 
 815 
 816 
 817 
 818 
 819 
 819 
 820 
 821 
 822 
 823 
 824 
 825 
 826 
 827 
 828 
 829 
 829 
 830 
 831 
 832 
 833 
 834 
 835 
 836 
 837 
 838 
 839 
 839 
 840 
 841 
 842 
 843 
 844 
 845 
 846 
 847 
 848 
 849 
 849 
 850 
 851 
 852 
 853 
 854 
 855 
 856 
 857 
 858 
 859 
 859 
 860 
 861 
 862 
 863 
 864 
 865 
 866 
 867 
 868 
 869 
 869 
 870 
 871 
 872 
 873 
 874 
 875 
 876 
 877 
 878 
 879 
 879 
 880 
 881 
 882 
 883 
 884 
 885 
 886 
 887 
 888 
 889 
 889 
 890 
 891 
 892 
 893 
 894 
 895 
 896 
 897 
 898 
 899 
 899 
 900 
 901 
 902 
 903 
 904 
 905 
 906 
 907 
 908 
 909 
 909 
 910 
 911 
 912 
 913 
 914 
 915 
 916 
 917 
 918 
 919 
 919 
 920 
 921 
 922 
 923 
 924 
 925 
 926 
 927 
 928 
 929 
 929 
 930 
 931 
 932 
 933 
 934 
 935 
 936 
 937 
 938 
 939 
 939 
 940 
 941 
 942 
 943 
 944 
 945 
 946 
 947 
 948 
 949 
 949 
 950 
 951 
 952 
 953 
 954 
 955 
 956 
 957 
 958 
 959 
 959 
 960 
 961 
 962 
 963 
 964 
 965 
 966 
 967 
 968 
 969 
 969 
 970 
 971 
 972 
 973 
 974 
 975 
 976 
 977 
 978 
 979 
 979 
 980 
 981 
 982 
 983 
 984 
 985 
 986 
 987 
 988 
 989 
 989 
 990 
 991 
 992 
 993 
 994 
 995 
 996 
 997 
 998 
 999 
 999 
 1000 
 1001 
 1002 
 1003 
 1004 
 1005 
 1006 
 1007 
 1008 
 1009 
 1009 
 1010 
 1011 
 1012 
 1013 
 1014 
 1015 
 1016 
 1017 
 1018 
 1019 
 1019 
 1020 
 1021 
 1022 
 1023 
 1024 
 1025 
 1026 
 1027 
 1028 
 1029 
 1029 
 1030 
 1031 
 1032 
 1033 
 1034 
 1035 
 1036 
 1037 
 1038 
 1039 
 1039 
 1040 
 1041 
 1042 
 1043 
 1044 
 1045 
 1046 
 1047 
 1048 
 1049 
 1049 
 1050 
 1051 
 1052 
 1053 
 1054 
 1055 
 1056 
 1057 
 1058 
 1059 
 1059 
 1060 
 1061 
 1062 
 1063 
 1064 
 1065 
 1066 
 1067 
 1068 
 1069 
 1069 
 1070 
 1071 
 1072 
 1073 
 1074 
 1075 
 1076 
 1077 
 1078 
 1079 
 1079 
 1080 
 1081 
 1082 
 1083 
 1084 
 1085 
 1086 
 1087 
 1088 
 1088 
 1089 
 1090 
 1091 
 1092 
 1093 
 1094 
 1095 
 1096 
 1097 
 1098 
 1098 
 1099 
 1100 
 1101 
 1102 
 1103 
 1104 
 1105 
 1106 
 1107 
 1108 
 1109 
 1109 
 1110 
 1111 
 1112 
 1113 
 1114 
 1115 
 1116 
 1117 
 1118 
 1119 
 1119 
 1120 
 1121 
 1122 
 1123 
 1124 
 1125 
 1126 
 1127 
 1128 
 1129 
 1129 
 1130 
 1131 
 1132 
 1133 
 1134 
 1135 
 1136 
 1137 
 1138 
 1139 
 1139 
 1140 
 1141 
 1142 
 1143 
 1144 
 1145 
 1146 
 1147 
 1148 
 1149 
 1149 
 1150 
 1151 
 1152 
 1153 
 1154 
