Demostración casos particulares de $(\Pi_L + \gamma_L * q_L, \Pi_H + \gamma_H * q_H)$

En este documento están presentes las etapas 3ª y 2ª de la resolución por inducción hacia atrás de los tres casos particulares de $(\pi_L + \gamma_L q_L, \pi_H + \gamma_L q_L)$.

Antes de plantear la demostración se recopilan una serie de ecuaciones del TFM claves para entender esta demostración.

Funciones de utilidad de los gerentes según su esquema de remuneración:

Remuneración en base a beneficios: $$U_i = (p_i - c)q_i \tag{1}$$

Remuneración basada en beneficios y ventas: $$U_i = (p_i - c + \gamma_i)q_i \tag{2}$$

Remuneración basada en beneficios relativos: $$U_i = (p_i - c)q_i - \beta_i(p_j - c)q_j \tag{3}$$

donde $\gamma_i \in [-1,1]$, $\beta_i \in [0,1]$, $i, j =$ L, H, $i \neq j$,

Función de beneficios de las empresas

$$\begin{aligned} \pi_L &= (p_L - c)q_L \\ \pi_H &= (p_H - c)q_H \end{aligned} \tag{4}$$

Demanda capturada por cada una de las empresas

$$\begin{aligned} q_H &= \frac{p_L - p_H + \delta}{\delta} \\ q_L &= \frac{p_H - p_L}{\delta} \end{aligned} \tag{5}$$

Resolución por inducción hacia atrás de (π_L, π_H)

Esta combinación de esquema de incentivos conlleva que $\gamma_L = 0$ y $\gamma_H = 0$. Por tanto, en este subjuego no es necesario resolver la 2ª y los resultados serán equivalentes a una circunstancia donde no hubiera delegación estratégica.

3ª Etapa:

$$\underset{p_L}{Max}U_L = U_L(p_L, p_H) = p_L q_L - c q_L$$
$$\underset{p_H}{Max}U_H = U_H(p_L, p_H) = p_H q_H - c q_H \qquad (6)$$

Introduciendo (5) en (6), la función objetivo resultante será:

$$\underset{p_L}{Max}U_L = U_L(p_L, p_H) = (p_L - c)(\frac{p_H - p_L}{\delta})$$
$$\underset{p_H}{Max}U_H = U_H(p_L, p_H) = (p_H - c)(\frac{\delta + p_L - p_H}{\delta}) \qquad (7)$$

La condición de primer orden de (7) permite obtener las funciones de mejor respuesta para cada una de las empresas:

$$\frac{\partial U_L(p_L, p_H)}{\partial p_L} = 0 \rightarrow p_L = R_L(p_H) = \frac{c + p_H}{2}$$
$$\frac{\partial U_H(p_L, p_H)}{\partial p_H} = 0 \rightarrow p_H = R_H(p_L) = \frac{c + \delta + p_L}{2} \qquad (8)$$

Las condiciones de segundo orden verifican que las funciones de mejor respuesta maximizan la función de utilidad de los gerentes de cada una de las empresas

$$\frac{\partial^2 U_L(p_L, p_H)}{\partial {p_L}^2} = -\frac{2}{\delta} < 0$$
$$\frac{\partial^2 U_H(p_L, p_H)}{\partial {p_H}^2} = -\frac{2}{\delta} < 0 \qquad (9)$$

La intersección de las FMR define el equilibrio de Nash del subjuego de la 3ª etapa.

$$p_L^* = \frac{1}{3}(3c + \delta)$$
$$p_H^* = \frac{1}{3}(3c + 2\delta) \qquad (10)$$

Sustituyendo (10) en las funciones de demanda y beneficios (5) y (4) respectivamente obtenemos unas las demanda y beneficios óptimos para cada empresa.

$$q_L^* = \frac{1}{3}$$
$$q_H^* = \frac{2}{3} \qquad (11)$$

$$\pi_L^* = \frac{\delta}{9}$$
$$\pi_H^* = \frac{4\delta}{9} \tag{12}$$

Resolución por inducción hacia atrás de $(\pi_L + \gamma_L q_L, \pi_H)$

En esta combinación de esquema de incentivos $\gamma_H = 0$. Con lo cual, en la 2ª etapa solo la empresa de calidad baja tendrá que elegir la remuneración para sus gerentes.

