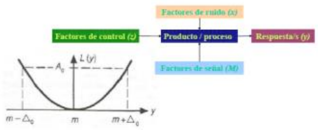
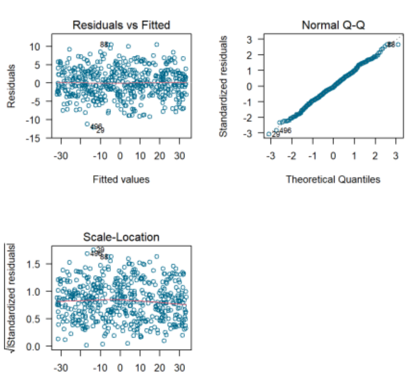
ESTADÍSTICA NO PARAMÉTRICA



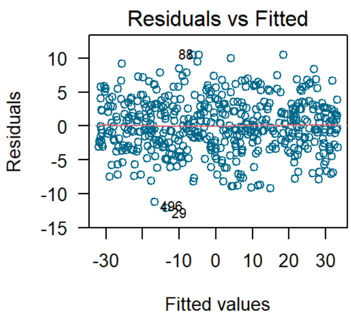
Dr. Christian R. Encina Zelada

cencina@lamolina.edu.pe

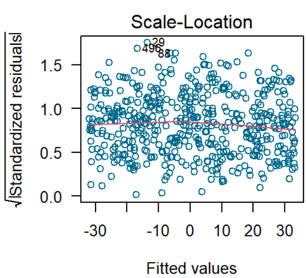
PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS RELACIONADAS A DISEÑOS EXPERIMENTALES

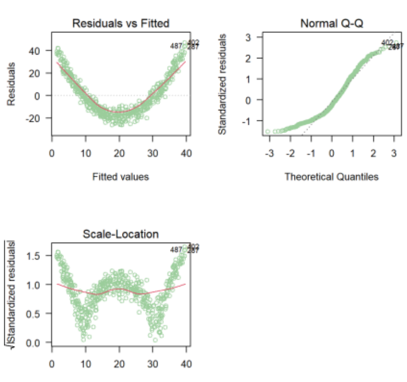


El gráfico se utiliza para detectar **no linealidad, variaciones de error desiguales** y **valores atípicos.**



El gráfico de ubicación de escala muestra **si los residuos se distribuyen por igual** a lo largo de los rangos de las variables de entrada (predictor).
El supuesto de varianza igual (**homocedasticidad**) también se puede verificar con este gráfico.
Si vemos una línea horizontal con puntos distribuidos aleatoriamente, **significa que el modelo es bueno.**





- Uno de los problemas más difíciles para un estudiante y para el investigador experimentado, es **decidir cuál de las pruebas estadísticas es la más adecuada para analizar un conjunto de datos**.
- Las pruebas estadísticas con las que se encuentran más familiarizados los investigadores y a las que se dedica la mayor parte de los libros de texto **son las referidas a la estadística paramétrica.**
- Estas pruebas estadísticas, se aplican principalmente a datos de tipo cuantitativo y **requieren el cumplimiento de supuestos** que deben ser verificados antes de la realización de la prueba.

- La **estadística no paramétrica** es la parte de la estadística que se ocupa de aquellos procedimientos donde **no se prioriza la naturaleza de la distribución de la población** (principalmente el supuesto de normalidad) como requisito para poder realizar inferencia.
- Por esta razón, también a estas técnicas se les conoce **como pruebas de libre distribución.**
- Por ejemplo, algunos datos solamente se encuentran en una escala ordinal como cuando se evalúan las habilidades de los vendedores, o el atractivo de cinco modelos de casas, o la **preferencia por sabor de una determinada marca de yogurt.**

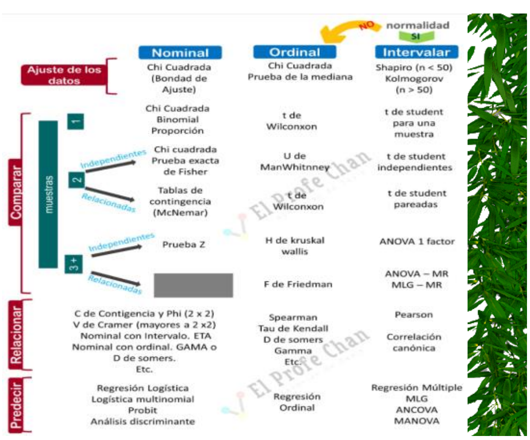
Predictor / Covariate / Independent Variable			Criterion / Measure / Dependent Variable (Continuous)	
			Non-Parametric Test	Parametric Equivalent
	Categorical	1 Variable 2 Categories Between-subjects	**Mann-Whitney U Test** (Nonparametric Tests → Legacy Dialogs → 2 Independent Samples)	**Independent *t* Test**
	Categorical	1 Variable 2 Categories Within-subjects	**Wilcoxon Signed Rank Test** (Nonparametric Tests → Legacy Dialogs → 2 Related Samples)	**Paired *t* Test**
	Categorical	1 Variable >2 Categories Between-subjects	**Kruskal-Wallis H Test** (Nonparametric Tests → Legacy Dialogs → K Independent Samples)	**One-Way ANOVA**
	Categorical	1 Variable >2 Categories Within-subjects	**Friedman Test** (Nonparametric Tests → Legacy Dialogs → K Related Samples)	**Repeated Measures ANOVA**
	Correl	1 Variable	**Spearman's ρ (rho)** (Correlate → Bivariate → ☑ Spearman)	**Pearson's *r***

Fuente: https://learncuriously.wordpress.com/2018/10/06/data-transformations-and-nonparametric-tests/

Parametric and Nonparametric Tests

Parametric Tests	Nonparametric Tests
Independent-Samples T Test	Mann-Whitney Test
Paired-Samples T Test	Wilcoxon Signed-Rank Test
One-way ANOVA	Kruskal-Wallis Test
One-way Repeated Measures ANOVA	Friedman's ANOVA

Utilidad	Prueba Paramétrica	Prueba No Paramétrica
Evaluación de una media	Prueba Z para una muestra	Prueba de Signos de una muestra
	Prueba T para una muestra	Prueba de Wilcoxon de una muestra
Evaluación de la diferencia de dos medias independientes	Prueba de Z para dos muestras independientes	Prueba de la Mediana para dos muestras independientes
	Prueba de T para dos muestras independientes	Prueba de Mann Whitney
Evaluación de la diferencia de dos medias dependientes	Prueba de Z para dos muestras pareadas	Prueba de Signos para dos muestras pareadas
	Prueba de T para dos muestras pareadas	Prueba de Wilcoxon para dos muestras pareadas
Comparación de más de 2 medias sin ninguna restricción	Anva -Diseño Completamente al Azar (D.C.A.)	Prueba de Kruskal-Wallis
		Prueba de la Mediana para más de dos muestras independientes
Comparación de más de 2 medias con una restricción	Anva - Diseño de Bloques Completamente al Azar (D.B.C.A.)	Prueba de Friedman



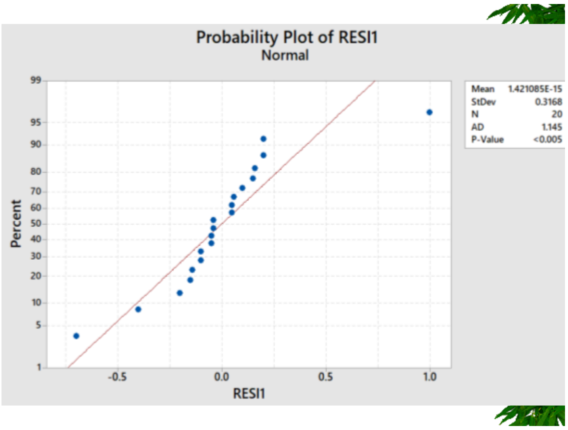
Ventajas de las Pruebas No Paramétricas

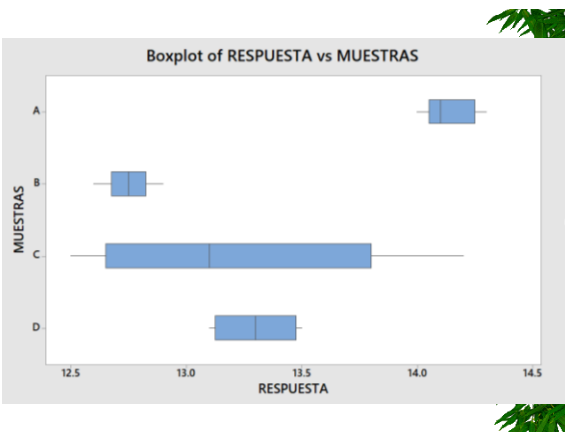
- Permiten que la prueba de hipótesis **no constituya afirmaciones** acerca de valores de los parámetros poblacionales.
- Pueden utilizarse cuando se desconoce la distribución de la población muestreada.
- Pueden utilizarse cuando los **datos están referidos a las escalas nominal u ordinal.**
- En algunas pruebas se utiliza solo la frecuencia de las observaciones.
- Son utilizadas cuando las muestras (*n*) son pequeñas (por lo general $n<30$).

