UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA LA MOLINA

Diseño y Análisis de Experimentos en Ingeniería y Ciencias Ambientales

Ancova DCA y DBCA

ANACOVA - Analysis of Covariance

Dr. Christian R. Encina Zelada

cencina@lamolina.edu.pe

Análisis de Covarianza (ANCOVA)

Introducción

- En el análisis de covariancia se combinan los conceptos del **análisis de variancia** para un diseño experimental y para la **regresión**.
- El análisis de covariancia es utilizado en casos en los que la variable respuesta de un diseño experimental **esté relacionada con una o más variables concomitantes.**
- La aplicación del ANCOVA es aplicable a los diseños anteriormente estudiados: DCA, DBCA y otros más.

Ventajas del ANCOVA

Los objetivos más importantes del análisis de covarianza son:

a. Disminuir el error experimental, con el consiguiente aumento en la precisión del experimento.
b. Ajustar los promedios de los tratamientos, con la información obtenida de la variable concomitante o independiente.
c. Hacer una mejor interpretación de los resultados de los experimentos, especialmente en cuanto se relaciona con la naturaleza de los efectos de los tratamientos.

Supuestos del ANCOVA

- Cuando se utiliza el análisis de covarianza es necesario asumir ciertos requisitos que le den validez al análisis. Estas asunciones son:
  - La variable X es fija, medida sin error y no es afectada por los tratamientos.
  - La variable Y deben tener varianzas homogéneas en los tratamientos.
  - La variable Y deben tener distribución normal para cada valor de X.
  - La regresión de X sobre Y, debe ser lineal.

- Los errores se distribuyen independientemente y normal con cero de promedio y con varianza constante σ^2.

Modelos aditivos lineales

Los diseños experimentales que van a ser estudiados utilizando ANCOVA son el DCA y DBCA los siguientes:

En DCA: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta\left(X_{ij} - \bar{X}_{\bullet\bullet}\right) + \varepsilon_{ij} \quad i = 1,2,\ldots,t \quad j = 1,2,\ldots,r$

En DBCA: $Y_{ij} = \mu + t_i + \gamma_j + \beta(X_{ij} - \bar{X}_{..}) + \varepsilon_{ij}$

$i=1,\ldots,t \quad j=1,\ldots b$

Modelo aditivo lineal para un DCA

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta\left(X_{ij} - \bar{X}_{\bullet\bullet}\right) + \varepsilon_{ij}$$

Donde:

Y_{ij} : es el valor observado de la variable respuesta obtenido del i- ésimo tratamiento en la j-ésima repetición.

μ : es el efecto de la media general.

τ_i : es el efecto del i-ésimo tratamiento.

β : es el coeficiente de regresión lineal del Y explicado por X.

X_{ij} : es el valor observado de la variable independiente en el i-ésimo tratamiento y la j-ésima repetición

$\bar{X}_{\bullet\bullet}$: es el promedio de la variable independiente.

ε_{ij} : es el efecto del error experimental obtenido del i-ésimo tratamiento en la j-ésima repetición.

Procedimiento en la evaluación de los datos

- Evaluación de los datos mediante ANCOVA $\left(H_0 : \beta = 0 \; vs. \; H_1 : \beta \neq 0\right)$

- Prueba hipótesis de la relación de la variable respuesta con la variable concomitante (independiente) (Prueba de la Pendiente)

- Si no se rechaza la hipótesis nula de la prueba de la pendiente, se procede con un ANVA con la variable respuesta y se procede con la prueba hipótesis de tratamientos, sin considerar la variable X.

- Si se rechaza la hipótesis nula de la prueba de la pendiente, se procede con el ANCOVA para obtener las sumas de cuadrados ajustadas $\left(SC_{aj.}\right)$ y se procede con la prueba hipótesis de tratamientos ajustados.

Ejemplo

Se utilizó un experimento para determinar si tres tipos de dietas producen el mismo peso en gallinas (en cientos de gramos). Por ello se registró el peso inicial (en cientos de gramos) de las gallinas antes del experimento. Los datos obtenidos fueron:

Peso inicial	3	4	7	8	9	8	10	10	11
Peso final	12.0	14.0	16.0	20.2	21.3	18.9	19.0	19.2	20.0
Dieta	A	A	A	B	B	B	C	C	C

1) Definir el modelo aditivo lineal o modelo estadístico
2) Elaborar ANCOVA y hacer las pruebas respectivas a un nivel de significación del 5%
3) Hacer pruebas de comparación

Ejemplo: Modelo aditivo lineal

El modelo aditivo lineal es el siguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta\left(X_{ij} - \bar{X}_{\cdot\cdot}\right) + \varepsilon_{ij} \qquad i=1,\ldots,t$$

Donde:

Y_{ij} : es el peso final de gallinas en cientos de gramos tratadas en el i-ésimo tipo de dieta, de la j-ésima repetición.