 1155 
 1156 
 1157 
 1158 
 1159 
 1159 
 1160 
 1161 
 1162 
 1163 
 1164 
 1165 
 1166 
 1167 
 1168 
 1169 
 1169 
 1170 
 1171 
 1172 
 1173 
 1174 
 1175 
 1176 
 1177 
 1178 
 1179 
 1179 
 1180 
 1181 
 1182 
 1183 
 1184 
 1185 
 1186 
 1187 
 1188 
 1188 
 1189 
 1190 
 1191 
 1192 
 1193 
 1194 
 1195 
 1196 
 1197 
 1198 
 1198 
 1199 
 1200 
 1201 
 1202 
 1203 
 1204 
 1205 
 1206 
 1207 
 1208 
 1209 
 1209 
 1210 
 1211 
 1212 
 1213 
 1214 
 1215 
 1216 
 1217 
 1218 
 1219 
 1219 
 1220 
 1221 
 1222 
 1223 
 1224 
 1225 
 1226 
 1227 
 1228 
 1229 
 1229 
 1230 
 1231 
 1232 
 1233 
 1234 
 1235 
 1236 
 1237 
 1238 
 1239 
 1239 
 1240 
 1241 
 1242 
 1243 
 1244 
 1245 
 1246 
 1247 
 1248 
 1249 
 1249 
 1250 
 1251 
 1252 
 1253 
 1254 
 1255 
 1256 
 1257 
 1258 
 1259 
 1259 
 1260 
 1261 
 1262 
 1263 
 1264 
 1265 
 1266 
 1267 
 1268 
 1269 
 1269 
 1270 
 1271 
 1272 
 1273 
 1274 
 1275 
 1276 
 1277 
 1278 
 1279 
 1279 
 1280 
 1281 
 1282 
 1283 
 1284 
 1285 
 1286 
 1287 
 1288 
 1288 
 1289 
 1290 
 1291 
 1292 
 1293 
 1294 
 1295 
 1296 
 1297 
 1298 
 1298 
 1299 
 1300 
 1301 
 1302 
 1303 
 1304 
 1305 
 1306 
 1307 
 1308 
 1309 
 1309 
 1310 
 1311 
 1312 
 1313 
 1314 
 1315 
 1316 
 1317 
 1318 
 1319 
 1319 
 1320 
 1321 
 1322 
 1323 
 1324 
 1325 
 1326 
 1327 
 1328 
 1329 
 1329 
 1330 
 1331 
 1332 
 1333 
 1334 
 1335 
 1336 
 1337 
 1338 
 1339 
 1339 
 1340 
 1341 
 1342 
 1343 
 1344 
 1345 
 1346 
 1347 
 1348 
 1349 
 1349 
 1350 
 1351 
 1352 
 1353 
 1354 
 1355 
 1356 
 1357 
 1358 
 1359 
 1359 
 1360 
 1361 
 1362 
 1363 
 1364 
 1365 
 1366 
 1367 
 1368 
 1369 
 1369 
 1370 
 1371 
 1372 
 1373 
 1374 
 1375 
 1376 
 1377 
 1378 
 1379 
 1379 
 1380 
 1381 
 1382 
 1383 
 1384 
 1385 
 1386 
 1387 
 1388 
 1388 
 1389 
 1390 
 1391 
 1392 
 1393 
 1394 
 1395 
 1396 
 1397 
 1398 
 1398 
 1399 
 1400 
 1401 
 1402 
 1403 
 1404 
 1405 
 1406 
 1407 
 1408 
 1409 
 1409 
 1410 
 1411 
 1412 
 1413 
 1414 
 1415 
 1416 
 1417 
 1418 
 1419 
 1419 
 1420 
 1421 
 1422 
 1423 
 1424 
 1425 
 1426 
 1427 
 1428 
 1429 
 1429 
 1430 
 1431 
 1432 
 1433 
 1434 
 1435 
 1436 
 1437 
 1438 
 1439 
 1439 
 1440 
 1441 
 1442 
 1443 
 1444 
 1445 
 1446 
 1447 
 1448 
 1449 
 1449 
 1450 
 1451 
 1452 
 1453 
 1454 
 1455 
 1456 
 1457 
 1458 
 1459 
 1459 
 1460 
 1461 
 1462 
 1463 
 1464 
 1465 
 1466 
 1467 
 1468 
 1469 