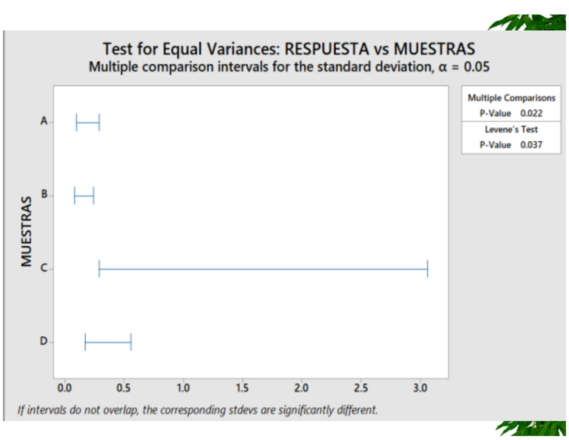
Ejemplo de Aplicación 1

Se analizaron muestras de cuatro marcas diferentes de margarina de dieta o de imitación, para determinar el nivel de ácidos grasos poliinsaturados fisiológicamente activos (PAPFUA, en porcentajes). La prueba de Anderson Darling da un valor calculado es 1.145 y un p-valor 0.004; la prueba de Bartlett da un valor calculado de 17.614 y un p-valor de 0.001. Asumiendo que hay independencia entre y dentro de tratamientos y que las cuatro poblaciones tienen distribuciones de probabilidad idénticas:

Marca	**A**	14.1	14.3	14.1	14.2	14.0	
	B	12.8	12.9	12.7	12.8	12.6	12.7
	C	12.5	13.1	14.2	12.8	13.4	
	D	13.1	13.5	13.4	13.2		


Probability Plot of RESI1
Normal
Percent
RESI1
Mean 1.421085E-15
StDev 0.3168
N 20
AD 1.145
P-Value <0.005


Boxplot of RESPUESTA vs MUESTRAS
MUESTRAS
RESPUESTA


Test for Equal Variances: RESPUESTA vs MUESTRAS
Multiple comparison intervals for the standard deviation, α = 0.05
MUESTRAS
Multiple Comparisons
P-Value 0.022
Levene's Test
P-Value 0.037
If intervals do not overlap, the corresponding stdevs are significantly different.

1. Planteamiento de Hipótesis

Ho: Las marcas de margarina no difieren en el porcentaje medio de PAPFUA.
H1: El porcentaje medio de PAPFUA difiere en al menos dos de estas marcas

2. Nivel de significación: α=0.05

3. Cálculo del estadístico de Prueba

Los rangos de los datos se presentan en la siguiente tabla:

		$R(X_{ij})$						R_i
Marca	**A**	16.5	20	16.5	18.5	15		**86.5**
	B	6	8	3.5	6	2	3.5	**29.0**
	C	1	9.5	18.5	6	12.5		**47.5**
	D	9.5	14	12.5	11			**47.0**

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{ij} R(X_{ij})^2 - \frac{n(n+1)^2}{4}\right) = \frac{1}{20-1}\left(2865.5 - \frac{20(21)^2}{4}\right) = 34.76316$$

$$H = \frac{1}{S^2}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - \frac{n(n+1)^2}{4}\right) \sim \chi^2_{(k-1)}$$

$$H = \frac{1}{34.76316}\left(2640.11667 - \frac{20(21)^2}{4}\right) = 12.51660 \sim \chi^2_{(3)}$$

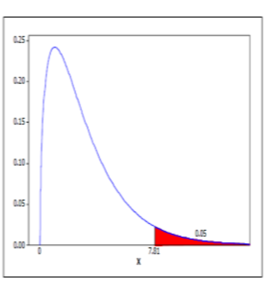
4. Criterios de decisión

Como $H > \chi^2_{(0.95,3)} = 7.81$ se rechaza Ho

5. Conclusión

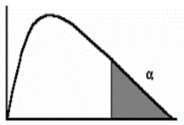
A un nivel de significación del 5% se rechaza Ho. Luego se puede afirmar que el verdadero porcentaje medio de PAPFUA difiere en al menos una de estas marcas.

Criterio de Decisión:



Como $\chi^2_{(0.95,3)} = 7.81 < 12.51$

se rechaza H_0

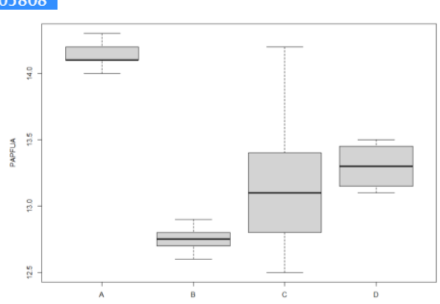


Grados de libertad	α=.995	α=.99	α=.975	α=.95	α=.90	α=.10	α=.05	α=.025	α=.01	α=.005
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.597
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.345	12.838
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.143	13.277	14.860
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188

Prueba de Kruskal-Wallis: Porcentaje vs. Marca

```
Prueba de Kruskal-Wallis en Porcentaje

                      Clasificación
Marca      N  Mediana   del promedio      Z
1          5    14.10           17.3   2.97
2          6    12.75            4.8  -2.80
3          5    13.10            9.5  -0.44
4          4    13.30           11.8   0.47
General   20                    10.5

H = 12.43  GL = 3  P = 0.006
H = 12.52  GL = 3  P = 0.006  (ajustados para los vínculos)

* NOTA * Una o más muestras pequeñas
```

```
        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  PAPFUA by MARCA
Kruskal-Wallis chi-squared = 12.517, df = 3, p-value =
0.005808
```



Como la prueba de Kruskal-Wallis resultó significativa entonces se justifican las pruebas de comparación

P1) Planteamiento de hipótesis

H_0: El porcentaje medio de PAPFUA obtenido con la margarina i y j no difieren.
H_1: El porcentaje medio de PAPFUA obtenido con la margarina i y j difieren.
Para todo i, j= A, B, C, D
donde i ≠ j

P2) Nivel de significación: α=0.05

P3) Cálculos y Criterio de decisión

$$ALS(K-W)=t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-k\right)}\sqrt{\left[\frac{S^2(n-1-H)}{n-k}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)\right]}=t_{(0.975,16)}\sqrt{\left[\frac{34.76316(20-1-12.52)}{20-4}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)\right]}$$

Comparaciones	Número de repeticiones	$\left\lvert\frac{R_i}{n_i}-\frac{R_j}{n_j}\right\rvert$	$ALS(K-W)$	Significación
A y B	5 y 6	12.4667	6.6385	**
A y C	5 y 5	7.8000	6.9337	**

Comparaciones	Número de repeticiones	$\left\lvert\frac{R_i}{n_i}-\frac{R_j}{n_j}\right\rvert$	$ALS(K-W)$	Significación
A y B	5 y 6	12.4667	6.6385	**
A y C	5 y 5	7.8000	6.9337	**
A y D	5 y 4	5.5500	7.3543	ns
B y C	6 y 5	4.6667	6.6385	ns
B y D	6 y 4	6.9167	7.0766	ns
C y D	5 y 4	2.2500	7.3543	ns

Gráfico de líneas

B C D A

P4) Conclusión

A un nivel de significación del 5% se puede afirmar que al analizar el porcentaje medio de PAPFUA:

- Existen diferencias significativas entre la margarina A con las margarinas B y C pero no con la margarina D.
- No existen diferencias significativas entre la margarina B con las margarinas C y D, ni entre la margarina C con la margarina D.