μ : es el efecto de la media general de los pesos.

τ_i : es el efecto de la i-ésimo tipo de dieta.

β : es el coeficiente de regresión lineal del Y, el peso final de las gallinas, sobre X, el peso inicial.

X_{ij} : es el peso inicial (en cientos de gramos) de las gallinas tratadas con el i-ésimo tipo de dieta, j-ésima repetición.

$\bar{X}_{\cdot\cdot}$: es el peso medio de las gallinas.

ε_{ij} : es el efecto del error experimental con la i-esima dieta, en la j-ésimo repetición.

*t =3 (*número de tratamientos).

Repetición	A		B		C	
	X	Y	X	Y	X	Y
1	3	12	8	20.2	10	19
2	4	14	9	21.3	10	19.2
3	7	16	8	18.9	11	20
Total	**14**	**42**	**25**	**60.4**	**31**	**58.2**

Análisis de Covariancia

Cálculo de Términos de Corrección:

$$TC_x = \frac{x_{..}^2}{n} \qquad TC_{XY} = \frac{X_{..}Y_{..}}{n} \qquad TC_Y = \frac{Y_{..}^2}{n}$$

$$TC_x = \frac{(3 + 4 + \ldots + 11)^2}{9} = \frac{(70)^2}{9} = 544.44 \qquad TC_{XY} = \frac{(70)(160.6)}{9} = 1249.11$$

$$TC_Y = \frac{(12.0 + 14.0 + \ldots + 20.0)^2}{9} = 2865.82$$

1. Calcule los grados de libertad de las fuentes de variación
2. Calcule las sumas de cuadrados total X e Y, y la suma de productos total (Trat+Error)

$$SC_{XX} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} X_{ij}^2 - TC_X \qquad SP_{XY} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} X_{ij}Y_{ij} - TC_{XY}$$

$$SC_{YY} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij}^2 - TC_Y$$

Donde:

$$TC_X = \frac{(X_{\bullet\bullet})^2}{n} \qquad TC_{XY} = \frac{(X_{\bullet\bullet})(Y_{\bullet\bullet})}{n} \qquad TC_Y = \frac{(Y_{\bullet\bullet})^2}{n}$$

3. Calcule la suma de cuadrados en X e Y, y la suma de productos para cada una de las fuentes de variación

Para tratamientos:

$$T_{XX} = \sum_{i=1}^{t} \frac{(X_{i\bullet})^2}{n_i} - TC_X \qquad T_{XY} = \sum_{i=1}^{t} \frac{X_{i\bullet} Y_{i\bullet}}{n_i} - TC_{XY}$$

$$T_{YY} = \sum_{i=1}^{t} \frac{(Y_{i\bullet})^2}{n_i} - TC_Y$$

Para el error (por diferencia):

$$E_{XX} = SC_{XX} - T_{XX} \qquad E_{YY} = SC_{YY} - T_{YY} \qquad E_{XY} = SP_{XY} - T_{XY}$$

4. Calcule las sumas de cuadrados ajustadas

$$SC_E = E_{YY} - \frac{E_{XY}^2}{E_{XX}} \qquad SC_{T+E} = SC_{YY} - \frac{SP_{XY}^2}{SC_{XX}}$$

5. Calcule los cuadrados medios ajustados y sus grados de libertad

Cálculo de Sumas de Cuadrados y Sumas de Productos Totales:

$$SC_{XX} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} X_{ij}^{2} - TC_X = (3^2 + 4^2 + \ldots + 11^2) - 544.44 = 604 - 544.44 = 59.56$$

$$SP_{XY} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} X_{ij}\, Y_{ij} - TC_{XY} = (3)(12) + (4)(14) + \cdots + (11)(20.0) - 1249.11$$

$$= 1310.5 - 1249.11 = 61.39$$

$$SC_{YY} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij}^{2} - TC_{XY} = (12^2 + 14^2 + \ldots + 20^2) - 2865.82 = 78.76$$