 1469 
 1470 
 1471 
 1472 
 1473 
 1474 
 1475 
 1476 
 1477 
 1478 
 1479 
 1479 
 1480 
 1481 
 1482 
 1483 
 1484 
 1485 
 1486 
 1487 
 1488 
 1488 
 1489 
 1490 
 1491 
 1492 
 1493 
 1494 
 1495 
 1496 
 1497 
 1498 
 1498 
 1499 
 1500 
 1501 
 1502 
 1503 
 1504 
 1505 
 1506 
 1507 
 1508 
 1509 
 1509 
 1510 
 1511 
 1512 
 1513 
 1514 
 1515 
 1516 
 1517 
 1518 
 1519 
 1519 
 1520 
 1521 
 1522 
 1523 
 1524 
 1525 
 1526 
 1527 
 1528 
 1529 
 1529 
 1530 
 1531 
 1532 
 1533 
 1534 
 1535 
 1536 
 1537 
 1538 
 1539 
 1539 
 1540 
 1541 
 1542 
 1543 
 1544 
 1545 
 1546 
 1547 
 1548 
 1549 
 1549 
 1550 
 1551 
 1552 
 1553 
 1554 
 1555 
 1556 
 1557 
 1558 
 1559 
 1559 
 1560 
 1561 
 1562 
 1563 
 1564 
 1565 
 1566 
 1567 
 1568 
 1569 
 1569 
 1570 
 1571 
 1572 
 1573 
 1574 
 1575 
 1576 
 1577 
 1578 
 1579 
 1579 
 1580 
 1581 
 1582 
 1583 
 1584 
 1585 
 1586 
 1587 
 1588 
 1588 
 1589 
 1590 
 1591 
 1592 
 1593 
 1594 
 1595 
 1596 
 1597 
 1598 
 1598 
 1599 
 1600 
 1601 
 1602 
 1603 
 1604 
 1605 
 1606 
 1607 
 1608 
 1609 
 1609 
 1610 
 1611 
 1612 
 1613 
 1614 
 1615 
 1616 
 1617 
 1618 
 1619 
 1619 
 1620 
 1621 
 1622 
 1623 
 1624 
 1625 
 1626 
 1627 
 1628 
 1629 
 1629 
 1630 
 1631 
 1632 
 1633 
 1634 
 1635 
 1636 
 1637 
 1638 
 1639 
 1639 
 1640 
 1641 
 1642 
 1643 
 1644 
 1645 
 1646 
 1647 
 1648 
 1649 
 1649 
 1650 
 1651 
 1652 
 1653 
 1654 
 1655 
 1656 
 1657 
 1658 
 1659 
 1659 
 1660 
 1661 
 1662 
 1663 
 1664 
 1665 
 1666 
 1667 
 1668 
 1669 
 1669 
 1670 
 1671 
 1672 
 1673 
 1674 
 1675 
 1676 
 1677 
 1678 
 1679 
 1679 
 1680 
 1681 
 1682 
 1683 
 1684 
 1685 
 1686 
 1687 
 1688 
 1688 
 1689 
 1690 
 1691 
 1692 
 1693 
 1694 
 1695 
 1696 
 1697 
 1698 
 1698 
 1699 
 1700 
 1701 
 1702 
 1703 
 1704 
 1705 
 1706 
 1707 
 1708 
 1709 
 1709 
 1710 
 1711 
 1712 
 1713 
 1714 
 1715 
 1716 
 1717 
 1718 
 1719 
 1719 
 1720 
 1721 
 1722 
 1723 
 1724 
 1725 
 1726 
 1727 
 1728 
 1729 
 1729 
 1730 
 1731 
 1732 
 1733 
 1734 
 1735 
 1736 
 1737 
 1738 
 1739 
 1739 
 1740 
 1741 
 1742 
 1743 
 1744 
 1745 
 1746 
 1747 
 1748 
 1749 
 1749 
 1750 
 1751 
 1752 
 1753 
 1754 
 1755 
 1756 
 1757 
 1758 
 1759 
 1759 
 1760 
 1761 
 1762 
 1763 
 1764 
 1765 
 1766 
 1767 
 1768 
 1769 
 1769 
 1770 
 1771 
 1772 
 1773 
 1774 
 1775 
 1776 
 1777 
 1778 
 1779 
 1779 
 1780 
 1781 
 1782 
 1783 