Mood Median Test: RESPUESTA versus MUESTRAS

```
Mood median test for RESPUESTA
Chi-Square = 12.20    DF = 3    P = 0.007

                                  Individual 95.0% CIs
MUESTRAS  N≤  N>  Median  Q3-Q1  ---------+---------+---------+---------+------
A          0   5   14.10   0.20                                  (-*---)
B          6   0   12.75   0.15      (-*-)
C          3   2   13.10   1.15  (-----------*---------------------)
D          1   3   13.30   0.35           (---*---)
                                 ---------+---------+---------+---------+------
                                     12.50     13.00     13.50     14.00

Overall median = 13.15
* NOTE * Levels with < 6 observations have confidence < 95.0%
```

Session

Mann-Whitney Test and CI: A; B

```
   N  Median
A  5  14.100
B  6  12.750


Point estimate for η1 - η2 is 1.400
96.4 Percent CI for η1 - η2 is (1.200;1.600)
W = 45.0
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.0081
The test is significant at 0.0077 (adjusted for ties)
```

Session

Mann-Whitney Test and CI: A; C

```
   N  Median
A  5  14.100
C  5  13.100


Point estimate for η1 - η2 is 1.000
96.3 Percent CI for η1 - η2 is (-0.100;1.600)
W = 36.5
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.0758
```

Session

Mann-Whitney Test and CI: A; D

```
   N  Median
A  5  14.100
D  4  13.300


Point estimate for η1 - η2 is 0.850
96.3 Percent CI for η1 - η2 is (0.600;1.100)
W = 35.0
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.0200
```

Session

Mann-Whitney Test and CI: B; C

```
   N  Median
B  6  12.750
C  5  13.100


Point estimate for η1 - η2 is -0.350
96.4 Percent CI for η1 - η2 is (-1.400;0.200)
W = 29.0
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.2353
```

Session

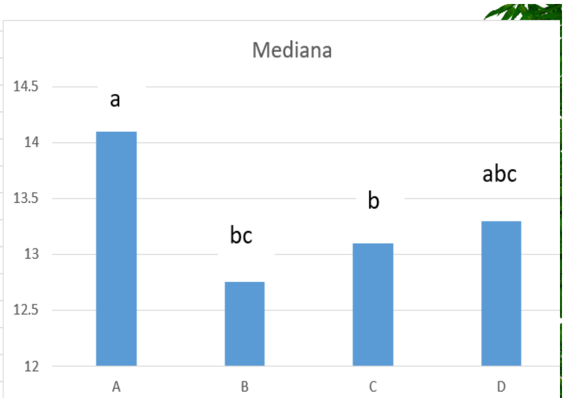
Mann-Whitney Test and CI: B; D

```
   N  Median
B  6  12.750
D  4  13.300


Point estimate for η1 - η2 is -0.550
95.7 Percent CI for η1 - η2 is (-0.800;-0.300)
W = 21.0
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.0142
```

Session

Mann-Whitney Test and CI: C; D

```
   N  Median
C  5  13.100
D  4  13.300


Point estimate for η1 - η2 is -0.200
96.3 Percent CI for η1 - η2 is (-0.900;1.000)
W = 22.0
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.5403
```

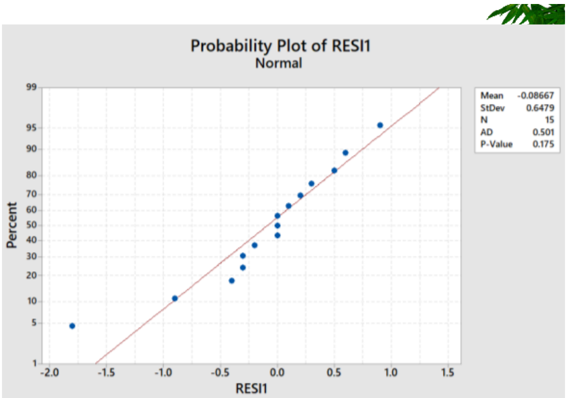


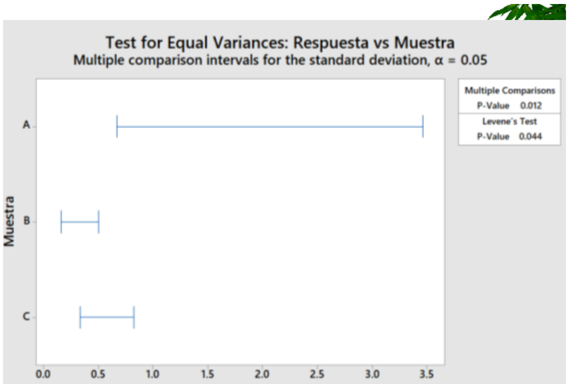
Ejemplo de Aplicación 3

Un Ing. Agrónomo realizó un experimento para comparar 3 variedades de papa. Los resultados en Tn/Ha se presentan a continuación:

Variedad A	Variedad B	Variedad C
2.3	2.1	3.6
4.1	2.6	4.1
3.2	2.4	3.2
3.8	2.5	3.3
1.4	2.2	3.9

A un nivel de significación de 0.05, diga Ud. con que variedad se obtiene el mayor rendimiento promedio.





2/10/2020 17:02:58

Welcome to Minitab, press F1 for help.

Kruskal-Wallis Test: Respuesta versus Muestra

Kruskal-Wallis Test on Respuesta

Muestra	N	Median	Ave Rank	Z
A	5	3.200	8.0	0.00
B	5	2.400	4.6	-2.08
C	5	3.600	11.4	2.08
Overall	15		8.0	

H = 5.78 DF = 2 P = 0.056
H = 5.80 DF = 2 P = 0.055 (adjusted for ties)

Mann-Whitney Test and CI: A; B

	N	Median
A	5	3.200
B	5	2.400

Point estimate for η1 - η2 is 0.800
96.3 Percent CI for η1 - η2 is (-1.000;1.700)
W = 32.0
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.4034

Mann-Whitney Test and CI: A; C

	N	Median
A	5	3.200
C	5	3.600

Point estimate for η1 - η2 is -0.400
96.3 Percent CI for η1 - η2 is (-2.200;0.600)
W = 23.0
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.4034
The test is significant at 0.4005 (adjusted for ties)

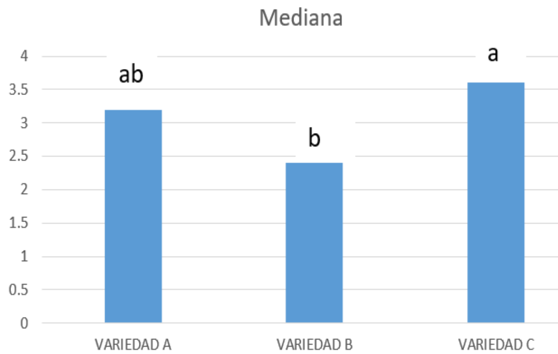
Mann-Whitney Test and CI: B; C

```
   N  Median
B  5  2.4000
C  5  3.6000


Point estimate for η1 - η2 is -1.2000
96.3 Percent CI for η1 - η2 is (-1.8001;-0.7001)
W = 15.0
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.0122
```

	Difference	pvalue	Signif.	LCL	UCL
A - B	3.4	0.1708		-1.684934	8.484934
A - C	-3.4	0.1708		-8.484934	1.684934
B - C	-6.8	0.0130	*	-11.884934	-1.715066