Cálculo de Sumas de Cuadrados y Sumas de Productos de Tratamientos:

$$T_{XX} = \sum_{i=1}^{t} \frac{X_{i.}^{\,2}}{n_i} - TC_X = 49.56 \qquad T_{XY} = \sum_{i=1}^{t} \frac{X_{i.}Y_{i.}}{n_i} - TC_{XY} = 51.62$$

$$T_{YY} = \sum_{i=1}^{t} \frac{Y_{i.}^{\,2}}{n_i} - TC_Y = 67.32$$

Para el error (por diferencia):

$$E_{XX} = SC_{XX} - \ T_{XX} = 59.56 - 49.56 = \ 10$$

$$E_{XY} = SP_{XY} - \ T_{XY} = 61.39 - 51.62 = 9.77$$

$$E_{YY} = SC_{YY} - T_{YY} = 78.76 - 67.32 = 11.44$$

Cuadro ANCOVA

F.V	G.L	S.C. Y S.P. ΣX^2	ΣXY	ΣY^2	S.C. aj. $\Sigma Y^2 - (\Sigma XY)^2/\Sigma X^2$	G.L aj.	C.M. aj.
Trat	t - 1	Txx	Txy	Tyy			
Error	n - t	Exx	Exy	Eyy	$SC_E = Eyy - \frac{(Exy)^2}{Exx}$	n – t - 1	$\frac{SCE_{aj}}{GLE_{aj}}$
Trat + Error (Total)	n – 1	SCxx	SPxy	SCyy	$SC_{T+E} = SCyy - \frac{(SPxy)^2}{SCxx}$		
DIFERENCIA PARA PRUEBAS DE MEDIAS AJUSTADAS DE TRAT					$SCTrat_{aj} = SC_{T+E} - SC_E$	t - 1	$\frac{CMTrat_{aj}}{GLTrat_{aj}}$

Cálculo de Sumas de Cuadrados Ajustadas:

$$SC_E = E_{YY} - \frac{{E_{XY}}^2}{E_{XX}} \qquad SC_{T+E} = SC_{YY} - \frac{{SP_{XY}}^2}{SC_{XX}}$$

Cuadro ANCOVA

F.V	G.L	S.C. Y S.P. $\sum X^2$ $\sum XY$ $\sum Y^2$	S.C Ajust. $\sum Y^2 - (\sum XY)^2 / \sum X^2$	G.L aj.	C.M.aj.
TRAT	2	49.56 51.62 67.32			
EE	6	10.00 09.77 11.44	1.89	5	0.3789
TRAT + EE	8	59.56 61.39 78.76	15.49		
DIFERENCIA PARA PRUEBAS DE MEDIAS AJUSTADAS DE TRAT.			13.589	2	6.79

Pruebas de Hipótesis

a) Prueba de influencia de la covariable en el experimento

P1) Planteamiento de Hipótesis

Ho: $\beta = 0$ (la variable respuesta depende linealmente de la covariable)
H1: $\beta \neq 0$ (la variable respuesta no depende linealmente de la covariable)

P2) Nivel de significación α

P3) Estadístico de Prueba

$$F_{cal} = \frac{\frac{E_{XY}^2}{E_{XX}}}{CME\ aj} \sim F_{(1,GLE\ aj)}$$

P4) Criterios de Decisión

Si $F_{cal} > F_{(1-\alpha,1,GLE\ aj)}$ entonces se rechaza H_0.

P5) Conclusión

Prueba hipótesis de la relación de Y respecto a X
Hipotesis para el Coeficiente de Regresión

Pruebe si el peso inicial influye sobre el peso final.
Use α = 0.05

Ho: β = 0 (el peso final de las gallinas no depende linealmente del peso inicial)
H1: β ≠ 0 (el peso final de las gallinas depende linealmente del peso inicial de las gallinas)
α = 0.05

Prueba estadística:

$$F_C = \frac{\left(\frac{E_{XY}^2}{E_{XX}}\right)}{CME_{aj.}} = \frac{\left(\frac{9.77^2}{10}\right)}{0.3789} = 25.19 \sim F_{(0.95,1,5)}$$

$$F_{(1,gl\ \text{Eajust.})}$$

Criterio de decisión:

$Si\ F_C \leq 6.61 = F_{(0.95,1,5)}$ *no se rechaza Ho*

$Si\ F_C > 6.61 = F_{(0.95,1,5)}$ *se rechaza Ho*

Conclusión de la relación de la variable Y respecto a X

Con un nivel de significación del 5% se rechaza la hipótesis nula (Ho).

Por lo tanto, se tiene evidencia estadística para afirmar que **existen una dependencia lineal del Peso Final respecto al Peso inicial.**

P from F

F	25.19
DFn	1
DFd	5

P Value Results

F=25.19 DFn=1 DFd=5

The P value equals 0.0040

https://www.graphpad.com/quickcalcs/pvalue1.cfm

- *p value* = 0.0040 (*Pvalue calculator*)
- *p value* = 0.004105 (*Pvalue según Rstudio, usando* *"lm(PesoF ~ Dieta + PesoI)"*)
- *p value* < "alpha" (0.05)
- Se rechaza "H_0"
- Existen una dependencia lineal del Peso Final respecto al Peso inicial.

Pruebas de Hipótesis

b) Prueba de medias ajustadas

Si la variable respuesta depende linealmente de la covariable entonces las medias simples deben corregirse por intervención de esta, y se denominarán medias ajustadas.

