Demostración esquema de incentivos $(\Pi_L - \beta_L * \Pi_H, \Pi_H - \beta_H * \Pi_L)$

En este documento se demuestra que, para el caso en que ambas empresas remuneran a sus gerentes en base a beneficios relativos $(\Pi_L - \beta_L * \Pi_H, \Pi_H - \beta_H * \Pi_L)$, la mejor respuesta de las empresas es fijar $\beta_L = 0$ y $\beta_H = 0$. En otro documento de este repositorio se encuentra la demostración para los otros casos en que alguna empresa fija una remuneración para sus gerentes basada en beneficios relativos.

Antes de plantear la demostración se recopilan una serie de ecuaciones del TFM claves para entender esta demostración.

Funciones de utilidad de los gerentes según su esquema de remuneración:

Remuneración en base a beneficios: $$U_i = (p_i - c)q_i \qquad (1)$$

Remuneración basada en beneficios y ventas: $$U_i = (p_i - c + \gamma_i)q_i \qquad (2)$$

Remuneración basada en beneficios relativos: $$U_i = (p_i - c)q_i - \beta_i(p_j - c)q_j \qquad (3)$$

donde $\gamma_i \in [-1,1]$, $\beta_i \in [0,1]$, $i, j =$ L, H, $i \neq j$,

Función de beneficios de las empresas

$$\begin{aligned} \pi_L &= (p_L - c)q_L \\ \pi_H &= (p_H - c)q_H \end{aligned} \qquad (4)$$

Demanda capturada por cada una de las empresas

$$\begin{aligned} q_H &= \frac{p_L - p_H + \delta}{\delta} \\ q_L &= \frac{p_H - p_L}{\delta} \end{aligned} \qquad (5)$$

Demostración de que $\beta_L = 0$ y $\beta_H = 0$ **en el caso de** $(\Pi_L - \beta_L * \Pi_H, \Pi_H - \beta_H * \Pi_L)$.

3ª Etapa:

$$\begin{aligned} \underset{p_L}{Max} U_L &= U_L(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H) = (p_L - c)q_L + \beta_L(p_H - c)q_H \\ \underset{p_H}{Max} U_H &= U_H(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H) = (p_H - c)q_H + \beta_H(p_L - c)q_L \end{aligned} \qquad (6)$$

Introduciendo (5) en (6), la función objetivo resultante será:

$$\begin{aligned}\underset{p_L}{Max}U_L &= U_L(p_L,p_H,\beta_L,\beta_H)=(p_L-c)\frac{p_H-p_L}{\delta}+\beta_L(p_H-c)\frac{\delta+p_L-p_H}{\delta}\\ \underset{p_H}{Max}U_H &= U_H(p_L,p_H,\beta_L,\beta_H)=(p_H-c)\frac{\delta+p_L-p_H}{\delta}+\beta_H(p_L-c)\frac{p_H-p_L}{\delta}\end{aligned} \qquad (7)$$

La condición de primer orden de (7) permite obtener las funciones de mejor respuesta para cada una de las empresas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_L(p_L,p_H,\beta_L,\beta_H)}{\partial p_L}&=0\rightarrow p_L=FMR_{L3}(p_H,\beta_L,\beta_H)\\ \frac{\partial U_H(p_L,p_H,\beta_L,\beta_H)}{\partial p_H}&=0\rightarrow p_H=FMR_{H3}(p_L,\beta_L,\beta_H)\end{aligned} \qquad (8)$$

donde FMR_{i3} representa la función de mejor respuesta de la empresa i en la etapa 3 del juego.

Derivando U_L y U_H respecto de a los precios de sus correspondientes empresas p_L y p_H se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_L(p_L,p_H,\beta_L,\beta_H)}{\partial p_L}&=\frac{1}{\delta}(-2p_L+(1-\beta_L)p_H+(1-\beta_L)c)\\ \frac{\partial U_H(p_L,p_H,\beta_L,\beta_H)}{\partial p_H}&=\frac{1}{\delta}(-2p_H+(1-\beta_H)p_L+(1-\beta_H)c+\delta)\end{aligned} \qquad (9)$$

Igualando (9) a 0 se obtienen las funciones de mejor respuesta de cada empresa

$$\begin{aligned}FMR_{L3}&=p_L=\frac{1}{2}((1-\beta_L)p_H+(1-\beta_L)c)\\ FMR_{H3}&=p_H=\frac{1}{2}((1-\beta_H)p_L+(1-\beta_H)c+\delta)\end{aligned} \qquad (10)$$