	Rendimiento	groups
C	11.4	a
A	8.0	ab
B	4.6	b

VARIEDAD	Mediana
VARIEDAD A	3.2^{ab}
VARIEDAD B	2.4^{b}
VARIEDAD C	3.6^{a}



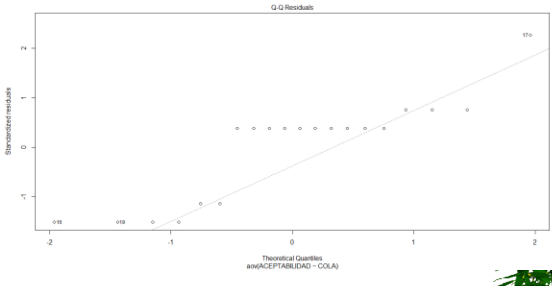
PRUEBA DE FRIEDMAN

Ejemplo de Aplicación 1

Se está realizando un experimento para analizar el sabor de una nueva marca de gaseosa sabor cola antes de que se lance al mercado. Las marcas de gaseosas colas en comparación fueron dadas a 5 jueces especializados y se estableció una escala de valores de (1-5) donde 1 es el de peor sabor y 5 el de mejor sabor

Los resultados del experimento se muestran a continuación:

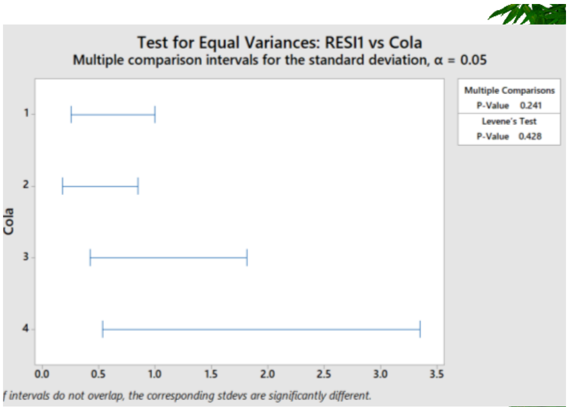
Jueces	Marcas de gaseosas colas			
	Cola 1	Cola 2	Cola 3	Nueva Cola
1	5	2	3	2
2	4	1	3	4
3	5	2	2	3
4	5	1	3	2
5	5	2	3	3

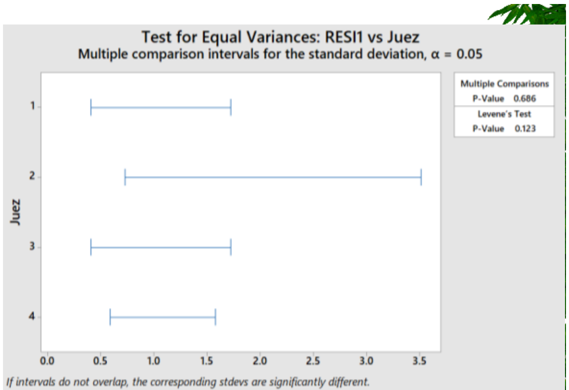



```
Shapiro-Wilk normality test

data:  aov_residuals
W = 0.8112, p-value = 0.001275
```

```
Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data:  aov_residuals
D = 0.34371, p-value = 1.039e-06
```

```
Anderson-Darling normality test

data:  aov_residuals
A = 1.9402, p-value = 3.775e-05
```





P1) Planteamiento de hipótesis

H_0: Las gaseosas de sabor cola en estudio tienen igual preferencia.
H_1: Las gaseosas de sabor cola en estudio no tienen igual preferencia.

P2) Nivel de significación: $\alpha = 0.05$

P3) Cálculo del estadístico de prueba

Estadístico de prueba: $S = \dfrac{(k-1)\left[bB - \dfrac{b^2k(k+1)^2}{4}\right]}{A - \dfrac{bk(k+1)^2}{4}} \sim \chi^2_{(k-1)}$

Donde:

$A = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}\left[R(X_{ij})\right]^2$ $\qquad B = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{k} R_i^2$

El trabajo en este análisis no paramétrico está en la "reasignación correcta" de los rangos por fila (jueces)

Asignar rangos por fila (o por juez en este caso) significa ordenar los valores de cada fila (cada juez) según su magnitud y luego asignarles un rango numérico, donde el valor más alto obtiene el rango más alto. Este procedimiento es parte del análisis no paramétrico de Friedman para comparar varios grupos de datos, como en este caso donde los jueces valoran diferentes marcas de gaseosa.

Procedimiento de asignación de rangos por fila:

1. **Trabajamos fila por fila:**
   - Para cada juez, observamos las puntuaciones que ha dado a las diferentes marcas.
2. **Ordenamos los valores de la fila:**
   - Ordenamos las puntuaciones en orden creciente (de menor a mayor).
3. **Asignamos los rangos:**
   - Al valor más bajo en la fila le asignamos el rango más bajo (por ejemplo, rango 1).
   - Al valor más alto en la fila le asignamos el rango más alto.
   - Si hay empates (valores iguales), se asigna a cada uno el promedio de los rangos correspondientes.

Ejemplo:

Tomemos la primera fila de la tabla (Juez 1):

Marca	Cola 1	Cola 2	Cola 3	Nueva Cola
Puntuación	5	2	3	2

Paso 1: Ordenar los valores de la fila

- Ordenamos las puntuaciones: 2, 2, 3, 5.

Paso 2: Asignar los rangos

- Los valores 2 y 2 están empatados. Como estos ocupan los rangos 1 y 2, se les asigna el promedio de estos rangos: (1+2)/2 = 1.5 para ambos.
- El valor 3 obtiene el rango 3.
- El valor 5 obtiene el rango 4 (rango más alto ya que es la mayor puntuación).

Por lo tanto, los rangos para el Juez 1 son:

Marca	Cola 1	Cola 2	Cola 3	Nueva Cola
Rango	4	1.5	3	1.5

Repetimos este proceso para cada fila:

Juez 2:

- Puntuaciones: **4, 1, 3, 4**
- Ordenadas: 1, 3, 4, 4
- Rangos:
  - Valor 1 obtiene el rango **1**.
  - Valor 3 obtiene el rango **2**.
  - Los valores 4 y 4 están empatados y comparten los rangos 3 y 4. Se les asigna el promedio: (3 + 4) / 2 = **3.5** para ambos.

Rangos Juez 2: Cola 1 = 3.5, Cola 2 = 1, Cola 3 = 2, Nueva Cola = 3.5

3. **Para el Juez 3** (valores: 5, 2, 2, 3):
   - Rango para 5 → **4**
   - Rango para 2 → **1.5** (promedio entre los dos 2s)
   - Rango para 2 → **1.5**
   - Rango para 3 → **3**
4. **Para el Juez 4** (valores: 5, 1, 3, 2):
   - Rango para 5 → **4**
   - Rango para 1 → **1**
   - Rango para 2 → **2**
   - Rango para 3 → **3**

Juez 5:

- Puntuaciones: **5, 2, 3, 3**
- Ordenadas: 2, 3, 3, 5
- Rangos:
  - Valor 2 obtiene el rango **1**.
  - Los valores 3 y 3 están empatados y comparten los rangos 2 y 3. Se les asigna el promedio: (2 + 3) / 2 = **2.5**.
  - Valor 5 obtiene el rango **4** (el más alto).

Rangos Juez 5: Cola 1 = 4, Cola 2 = 1, Cola 3 = 2.5, Nueva Cola = 2.5

¿Por qué asignar rangos?

- En lugar de usar directamente las puntuaciones dadas por los jueces, asignamos rangos porque los procedimientos no paramétricos, como el de Friedman, se basan en comparaciones de rangos en lugar de valores numéricos brutos.
- Esto es útil cuando los datos no son necesariamente normales o cuando las diferencias entre puntuaciones no son uniformes.
- Los rangos permiten una comparación relativa más justa entre las categorías.