La siguiente prueba de hipótesis verifica si el efecto de al menos uno de los tratamientos influye sobre la media ajustada de la variable respuesta.

P1) Planteamiento de Hipótesis

$$H_0 : \mu_{1.aj} = \mu_{2.aj} = \ldots = \mu_{t.aj} \qquad \forall i = 1,2,\ldots,t$$

$$H_1 : Al \ \ menos \ \ un \ \mu_{i.aj} \ es \ \ distinto \ \ a \ \ los \ \ demás$$

P2) Nivel de significación α

P3) Estadístico de Prueba

$$F_{cal} = \frac{CMTrat\ aj}{CME\ aj} \sim F_{(GLTrat\ aj, GLE\ aj)}$$

P4) Criterios de Decisión

Si $F_{cal} > F_{(1-\alpha,\ GLTrat\ aj, GLE\ aj)}$ entonces se rechaza H_0.

P5) Conclusión

Prueba hipótesis para los tratamientos

Probar si al menos una de las dietas produce diferente peso promedio final.

Ho: $\mu_{iajus} = \mu_{iajus}$ para todo i = 1,2,3.

H1 : Al menos una μ_{iajus} es diferente·

Use α = 0.05

Prueba estadística: $F_C = \frac{CM(Trat)_{aj.}}{CME_{aj.}} = \frac{6.79}{0.3789} = 17.92 \sim F_{(0.95,2,5)}$

Criterio de decisión:

$Si\ F_C \leq 5.79 = F_{(0.95,2,5)}\ no\ se\ rechaza\ Ho$

$Si\ F_C > 5.79 = F_{(0.95,2,5)}\ se\ rechaza\ Ho$

Conclusión respecto comparación delos tratamientos

Con un nivel de significación del 5% se rechaza la hipótesis nula (Ho).
Por lo tanto, se tiene evidencia estadística para afirmar que al menos **una dieta ocasiona un incremento en el peso distinto al de las demás dietas.**

O también “al menos uno de los alimentos no produce el mismo peso final medio ajustado por el peso inicial”

P from F

F	17.92
DFn	2
DFd	5

P Value Results

F=17.92 DFn=2 DFd=5

The P value equals 0.0052

https://www.graphpad.com/quickcalcs/pvalue1.cfm

- *p value* = 0.0052 (*Pvalue calculator*)
- *p value* = 0.00533 (*Pvalue según Rstudio* *lm(PesoF ~ PesoI + Dieta)*))
- *p value* < "alpha" (0.05)
- Se rechaza "H_0"
- Al menos una dieta ocasiona un incremento en el peso distinto al de las demás dietas.

Pruebas de Comparación de medias

Compare los tratamientos utilizando la prueba de Tukey. ¿Qué tratamiento recomendaría?

Use α = 0.05

$$\hat{\beta} = \frac{E_{XY}}{E_{XX}} = \frac{9.77}{10.0} = 0.977$$

Prueba de Tukey

$$ALS(T) = AES(T) * \overbrace{\sqrt{\frac{CME_{ajust}}{2}\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} + \frac{\left(\bar{X}_i - \bar{X}_j\right)^2}{E_{XX}}\right)}}^{S_d}$$

Medias Ajustadas: $\bar{X}_{1.} = 4.67$ $\bar{X}_{2.} = 8.33$ $\bar{X}_{3.} = 10.33$ $\bar{X}_{..} = 7.78$

$$\bar{Y}_{i.ajust} = \bar{Y}_{i.} - \hat{\beta}\left(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}\right)$$

$\bar{Y}_{1.} = 14.0$ $\bar{Y}_{2.} = 20.13$ $\bar{Y}_{3.} = 19.4$ $\bar{Y}_{..} = 17.84$

$$\bar{Y}_{1.ajust} = \bar{Y}_{1.} - \hat{\beta}\left(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{..}\right) = 14 - 0.977(4.67 - 7.78) = 17.03$$

$$\bar{Y}_{2.ajust} = \bar{Y}_{2.} - \hat{\beta}\left(\bar{X}_{2.} - \bar{X}_{..}\right) = 20.13 - 0.977(8.33 - 7.78) = 19.59$$

$$\bar{Y}_{3.ajust} = \bar{Y}_{3.} - \hat{\beta}\left(\bar{X}_{3.} - \bar{X}_{..}\right) = 19.4 - 0.977(10.33 - 7.78) = 16.91$$