Las condiciones de segundo orden son las que garantizan que efectivamente las funciones de mejor respuesta maximizan la función objetivo de los gerentes de cada una de las empresas.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U_L(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H)}{\partial p_L{}^2} = -\frac{2}{\delta} < 0 \\
&\frac{\partial^2 U_H(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H)}{\partial p_H{}^2} = -\frac{2}{\delta} < 0
\end{aligned} \tag{11}$$

La intersección de las FMR define el equilibrio de Nash del subjuego de la 3ª etapa.

$$\begin{aligned}
&p_L^*(\beta_L, \beta_H) = \frac{\delta(1-\beta_L)}{\beta_H + \beta_L - \beta_H\beta_L + 3} + c \\
&p_H^*(\beta_L, \beta_H) = \frac{2\delta}{\beta_H + \beta_L - \beta_H\beta_L + 3} + c
\end{aligned} \tag{12}$$

Seguidamente, se sustituye (12) en (5) y se obtienen unas nuevas funciones de demanda

$$\begin{aligned}
&q_L = q_L(\beta_L, \beta_H) = \frac{1+\beta_L}{\beta_H + \beta_L - \beta_H\beta_L + 3} \\
&q_H = q_H(\beta_L, \beta_H) = \frac{\beta_H(1-\beta_L)+2}{\beta_H + \beta_L - \beta_H\beta_L + 3}
\end{aligned} \tag{13}$$

De igual forma, se sustituye (12) y (13) en (4) y se obtienen unas nuevas funciones de beneficios que dependen exclusivamente de los parámetros β_L y β_H.

$$\begin{aligned}
&\pi_L = \pi_L(\beta_L, \beta_H) = \frac{\delta(1-\beta_L{}^2)}{(\beta_H + \beta_L - \beta_H\beta_L + 3)^2} \\
&\pi_H = \pi_H(\beta_L, \beta_H) = \frac{2\delta(\beta_H - \beta_H\beta_L + 2)}{(\beta_H + \beta_L - \beta_H\beta_L + 3)^2}
\end{aligned} \tag{14}$$

2ª Etapa

$$\begin{aligned}
&\underset{\beta_L}{Max}\, \pi_L = \pi_L(\beta_L, \beta_H) = \frac{\delta(1-\beta_L{}^2)}{(\beta_H + \beta_L - \beta_H\beta_L + 3)^2} \\
&sa: \beta_L \in [0,1] \\
&\underset{\beta_H}{Max}\, \pi_H = \pi_H(\beta_L, \beta_H) = \frac{2\delta(\beta_H - \beta_H\beta_L + 2)}{(\beta_H + \beta_L - \beta_H\beta_L + 3)^2} \\
&sa: \beta_H \in [0,1]
\end{aligned} \tag{15}$$

Para demostrar que el resultado de optimizar este problema es equivalente al que proporciona el sistema de incentivos (π_L, π_H) se necesita demostrar que $\beta_L^* = 0 = \beta_H^*$.

Esto sucederá siempre y cuando el beneficio de las empresas sea mayor cuanto menor sea el valor de β_i, que en su valor extremo será 0.

Esto se cumplirá siempre y cuando:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \pi_L(\beta_L,\beta_H)}{\partial \beta_L} < 0 \forall \beta_L \in [0,1], \beta_H \in [0,1] \\
&\frac{\partial \pi_H(\beta_L,\beta_H)}{\partial \beta_H} < 0 \forall \beta_L \in [0,1], \beta_H \in [0,1]
\end{aligned} \tag{16}$$

Derivando π_L y π_H respecto a sus correspondientes β_i se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \pi_L(\beta_L,\beta_H)}{\partial \beta_L} = -\frac{2\delta\left(\beta_L(\beta_H+3)+(1-\beta_L)\right)}{(\beta_H+\beta_L-\beta_H\beta_L+3)^3} < 0 \\
&\frac{\partial \pi_H(\beta_L,\beta_H)}{\partial \beta_H} = -\frac{2\delta(1+\beta_H)(\beta_L-1)^2}{(\beta_H+\beta_L-\beta_H\beta_L+3)^3} < 0
\end{aligned}\right. \quad \forall\ \beta_L \in [0,1], \beta_H \in [0,1] \tag{17}$$

Por tanto, se cumple que $\beta_L^* = 0 = \beta_H^*$ será el resultado óptimo y los valores resultantes de beneficios, demanda y precios serán equivalentes al sistema (π_L, π_H).