Asignación de rangos

Asignamos rangos por fila (juez). Para cada fila, el valor más alto obtiene el rango más alto:

Jueces	Cola 1	Cola 2	Cola 3	Nueva Cola
1	4	1.5	3	1.5
2	3.5	1	2	3.5
3	4	1.5	1.5	3
4	4	1	3	2
5	4	1	2.5	2.5

Fórmula de A:

$$A = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{b} (R(X_{ij}))^2$$

Donde:

- $k = 4$ (número de columnas, marcas de gaseosas).
- $b = 5$ (número de filas, jueces).
- **Cola 1:** $4^2 + 3.5^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 = 16 + 12.25 + 16 + 16 + 16 = 76.25$
- **Cola 2:** $1.5^2 + 1^2 + 1.5^2 + 1^2 + 1^2 = 2.25 + 1 + 2.25 + 1 + 1 = 7.5$
- **Cola 3:** $3^2 + 2^2 + 1.5^2 + 3^2 + 2.5^2 = 9 + 4 + 2.25 + 9 + 6.25 = 30.5$
- **Nueva Cola:** $1.5^2 + 3.5^2 + 3^2 + 2^2 + 2.5^2 = 2.25 + 12.25 + 9 + 4 + 6.25 = 33.75$

Ahora, sumamos los resultados de las columnas:

$$A = 76.25 + 7.5 + 30.5 + 33.75 = 148$$

Paso 3: Cálculo de B

Para B, usamos la fórmula:

$$B = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{k}\left(R_{c_i}^2\right)$$

Los totales por columna (sumas de rangos por columna):

- Cola 1: $4 + 3.5 + 4 + 4 + 4 = 19.5$
- Cola 2: $1.5 + 1 + 1.5 + 1 + 1 = 6$
- Cola 3: $3 + 2 + 1.5 + 3 + 2.5 = 12$
- Nueva Cola: $1.5 + 3.5 + 3 + 2 + 2.5 = 12.5$

$$B = \frac{1}{5}\left(19.5^2 + 6^2 + 12^2 + 12.5^2\right)$$

Calculamos:

$$B = \frac{1}{5}\left(380.25 + 36 + 144 + 156.25\right)$$

$$B = \frac{1}{5} \times 716.5 = 143.3$$

Paso 4: Cálculo del Estadístico S

Fórmula de S:

$$S = \frac{(k-1)\left[bB - \frac{b^2k(k+1)^2}{4}\right]}{A - \frac{bk(k+1)^2}{4}}$$

Donde:

- $k = 4$ (marcas de gaseosas).
- $b = 5$ (número de jueces).
- $B = 143.3$
- $A = 148$

Primero calculamos el numerador:

$$bB = 5 \times 143.3 = 716.5$$

$$\frac{b^2k(k+1)^2}{4} = \frac{5^2 \times 4 \times (4+1)^2}{4} = \frac{25 \times 4 \times 25}{4} = 625$$

$$bB = 5 \times 143.3 = 716.5$$

$$\frac{b^2k(k+1)^2}{4} = \frac{5^2 \times 4 \times (4+1)^2}{4} = \frac{25 \times 4 \times 25}{4} = 625$$

El numerador es:

$$(4-1) \times [716.5 - 625] = 3 \times 91.5 = 274.5$$

Ahora el denominador:

$$\frac{bk(k+1)^2}{4} = \frac{5 \times 4 \times 25}{4} = 125$$

El denominador es:

$$A - 125 = 148 - 125 = 23$$

Finalmente, calculamos S:

$$S = \frac{274.5}{23} = 11.93$$

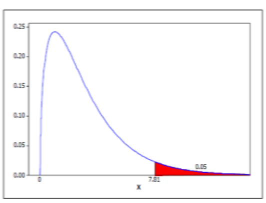
Desarrollo de la prueba

$$A = 4^2 + \ldots + 2.5^2 = 148 \qquad B = \frac{19.5^2 + 6^2 + 12^2 + 12.5^2}{5} = 143.3$$

$$S = \frac{(4-1)\left[5(143.3) - \frac{5^2 4(4+1)^2}{4}\right]}{148 - \frac{5(4)(4+1)^2}{4}} = 11.93 \sim \chi^2_{(3)}$$

Criterio de Decisión:

Criterio de Decisión:



Como $\chi^2_{(0.95,3)} = 7.81 < 11.93$

se rechaza H_0

Conclusión:

A un nivel de significación de 0.05 se rechaza Ho. Luego se puede afirmar que las gaseosas de sabor cola en estudio no tienen igual preferencia.

OTRA OPCIÓN

Paso 1: Calcular la suma de los rangos para cada columna (marca de gaseosa)

- **Cola 1:** $4 + 3.5 + 4 + 4 + 4 = 19.5$
- **Cola 2:** $1.5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6.5$
- **Cola 3:** $3 + 2 + 2.5 + 3 + 2.5 = 12$
- **Nueva Cola:** $1.5 + 3.5 + 2.5 + 2 + 2.5 = 12.5$

Paso 2: Aplicar la fórmula del estadístico de Friedman

La fórmula para el estadístico de Friedman es:

$$\chi^2_F = \frac{12}{H \cdot K \cdot (K+1)} \left[\sum R_c^2\right] - 3H(K+1)$$

Donde:

- H = número de jueces (5)
- K = número de tratamientos (4)
- $\sum R_c^2$ = suma de los rangos por columnas al cuadrado.

Paso 1: Calcular $\sum Rc^2$

Ya habíamos calculado las sumas de rangos por columna:

- Cola 1: 19.5
- Cola 2: 6
- Cola 3: 12
- Nueva Cola: 12.5

Ahora sumamos los cuadrados de esos valores:

$$\sum Rc^2 = 19.5^2 + 6^2 + 12^2 + 12.5^2$$

$$\sum Rc^2 = 380.25 + 36 + 144 + 156.25 = 716.5$$

Paso 2: Aplicar la Ecuación

Ahora, sustituimos los valores en la fórmula de Friedman:

$$\chi_F^2 = \frac{12}{5 \times 4 \times (4+1)} \times 716.5 - 3 \times 5 \times (4+1)$$

Primero, calculamos el término de $\frac{12}{H \times K \times (K+1)}$:

$$\frac{12}{5 \times 4 \times 5} = \frac{12}{100} = 0.12$$

Multiplicamos este valor por $\sum Rc^2$:

$$0.12 \times 716.5 = 85.98$$

Luego, calculamos el segundo término $3H(K+1)$:

$$3 \times 5 \times 5 = 75$$

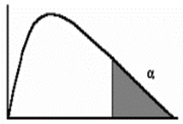
Finalmente, restamos ambos términos:

$$\chi_F^2 = 85.98 - 75 = 10.98$$

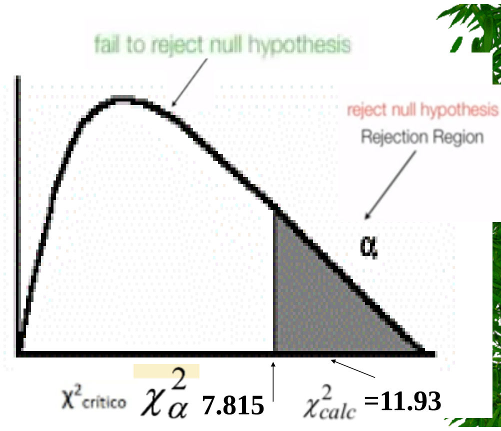
Resultado Final:

El valor del estadístico de Friedman χ_F^2 es **10.98**.

- El valor del estadístico de Friedman χ^2 es **10.98**.
- Este valor es ligeramente menor al valor obtenido con la fórmula anterior (11.93) pero sigue siendo similar.
- Ambas ecuaciones conducen a resultados muy próximos, y las diferencias pueden deberse a las aproximaciones en los cálculos de las sumas de rangos.



Grados de libertad	α=.995	α=.99	α=.975	α=.95	α=.90	α=.10	α=.05	α=.025	α=.01	α=.005
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.597
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.345	12.838
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.143	13.277	14.860
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188



2/10/2020 18:06:46

```
Welcome to Minitab, press F1 for help.
```

Friedman Test: Sensorial versus Cola blocked by Juez

```
S = 10.98  DF = 3  P = 0.012
S = 11.93  DF = 3  P = 0.008 (adjusted for ties)

                Est  Sum of
Cola   N  Median   Ranks
1      5   5.000    19.5
2      5   2.000     6.0
3      5   3.000    12.0
4      5   3.000    12.5

Grand median = 3.250
```

b. Realice las pruebas de comparaciones múltiples.

P1) Planteamiento de hipótesis

H_0: El sabor de la gaseosa cola 1 es similar al de la cola 2.
H_1: El sabor de la gaseosa cola 1 no es similar al de la cola 2.