ALS: amplitud limite significativa

Pruebas de Comparación de medias

$$H_0 : \mu_{1\,ajust} = \mu_{2\,ajust} \qquad H_0 : \mu_{1\,ajust} = \mu_{3\,ajust} \qquad H_0 : \mu_{2\,ajust} = \mu_{3\,ajust}$$

$$H_1 : \mu_{1\,ajust} \neq \mu_{2\,ajust} \qquad H_1 : \mu_{1\,ajust} \neq \mu_{3\,ajust} \qquad H_1 : \mu_{2\,ajust} \neq \mu_{3\,ajust}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\underbrace{AES(T)}_{\substack{p=3 \\ GLE_{ajust}=5 \\ \alpha=0.05}} = 4.60$$

$$Comp\ A\ vs.\ B : ALS(T) = 4.60\sqrt{\frac{0.3789}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{(4.67-8.33)^2}{10}\right)} = 2.836$$

$$Comp\ A\ vs.\ C : ALS(T) = 4.60\sqrt{\frac{0.3789}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{(4.67-10.33)^2}{10}\right)} = 3.939$$

$$Comp\ B\ vs.\ C : ALS(T) = 4.60\sqrt{\frac{0.3789}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{(8.33-10.33)^2}{10}\right)} = 2.068$$

AES: amplitud estudentizado significativa

Gráfico de líneas:

C A B

Dietas	N	Media	Agrupación	
2	3	19.5907	A	
1	3	17.0385	A	B
3	3	16.9041		B

Tabla de comparación de medias

Tratamientos A comparar	$\left\| \bar{Y}_{i \cdot ajust} - \bar{Y}_{j \cdot ajust} \right\|$	Sd	ALS (T)	SIG.
A y B	2.562	0.8563	2.836	n.s.
A y C	0.122	0.6175	3.939	n.s.
B y C	2.684	0.4495	2.068	*

Conclusiones.
Con un nivel de significación del 5% se concluye lo siguiente:
No hay diferencias en los pesos promedio finales de las dietas A y B, tampoco hay diferencias entre las dietas A y C.
Se puede afirmar que **si hay diferencias en los resultados de los pesos finales de las dietas B y C**

UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA LA MOLINA

Ancova DBCA

ANACOVA - Analysis of Covariance

Dr. Christian R. Encina Zelada

cencina@lamolina.edu.pe

Análisis de Covarianza en un DBCA

Ejemplo de Aplicación 1.
Se desarrolló un experimento cuyo objetivo era determinar si la exposición en agua calentada artificialmente afectaba el crecimiento de las ostras. Cinco bolsas con diez ostras cada una fueron aleatoriamente asignadas a cinco temperaturas (T1, T2, T3, T4, T5); cada bolsa constituía una unidad experimental.
Se utilizaron cinco estanques, cada uno calentado a una de las cinco temperaturas. Las ostras fueron limpiadas y pesadas al comienzo y al final del experimento un mes después.
El experimento se repitió cuatro veces para lo cual fueron necesarios 4 meses. **Cada repetición constituye un bloque.** Los pesos iniciales y finales se presentan en la siguiente tabla:

Análisis de Covarianza en un DBCA

Bloq.	T1		T2		T3		T4		T5		TOTAL	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
I	20.4	24.6	27.2	32.6	26.8	31.7	22.4	29.1	21.8	27.0	118.6	145.0
II	19.6	23.4	32.0	36.6	26.5	30.7	23.2	28.9	24.3	30.5	125.6	150.1
III	25.1	30.3	33.0	37.7	26.8	30.4	28.6	35.2	30.3	36.4	143.8	170.0
IV	18.1	21.8	26.8	31.0	28.6	33.8	24.4	30.2	29.3	35.0	127.2	151.8
Total	83.2	100.1	119.0	137.9	108.7	126.6	98.6	123.4	105.7	128.9	515.2	616.9

X: Peso inicial de las bolsas
Y: Peso final de las bolsas

Modelo aditivo lineal en un DBCA

$$Y_{ij} = \mu + t_i + \gamma_j + \beta(X_{ij} - \bar{X}_{..}) + \varepsilon_{ij} \qquad i=1,\ldots,t \qquad j=1,\ldots b$$

Donde:

Y_{ij}: es el peso final de una bolsa de ostras tratada con la i- ésima temperatura de agua (tratamiento) en el j-ésimo mes (bloque).

μ : es el efecto de la media general de los pesos.

τ_i : es el efecto de la i-esima temperatura del agua.

γ_j : es el efecto del j-esimo bloque.

β : es el coeficiente de regresión lineal del Y, el peso final de las ostras, sobre X, el peso inicial.

X_{ij}: es el peso inicial de una bolsa de ostras tratada con la i-ésima temperatura de agua (tratamiento) en el j-ésimo mes (bloque).

$\overline{X_{..}}$: es el peso medio inicial de las bolsas de ostras.

