Regla del gradiente

En este modelo ambas empresas fijan precios según la regla de la gradiente basada en la utilidad marginal de los gerentes. El sistema dinámico no lineal en dos dimensiones resultante de la particularización de $p_{i,t+1} = p_{i,t} + \alpha_i(p_{i,t})\dfrac{\partial U_i}{\partial p_{i,t}},\ \forall i = L,H$ es:

$$f_B : \begin{cases} p_{L,t+1} = p_{L,t} + \alpha\, p_{L,t}\dfrac{1}{\delta}\left(p_H - 2p_L + c - \gamma_L\right) \\ p_{H,t+1} = p_{H,t} + \alpha\, p_{H,t}\dfrac{1}{\delta}\left(-2p_H + \delta + p_L + c - \gamma_H\right) \end{cases} \tag{1}$$

Este sistema tiene tres equilibrios frontera: $(0,0)$, $\left(0,\dfrac{\delta + c - \gamma_H}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{c-\gamma_L}{2},0\right)$[1] y un punto de equilibrio interior que coincide con el equilibrio Bertrand- Nash alcanzado en el modelo estático: $E^* = \left(\left(\dfrac{1}{3}\right)(-2\gamma_L + 3c - \gamma_H + \delta), \left(\dfrac{1}{3}\right)(-2\gamma_H + 3c - \gamma_L + 2\delta)\right)$.

La matriz Jacobiana de la función no lineal f_B, evaluada en E^* es:

$$Jf_B\left(E^*\right) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha\, p_L^*\left(\dfrac{2}{\delta}\right) & \alpha\, p_L^*\left(\dfrac{1}{\delta}\right) \\ \alpha\, p_H^*\left(\dfrac{1}{\delta}\right) & 1 - \alpha\, p_H^*\left(\dfrac{2}{\delta}\right) \end{pmatrix} \tag{2}$$

cuya traza y determinante son respectivamente:

$$\begin{cases} T = 2 - \left(\dfrac{2}{\delta}\right)\alpha\left(p_L^* + p_H^*\right) \\ D = T - 1 + M \end{cases} \quad \text{con } M = \left(\dfrac{3}{\delta^2}\right)\alpha^2\left(p_L^* p_H^*\right) > 0 \tag{3}$$

donde a su vez:

[2] Se puede demostrar que estos tres equilibrios frontera son inestables.

$$\begin{cases} \left(p_L^* + p_H^*\right) = 2c + \delta - \left(\gamma_H + \gamma_L\right) \\ \left(p_L^* p_H^*\right) = \dfrac{1}{9}\left(-\gamma_H - 2\gamma_L + 3c + \delta\right)\left(-2\gamma_H + \gamma_L + 3c + 2\delta\right) \end{cases} \tag{4}$$

Proposición 3:

Asumiendo que las empresas ajustan su precio de acuerdo con la regla del gradiente, una condición suficiente para que el equilibrio Bertrand-Nash del modelo sea localmente asintóticamente estable es: $\alpha < \alpha_B = \left(\dfrac{2}{3}\right)\delta\left(\dfrac{\left(p_H^* + p_L^*\right) - \sqrt{p_H^{*2} + p_L^{*2} - p_H^* p_L^*}}{p_H^* p_L^*}\right)$ (5)

Si se introduce (4) en el valor genérico del umbral α_B se obtiene:

$$\alpha_B\left(c,\delta,\gamma_L,\gamma_H\right) = \frac{6\delta}{6c + 3\delta - \left(\gamma_L + \gamma_H\right) + \sqrt{3}\sqrt{3c^2 + \left(\delta - \gamma_H\right)^2 + 3c\left(\delta - \gamma_L - \gamma_H\right) + \left(\gamma_H - \delta\right)\gamma_L + \gamma_L^2}} \tag{6}$$

Para evaluar qué impacto que tienen $c, \delta, \gamma_L, \gamma_H$ sobre la estabilidad asintótica del equilibrio se calculan las derivadas parciales del umbral α_B (6). Antes de plantear estas derivadas parciales hay que tener en cuenta qué entorno económico es factible según los supuestos de partida del modelo.

Las condiciones económicas se pueden clasificar en tres categorías:

1. *Condición de existencia del mercado*: los beneficios económicos deben ser mayores o iguales a cero y los precios y cantidades producidas deben ser estrictamente mayores que cero.

   $\pi_i \geq 0$, $p_i > 0$, $q_i > 0$ $\forall i = L, H$ (7)

2. *Condiciones de existencia de incentivos*: dado que se asume separación entre gerencia y propiedad, se debe de imponer que los sistemas de bonus de los gerentes deben ser siempre mayores o iguales que cero. Si no, estos no tendrían incentivos para llevar a cabo su trabajo.

   $U_i \geq 0$ $\forall i = L, H$ (8)

3. *Condiciones de coherencia de los parámetros del modelo*: para mantener la coherencia dentro del modelo dinámico, los parámetros del modelo deben de estar acotados para el mismo rango de acción que para el caso del modelo estático

$$c > 0\ ,\ \delta = s_H - s_L > 0\ ,\ -1 \le \gamma_i \le 1 \forall i = L,H\ \ ,\ p_H^* > p_L^* \tag{9}$$

Además, con el objetivo de facilitar la interpretación se introduce el supuesto simplificador de que los parámetros γ_i , $\forall\, i = L,H$ tienen siempre el mismo signo; es decir, se asume que: $\gamma_i \le 0 \to \gamma_j \le 0$ o $\gamma_i \ge 0 \to \gamma_j \ge 0, \forall i, j = L,H$.

