1. Anexo 1

En este anexo se demuestra que para el caso en que ambas empresas remuneran a sus gerentes en base a beneficios relativos ($\Pi_L - \beta_L * \Pi_H, \Pi_H - \beta_H * \Pi_L$), la mejor respuesta de las empresas es fijar $\beta_L = 0$ y $\beta_H = 0$. En el enlace **[enlace github]** se encuentra la demostración para los otros casos en que alguna empresa fija una remuneración para sus gerentes basada en beneficios relativos.

Demostración de que $\beta_L = 0$ y $\beta_H = 0$ en el caso de ($\Pi_L - \beta_L * \Pi_H, \Pi_H - \beta_H * \Pi_L$).

3ª Etapa:

$$\underset{p_L}{Max} U_L = U_L(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H) = (p_L - c)q_L + \beta_L(p_H - c)q_H$$
$$\underset{p_H}{Max} U_H = U_H(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H) = (p_H - c)q_H + \beta_H(p_L - c)q_L \qquad ()$$

Introduciendo (7) en (29), la función objetivo resultante será:

$$\underset{p_L}{Max} U_L = U_L(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H) = (p_L - c)\frac{p_H - p_L}{\delta} + \beta_L(p_H - c)\frac{\delta + p_L - p_H}{\delta}$$
$$\underset{p_H}{Max} U_H = U_H(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H) = (p_H - c)\frac{\delta + p_L - p_H}{\delta} + \beta_H(p_L - c)\frac{p_H - p_L}{\delta} \qquad ()$$

La condición de primer orden de () permite obtener las funciones de mejor respuesta para cada una de las empresas:

$$\frac{\partial U_L(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H)}{\partial p_L} = 0 \rightarrow p_L = FMR_{L3}(p_H, \beta_L, \beta_H)$$
$$\frac{\partial U_H(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H)}{\partial p_H} = 0 \rightarrow p_H = FMR_{H3}(p_L, \beta_L, \beta_H) \qquad ()$$

donde FMR_{i3} representa la función de mejor respuesta de la empresa i en la etapa 3 del juego.

Derivando U_L y U_H respecto de a los precios de sus correspondientes empresas p_L y p_H se obtiene:

$$\frac{\partial U_L(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H)}{\partial p_L} = \frac{1}{\delta}(-2p_L + (1-\beta_L)p_H + (1-\beta_L)c)$$
$$\frac{\partial U_H(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H)}{\partial p_H} = \frac{1}{\delta}(-2p_H + (1-\beta_H)p_L + (1-\beta_H)c + \delta) \qquad ()$$

Igualando () a 0 se obtienen las funciones de mejor respuesta de cada empresa

$$FMR_{L3} = p_L = \frac{1}{2}((1-\beta_L)p_H + (1-\beta_L)c)$$
$$FMR_{H3} = p_H = \frac{1}{2}((1-\beta_H)p_L + (1-\beta_H)c + \delta) \qquad ()$$

Las condiciones de segundo orden son las que garantizan que efectivamente las funciones de mejor respuesta maximizan la función objetivo de los gerentes de cada una de las empresas.

$$\frac{\partial^2 U_L(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H)}{\partial p_L{}^2} = -\frac{2}{\delta} < 0$$
$$\frac{\partial^2 U_H(p_L, p_H, \beta_L, \beta_H)}{\partial p_H{}^2} = -\frac{2}{\delta} < 0 \qquad ()$$

La intersección de las FMR define el equilibrio de Nash del subjuego de la 3ª etapa.

$$p_L^*(\beta_L, \beta_H) = \frac{\delta(1-\beta_L)}{\beta_H + \beta_L - \beta_H\beta_L + 3} + c$$
$$p_H^*(\beta_L, \beta_H) = \frac{2\delta}{\beta_H + \beta_L - \beta_H\beta_L + 3} + c \qquad (35)$$

Seguidamente, se sustituye () en (7) y se obtienen unas nuevas funciones de demanda

$$q_L = q_L(\beta_L, \beta_H) = \frac{1+\beta_L}{\beta_H + \beta_L - \beta_H\beta_L + 3}$$
$$q_H = q_H(\beta_L, \beta_H) = \frac{\beta_H(1-\beta_L)+2}{\beta_H + \beta_L - \beta_H\beta_L + 3} \qquad (36)$$

De igual forma, se sustituye (35) y (36) en (4) y se obtienen unas nuevas funciones de beneficios que dependen exclusivamente de los parámetros β_L y β_H.

$$\pi_L = \pi_L(\beta_L,\beta_H) = \frac{\delta(1-\beta_L{}^2)}{(\beta_H+\beta_L-\beta_H\beta_L+3)^2}$$
$$\pi_H = \pi_H(\beta_L,\beta_H) = \frac{2\delta(\beta_H-\beta_H\beta_L+2)}{(\beta_H+\beta_L-\beta_H\beta_L+3)^2} \qquad ()$$

2ª Etapa

$$\max_{\beta_L} \pi_L = \pi_L(\beta_L,\beta_H) = \frac{\delta(1-\beta_L{}^2)}{(\beta_H+\beta_L-\beta_H\beta_L+3)^2}$$
$$sa: \beta_L \in [0,1]$$
$$\max_{\beta_H} \pi_H = \pi_H(\beta_L,\beta_H) = \frac{2\delta(\beta_H-\beta_H\beta_L+2)}{(\beta_H+\beta_L-\beta_H\beta_L+3)^2} \qquad ()$$
$$sa: \beta_H \in [0,1]$$

Para demostrar que el resultado de optimizar este problema es equivalente al que proporciona el sistema de incentivos (π_L,π_H) se necesita demostrar que $\beta_L^* = 0 = \beta_H^*$. Esto sucederá siempre y cuando el beneficio de las empresas sea mayor cuanto menor sea el valor de β_i, que en su valor extremo será 0.

Esto se cumplirá siempre y cuando:

$$\frac{\partial \pi_L(\beta_L,\beta_H)}{\partial \beta_L} < 0 \forall \beta_L \in [0,1], \beta_H \in [0,1]$$
$$\frac{\partial \pi_H(\beta_L,\beta_H)}{\partial \beta_H} < 0 \forall \beta_L \in [0,1], \beta_H \in [0,1] \qquad ()$$

Derivando π_L y π_H respecto a sus correspondientes β_i se obtiene:

$$\frac{\partial \pi_L(\beta_L,\beta_H)}{\partial \beta_L} = -\frac{2\delta\left(\beta_L(\beta_H+3)+(1-\beta_L)\right)}{(\beta_H+\beta_L-\beta_H\beta_L+3)^3} < 0$$
$$\frac{\partial \pi_H(\beta_L,\beta_H)}{\partial \beta_H} = -\frac{2\delta(1+\beta_H)(\beta_L-1)^2}{(\beta_H+\beta_L-\beta_H\beta_L+3)^3} < 0 \qquad \forall\ \beta_L \in [0,1], \beta_H \in [0,1] \quad ()$$

Por tanto, se cumple que $\beta_L^* = 0 = \beta_H^*$ será el resultado óptimo y los valores resultantes de beneficios, demanda y precios serán equivalentes al sistema (π_L,π_H).