ε_{ij} : es el efecto del error experimental con la i-esima temperatura de agua, en el j-esimo mes.

t =5 (número de tratamientos).

b=4 (número de bloques).

b) Construya el cuadro ANCOVA

Cálculo de Sumas de Cuadrados y Sumas de Productos

Totales:

$$SC(X) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} X_{ij}^2 - TC_x$$

$$= (20.4^2 + 19.6^2 + \ldots + 29.3^2) - \frac{515.2^2}{(5)(4)} = 309.79$$

$$SP(XY) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} X_{ij}Y_{ij} - TC_{xy}$$

$$= \{(20.4)(24.6) + (19.6)(23.4) + \cdots + (29.3)(35.0)\} - \frac{(515.2)(616.9)}{(5)(4)} = 325.67$$

$$SC(Y) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} X_{ij}^2 - TC_y$$

$$=(24.6^2 + 23.4^2 + \ldots + 35.0^2) - \frac{616.9^2}{(5)(4)} = 358.67$$

Bloques

$$B_{XX} = \sum_{j=1}^{b} \frac{X_{\bullet j}^2}{t} - TC_x$$

$$= \frac{(118.6^2 + 125.6^2 + ... + 127.2^2}{5} - \frac{515.2^2}{(5)(4)} = 68.37$$

$$B_{XY} = \sum_{j=1}^{b} \frac{X_{.j} Y_{.j}}{t} - TC_{XY}$$

$$= \frac{((118.6)(145.0) + (125.6)(150.1) + \cdots + (127.2)(151.8))}{5} - \frac{(515.2)(616.9)}{(5)(4)} = 69.56$$

$$B_{YY} = \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{\bullet j}^2}{t} - TC_y$$

$$\frac{(145.0^2 + 150.1^2 + \dots + 151.8^2)}{5} - \frac{616.9^2}{(5)(4)} = 71.37$$

Tratamientos

$$T_{XX} = \sum_{i=1}^{t} \frac{X_{i\bullet}^2}{b} - TC_x$$

$$= \frac{(83.2^2 + 119.0^2) + \dots + 105.7^2)}{4} - \frac{515.2^2}{(5)(4)} = 176.79$$

$$T_{XY} = \sum_{i=1}^{t} \frac{X_{i\bullet} Y_{i\bullet}}{b} - TC_{XY}$$

$$= \frac{((83.2)(100.1) + (119.0)(137.9) + \cdots + (105.7)(128.9))}{4} - \frac{(515.2)(616.9)}{(5)(4)} = 181.61$$

$$T_{YY} = \sum_{i=1}^{t} \frac{Y_{i\bullet}^2}{b} - TC_Y$$

$$= \frac{(100.1^2 + 137.9^2) + \dots + 128.9^2)}{4} - \frac{616.9^2}{(5)(4)} = 198.41$$

Errores:

$$E_{XX} = SC(X) - B_{XX} - T_{XX}$$
$$= 309.79 - 68.37 - 176.79 = 64.63$$

Errores:

$$E_{XX} = SC(X) - B_{XX} - T_{XX}$$
$$= 309.79 - 68.37 - 176.79 = 64.63$$

$$E_{XY} = SP(XY) - B_{XY} - T_{XY}$$
$$= 325.67 - 69.56 - 181.61 = 74.50$$

$$E_{YY} = SC(Y) - B_{YY} - T_{YY}$$
$$= 358.67 - 71.37 - 198.41 = 88.89$$

Cuadro ANCOVA:

F.V	G.L	S.C. Y S.P. ΣX^2	ΣXY	ΣY^2	S.C Ajust. $\Sigma Y^2 - (\Sigma XY)^2/\Sigma X^2$	G.L aj.	C.M.aj.
TOTAL	19	309.79	325.67	358.67			
BLOQ	3	68.37	69.56	71.37			
TRAT	4	176.79	181.61	198.41			
EE	12	64.63	74.50	88.89	3.0175	11	0.2743
TRAT + EE	16	241.42	256.11	287.30	15.6146		
DIFERENCIA PARA PRUEBAS DE MEDIAS AJUSTADAS DE TRAT					12.5971	4	3.1493

Desarrollo del ejemplo de aplicación 1. Prueba de la pendiente

Prueba de Hipótesis para el Coeficiente de Regresión o de la pendiente

Hipótesis:

$H_0 : \beta = 0$

$H_1 : \beta \neq 0$

Estadístico de Prueba:

$$Fc = \frac{\frac{E^2xy}{Exx}}{CMEaj.} \sim F_{(1, gl(Error\ aj.))}$$

Regla de Decisión:

La hipótesis nula se rechaza con un nivel de significación α si el Fc resulta mayor que el valor de tabla $F_{(1-\alpha, 1, gl(Error\ aj.))}$.