H_0: El sabor de la gaseosa cola 1 es similar al de la cola 3.
H_1: El sabor de la gaseosa cola 1 no es similar al de la cola 3.

H_0: El sabor de la gaseosa cola 1 es similar al de la cola 4.
H_1: El sabor de la gaseosa cola 1 no es similar al de la cola 4.
H_0: El sabor de la gaseosa cola 2 es similar al de la cola 3.
H_1: El sabor de la gaseosa cola 2 no es similar al de la cola 3.

H_0: El sabor de la gaseosa cola 2 es similar al de la cola 4.
H_1: El sabor de la gaseosa cola 2 no es similar al de la cola 4.

P2) Nivel de significación $\alpha = 0.05$

P3) Cálculos y Criterios de decisión

$$ALS(Fr) = t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},(b-1)(k-1)\right)}\sqrt{\frac{2b(A-B)}{(b-1)(k-1)}} = t_{(0.975,(5-1)(4-1))}\sqrt{\frac{2(5)(148-143.3)}{(5-1)(4-1)}} = 2.18(1.97)$$

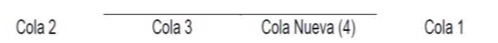
$$ALS(Fr) = 4.3143443$$

Comparaciones	$\lvert R_i - R_j \rvert$	ALS(Fr)	Sig
1 vs 2	$\lvert 19.5-6 \rvert = 13.5$	4.3143	*
1 vs 3	$\lvert 19.5-12 \rvert = 7.5$	4.3143	*
1 vs 4	$\lvert 19.5-12.5 \rvert = 7$	4.3143	*

$$ALS(Fr) = 4.3143443$$

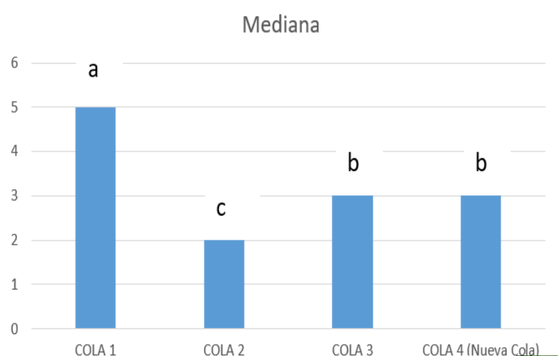
Comparaciones	$\lvert R_i - R_j \rvert$	ALS(Fr)	Sig
1 vs 2	$\lvert 19.5-6 \rvert = 13.5$	4.3143	*
1 vs 3	$\lvert 19.5-12 \rvert = 7.5$	4.3143	*
1 vs 4	$\lvert 19.5-12.5 \rvert = 7$	4.3143	*
2 vs 3	$\lvert 6-12 \rvert = 6$	4.3143	*
2 vs 4	$\lvert 6-12.5 \rvert = 5.5$	4.3143	*
3 vs 4	$\lvert 12-12.5 \rvert = 0.5$	4.3143	n.s

Gráfico de líneas:



P4) Conclusión

A un nivel de significación de 0.05 se puede afirmar que, al evaluar la preferencia de las gaseosas, existen diferencias significativas entre el sabor de cola 1 con los sabores de cola 2, 3 y 4; también entre el sabor de cola 2 con los sabores de cola 3 y 4. Pero no existe diferencia significativa entre el sabor de cola 3 con el de cola 4.
Finalmente se puede afirmar que la gaseosa de mayor preferencia en cuanto al sabor es la cola 1.



COLA	Mediana
COLA 1	5^a
COLA 2	2^c
COLA 3	3^b
COLA 4 (Nueva Cola)	3^b

Mann-Whitney Test and CI: UNO; DOS

```
     N  Median
UNO  5   5.000
DOS  5   2.000

Point estimate for η1 - η2 is 3.000
96.3 Percent CI for η1 - η2 is (2.000;4.000)
W = 40.0
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.0122
The test is significant at 0.0086 (adjusted for ties)
```

Mann-Whitney Test and CI: UNO; TRES

```
      N  Median
UNO   5   5.000
TRES  5   3.000

Point estimate for η1 - η2 is 2.000
96.3 Percent CI for η1 - η2 is (1.000;3.000)
W = 40.0
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.0122
The test is significant at 0.0075 (adjusted for ties)
```

Mann-Whitney Test and CI: UNO; CUATRO

```
        N  Median
UNO     5   5.000
CUATRO  5   3.000

Point estimate for η1 - η2 is 2.000
96.3 Percent CI for η1 - η2 is (1.000;3.000)
W = 39.5
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.0163
The test is significant at 0.0123 (adjusted for ties)
```

Mann-Whitney Test and CI: DOS; TRES

```
      N  Median
DOS   5   2.000
TRES  5   3.000

Point estimate for η1 - η2 is -1.000
96.3 Percent CI for η1 - η2 is (-2.000;-0.000)
W = 16.5
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.0283
The test is significant at 0.0189 (adjusted for ties)
```

Mann-Whitney Test and CI: DOS; CUATRO

```
        N  Median
DOS     5   2.000
CUATRO  5   3.000

Point estimate for η1 - η2 is -1.000
96.3 Percent CI for η1 - η2 is (-2.000;-0.001)
W = 18.0
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 0.0601
The test is significant at 0.0434 (adjusted for ties)
```

Mann-Whitney Test and CI: TRES; CUATRO

```
        N  Median
TRES    5   3.000
CUATRO  5   3.000

Point estimate for η1 - η2 is -0.000
96.3 Percent CI for η1 - η2 is (-1.000;1.000)
W = 28.0
Test of η1 = η2 vs η1 ≠ η2 is significant at 1.0000
The test is significant at 1.0000 (adjusted for ties)
```

Transformaciones para estabilizar varianza y mejorar de la normalidad de residuales

Transformación BOX-COX

- En la práctica, algunas variables de respuesta no siguen una distribución normal sino que se distribuyen, por ejemplo *Poisson*, *binomial* o *Gamma*, entre otras.

- Resulta que en estas distribuciones la media está relacionada con la desviación estándar (variabilidad) y, naturalmente, al cambiar la media de un tratamiento a otro, con ella cambia la variabilidad de la respuesta.

- También es cierto que al suponer normalidad y varianza constante, éstas no se tienen que cumplir de manera estricta, **dado que el procedimiento de ANOVA es robusto o admite desviaciones moderadas de dichos supuestos.**

- Existen al menos tres maneras de solucionar o minimizar el problema por falta de normalidad y de varianza heterogénea en los residuos:

1) utilizar **métodos de análisis no paramétricos**, que no requieren las suposiciones de normalidad y varianza constante;

2) hacer el análisis mediante **modelos lineales generalizados (GLM)**, en los que se ajusta un modelo lineal usando otras distribuciones diferentes a la normal, donde la varianza no tiene por qué ser constante, y

3) hacer el **análisis sobre la respuesta transformada** a una escala en la que los supuestos se cumplan.

Transformación apropiada	Tipo de transformación
$Y' = \text{sen}^{-1}(\sqrt{Y})$	Arcoseno, útil cuando la respuesta Y son proporciones (se distribuye binomial)
$Y' = \sqrt{Y}$	Raíz cuadrada, para los datos tipo Poisson
$Y' = \ln(Y)$ o $Y' = \log_{10}(Y)$	Transformación logaritmo
$Y' = Y^{-1/2}$	Recíproco de la raíz cuadrada
$Y' = Y^{-1}$	Recíproco

Transformación de Datos

Transformación Raíz Cuadrada Si las observaciones tiene una distribución de Poisson debe usarse $\sqrt{y_{ij}}$ o $\sqrt{1+y_{ij}}$

Transformación Logarítmica (para respuestas positivas) Si los datos tiene una distribución Lognormal ($\ln(Y_{ij}) \sim$ Normal), entonces la transformación es logarítmica $\ln(Y_{ij})$.