3ª Etapa:

$$\underset{p_L}{Max} U_L = U_L(p_L, p_H, \gamma_L) = p_L q_L - c q_L + \gamma_L q_L$$
$$\underset{p_H}{Max} U_H = U_H(p_L, p_H, \gamma_L) = p_H q_H - c q_H \tag{13}$$

Introduciendo (5) en (13), la función objetivo resultante será:

$$\underset{p_L}{Max} U_L = U_L(p_L, p_H, \gamma_L) = (p_L - c + \gamma_L)(\frac{p_H - p_L}{\delta})$$
$$\underset{p_H}{Max} U_H = U_H(p_L, p_H, \gamma_L) = (p_H - c)(\frac{\delta + p_L - p_H}{\delta}) \tag{14}$$

La condición de primer orden de (14) permite obtener las funciones de mejor respuesta para cada una de las empresas:

$$\frac{\partial U_L(p_L, p_H, \gamma_L)}{\partial p_L} = 0 \rightarrow p_L = R_L(p_H, \gamma_L) = \frac{-\gamma_L + c + p_H}{2}$$
$$\frac{\partial U_H(p_L, p_H, \gamma_L)}{\partial p_H} = 0 \rightarrow p_H = R_H(p_L, \gamma_L) = \frac{c + \delta + p_L}{2} \tag{15}$$

A continuación, se comprueba mediante las condiciones de segundo orden que efectivamente las funciones de mejor respuesta maximizan la función objetivo de los gerentes cada una de las empresas

$$\frac{\partial^2 U_L(p_L, p_H, \gamma_L)}{\partial {p_L}^2} = -\frac{2}{\delta} < 0$$
$$\frac{\partial^2 U_H(p_L, p_H, \gamma_L)}{\partial {p_H}^2} = -\frac{2}{\delta} < 0 \tag{16}$$

La intersección de las FMR define el equilibrio de Nash del subjuego de la 3ª etapa.

$$p_L^*(\gamma_L) = \frac{1}{3}(-2\gamma_L + 3c + \delta)$$
$$p_H^*(\gamma_L) = \frac{1}{3}(3c - \gamma_L + 2\delta) \qquad (17)$$

Sustituyendo (17) en las funciones de demanda y beneficios (5) y (4) respectivamente obtenemos unas nuevas funciones de demanda y beneficios que solo dependerán de γ_L.

$$q_L = q_L(\gamma_L) = \frac{1}{3\delta}\gamma_L + \frac{1}{3}$$
$$q_H = q_H(\gamma_L) = \frac{-1}{3\delta}\gamma_L + \frac{2}{3} \qquad (18)$$

$$\pi_L = \pi_L(\gamma_L) = \frac{1}{9\delta}(-2\gamma_L + \delta)(\gamma_L + \delta)$$
$$\pi_H = \pi_H(\gamma_L, \gamma_H) = \frac{1}{9\delta}(\gamma_L - 2\delta)^2 \qquad (19)$$

2ª Etapa

En la segunda etapa los dueños del capital de la empresa de calidad baja deben de resolver el problema de maximización:

$$\underset{\gamma_L}{Max}\, \pi_L = \pi_L(\gamma_L) = \frac{1}{9\delta}(-2\gamma_L + \delta)(\gamma_L + \delta) \qquad (20)$$

En este caso solo es necesario plantean la condición de primer orden para la empresa de calidad baja y comprobar la existencia de máximo a través de la condición de 2º orden.

En primer lugar, la condición de primer orden de la etapa 2ª será:

$$\frac{\partial \pi_L(\gamma_L, \gamma_H)}{\partial \gamma_L} = 0 \rightarrow \gamma_L = R_L(\gamma_H) = \frac{-\delta}{4} \qquad (21)$$

La condición que garantiza la existencia de máximo en esta 2ª etapa vendrá dada por:

$$\frac{\partial^2 \pi_L(\gamma_L)}{\partial {\gamma_L}^2} = -\frac{4}{9\delta} < 0 \qquad (22)$$

Sustituyendo (22) en las funciones de precios, cantidades y beneficios se obtienen los resultados equilibrio de Nash de la segunda etapa.

$$p_L^* = c + \frac{\delta}{2}$$
$$p_H^* = c + \frac{3\delta}{4} \tag{23}$$

$$q_L^* = \frac{1}{4}$$
$$q_H^* = \frac{3}{4} \tag{24}$$

$$\pi_L^* = \frac{\delta}{8}$$
$$\pi_H^* = \frac{9\delta}{16} \tag{25}$$

Resolución por inducción hacia atrás de $(\pi_L, \pi_H + \gamma_L q_L)$

A diferencia del caso anterior, la restricción ahora es $\gamma_L = 0$, de manera que, ahora en la etapa 2 será la empresa de calidad alta la que tendrá que elegir la remuneración para sus gerentes.