Desarrollo del ejemplo de aplicación 1.

Prueba para el Coeficiente de Regresión

H_0: $\beta = 0$ (El peso final de las ostras no depende linealmente del peso inicial)
H_1: $\beta \neq 0$ (El peso final de las ostras sí depende linealmente del peso inicial)

$\alpha = 0.05$

$$Fc = \frac{\frac{E^2xy}{Exx}}{\text{CME aj.}} = \frac{\frac{74.50^2}{64.68}}{0.2743} = 313.05 \sim F_{(1,11)}$$

Criterio de decisión:

$$Si\ F_C \leq 4.84 = F_{(0.95,1,11)}\ no\ se\ rechaza\ Ho$$

$$Si\ F_C > 4.84 = F_{(0.95,1,11)}\ se\ rechaza\ Ho$$

Conclusión:

Con un nivel de significación del 5% se rechaza Ho y se concluye que existe suficiente evidencia estadística para aceptar que **el peso final de las ostras depende linealmente del peso inicial.**

P from F

F	313.05
DFn	1
DFd	11

P Value Results

F=313.05 DFn=1 DFd=11

The P value is less than 0.0001

https://www.graphpad.com/quickcalcs/pvalue1.cfm

- *p value* = 0.0001 (*Pvalue calculator*)
- *p value* = <0.0001 (*Pvalue según Rstudio, usando* *"ancova(PesoF1 ~ PesoI1 + Temperatura+Mes, data = datos.3)"*)
- *p value* < "alpha" (0.05)
- Se rechaza "H_0"
- El peso final de las ostras depende linealmente del peso inicial.

Desarrollo del ejemplo de aplicación 1.
Prueba de hipótesis para tratamientos

Prueba de Hipótesis para los efectos de los tratamientos

Hipótesis:

Ho: $\mu_{i\,aj.} = \mu_{aj.}$ para i= 1,2,3,4,5

H1: $\mu_{i\,aj.} \neq \mu_{aj.}$ para al menos algún i

ó literalmente:

$\alpha = 0.05$

H_0 : Las cinco temperaturas son igualmente efectivas en el crecimiento de las ostras.

H_1 :Con al menos una de las temperaturas se obtienen resultados diferentes en el crecimiento de ostras.

$$Fc = \frac{CM(Trat\ aj.)}{CME\ aj.} = \frac{3.1493}{0.2743} = 11.48 \sim F_{(4,11)}$$

Desarrollo del ejemplo de aplicación 1

Criterio de decisión:

$$Si\ F_C \leq 3.36 = F_{(0.95,4,11)}\ no\ se\ rechaza\ Ho$$

$$Si\ F_C > 3.36 = F_{(0.95,4,11)}\ se\ rechaza\ Ho$$

Conclusión:

Con un nivel de significación del 5%, se rechaza H_0 y se concluye que existe suficiente evidencia estadística para aceptar que con **al menos en una temperatura se obtiene un peso final diferente para las ostras.**

P from F

F	11.48
DFn	4
DFd	11

P Value Results

F=11.48 DFn=4 DFd=11

The P value equals 0.0006

https://www.graphpad.com/quickcalcs/pvalue1.cfm

- *p value* = 0.0006 (*Pvalue calculator*)
- *p value* = 0.00077 (*Pvalue según Rstudio, usando* *"ancova(PesoF1 ~ PesoI1 + Temperatura+Mes, data = datos.3)"*
- *p value* < "alpha" (0.05)
- Se rechaza "H_0"
- Al menos en una temperatura se obtiene un peso final diferente para las ostras.

Pruebas de Comparación de Medias de Tratamientos

Pendiente:

$$\hat{\beta} = \frac{E_{xy}}{Exx}$$

Las medias de los tratamientos ajustadas por la regresión, el cual es dado por:

$$\bar{Y}_{j.aj} = \bar{Y}_{j.} - \hat{\beta}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})$$

Las desviaciones estándar para las pruebas son:

Prueba *t* y DSL

$$s_{d} = \sqrt{CME\ aj.\left[\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} + \frac{(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{j.})^2}{E_{xx}}\right]}$$

Tukey

$$s_{d} = \sqrt{\frac{CME\ aj.dy}{2}\left[\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} + \frac{(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{j.})^2}{E_{xx}}\right]}$$

Dunnett

$$s_{d} = \sqrt{CME\ aj.\left[\frac{1}{r_T} + \frac{1}{r_i} + \frac{(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{i.})^2}{E_{xx}}\right]}$$

Desarrollo del ejemplo de aplicación 1. Comparación de medias (continuación)

Efectué la prueba de Tukey.