Transformación Seno Inverso Para datos binomiales expresado en fracciones se debe usar la transformación seno inverso $\text{sen}^{-1}\sqrt{y_{ij}}$

Transformaciones para estabilizar Variancia

Sea $E[Y]=\mu$ la media de Y: Supóngase que la desviación estándar es proporcional a alguna potencia de la media de Y, tal que

$$\sigma_Y \propto \mu^{\alpha}$$

Se desea determinar la transformación de Y que produzca una variancia constante. Se supone que la transformación es una potencia de los datos originales, Esto es

$$Y^* = Y^{\lambda}$$

Entonces se puede demostrar que:

$$\sigma_Y \propto Y^{\lambda+\alpha-1}$$

Se puede observar claramente que para que los datos transformados sea una constante, $\lambda = 1-\alpha$. En la siguiente tabla se resumen algunas de las transformaciones más usadas para estabilizar la variancia. Nótese en este caso si $\lambda = 0$, la transformación es logarítmica:

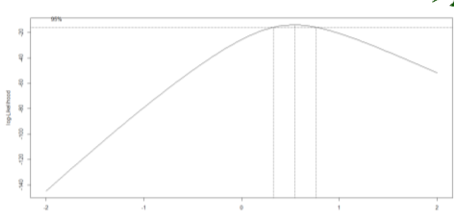
Relación entre σ_Y y μ	α	$\lambda = 1-\alpha$	Transformación
$\sigma_Y \propto$ constante	0	1	Ninguna
$\sigma_Y \propto \mu^{1/2}$	1/2	1/2	Raíz cuadrada
$\sigma_Y \propto \mu$	1	0	Logarítmica
$\sigma_Y \propto \mu^{3/2}$	3/2	-1/2	Recíproca de la Raíz cuadrada
$\sigma_Y \propto \mu^2$	2	-1	Recíproca

En muchas situaciones de diseño experimental en las que se usan réplicas, α puede estimarse empíricamente a partir de los datos. Puesto que la combinación del i-ésimo de los tratamientos $\sigma_{y_i} \propto \mu_i^{\alpha} = \theta\mu_i^{\alpha}$, donde θ es una constante de proporcionalidad, puede tomarse logaritmo natural para obtener:

$$\ln \sigma_{y_i} = \ln \theta + \alpha \ln \mu_i$$

Por lo tanto, una gráfica de $\ln \sigma_{y_i}$ contra $\ln \mu_i$ sería una línea recta con pendiente α. Puesto como no se conoce σ_{y_i} y μ_i puede sustituirse estimaciones razonables como la desviación estándar (S_i) y la media ($\bar{y}_i$) de las observaciones para el tratamiento i en lugar de σ_{y_i} y μ_i, respectivamente

- La transformación Box-Cox es una transformación de potencia que corrige la asimetría de una variable, diferentes varianzas o la no linealidad entre variables.
- En consecuencia, es muy útil transformar una variable y por tanto obtener una nueva variable que siga una distribución normal.



λ	Transformation
-2	$1/x^2$
-1	$1/x$
-0.5	$1/\sqrt{x}$
0	$\log(x)$
0.5	$\sqrt{x}$
1	x
2	x^2

$$\begin{cases} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda} & \text{if} \quad \lambda \neq 0 \\ log(x) & \text{if} \quad \lambda = 0 \end{cases},$$

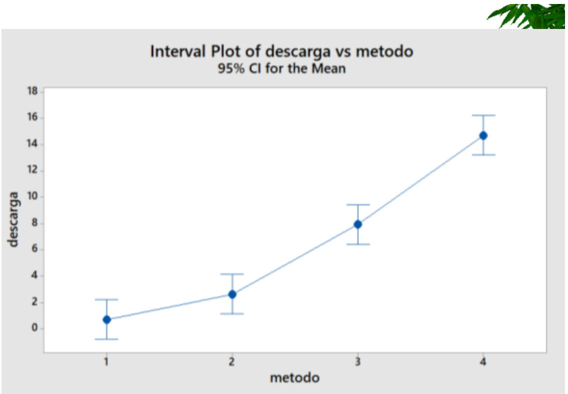
being y the changed variable and lambda (λ) the transformation parameter However, the following table describes the most typical transformations:

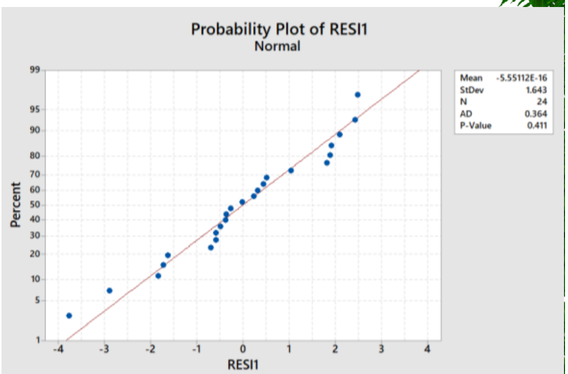
λ	Transformation
-2	1/x^2
-1	1/x
-0.5	1/sqrt(x)
0	log(x)
0.5	sqrt(x)
1	x
2	x^2

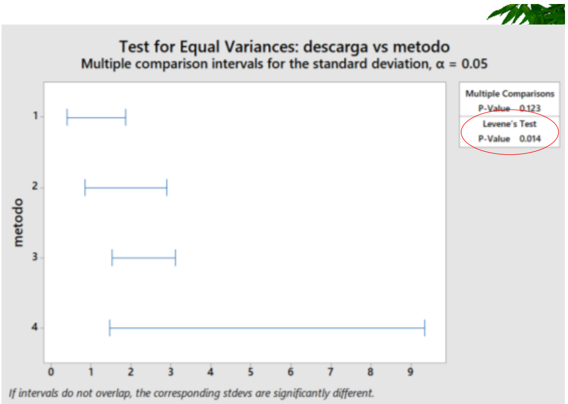
- Si el parámetro de transformación estimado está cerca de uno de los valores de la tabla anterior, en la práctica se recomienda elegir el valor de la tabla en lugar del valor exacto, ya que el valor de la tabla es más fácil de interpretar.
- Cuando usamos R, podemos utilizar la función “Box-Cox” del paquete MASS para estimar el parámetro de transformación mediante estimación de máxima verosimilitud.
- Esta función también nos dará el intervalo de confianza del 95% del parámetro. Los argumentos de la función son los siguientes:

Ejemplo: Un Ingeniero alimentario está interesado en determinar si cuatro métodos diferentes para el contenido de ácido ascórbico producen estimaciones equivalentes. Cada procedimiento se usa seis veces, y los datos de ácido ascórbico (en mg/100 ml) se muestran en la siguiente tabla:

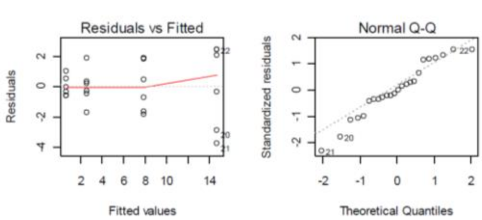
Método de Estimación	Observaciones					
1	0.34	0.12	1.23	0.70	1.75	0.12
2	0.91	2.94	2.14	2.36	2.86	4.55
3	6.31	8.37	9.75	6.09	9.82	7.24
4	17.15	11.82	10.95	17.20	14.35	16.82