 1784 
 1785 
 1786 
 1787 
 1788 
 1788 
 1789 
 1790 
 1791 
 1792 
 1793 
 1794 
 1795 
 1796 
 1797 
 1798 
 1798 
 1799 
 1800 
 1801 
 1802 
 1803 
 1804 
 1805 
 1806 
 1807 
 1808 
 1809 
 1809 
 1810 
 1811 
 1812 
 1813 
 1814 
 1815 
 1816 
 1817 
 1818 
 1819 
 1819 
 1820 
 1821 
 1822 
 1823 
 1824 
 1825 
 1826 
 1827 
 1828 
 1829 
 1829 
 1830 
 1831 
 1832 
 1833 
 1834 
 1835 
 1836 
 1837 
 1838 
 1839 
 1839 
 1840 
 1841 
 1842 
 1843 
 1844 
 1845 
 1846 
 1847 
 1848 
 1849 
 1849 
 1850 
 1851 
 1852 
 1853 
 1854 
 1855 
 1856 
 1857 
 1858 
 1859 
 1859 
 1860 
 1861 
 1862 
 1863 
 1864 
 1865 
 1866 
 1867 
 1868 
 1869 
 1869 
 1870 
 1871 
 1872 
 1873 
 1874 
 1875 
 1876 
 1877 
 1878 
 1879 
 1879 
 1880 
 1881 
 1882 
 1883 
 1884 
 1885 
 1886 
 1887 
 1888 
 1888 
 1889 
 1890 
 1891 
 1892 
 1893 
 1894 
 1895 
 1896 
 1897 
 1898 
 1898 
 1899 
 1900 
 1901 
 1902 
 1903 
 1904 
 1905 
 1906 
 1907 
 1908 
 1909 
 1909 
 1910 
 1911 
 1912 
 1913 
 1914 
 1915 
 1916 
 1917 
 1918 
 1919 
 1919 
 1920 
 1921 
 1922 
 1923 
 1924 
 1925 
 1926 
 1927 
 1928 
 1929 
 1929 
 1930 
 1931 
 1932 
 1933 
 1934 
 1935 
 1936 
 1937 
 1938 
 1939 
 1939 
 1940 
 1941 
 1942 
 1943 
 1944 
 1945 
 1946 
 1947 
 1948 
 1949 
 1949 
 1950 
 1951 
 1952 
 1953 
 1954 
 1955 
 1956 
 1957 
 1958 
 1959 
 1959 
 1960 
 1961 
 1962 
 1963 
 1964 
 1965 
 1966 
 1967 
 1968 
 1969 
 1969 
 1970 
 1971 
 1972 
 1973 
 1974 
 1975 
 1976 
 1977 
 1978 
 1979 
 1979 
 1980 
 1981 
 1982 
 1983 
 1984 
 1985 
 1986 
 1987 
 1988 
 1988 
 1989 
 1990 
 1991 
 1992 
 1993 
 1994 
 1995 
 1996 
 1997 
 1998 
 1998 
 1999 
 2000 
 2001 
 2002 
 2003 
 2004 
 2005 
 2006 
 2007 
 2008 
 2009 
 2009 
 2010 
 2011 
 2012 
 2013 
 2014 
 2015 
 2016 
 2017 
 2018 
 2019 
 2019 
 2020 
 2021 
 2022 
 2023 
 2024 
 2025 
 2026 
 2027 
 2028 
 2029 
 2029 
 2030 
 2031 
 2032 
 2033 
 2034 
 2035 
 2036 
 2037 
 2038 
 2039 
 2039 
 2040 
 2041 
 2042 
 2043 
 2044 
 2045 
 2046 
 2047 
 2048 
 2049 
 2049 
 2050 
 2051 
 2052 
 2053 
 2054 
 2055 
 2056 
 2057 
 2058 
 2059 
 2059 
 2060 
 2061 
 2062 
 2063 
 2064 
 2065 
 2066 
 2067 
 2068 
 2069 
 2069 
 2070 
 2071 
 2072 
 2073 
 2074 
 2075 
 2076 
 2077 
 2078 
 2079 
 2079 
 2080 
 2081 
 2082 
 2083 
 2084 
 2085 
 2086 
 2087 
 2088 
 2088 
 2089 
 2090 
 2091 
 2092 
 2093 
 2094 
 2095 
 2096 
 209
```