Las hipótesis son las siguientes:

H_0: $\mu_{i\ aj.} = \mu_{j\ aj.}$ $\quad \forall\ i\ j = 1,2,\ldots 5, con\ i\ \neq j$

H_1: : $\mu_{i\ aj.} \neq \mu_{j\ aj.}$

El coeficiente de regresión estimado es:

$$\hat{\beta} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}} = \frac{74.50}{64.63} = 1.1527$$

Las medias de Y ajustadas para cada tratamiento según la formula

$$\bar{Y}_{i\bullet\ aj.} = \bar{Y}_{i\bullet} - \hat{\beta}(\bar{X}_{i\bullet} - \bar{X}_{\bullet\bullet})$$

Son:

$\bar{Y}_{1\bullet\ aj} = 30.74$ $\quad \bar{Y}_{2\bullet\ aj} = 29.88$ $\quad \bar{Y}_{3\bullet aj.} = 30.02$ $\quad \bar{Y}_{4\bullet\ aj.} = 32.13$ $\quad \bar{Y}_{5\bullet\ aj.} = 31.46$

Desarrollo del ejemplo de aplicación 1. Comparación de medias (continuación)

El valor de tabla con α = 5%, *p* = 5 tratamientos y 11 grados de libertad para el error ajustado es AES(T) = 4.57. La amplitud limite significativa de Tukey está dada por la siguiente fórmula:

$$ALS(T) = AES(T)\sqrt{\frac{CME\ aj.}{2}\left[\frac{2}{b} + \frac{\left(\overline{X}_{i\bullet} - \overline{X}_{j\bullet}\right)^2}{E_{xx}}\right]}$$

Donde b = 4, CME aj. = 0.2743 y Exx = 64.63

ALS: amplitud limite significativa
AES: amplitud estudentizado significativa

Desarrollo del ejemplo de aplicación 1. Comparación de medias (continuación)

Tratamientos comparados	$\left\lvert \bar{Y}_{i\,aj.} - \bar{Y}_{j\,aj.} \right\rvert$	s_d	ALS(T)	Significancia
1 y 2	0.867	0.488	2.232	n.s.
1 y 3	0.724	0.393	1.789	n.s.
1 y 4	1.387	0.316	1.445	n.s.
1 y 5	0.716	0.368	1.684	n.s.
2 y 3	0.143	0.287	1.314	n.s.
2 y 4	2.254	0.352	1.608	*
2 y 5	1.583	0.303	1.386	*
3 y 4	2.111	0.287	1.310	*
3 y 5	1.440	0.264	1.207	*
4 y 5	0.671	0.274	1.254	n.s.

Gráfico de líneas:

T4 T5 T1 T3 T2

*ALS: amplitud limite significativa

P5) Conclusión

A un nivel de significación del 5% se puede afirmar que al analizar el peso final medio de las ostras ajustado por su peso inicial:

- No existen diferencias significativas entre la temperatura 1 con las temperaturas 2, 3, 4 y 5.
- No existen diferencia significativa entre la temperatura 2 con la temperatura 3 pero sí con las temperaturas 4 y 5.
- Existe diferencias significativas entre la temperatura 3 con las temperaturas 4 y 5
- No existe diferencia significativa entre la temperatura 4 y 5.

Desarrollo del ejemplo de aplicación 1.
Prueba de hipótesis para BLOQUES

Hipótesis:

H_0 : Los cuatro meses son igualmente efectivas en el crecimiento de las ostras.
H_1 :Con al menos un de los meses se obtienen resultados diferentes en el crecimiento de ostras.

$$\alpha = 0.05$$

$$Fc = \frac{CM(\text{ mes } aj.)}{CME\ aj.} = \frac{0.4}{0.2743} = 1.46 \sim F_{(3,11)}$$

Desarrollo del ejemplo de aplicación 1

Criterio de decisión:

$$Si\ F_C \leq 3.99 = F_{(0.95,3,11)}\ no\ se\ rechaza\ Ho$$
$$Si\ F_C > 3.99 = F_{(0.95,3,11)}\ se\ rechaza\ Ho$$

Conclusión:
Con un nivel de significación del 5%, no se rechaza H_0 y se concluye que existe suficiente evidencia estadística para aceptar que con **los meses no influyen en el crecimiento de las ostras.**

P from F

F	1.46
DFn	3
DFd	11

P Value Results

F=1.46 DFn=3 DFd=11

The P value equals 0.2788

https://www.graphpad.com/quickcalcs/pvalue1.cfm

- *p value* = 0.2788 (*Pvalue calculator*)
- *p value* = 0.2778 (*Pvalue según Rstudio, usando* *"ancova(PesoF1 ~ PesoI1 + Temperatura+Mes, data = datos.3)"*
- *p value* > "alpha" (0.05)
- NO se rechaza "H_0"
- Los meses no influyen en el crecimiento de las ostras.