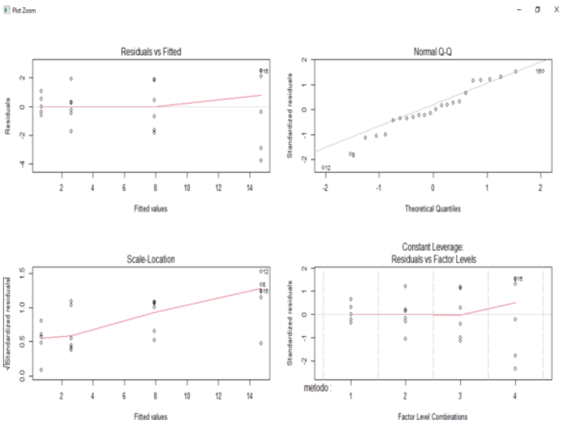







```
Analysis of Variance Table

Response: y
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
metodo     3 708.35  236.12  76.067 4.111e-11 ***
Residuals 20  62.08    3.10
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

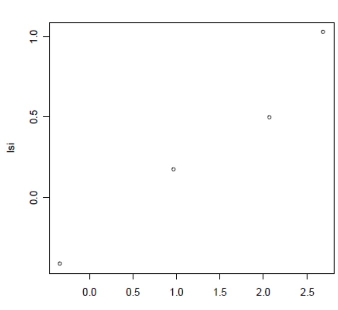


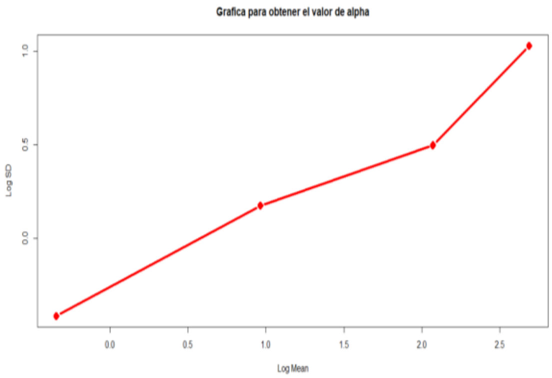


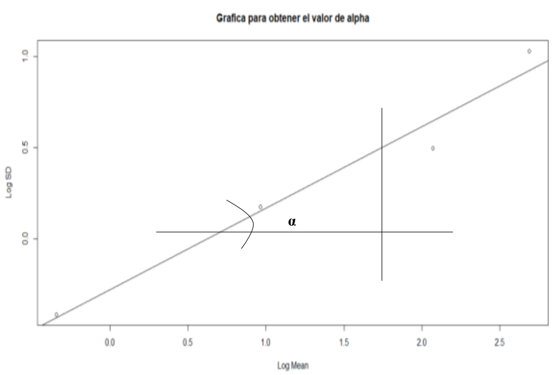

```
> ncvTest(mod1)
Non-constant Variance Score Test
Variance formula: ~ fitted.values
Chisquare = 9.604614    Df = 1     p = 0.001940891

> leveneTest(mod1)
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
      Df F value  Pr(>F)
group  3  4.5684 0.01357 *
      20
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' '
1

Bartlett's K-squared = 8.9958, df = 3, p-value = 0.02935
```

Entonces no existe homogeneidad de variancias en cuanto a las descargas entre los cuatro métodos de evaluación.

```
> yp<-tapply(y,metodo,mean)
> si<-tapply(y,metodo,sd)
> lyp<-log(yp)
> lsi<-log(si)
> plot(lyp,lsi)
```





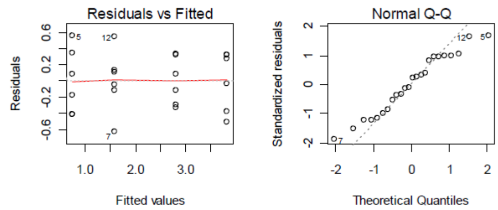


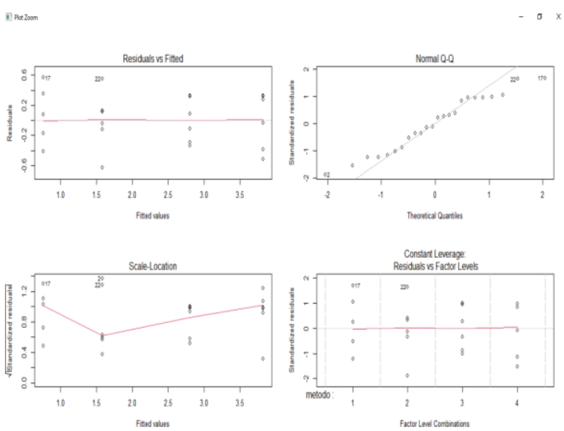

```
> mod<-lm(lsi~lyp)
> mod

Call:
lm(formula = lsi ~ lyp)
```

“α”

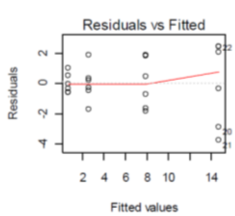
```
Coefficients:
(Intercept)          lyp
    -0.2781       0.4465

se puede usar la transformación raíz cuadrada ya que
λ=1-α=1-0.4465=0.5535

> yt<-y^0.5
> mod2<-lm(yt~metodo)
> anova(mod2)
Analysis of Variance Table
```

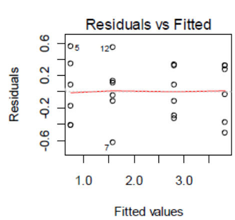
```
Response: yt
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
metodo     3 32.684  10.895  81.049 2.296e-11 ***
Residuals 20  2.688   0.134
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

> par(mfrow=c(2,2))
> plot(mod2)
```





VARIANZAS

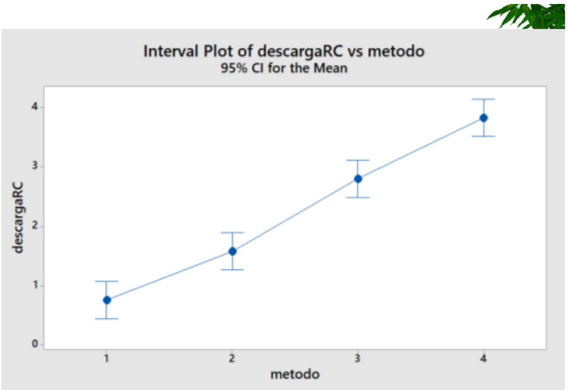


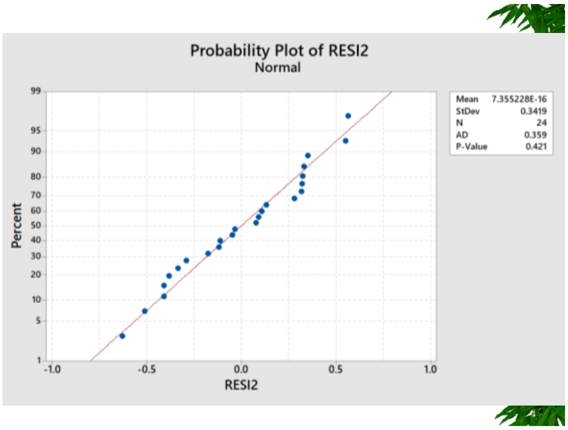


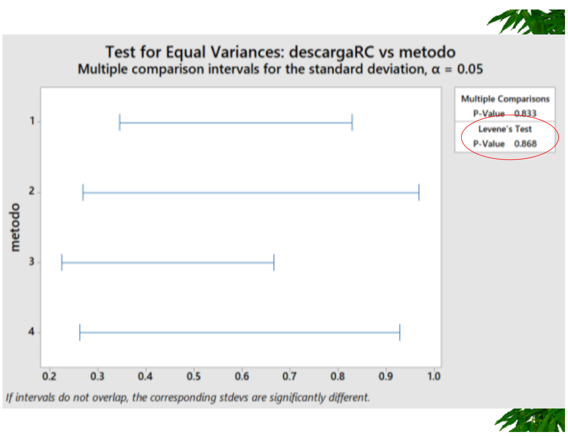
Antes **Después**

```
> bartlett.test(yt~metodo)

        Bartlett test of homogeneity of variances

data:  yt by metodo
Bartlett's K-squared = 0.5247, df = 3, p-value = 0.9134

> ncvTest(mod2)
Non-constant Variance Score Test
```

```
Variance formula: ~ fitted.values
Chisquare = 0.1582841    Df = 1    p = 0.6907412

> ri<-rstandard(mod2)
> shapiro.test(ri)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  ri
W = 0.9588, p-value = 0.4141

> bartlett.test(yt~metodo)

        Bartlett test of homogeneity of variances

data:  yt by metodo
Bartlett's K-squared = 0.5247, df = 3, p-value = 0.9134
```




Probability Plot of RESI2
Normal
Mean 7.355228E-16
StDev 0.3419
N 24
AD 0.359
P-Value 0.421
Percent
99
95
90
80
70
60
50
40
30
20
10
5
1
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
RESI2


Test for Equal Variances: descargaRC vs metodo
Multiple comparison intervals for the standard deviation, α = 0.05
Multiple Comparisons
P-Value 0.833
Levene's Test
P-Value 0.868
metodo
1
2
3
4
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
If intervals do not overlap, the corresponding stdevs are significantly different.