3ª Etapa:

$$\underset{p_L}{Max} U_L = U_L(p_L, p_H, \gamma_H) = p_L q_L - c q_L$$
$$\underset{p_H}{Max} U_H = U_H(p_L, p_H, \gamma_H) = p_H q_H - c q_H + \gamma_H q_H \tag{26}$$

Introduciendo la función de demanda directa (5) en (26) se obtiene:

$$\underset{p_L}{Max} U_L = U_L(p_L, p_H, \gamma_H) = (p_L - c)(\frac{p_H - p_L}{\delta})$$
$$\underset{p_H}{Max} U_H = U_H(p_L, p_H, \gamma_H) = (p_H - c + \gamma_H)(\frac{\delta + p_L - p_H}{\delta}) \tag{27}$$

Igual que en todos los casos anteriores, la condición de primer orden de (27) da como resultado las funciones de mejor respuesta para cada una de las empresas:

$$\frac{\partial U_L(p_L, p_H, \gamma_H)}{\partial p_L} = 0 \rightarrow p_L = R_L(p_H, \gamma_L, \gamma_H) = \frac{c + p_H}{2}$$
$$\frac{\partial U_H(p_L, p_H, \gamma_H)}{\partial p_H} = 0 \rightarrow p_H = R_H(p_L, \gamma_L, \gamma_H) = \frac{-\gamma_H + c + \delta + p_L}{2} \qquad (28)$$

Las condiciones de segundo orden permiten afirmar que efectivamente las funciones de mejor respuesta maximizan la función objetivo de los gerentes.

$$\frac{\partial^2 U_L(p_L, p_H, \gamma_H)}{\partial {p_L}^2} = -\frac{2}{\delta} < 0$$
$$\frac{\partial^2 U_H(p_L, p_H, \gamma_H)}{\partial {p_H}^2} = -\frac{2}{\delta} < 0 \qquad (29)$$

La intersección de las FMR define el equilibrio de Nash del subjuego de la 3ª etapa.

$$p_L^*(\gamma_H) = \frac{1}{3}(-\gamma_H + 3c + \delta)$$
$$p_H^*(\gamma_H) = \frac{1}{3}(-2\gamma_H + 3c + 2\delta) \qquad (30)$$

Sustituyendo los precios (30) en las funciones de demanda y beneficios (5) y (4) respectivamente se obtiene una nueva expresión de las funciones de demanda y beneficios.

$$q_L = q_L(\gamma_H) = \frac{1}{3\delta}(-\gamma_H) + \frac{1}{3}$$
$$q_H = q_H(\gamma_H) = \frac{1}{3\delta}(\gamma_H) + \frac{2}{3} \qquad (31)$$

$$\pi_L = \pi_L(\gamma_H) = \frac{1}{9\delta}(\gamma_H - \delta)^2$$
$$\pi_H = \pi_H(\gamma_H) = \frac{2}{9\delta}(\gamma_H - \delta)(\gamma_H + 2\delta) \qquad (32)$$

2ª Etapa

En la segunda etapa los dueños del capital de la empresa de calidad alta deben de resolver el siguiente problema de maximización:

$$\underset{\gamma_H}{Max}\, \pi_H = \pi_H(\gamma_H) = \frac{2}{9\delta}(\gamma_H - \delta)(\gamma_H + 2\delta) \qquad (33)$$

El procedimiento de resolución es idéntico al caso de $(\pi_L + \gamma_L q_L, \pi_H)$, a excepción de que ahora es la empresa de calidad alta la que tiene que decidir cómo remunera a sus gerentes.

En primer lugar, la condición de primer orden de la etapa 2ª será:

$$\frac{\partial \pi_H(\gamma_H)}{\partial \gamma_H} = 0 \rightarrow \gamma_H = R_H(\gamma_L, \gamma_H) = \frac{-\delta}{2} \qquad (34)$$

La condición de segundo orden en esta 2ª etapa será:

$$\frac{\partial^2 \pi_H(\gamma_L, \gamma_H)}{\partial {\gamma_H}^2} = -\frac{4}{9\delta} < 0 \qquad (35)$$

Sustituyendo (34) en las funciones de precios, cantidades y beneficios se obtienen los resultados equilibrio de Nash de la segunda etapa.

$$\begin{aligned} p_L^* &= c + \frac{\delta}{2} \\ p_H^* &= c + \delta \end{aligned} \qquad (36)$$

$$\begin{aligned} q_L^* &= \frac{1}{2} \\ q_H^* &= \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad (37)$$

$$\begin{aligned} \pi_L^* &= \frac{\delta}{4} \\ \pi_H^* &= \frac{\delta}{2} \end{aligned} \qquad (38)$$