La resolución simultánea de (7), (8) y (9), más el supuesto de que los parámetros γ_i , $\forall\, i = L,H$ tienen siempre el mismo signo, da como resultado cuatro entornos factibles:

$$\begin{cases} \delta \ge \left(\gamma_H + 2\gamma_L\right),\ c > 0\ ,0 \le \gamma_i \le 1 \forall i = L,H \\ \gamma_H < \gamma_L\ ,\delta > \dfrac{-\gamma_H + \gamma_L}{2}\ ,c > 0,-1 \le \gamma_i \le 0 \forall i = L,H \\ \gamma_H = \gamma_L\ ,\delta > 0\ ,c > 0,-1 \le \gamma_i \le 0 \forall i = L,H \\ \gamma_H > \gamma_L\ ,\delta > \left(\gamma_H - \gamma_L\right),c > 0,-1 \le \gamma_i \le 0 \forall i = L,H \end{cases} \tag{10}$$

Dado el resultado de (10), a través del software *Mathematica* se comprueba qué signo tendrán las derivadas parciales de $c,\delta,\ \gamma_L,\gamma_H$ para los cuatro entornos económicos factibles.

En primer lugar, se obtiene que $\frac{\partial \alpha_2}{\partial c} < 0$ y, por tanto, cuanto mayor sea el coste marginal de las empresas menos estable el equilibrio de Nash, en el sentido de que menor longitud tiene el intervalo de valores del parámetro de velocidad de ajuste que garantizan la estabilidad.

$$\frac{\partial \alpha_B}{\partial c} = -\alpha_2 Z = -\alpha_2 \frac{6 + \dfrac{\sqrt{3}\left(6c + 3\left(\delta - \gamma_L - \gamma_H\right)\right)}{2\sqrt{3c^2 + \left(\delta - \gamma_H\right)^2 + 3c\left(\delta - \gamma_L - \gamma_H\right) + \left(\gamma_H - \delta\right)\gamma_L + \gamma_L^2}}}{6c + 3\delta - \left(\gamma_L + \gamma_H\right) + \sqrt{3}\sqrt{3c^2 + \left(\delta - \gamma_H\right)^2 + 3c\left(\delta - \gamma_L - \gamma_H\right) + \left(\gamma_H - \delta\right)\gamma_L + \gamma_L^2}} < 0 \tag{11}$$

La derivada de α_B respecto a δ no presenta resultados tan concluyentes, ya que dependerá de que valores tomen las variables γ_L y γ_H. Si las empresas fijan $\gamma_i > 0$, $\forall i = L,H$ el efecto dependerá del valor que tomen los parámetros del modelo; mientras que si ambas empresas fijan $\gamma_i < 0$, $\forall i = L, H$ el efecto será siempre positivo $\frac{\partial \alpha_B}{\partial \delta} > 0$ y, en consecuencia, un aumento en la diferenciación de producto incrementará la estabilidad del equilibrio de Betrand-Nash.

$$\frac{\partial \alpha_B}{\partial \delta} = \alpha_2 \left(\frac{1}{\delta} - \frac{3 + \frac{\sqrt{3}\left(3c + 2(\delta - \gamma_H) - \gamma_L\right)}{2\sqrt{3c^2 + (\delta - \gamma_H)^2 + 3c(\delta - \gamma_L - \gamma_H) + (\gamma_H - \delta)\gamma_L + \gamma_L^2}}}{6c + 3\delta - (\gamma_L + \gamma_H) + \sqrt{3}\sqrt{3c^2 + (\delta - \gamma_H)^2 + 3c(\delta - \gamma_L - \gamma_H) + (\gamma_H - \delta)\gamma_L + \gamma_L^2}} \right) \quad (12)$$

Por otro lado, la derivada de α_2 respecto de γ_H y γ_L es siempre positiva, $\frac{\partial \alpha_B}{\partial \gamma_L} > 0$ y $\frac{\partial \alpha_B}{\partial \gamma_H} > 0$, de manera una mayor remuneración basada en ventas tiene un efecto estabilizador sobre el equilibrio.

$$\frac{\partial \alpha_B}{\partial \gamma_L} = -\alpha_2 G = -\alpha_2 \frac{-3 + \frac{\sqrt{3}\left(\gamma_H + 2\gamma_L - 3 - \delta\right)}{2\sqrt{3c^2 + (\delta - \gamma_H)^2 + 3c(\delta - \gamma_L - \gamma_H) + (\gamma_H - \delta)\gamma_L + \gamma_L^2}}}{6c + 3\delta - (\gamma_L + \gamma_H) + \sqrt{3}\sqrt{3c^2 + (\delta - \gamma_H)^2 + 3c(\delta - \gamma_L - \gamma_H) + (\gamma_H - \delta)\gamma_L + \gamma_L^2}} > 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \alpha_B}{\partial \gamma_H} = -\alpha_2 F = -\alpha_2 \frac{-3 + \frac{\sqrt{3}\left(\gamma_L - 3c - 2(\delta - \gamma_H)\right)}{2\sqrt{3c^2 + (\delta - \gamma_H)^2 + 3c(\delta - \gamma_L - \gamma_H) + (\gamma_H - \delta)\gamma_L + \gamma_L^2}}}{6c + 3\delta - (\gamma_L + \gamma_H) + \sqrt{3}\sqrt{3c^2 + (\delta - \gamma_H)^2 + 3c(\delta - \gamma_L - \gamma_H) + (\gamma_H - \delta)\gamma_L + \gamma_L^2}} > 0 \quad (14)$$